Čtvrté cvičení z Elektrodynamiky

1. Spočtěte následující integrály obsahující δ-funkci:

$$\text{a)} \int_{\mathbb{R}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x,$$
$$\text{b)} \int_{-\epsilon}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\delta(\sin x)\,\mathrm{d}x, \quad \text{kde } 0 < \epsilon \ll 1.$$

Řešení: a) Řešení lehce plyne z definičního vztahu pro δ funkci

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\delta(x - x_0)\,\mathrm{d}x = f(x_0). \tag{1}$$

Za x dosadíme $\frac{\pi}{2}$ a smažeme integraci, tudíž výsledek je

$$\int_{\mathbb{R}} \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)\delta\left(x - \frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}x = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$$

b) Nejprve komentář k zadání: jelikož pro $x = 0$ je i $\sin x = 0$, byla by delta funkce byla nenulová v krajním bodě, což je problematické. (Delta funkce se reprezentuje například pomocí zužujících se gaußovek a pokud se budou zužovat ke krajnímu bodu integrálu, tak při integraci by se měla započítat jen polovina gaußovky, tj. krajní bod by se započítával s váhou 1/2.) Ale pojďme k výpočtu. Použijeme vzorec z minulého cvičení, z příkladu 5e). Proto potřebujeme zjistit řešení rovnice $\sin x = 0$, což jsou body

$$x_i \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

V průniku s integračním oborem zůstane $x_i \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{N} \cup 0\}$. Počítejme

$$\int_{-\epsilon}^{\infty} \mathrm{e}^{-x}\delta(\sin x)\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-k\pi}\frac{1}{|\cos(k\pi)|} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{-\pi}} = \frac{\mathrm{e}^{\pi}}{\mathrm{e}^{\pi} - 1}.$$

Cosinus ve jmenovateli je vždy ± 1, a protože je v absolutní hodnotě, vždy vyjde 1. Dál se použil vzorec pro součet geometrické řady.

2. (†) Spočtěte Fourierovu transformaci funkcí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{a} \quad \delta(x).$$

Řešení: Nejprve připomeneme definici Fourierovy transformace a inverzní Fourierovy transformace

$$\text{FT} : \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk}\,\mathrm{d}x,$$
$$\text{IFT} : f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k)\mathrm{e}^{\mathrm{i}xk}\,\mathrm{d}k.$$

Výpočet obou FT je jednoduchý

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\colon \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{cc} -x = y & \infty\to-\infty \\ -\mathrm{d}x = \mathrm{d}y & -\infty\to\infty \end{array}\right| =$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}yk}\,\mathrm{d}y = \delta(k),$$
$$\delta(x)\colon \tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

U výsledku první Fourierovy transformace jsme použili Fourierovskou reprezentaci δ funkce, u druhé vztah (1). Zjistili jsme tedy, že FT (správně normované) konstanty je δ funkce a FT δ funkce je konstanta.

3. Spočtěte Fourierovu transformaci gaußovky, tj. křivky

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ \text{kde } \sigma\in(0,\infty).$$

Řešení: Nejprve si spočtěme následující integrál

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

K tomuto integrálu neexistuje primitivní funkce, která jde vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Proto použijeme následující trik: spočtěme druhou mocninu integrálu a použijeme polární souřadnice.

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \overset{\text{polární souřadnice}}{=} \int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi =$$
$$= 2\pi\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-r^2}r\mathrm{d}r = \left|\begin{array}{c} r^2 = t \\ 2r\mathrm{d}r = \mathrm{d}t\end{array}\right| = \pi\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t = -\pi\left[e^{-t}\right]_0^{\infty} = \pi.$$

Tudíž

$$I = \sqrt{\pi} = \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x.$$

Fourierova transformace funkce $g(x)$ je

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}-\mathrm{i}xk}\mathrm{d}x.$$

Na tento integrál budeme chtít použít výše odvozený vzorec. Proto převedeme exponent ve funkci $\tilde{g}(k)$ na úplný čtverec

$$-\frac{x^2}{2\sigma^2} - \mathrm{i}xk = -\frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{\mathrm{i}^2k^2\sigma^2}{2} + \frac{\mathrm{i}^2k^2\sigma^2}{2} - \mathrm{i}xk = -\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{\mathrm{i}k\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{k^2\sigma^2}{2}.$$

Pokračujme v integraci

$$\tilde{g}(k) = \frac{1}{2\pi\sigma}\mathrm{e}^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-\left(\frac{x}{\sqrt{2}\sigma}+\frac{\mathrm{i}k\sigma}{\sqrt{2}}\right)^2}\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} \frac{x}{\sqrt{2}\sigma} + \frac{\mathrm{i}k\sigma}{\sqrt{2}} = t \\ \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t\end{array}\right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}.$$

Vidíme, že výsledkem je opět gaußovka, ale její pološířkaje tentokrát $\frac{1}{\sigma^2}$. To znamená, pokud transformujeme gaußovku s malou σ (gaußovka je "lokalizovaná"= "vysoký ostrý kopec"), po Fourierově transformaci dostaneme gausovku s velkou pološířkou (gaußovka je "plytká"= "pozvolný kopec").

4. Uvažte následující rovnici

$$\Delta G\left(\vec{x}-\vec{x}'\right)=\delta^3\left(\vec{x}-\vec{x}'\right).$$

Funkce $G(\vec{x})$ splňující tuto rovnici se nazývá Greenova funkce. Pomocí této rovnice a nápověd níže ukažte, že Fourierova transformace funkce $G(\vec{x})$ je

$$\widetilde{G}(\vec{k})=-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}.$$

Hint: Použijte definici inverzní Fourierovy transformace funkce $\widetilde{G}(\vec{k})$ tj.

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\widetilde{G}(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3\vec{k},$$

a definici trojdimenzionální δ-funkce

$$\delta^3(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3\vec{k}.$$

Řešení: Nejdříve komentář ke konstantám před Fourierovou transformací a delta funkcí. Obě konstanty jsou na třetí, jelikož jak Fourierova transformace tak delta funkce jsou trojrozměrné. Při samotném výpočtu nejprve využijeme symetrie. Jelikož vektor $\vec{x}'$ pouze říká, v jakém bodu prostoru bude delta funkce nenulová, můžeme bez újmy na obecnosti tento bod vzít jako 0, tudíž $\vec{x}'=0$. Dále dosadíme obě dvě nápovědy do rovnice výše:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\widetilde{G}(\vec{k})\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_xx+k_yy+k_zz)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y\mathrm{d}k_z\right]=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3\vec{k}.$$

Jelikož integrál nezávisí na souřadnicích x,y,z, můžeme derivovat funkci za integrálem, tedy

$$\int_{\mathbb{R}^3}\widetilde{G}(\vec{k})(-k_x^2-k_y^2-k_z^2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3\vec{k}=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{R}^3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3\vec{k}.$$

Vše převedeme na jednu stranu

$$\int_{\mathbb{R}^3}\left[\widetilde{G}(\vec{k})\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)+\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vec{k}\cdot\vec{x}}\mathrm{d}^3\vec{k}=0.$$

Aby mohla být tato rovnost splněna, musí být výraz v hranaté závorce nulový (komplexní exponenciála není nulová nikde), tedy dostáváme výsledek

$$\widetilde{G}(\vec{k})=-\frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\frac{1}{k_x^2+k_y^2+k_z^2}.$$