Třetí cvičení z Elektrodynamiky

1. Pomocí indexové notace spočtěte rotaci následujícího vektorového pole

$$\vec{F} = -\alpha \frac{(x, y, 0)}{x^2 + y^2},$$

kde $\alpha \in \mathbb{R}$.

Řešení: Nejprve opět přepíšeme zadání do indexové notace

$$F^i = -\alpha \frac{x^i}{x^m x_m},$$

přičemž můžeme mít na paměti, že $x^3 = z = 0$ (což ale výsledek neovlivní). Počítejme rotaci

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)^i = -\alpha \epsilon^{ij}{}_k \partial_j \left(\frac{x^k}{x^m x_m}\right) = -\alpha \epsilon^{ij}{}_k \frac{\partial_j x^k}{x^m x_m} + \alpha \epsilon^{ij}{}_k \frac{x^k}{(x^m x_m)^2} \left(x_l \partial_j x^l + x^l \partial_j x_l\right).$$

Jediným novým objektem je zde $\partial_j x^k$. Jedná se však jen parciální derivace souřadnic x, y, z

$$\partial_j x^k = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial y} & \frac{\partial y}{\partial y} & \frac{\partial z}{\partial y} \\ \frac{\partial x}{\partial z} & \frac{\partial y}{\partial z} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \delta_j^k.$$

Využijme tohoto a počítejme dále

$$\left(\operatorname{rot} \vec{F}\right)^i = -\alpha \epsilon^{ij}{}_k \frac{\delta_j^k}{x^m x_m} + \alpha \epsilon^{ij}{}_k \frac{x^k}{(x^m x_m)^2} 2\delta_j^l x_l = -\alpha \epsilon^{ik}{}_k \frac{1}{x^m x_m} + \alpha \epsilon^{ijk} \frac{2 x_k x_j}{(x^m x_m)^2} = 0.$$

První výraz je nula, jelikož epsilon tensor obsahuje dva stejné indexy. Druhý výraz je nula, jelikož $x_k x_j$ je symetrické v indexech a epsilon tensor antisymetrický.

2. Pro vektorové pole z předchozího příkladu spočtěte dráhový integrál

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x},$$

kde γ je

a) obdélník v rovině (x, y), který neobsahuje počátek,

b) obdélník v rovině (x, y), který obsahuje počátek,

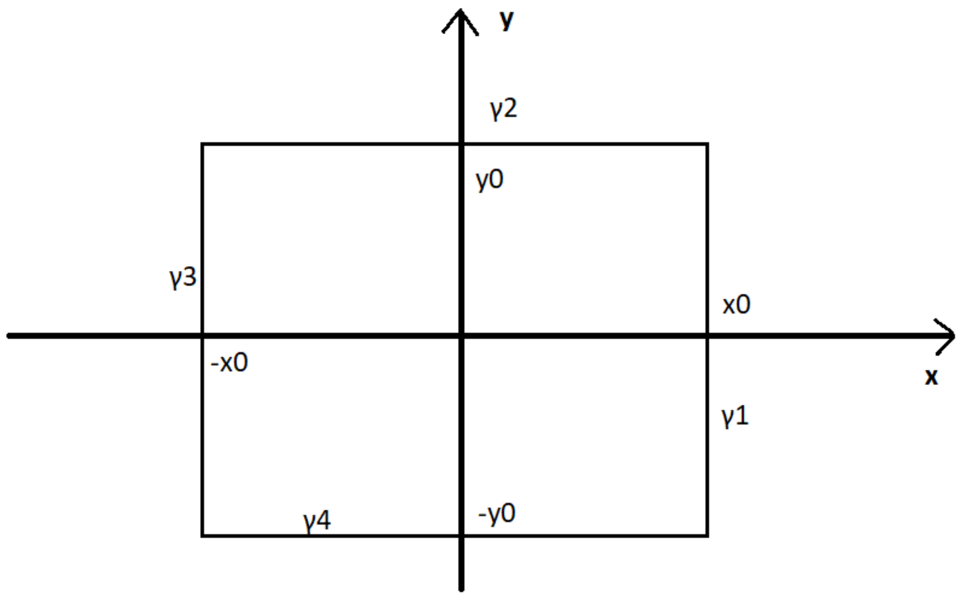
c) kružnice v rovině (x, y) kolem počátku.

Kdy můžeme k výpočtu použít Stokesovu větu?

Řešení: Vektorové pole $\vec{F}$ není definované v počátku, proto Stokesovu větu můžeme použít jen v případě, kdy křivka nebude obepínat počátek.

a) Jak bylo řečeno, v tomto případě můžeme použít Stokesovu větu, proto jednoduše

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_S \operatorname{rot} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0.$$



Obrázek 1: Křivka, po které integrujeme v příkladě 7b).

b) Nejprve musíme křivku parametrizovat. Zvolíme značení, které je na Obrázku 1. Parametrizace je následující

$$\begin{aligned} \gamma_1 : x &= x_0, & \gamma_3 : x &= -x_0, \\ y &= t, \quad t \in [-y_0, y_0], & y &= t, \quad t \in [y_0, -y_0], \\ \gamma_2 : x &= t, & \gamma_4 : x &= t, \\ y &= y_0, \quad t \in [x_0, -x_0], & y &= -y_0, \quad t \in [-x_0, x_0]. \end{aligned}$$

Teď už jen zbývá spočítat následující integrál

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_2} + \int_{\gamma_3} + \int_{\gamma_4} = \\ &= -\alpha \Bigg[\int_{-y_0}^{y_0} \frac{1}{x_0^2 + t^2} (x_0, t) \cdot (0,1)\,\mathrm{d}t + \int_{x_0}^{-x_0} \frac{1}{t^2 + y_0^2} (t, y_0) \cdot (1,0)\,\mathrm{d}t + \\ &\quad + \int_{y_0}^{-y_0} \frac{1}{x_0^2 + t^2} (-x_0, t) \cdot (0,1)\,\mathrm{d}t + \int_{-x_0}^{x_0} \frac{1}{t^2 + y_0^2} (t, -y_0) \cdot (1,0)\,\mathrm{d}t \Bigg] = \\ &= 0. \end{aligned}$$

c) Budeme počítat podobně jak v b), jen s kružnicí γ, kterou parametrizujeme

$$\begin{aligned} \gamma :\ x &= r\cos\varphi, \\ y &= r\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Počítejme

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} = \int_0^{2\pi} \frac{-\alpha}{r^2} (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \cdot (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)\,\mathrm{d}\varphi = 0.$$

3. Spočtěte rotaci vektorového pole

$$\vec{F} = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

a dráhový integrál

$$\oint_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x},$$

kde γ je kružnice v rovině (x, y) kolem počátku. Můžeme použít Stokesovu větu?

Řešení: Nejprve spočítáme rotaci

$$\operatorname{rot} \vec{F} = (\partial_y F_z - \partial_z F_y, \partial_z F_x - \partial_x F_z, \partial_x F_y - \partial_y F_x) = \left(0, 0, \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2x^2 + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2}\right) = \vec{0}.$$

Rotace vektorového pole je nula, ale Stokesovu větu použít nemůžeme, jelikož v bodě 0 není vektorové pole definováno. Proto musíme dráhový integrál spočítat z definice. Kružnici parametrizujeme následovně:

$$\begin{aligned} \gamma: \ & x = r\cos\varphi, \\ & y = r\sin\varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Dráhový integrál poté je

$$\begin{aligned} \oint_\gamma \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{r^2} (-r\sin\varphi, r\cos\varphi) \cdot (-r\sin\varphi, r\cos\varphi)\ \mathrm{d}\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\ \mathrm{d}\varphi = \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

Morální poučení z tohoto příkladu je, že i když rotace vektorového pole je nula, nemusí být nutně nula i dráhový integrál (pokud křivka obepíná nějaký bod, ve kterém není vektorové pole definované).

4. Pro vektorové pole $\vec{F} = (ax, by, cz)$, kde $a, b, c \in \mathbb{R}$, a kouli

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, R > 0\},$$

ověřte Gaußovu větu, tj. ukažte, že levá a pravá strana následující rovnosti je stejná

$$\oint_{\partial B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_B \nabla \cdot \vec{F}\,\mathrm{d}V.$$

Řešení: Začněme pravou stranou, protože je jednoduší

$$\int_B \nabla \cdot \vec{F}\,\mathrm{d}V = \int_B (a + b + c)\ \mathrm{d}V = (a + b + c)\,\frac{4}{3}R^3\pi.$$

Pro levou stranu musíme nejprve parametrizovat sféru, což lze následovně

$$\begin{aligned} \partial B: \ & x = R\cos\varphi\sin\theta, \quad \theta \in [0, \pi), \\ & y = R\sin\varphi\sin\theta, \quad \varphi \in [0, 2\pi), \\ & z = R\cos\theta. \end{aligned}$$

Levá strana se z definice počítá následovně

$$\oint_{\partial B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_{\partial B} \vec{F}(\vec{x}(\theta, \varphi)) \cdot (\partial_\theta \vec{x} \times \partial_\varphi \vec{x})\, \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}\theta,$$

kde

$$\begin{aligned} \partial_\theta \vec{x} &= (R\cos\varphi\cos\theta, R\sin\varphi\cos\theta, -R\sin\theta)\,, \\ \partial_\varphi \vec{x} &= (-R\sin\varphi\sin\theta, R\cos\varphi\sin\theta, 0)\,. \end{aligned}$$

Vektorový součin těchto vektorů je

$$\partial_\theta \vec{x} \times \partial_\varphi \vec{x} = R^2 \sin\theta\, (\sin\theta\cos\varphi, \sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\,.$$

Dosaďme vše do levé strany (LHS) a počítejme

$$\begin{aligned} \mathrm{LHS} &= R^3 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a\cos\varphi\sin\theta, b\sin\varphi\sin\theta, c\cos\theta) \cdot \left(\cos\varphi\sin^2\theta, \sin\varphi\sin^2\theta, \cos\theta\sin\theta\right)\, \mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = \\ &= R^3 \left[a \int_0^\pi \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\, \mathrm{d}\varphi + b \int_0^\pi \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \sin^2\varphi\, \mathrm{d}\varphi + c \int_0^\pi \cos^2\theta \sin\theta\, \mathrm{d}\theta \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \right]. \end{aligned}$$

Pro výsledek potřebujeme následující integrály přes θ

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\, \mathrm{d}\theta &= \left| \begin{array}{cc} \cos\theta = a & 0 \to 1 \\ -\sin\theta \mathrm{d}\theta = \mathrm{d}a & \pi \to -1 \end{array} \right| = -\int_1^{-1} a^2\, \mathrm{d}a = \left[\frac{a^3}{3}\right]_{-1}^1 = \frac{2}{3}, \\ \int_0^\pi \sin^3\theta\, \mathrm{d}\theta &= \int_0^\pi \sin\theta\, \mathrm{d}\theta - \int_0^\pi \cos^2\theta\sin\theta\, \mathrm{d}\theta = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Pro integrály přes φ stačí použít následující identity

$$\sin^2\varphi = \frac{1-\cos 2\varphi}{2}, \qquad \cos^2\varphi = \frac{1+\cos 2\varphi}{2},$$

a uvědomit si, že integruje přes periodu periodické funkce. Celkem máme

$$\mathrm{LHS} = R^3 \left[a\frac{4}{3}\pi + b\frac{4}{3}\pi + c\frac{2}{3}\cdot 2\pi \right] = \frac{4}{3}\pi R^3\, (a+b+c)\,.$$

Vidíme, že se výsledek opravdu rovná pravé straně.

5. (†) Dokažte následující vlastnosti delta funkce:

a) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \delta(x)\, \mathrm{d}x = 1,$

b) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} x\delta(x)\, \mathrm{d}x = 0,$

c) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \delta(x-y)\delta(y-z)\, \mathrm{d}y = \delta(x-z),$

d) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \delta(\alpha x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{|\alpha|},$ kde $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$,

e) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(g(x))\, \mathrm{d}x = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|},$ kde f, g jsou funkce a x_i splňují $g(x_i) = 0$.

Řešení: Celé řešení bude hlavně vycházet z definující vlastnosti delta funkce

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = f(x_0), \tag{1}$$

která podtrhuje podobnost s Kroneckerovou deltou. Tato identita lze totiž číst jako „za x dej x_0 a smaž integraci". Ale pozor, bod x_0 musí být v intervalu, přes který se integruje, jinak je výsledek nula.

a) Zde je

$$f(x) = 1, \quad x_0 = 0,$$

tudíž zadání můžeme přepsat jako

$$\int_{\mathbb{R}} 1 \cdot \delta(x-0)\,\mathrm{d}x.$$

Odtud je již zřejmé, jak využit definující vlastnost (1). Máme dosadit do konstantní funkce argument 0, ale jelikož je funkce konstantní (a argument patří do intervalu, přes který se integruje), je výsledek 1. Ale kdyby bod 0 nepatřil do intervalu, přes který integrujeme, pak by byl výsledek nula, například

$$\int_5^\infty \delta(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

b) Postupujeme stejně jako v případě a),

$$f(x) = x, \quad x_0 = 0,$$

tudíž funkci x máme vyčíslit v nule, což dá výsledek nula.

c) Tato vlastnost je opět analogií k vlastnosti Kroneckerova delta

$$\sum_{j=1}^{n} \delta^i_j \delta^j_k = \delta^i_k.$$

Při důkazu opět využijeme (1). Integrujeme přes y, proto

$$f(y) = \delta(x-y), \quad y_0 = z.$$

Zde se tedy k delta funkci chováme jako ke funkci, což víme, že není pravda. Každopádně použijeme definici, která říká „za y dej z a smaž integraci", což dává výsledek.

d) V tomto důkazu poprvé uvidíme, že integrace delta funkce souvisí s mírou. Začneme jednoduše pomocí substituce v integrálu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\alpha x)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ccccc} \alpha x = y & \text{pro } \alpha > 0: & \infty \to \infty & \text{pro } \alpha < 0: & \infty \to -\infty \\ \alpha \mathrm{d}x = \mathrm{d}y & & -\infty \to -\infty & & -\infty \to \infty \end{array} \right|.$$

Vidíme, že musíme řešit dva případy v závislosti na znaménku α. Nejprve řešme $\alpha > 0$, což po substituci vede k

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \frac{\mathrm{d}y}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}.$$

Pro $\alpha < 0$ máme

$$\int_{\infty}^{-\infty} \delta(y) \frac{\mathrm{d}y}{-|\alpha|} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) \frac{\mathrm{d}y}{|\alpha|} = \frac{1}{|\alpha|},$$

kde jsme v prvním výrazu explicitně napsali znaménko α. Každopádně oba případy můžeme kompaktně napsat jako

$$\int_{\mathbb{R}} \delta(\alpha x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{|\alpha|}.$$

e) Zkusme nejprve vyřešit jednodušší problém, kde budeme pouze integrovat $\delta(g(x))$, tj.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(g(x))\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} g(x) = y \\ g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right| = \int_{g^{-1}(\mathbb{R})} \delta(y) \frac{\mathrm{d}y}{|g'(x)|}.$$

Absolutní hodnota je v jmenovateli kvůli výsledku z případu d). Navíc jsme se dopustili nejhorší chyby, které se při substituci v integrálu dá dopustit. Funkce $g'(x)$ ve jmenovateli má argument x, ne y, jak má správně být. Abychom toto napravili, nejprve přemýšlejme o delta funkci $\delta(y)$. Tato delta funkce je nenulová pouze tehdy, když je její argument nula, tj. $y = 0 \Rightarrow \delta(y) \neq 0$. Což před substitucí znamená

$$g(x) = 0.$$

Tj. při integraci nás budou pouze zajímat body x_i, které řeší tuto rovnici. Ve všech ostatních bodech bude delta funkce nulová, jen v bodech x_i je nenulová. Proto můžeme pokračovat ve výpočtu po substituci

$$\int_{g^{-1}(\mathbb{R})} \delta(y) \frac{\mathrm{d}y}{|g'(x)|} = \sum_i \int_{g^{-1}(\mathbb{R})} \delta(y) \frac{\mathrm{d}y}{|g'(x_i)|} = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \int_{g^{-1}(\mathbb{R})} \delta(y)\, \mathrm{d}y = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|}.$$

Suma před integrálem je proto, že musíme brát ohled na všechna x_i, která splňují $g(x_i) = 0$. Tento postup můžeme použít při důkazu požadované identity

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(g(x))\, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} g(x) = y \\ g'(x)\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \end{array} \right| &= \int_{g^{-1}(\mathbb{R})} f(x)\delta(y) \frac{\mathrm{d}y}{|g'(x)|} = \\ &= \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|} \int_{g^{-1}(\mathbb{R})} \delta(y)\, \mathrm{d}y = \sum_i \frac{f(x_i)}{|g'(x_i)|}. \end{aligned}$$