Třetí cvičení ze Speciální relativity

1. Ukažte, že:

   a) Norma čtyřrychlosti u^μ je invariantní vzhledem k Lorentzovým transformacím Λ^ν_μ.

   b) Tensor elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$ je invariantní vůči kalibrační transformaci $A_\mu = A'_\mu + \partial_\mu f$, kde f je libovolná diferencovatelná funkce se spojitými parciálními derivacemi.

   Řešení:

   a) Nejprve připomeňme, že Lorentzovy transformace zachovávají metriku, tj. platí

   $$\Lambda^\mu_\nu g_{\mu\rho} \Lambda^\rho_\sigma = g_{\nu\sigma}.$$

   Lorentzova transformace 4-rychlosti u^μ je

   $$u'^\nu = \Lambda^\nu_\mu u^\mu.$$

   Chceme ukázat, že

   $$||u'||^2 = ||u||^2.$$

   Počítejme

   $$||u'||^2 = u'^\mu u'_\mu = u'^\mu g_{\mu\nu} u'^\nu = \Lambda^\mu_\rho u^\rho g_{\mu\nu} \Lambda^\nu_\sigma u^\sigma = u^\rho g_{\rho\sigma} u^\sigma = u^\rho u_\rho = ||u||^2.$$

   Ve výpočtu jsme využili výše zmíněné poznatky. Podobně by se dalo ukázat, že norma libovolného 4-vektoru je invariantní vůči lorentzovským transformacím.

   b) Tensor elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$ je definován jako

   $$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

   Chceme ukázat, že $F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$. Proto počítejme

   $$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu \left(A'_\nu + \partial_\nu f\right) - \partial_\nu \left(A'_\mu + \partial_\mu f\right) = \\ &= \partial_\mu A'_\nu + \partial_\mu \partial_\nu f - \partial_\nu A'_\mu - \partial_\nu \partial_\mu f = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu = F'_{\mu\nu}, \end{aligned}$$

   kde jsme využili, že nezávisí na pořadí derivování funkce f.

2. Ukažte, že platí:

   $$\begin{aligned} &\text{a) } u^\mu p_\mu = mc, \\ &\text{b) } \partial_\mu x_\nu = g_{\mu\nu}, \\ &\text{c) } u^\mu \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} = 0, \\ &\text{d) } P^{\mu\nu} u_\mu = 0, \\ &\text{e) } P^{\mu\nu} P_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho - u^\mu u_\rho = P^\mu_\rho, \end{aligned}$$

   kde u^μ je 4-rychlost, p^μ je 4-hybnost, $x^\mu = (ct, x, y, z)$, $\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{c\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$, $g_{\mu\nu}$ je Minkowskiho metrika a

   $$P^{\mu\nu} := g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu.$$

Řešení: Nejprve spočtěme normu 4-rychlosti $||u||^2 = u_\mu u^\mu$ (připomeňme, že pro 4-rychlost s dolním indexem musíme snížit index pomocí metriky, proto bude prostorová část záporná, tj. $u_\mu = \gamma\left(1, -\frac{v_i}{c}\right)$):

$$u_\mu u^\mu = \left(\gamma, -\gamma\frac{v_i}{c}\right) \cdot \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma\frac{v^i}{c} \end{pmatrix} = \gamma^2\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = \frac{\gamma^2}{\gamma^2} = 1.$$

a) Použijeme pouze definici 4-hybnosti a poznatku výše:

$$u^\mu p_\mu = u^\mu mc u_\mu = mc \cdot 1 = mc.$$

b) 4-vektor x_ν má index dole, proto má zápornou prostorovou složku, tj. $x_\nu = (ct, -x, -y, -z)$. Dále počítejme

$$\partial_\mu x_\nu = \begin{pmatrix} \frac{c\partial t}{c\partial t} & -\frac{\partial x}{c\partial t} & -\frac{\partial y}{c\partial t} & -\frac{\partial z}{c\partial t} \\ \frac{c\partial t}{\partial x} & -\frac{\partial x}{\partial x} & -\frac{\partial y}{\partial x} & -\frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{c\partial t}{\partial y} & -\frac{\partial x}{\partial y} & -\frac{\partial y}{\partial y} & -\frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{c\partial t}{\partial z} & -\frac{\partial x}{\partial z} & -\frac{\partial y}{\partial z} & -\frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = g_{\mu\nu}.$$

c) Vyjdeme z poznatku, že norma 4-rychlosti je 1, a zderivujeme ho:

$$\begin{aligned} u_\mu u^\mu &= 1, \quad \Big/ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}, \\ \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} u^\mu + u_\mu \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} u^\mu + u^\nu g_{\nu\mu} \frac{\mathrm{d}u^\mu}{\mathrm{d}s} &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} u^\mu + u^\nu \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}(g_{\nu\mu} u^\mu) &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} u^\mu + u^\nu \frac{\mathrm{d}u_\nu}{\mathrm{d}s} &= 0, \\ 2\frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} u^\mu &= 0, \\ \frac{\mathrm{d}u_\mu}{\mathrm{d}s} u^\mu &= 0. \end{aligned}$$

Metriku $g_{\nu\mu}$ můžeme dát za derivaci, jelikož je konstantní, obsahuje pouze 0,1 a -1.

d) Počítejme:

$$P^{\mu\nu} u_\mu = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) u_\mu = g^{\mu\nu} u_\mu - u^\mu u^\nu u_\mu = u^\nu - 1 \cdot u^\nu = 0.$$

e) Opět je to jen jednoduchý výpočet:

$$\begin{aligned} P^{\mu\nu} P_{\nu\rho} &= (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu)(g_{\nu\rho} - u_\nu u_\rho) = g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} - u^\mu u^\nu g_{\nu\rho} - g^{\mu\nu} u_\nu u_\rho + u^\mu u^\nu u_\nu u_\rho = \\ &= \delta^\mu_\rho - u^\mu u_\rho - u^\mu u_\rho + u^\mu \cdot 1 \cdot u_\rho = \delta^\mu_\rho - u^\mu u_\rho. \end{aligned}$$

Toto souhlasí s výrazem P^μ_ρ, který vznikne snížením jednoho indexu $P^{\mu\nu}$ pomocí metriky

$$P^\mu_\rho = P^{\mu\nu} g_{\nu\rho} = (g^{\mu\nu} - u^\mu u^\nu) g_{\nu\rho} = g^{\mu\nu} g_{\nu\rho} - u^\mu u^\nu g_{\nu\rho} = \delta^\mu_\rho - u^\mu u_\rho.$$