Šesté cvičení z Elektrodynamiky

1. Dosaďte mocninou řadu
$$P_l(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(l)} x^n$$
do Legendrovy rovnice
$$(1 - x^2)P_l''(x) - 2xP_l'(x) + l(l+1)P_l(x) = 0,$$
kde $l \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, a určete rekursivní vztah pro koeficienty $a_n^{(l)}$. Jaká je podmínka na číslo n, aby byl počet nenulových koeficientů konečný? Napište explicitní tvar polynomů $P_2(x)$ a $P_3(x)$.

Řešení: Dosadíme mocninou řadu do rovnice a provedeme derivace
$$(1 - x^2)\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n^{(l)}x^{n-2} - 2x\sum_{n=1}^{\infty} na_n^{(l)}x^{n-1} + l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(l)}x^n = 0.$$
V prvních dvou sumách sčítáme od 2, resp. od 1, jelikož dvakrát zderivovaný lineární polynom je nula (resp. zderivovaná konstanta je nula). Dále v první sumě změníme sčítací index $n \to k$ jako $k = n - 2$. První suma tedy bude
$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1)a_{k+2}^{(l)}x^k.$$
Podobně změníme sumační index i v druhé sumě (a přejmenujeme k jako n), rovnice tedy bude
$$(1 - x^2)\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}^{(l)}x^n - 2x\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1}^{(l)}x^n + l(l+1)\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(l)}x^n = 0.$$
Tuto rovnici budeme chápat jako rovnost polynomů. Polynomy jsou si rovny, pokud jsou si rovny jednotlivé koeficienty u mocnin x. Pro absolutní člen a lineární člen to tedy je
$$x^0 : \ 2a_2^{(l)} + l(l+1)a_0^{(l)} = 0, \qquad \Rightarrow \qquad a_2^{(l)} = -\frac{l(l+1)}{2}a_0^{(l)},$$
$$x^1 : \ 3 \cdot 2a_3^{(l)} - 2a_1^{(l)} + l(l+1)a_1^{(l)} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad a_3^{(l)} = \frac{[2 - l(l+1)]}{6}a_1^{(l)}.$$
Koeficient u monomu x^n tedy bude
$$x^n : \ (n+2)(n+1)a_{n+2}^{(l)} - n(n-1)a_n^{(l)} - 2na_n^{(l)} + l(l+1)a_n^{(l)} = 0 \ \Rightarrow \ a_{n+2}^{(l)} = \frac{[n(n+1) - l(l+1)]}{(n+1)(n+2)}a_n^{(l)}. \tag{1}$$
Vidíme, že pokud máme zadány hodnoty $a_0^{(l)}$ a $a_1^{(l)}$, pak jsou všechny další koeficienty dány pomocí rovnosti (1). Chceme, aby řešením byl polynom s konečným počtem nenulových koeficientů. Z rovnosti (1) vidíme, že nutná podmínka je $n = l$ (l je číslo, které čísluje rovnice, pro různé hodnoty l, dostáváme různé rovnice!). Navíc pokud je l například sudé, a my zvolíme $a_1^{(l)}$ nenulové, všechny další koeficienty $a_n^{(l)}$, kde n je liché, budou nenulové.

Pomocí tohoto, zkusme určit polynomy $P_2(x)$ a $P_3(x)$. Polynom $P_2(x)$ musí mít koeficient $a_1^{(2)}$ nulový, tudíž obecně vypadá jako

$$P_2(x) = a_0^{(2)} + a_2^{(2)} x^2.$$

Zvolme např. $a_0^{(2)} = 1$ (toto je volba daná okrajovými podmínkami pro diferenciální rovnici, nebo normalizací polynomů), poté

$$a_2^{(2)} = a_{0+2}^{(2)} = \frac{[0(0+1) - 2(2+1)]}{(0+1)(0+2)} a_0^{(2)} = -3.$$

Celkově

$$P_2(x) = 1 - 3x^2.$$

Podobně pro polynom $P_3(x)$ volíme $a_0^{(3)} = 0$ a $a_1^{(3)} = 1$. Druhý nenulový koeficient je

$$a_3^{(3)} = a_{1+2}^{(3)} = \frac{[1(1+1) - 3(3+1)]}{(1+1)(2+1)} a_1^{(3)} = -\frac{5}{3},$$

a polynom je

$$P_3(x) = x - \frac{5}{3} x^3.$$

Poznámka: V tomto příkladu jsme použili tzv. Frobeniovu metodu řešení diferenciálních rovnic. Ta spočívá v tom, že předpokládáme řešení diferenciální rovnice v podobě mocninné řady. Tuto řadu dosadíme do rovnice a pomocí rekursivních vztahů, které obdržíme, zjistíme koeficienty polynomu. Rovnice i polynomy se často jmenují po člověku, kdo je prvně objevil. V tomto případě se jedná o Legendrovu rovnici a Legendrovy polynomy.

2. Ukažte, že Legendrovy polynomy jsou na intervalu $[-1, 1]$ ortogonální, tj. že pro $n \neq m$ platí

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Hint: Využijte Legendrovu rovnici.

Řešení: Nejprve si napišme dvě instance Legendrovy rovnice pro indexy m a n,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n\right] + n(n+1)P_n = 0, \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_m\right] + m(m+1)P_m = 0. \end{aligned}$$

První rovnici vynásobme P_m, druhou rovnici vynásobme P_n, získané rovnice od sebe odečtěme a integrujme od -1 do 1, tj.

$$\begin{aligned} 0 = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n\right] P_m \mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} n(n+1)P_n P_m \mathrm{d}x - \\ - \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_m\right] P_n \mathrm{d}x - \int_{-1}^{1} m(m+1)P_m P_n \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

V prvním a třetím integrálu použijeme per partes, konkrétně to rozepišme pro první integrál

$$P_m \to \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_m,$$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n\right] \to (1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}P_n.$$

Dostáváme

$$0 = \left[P_m(1-x^2)P_n'\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'P_n'\mathrm{d}x - \left[(1-x^2)P_m'P_n\right]_{-1}^{1} +$$
$$+\int_{-1}^{1}(1-x^2)P_m'P_n'\mathrm{d}x + \big(n(n+1)-m(m+1)\big)\int_{-1}^{1}P_mP_n\mathrm{d}x.$$

Druhý se čtvrtým členem se odečtou, první a třetí člen jsou při dosazení mezí nulové, zbývá tedy

$$0 = \big(n(n+1)-m(m+1)\big)\int_{-1}^{1}P_mP_n\mathrm{d}x.$$

Jelikož $m \neq n$, musí být integrál roven nule. Což jsme chtěli dokázat. Tato vlastnost se nazývá ortogonalita Legendrových polynomů.

3. Azimutálně symetrické řešení Laplaceovy rovnice pro potenciál $\phi(r,\theta)$ ve sférických souřadnicích lze zapsat jako lineární kombinace

$$\phi(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right)P_l(\cos\theta),$$

kde $A_l, B_l \in \mathbb{R}$ a $P_l(\cos\theta)$ jsou Legendrovy polynomy. Uvažte sféru s poloměrem R, která je nabitá na potenciál

$$\phi(R,\theta) = \begin{cases} \Phi & 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}, \\ -\Phi & \frac{\pi}{2} < \theta \leq \pi, \end{cases}$$

kde $\Phi \in \mathbb{R}$. Určete koeficienty A_l, B_l v multipólovém rozvoji pro tento případ. Hint: pro Legendrovy polynomy platí

$$\int_{-1}^{1} P_l(x)P_k(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2l+1}\delta_{lk}.$$

Řešení: Jedná se o klasický příklad na využití multipólového rozvoje potenciálu. Ten se získá řešením Laplaceovy rovnice metodou separace proměnných. Pro tento příklad bylo potřeba vyřešit Laplaceovu rovnici ve sférických souřadnicích, viz skripta kapitola 5. Obecné řešení problému tedy již máme, jen ho teď musíme použít na konkrétní příklad, tím je v tomto případě nabitá sféra. Nejprve si rozdělíme řešení na řešení vně sféry ϕ_{ext} a vevnitř sféry ϕ_{int}

$$\phi_{\text{int}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + B_l r^{-l-1}\right)P_l(\cos\theta), \quad r \leq R,$$
$$\phi_{\text{ext}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(C_l r^l + D_l r^{-l-1}\right)P_l(\cos\theta), \quad r \geq R.$$

Abychom problém vyřešili, musíme zjistit koeficienty A_l, B_l, C_l a D_l. Pro určení koeficientů použijeme fyzikální podmínky. Budeme požadovat, aby s rostoucí vzdáleností šel potenciál do nuly, tj.

$$r \to \infty\colon \phi_{\text{ext}}(r,\theta) \to 0.$$

Když se podíváme na tvar $\phi_{\text{ext}}(r,\theta)$, vidíme, že to lze zařídit pouze, pokud koeficienty $C_l = 0$. Podobně, ve středu koule musí být potenciál konečný, tudíž pro $r = 0$ musíme získat konečné číslo. Z tvaru $\phi_{\text{int}}(r,\theta)$ vidíme, že musíme zvolit $B_l = 0$. Dohromady máme

$$\phi_{\text{int}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta),$$
$$\phi_{\text{ext}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} D_l r^{-l-1} P_l(\cos\theta).$$

Poslední fyzikální podmínku, kterou na řešení položíme, je chování na sféře v bodě $r = R$. Potenciály vně a vevnitř se zde musí rovnat, navíc ze zadání víme, jaký potenciál tam je,

$$\phi_{\text{int}}(R,\theta) = \phi_{\text{ext}}(R,\theta) = \phi(R,\theta) \tag{2}$$

Porovnáním jednotlivých členů v sumách potenciálu dostáváme

$$A_l R^l = D_l R^{-l-1} \quad \Rightarrow \quad D_l = A_l R^{2l+1}$$

a potenciály mají tvar

$$\phi_{\text{int}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta),$$
$$\phi_{\text{ext}}(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^{2l+1} r^{-l-1} P_l(\cos\theta).$$

Zbývá určit koeficienty A_l. Vyjdeme zase z podmínky na sféře (2)

$$\phi(R,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l P_l(\cos\theta).$$

Tuto rovnici vynásobíme $P_k(\cos\theta)\sin\theta$ a zintegrujeme od 0 do π, tj.

$$\int_0^{\pi} \phi(R,\theta) P_k(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_k(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

Na levé straně dosadíme konkrétní tvar potenciálu na sféře $\phi(R,\theta)$

$$\Phi \int_0^{\frac{\pi}{2}} P_k(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta - \Phi \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} P_k(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \int_0^{\pi} P_l(\cos\theta) P_k(\cos\theta)\sin\theta \mathrm{d}\theta.$$

Zaveďme substituci $x = \cos\theta$

$$\Phi \int_0^1 P_k(x)\mathrm{d}x - \Phi \int_{-1}^0 P_k(x)\mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{\infty} A_l R^l \int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x)\mathrm{d}x.$$

Na pravé straně využije ortogonality Legendrových polynomů (viz Hint ze zadání)

$$\Phi \int_0^1 P_k(x)\mathrm{d}x - \Phi \int_{-1}^0 P_k(x)\mathrm{d}x = \frac{2}{2k+1} A_k R^k.$$

Víme, že Legendrovy polynomy pro liché indexy jsou liché funkce a pro sudé indexy jsou sudé funkce. Této vlastnosti využijeme. Pokud je Legendrův polynom sudý, tj. platí $P_k(-x) = P_k(x)$, poté v prvním integrálu na levé straně můžeme udělat substituci

$$x \to -x, \quad 1 \to -1 \quad , \quad 0 \to 0, \quad \mathrm{d}x \to -\mathrm{d}x$$

a integrály na levé straně se vyruší. Proto jsou koeficienty A_k, pro sudé k, nulové. Pro liché Legendrovy polynomy platí $P_k(-x) = -P_k(x)$ a integrály na levé straně se sečtou. Celkově tedy dostaneme

$$A_k = \frac{2k+1}{R^k} \Phi \int_0^1 P_k(x)\mathrm{d}x, \quad k \text{ je liché},$$

neboli pokud si označíme $k = 2l - 1$

$$A_{2l-1} = \frac{4l-1}{R^{2l-1}} \Phi \int_0^1 P_{2l-1}(x)\mathrm{d}x, \quad l \in \mathbb{N}.$$

Pro určení koeficientů potřebujeme explicitní tvar Legendrových polynomů. První tři liché polynomy jsou

$$\begin{aligned} P_1(x) &= x, \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x^3 + 15x\right). \end{aligned}$$

Integrováním těchto polynomů můžeme zjistit první tři koeficienty v multipólovém rozvoji

$$A_1 = \frac{3}{2}\frac{\Phi}{R}, \quad A_3 = -\frac{7}{8}\frac{\Phi}{R^3}, \quad A_5 = \frac{11}{16}\frac{\Phi}{R^5}.$$