Páté cvičení ze Speciální relativity

1. Uvažte vektory elektrické intenzity a magnetické indukce $\vec{E}$ a $\vec{B}$, které svírají libovolný úhel kromě pravého. Najděte takovou rychlost, aby po Lorentzově boostu byly vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ rovnoběžné.

   Řešení: Dva nerovnoběžné vektory vždy zadávají rovinu. Bez újmy na obecnosti řekněme, že vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ zadávají rovinu yz. Předpokládejme je tedy ve tvaru

$$\vec{E} = (0, E_y, E_z)\,,$$
$$\vec{B} = (0, B_y, B_z)\,.$$

   Jak již bylo řečeno, vektory nejsou rovnoběžné. Rovnoběžnost lze jednoduše ověřit pomocí vektorového součinu. Musí tedy platit

$$\vec{E} \times \vec{B} \neq 0.$$

   Našim cílem je zjistit rychlost v Lorentzova boostu Λ^{ν}_{μ}, který změní vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ na vektory

$$\vec{E}' = \left(0, E'_y, E'_z\right)\,,$$
$$\vec{B}' = \left(0, B'_y, B'_z\right)\,,$$

   pro které platí

$$\vec{E}' \times \vec{B}' = 0.$$

   Boost budeme volit ve směru osy x. Jak uvidíme, touto volbou dostaneme to, že x-ová složka obou vektorů zůstane nulová. Lorentzův boost je tedy dán maticí

$$\Lambda^{\nu}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ se přímo netransformují pomocí Lorentzova boostu, ale transformují se v rámci tensoru elektromagnetického pole $F_{\mu\nu}$. Proto musíme spočítat transformaci tohoto tensoru do nové vztažné soustavy. To je dáno pomocí vztahu

$$F'_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\rho} F_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\sigma}.$$

   Jelikož jsou matice Lorentzových boostů symetrické, tento vztah můžeme přepsat maticově jako

$$F'_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{E_y}{c} & \frac{E_z}{c} \\ 0 & 0 & -B_z & B_y \\ -\frac{E_y}{c} & B_z & 0 & 0 \\ -\frac{E_z}{c} & -B_y & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma & 0 & 0 \\ \frac{v}{c} & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{\gamma}{c}\left(E_y - vB_z\right) & \frac{\gamma}{c}\left(E_z + B_y v\right) \\ 0 & 0 & \gamma\left(\frac{vE_y}{c^2} - B_z\right) & \gamma\left(\frac{vE_z}{c^2} + B_y\right) \\ \frac{\gamma}{c}\left(vB_z - E_y\right) & \gamma\left(B_z - \frac{vE_y}{c^2}\right) & 0 & 0 \\ -\frac{\gamma}{c}\left(E_z + vB_y\right) & -\gamma\left(\frac{vE_z}{c^2} + B_y\right) & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Z této matice můžeme vyčíst, že

$$\vec{E}' = (0, \gamma (E_y - vB_z), \gamma (E_z + vB_y)),$$
$$\vec{B}' = \left(0, \gamma\left(\frac{vE_z}{c^2} + B_y\right), \gamma\left(B_z - \frac{vE_y}{c^2}\right),\right).$$

Chceme, aby vektory $\vec{E}'$ a $\vec{B}'$ byly rovnoběžné, proto má platit

$$\vec{E}' \times \vec{B}' = \left(E'_y B'_z - E'_z B'_y, 0, 0\right) = 0.$$

Rovnost v první složce nám dá kvadratickou rovnici pro rychlost v, kterou vyřešíme. Počítejme

$$\gamma^2 (E_y - vB_z)\left(B_z - \frac{vE_y}{c^2}\right) - \gamma^2 (E_z + vB_y)\left(\frac{vE_z}{c^2} + B_y\right) = 0,$$
$$E_y B_z - \frac{vE_y^2}{c^2} - vB_z^2 + \frac{v^2 B_z E_y}{c^2} - E_z B_y - \frac{vE_z^2}{c^2} - \frac{v^2 B_y E_z}{c^2} - vB_y^2 = 0,$$
$$(E_y B_z - E_z B_y) + \frac{v^2}{c^2}(E_y B_z - B_y E_z) - v\left(\frac{E_y^2}{c^2} + B_z^2 + \frac{E_z^2}{c^2} + B_y^2\right) = 0.$$

Nejprve si všimněme, že v našem případě

$$E_y B_z - E_z B_y = |\vec{E} \times \vec{B}|.$$

Dále si naši rovnici přepíšeme pomocí Poytingova vektoru

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}$$

a hustoty energie

$$W = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right).$$

Ještě při úpravách využijeme toho, že rychlost světla se dá zapsat pomocí permitivity a permeability jako

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}.$$

Tím naše rovnice přejde na tvar

$$\mu_0 |\vec{S}|\left(1 + \frac{v^2}{c^2}\right) - 2v\mu_0\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right) = 0,$$
$$v^2 - \frac{2vWc^2}{|\vec{S}|} + c^2 = 0.$$

Řešení této kvadratické rovnice je již lehké

$$v = \frac{Wc^2}{|\vec{S}|} \pm \sqrt{\frac{W^2 c^4}{|\vec{S}|^2} - c^2}.$$

Tudíž vždy dokážeme najít takovou rychlost, aby vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$, které nejsou kolmé, byly v nové soustavě rovnoběžné. Kolmost se musela vyloučit z toho důvodu, že skalární součin $\vec{E} \cdot \vec{B}$ je invariant. Tudíž pokud jsou v nějaké vztažné soustavě vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ na sebe kolmé, jsou na sobě kolmé i v libovolné další vztažné soustavě. Každopádně díky výsledku tohoto příkladu stačí pohyb částic v konstantním elektromagnetickém poli vyřešit pouze pro dva případy, pokud jsou vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ kolmé, nebo rovnoběžné. Všechny ostatní případy se dostanou nějakou Lorentzovou transformací výše spočítanou rychlostí.

2. Ukažte, že výraz

$$W^2 - \frac{|\vec{S}|^2}{c^2} \tag{1}$$

je invariantní vůči lorentzovským transformacím. W je hustota energie

$$W = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right),$$

a $\vec{S}$ je Poytingův vektor

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B}.$$

Řešení: Lorentzovská invariance znamená, že se při transformaci z nečárkované soustavy K do čárkované soustavy K' pomocí Lorentzovy transformace Λ^μ_ν uvažovaný výraz nezmění. Tj. mělo by platit

$$W'^2 - \frac{|\vec{S}'|^2}{c^2} = W^2 - \frac{|\vec{S}|^2}{c^2}.$$

Bohužel, veličiny W a $\vec{S}$ dohromady netvoří 4-vektor. Proto musíme invarianci ověřit oklikou. Pokusíme se výraz v zadání napsat pomocí invariantů elektromagnetického pole

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right), \quad F_{\mu\nu}(\star F^{\mu\nu}) = 4\frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}. \tag{2}$$

To, že jsou to invarianty, zjistíme velmi jednoduše, nemají totiž žádný volný lorentzovský index. Dále budeme používat vztah

$$c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0},$$

pomocí kterého přepíšeme hustotu energie na

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right).$$

Začněme však s výpočtem, do (1) dosadíme definice W a $\vec{S}$ a počítejme

$$\begin{aligned}
W^2 - \frac{|\vec{S}|^2}{c^2} &= \frac{1}{4\mu_0^2}\left(\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 + \vec{B}^2\right)^2 - \frac{1}{c^2\mu_0^2}\epsilon^i{}_{jk}E^jB^k\epsilon_{ilm}E^lB^m = \\
&= \frac{1}{4\mu_0^2}\left(\frac{1}{c^4}\vec{E}^4 + \frac{2}{c^2}\vec{E}^2\vec{B}^2 + \vec{B}^4\right) - \frac{1}{c^2\mu_0^2}E^jB^kE^lB^m\left(\delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}\right) = \\
&= \frac{1}{4\mu_0^2}\left(\frac{1}{c^4}\vec{E}^4 + \vec{B}^4\right) + \frac{1}{2c^2\mu_0^2}\vec{E}^2\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2\mu_0^2}\left(E^jB^kE_jB_k - E^jB^kE_kB_j\right) = \\
&= \frac{1}{4\mu_0^2}\left(\frac{1}{c^4}\vec{E}^4 + \vec{B}^4\right) + \frac{1}{2c^2\mu_0^2}\vec{E}^2\vec{B}^2 - \frac{1}{c^2\mu_0^2}\left(\vec{E}^2\vec{B}^2 - \left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2\right) = \\
&= \frac{1}{4\mu_0^2}\left(\frac{1}{c^4}\vec{E}^4 + \vec{B}^4\right) - \frac{1}{2c^2\mu_0^2}\vec{E}^2\vec{B}^2 + \frac{1}{c^2\mu_0^2}\left(\vec{E}\cdot\vec{B}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{4\mu_0^2}\left(\frac{1}{c^4}\vec{E}^4 - \frac{2}{c^2}\vec{E}^2\vec{B}^2 + \vec{B}^4\right) + \frac{1}{16\mu_0^2}\left(\frac{4\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{4\mu_0^2}\left(\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)^2 + \frac{1}{16\mu_0^2}\left(\frac{4\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}\right)^2 = \\
&= \frac{1}{16\mu_0^2}\left(\left[-2\left(\frac{1}{c^2}\vec{E}^2 - \vec{B}^2\right)\right]^2 + \left(\frac{4\vec{E}\cdot\vec{B}}{c}\right)^2\right).
\end{aligned}$$

V posledních krocích jsme provedli „umělé“ úpravy, abychom získali explicitně invarianty (2). Zjistili jsme tedy, že

$$W^2 - \frac{|\vec{S}|^2}{c^2} = \frac{1}{16\mu_0^2}\left[(F_{\mu\nu}(\star F^{\mu\nu}))^2 + (F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^2\right],$$

což je součet invariantů elektromagnetického pole přenásobený konstantou, tudíž je to také invariant.

3. Vysvětlete, proč kontrakci ϵ-tensorů můžeme počítat pomocí vzorce

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\lambda\phi\psi} = -\begin{vmatrix} \delta^\nu_\lambda & \delta^\rho_\lambda & \delta^\sigma_\lambda \\ \delta^\nu_\phi & \delta^\rho_\phi & \delta^\sigma_\phi \\ \delta^\nu_\psi & \delta^\rho_\psi & \delta^\sigma_\psi \end{vmatrix}.$$

Dále pomocí tohoto vzorce spočtěte $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{\mu\nu\lambda\varphi}$, $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{\mu\nu\sigma\lambda}$ a $\epsilon^{\mu\nu\sigma\rho}\epsilon_{\mu\nu\sigma\rho}$.

Řešení: Epsilon tensor se čtyřmi indexy je prvek $\Lambda^4\mathbb{R}^{1,3}$. Opět je to úplně antisymetrický tensor, tzn. prohozením dvou indexů se změní znaménko. Rozdíl je ale mezi tensory s horními a dolními indexy. Pokud zadefinujeme

$$\epsilon^{0123} = 1,$$

pak platí

$$\epsilon_0{}^{123} = 1, \text{ ale } \epsilon^{01}{}_2{}^3 = -1,$$

jelikož při snižování/zvyšování prostorových indexů se mění znaménko, protože v metrice je na příslušném místě záporná jednička. Můžeme to ukázat na následujícím příkladu

$$\begin{aligned}\epsilon^{01}{}_{2}{}^{3} &= \epsilon^{01\mu 3} g_{\mu 2} = \epsilon^{0103} g_{02} + \epsilon^{0113} g_{12} + \epsilon^{0123} g_{22} + \epsilon^{0133} g_{32} = \\ &= 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 0 = -1.\end{aligned}$$

Pojďme teď vysvětlit počítání kontrakce epsilon tensorů pomocí determinantu. Nejprve znamínko před determinantem. To je dáno podobným důvodem, jako v předchozím případě. Je to kvůli mínusům v metrice, přesněji kvůli tomu, že determinant metriky $g_{\mu\nu}$ je mínus jedna. Dál pomocí determinantu umíme zajistit, aby byly ve výrazech vždy různé indexy, jelikož determinant vybírá z matice z každého sloupce a řádku právě jeden prvek. Nakonec má determinant přesně tu antisymetrickou vlastnost, kterou potřebujeme. Pokud například v determinantu v zadání prohodíme první a druhý sloupec, odpovídá to prohození indexů $\nu \leftrightarrow \rho$ v prvním ϵ-tensoru. Podobně to platí pro řádky. Nastává čas na odvození vzorců pro kontrakce více indexů. Při odvozování budeme používat pouze vlastnosti Kroneckerových delt. První vzorec odvodíme následujícím způsobem

$$\begin{aligned}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\lambda\phi} &= -\begin{vmatrix} \delta^{\nu}_{\nu} & \delta^{\nu}_{\lambda} & \delta^{\nu}_{\phi} \\ \delta^{\rho}_{\nu} & \delta^{\rho}_{\lambda} & \delta^{\rho}_{\phi} \\ \delta^{\sigma}_{\nu} & \delta^{\sigma}_{\lambda} & \delta^{\sigma}_{\phi} \end{vmatrix} = \\ &= -\left[\delta^{\nu}_{\nu}\delta^{\rho}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\phi} + \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\phi}\delta^{\sigma}_{\nu} + \delta^{\nu}_{\phi}\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\lambda} - \delta^{\nu}_{\phi}\delta^{\rho}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\nu} - \delta^{\nu}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\nu}\delta^{\sigma}_{\phi} - \delta^{\nu}_{\nu}\delta^{\rho}_{\phi}\delta^{\sigma}_{\lambda}\right] = \\ &= -\left[4\delta^{\rho}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\phi} + \delta^{\sigma}_{\lambda}\delta^{\rho}_{\phi} + \delta^{\rho}_{\phi}\delta^{\sigma}_{\lambda} - \delta^{\sigma}_{\phi}\delta^{\rho}_{\lambda} - \delta^{\rho}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\phi} - 4\delta^{\rho}_{\phi}\delta^{\sigma}_{\lambda}\right] = \\ &= -2\left[\delta^{\rho}_{\lambda}\delta^{\sigma}_{\phi} - \delta^{\rho}_{\phi}\delta^{\sigma}_{\lambda}\right].\end{aligned}$$

Zbývající dva vzorce už získáme jednoduše z právě odvozené identity

$$\begin{aligned}&\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\phi} = -2\left[\delta^{\rho}_{\rho}\delta^{\sigma}_{\phi} - \delta^{\rho}_{\phi}\delta^{\sigma}_{\rho}\right] = -2\left[4\delta^{\sigma}_{\phi} - \delta^{\sigma}_{\phi}\right] = -6\delta^{\sigma}_{\phi}, \\ &\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -24.\end{aligned}$$