Osmé cvičení z Elektrodynamiky

1. Uvažte následující model dielektrika: Elektrony v jednorozměrné mřížce harmonicky kmitají kolem svých rovnovážných poloh, tj. výchylka x od rovnovážné polohy splňuje rovnici

$$m\left(\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x\right)=0,$$

kde m je hmotnost elektronu, γ je tlumící konstanta a ω_0 frekvence vlastních kmitů. Dielektrikum vložíme do elektrického pole s intenzitou $E(t)=E\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$. Vypočtěte indukovaný dipólový moment $P=Nqx$, kde N je počet elektronů, a určete závislost permitivity ε na frekvenci vnějšího pole ω.

Řešení: Označme náboj elektronu jako q. Na elektron bude v poli působit síla

$$F=qE\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Našim cílem je tedy vyřešit diferenciální rovnici tvaru

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=\frac{Eq}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Nejprve vyřešíme homogenní rovnici

$$\ddot{x}+\gamma\dot{x}+\omega_0^2 x=0.$$

Charakteristický polynom je

$$\lambda^2+\lambda\gamma+\omega_0^2=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda_{1,2}=\frac{-\gamma\pm\sqrt{\gamma^2-4\omega_0^2}}{2}.$$

Abychom dostali kmitání kolem rovnovážných poloh, musíme předpokládat

$$\gamma<2\omega_0.$$

Obecné řešení homogenní rovnice poté je

$$x(t)=A\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t+\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{4\omega_0^2-\gamma^2}}+B\mathrm{e}^{-\frac{\gamma}{2}t-\frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{4\omega_0^2-\gamma^2}}.$$

Nás ale bude spíše zajímat partikulární řešení. Zjistíme ho pomocí ansatzu

$$x(t)=C\mathrm{e}^{\Omega t}.$$

Dosadíme do rovnice

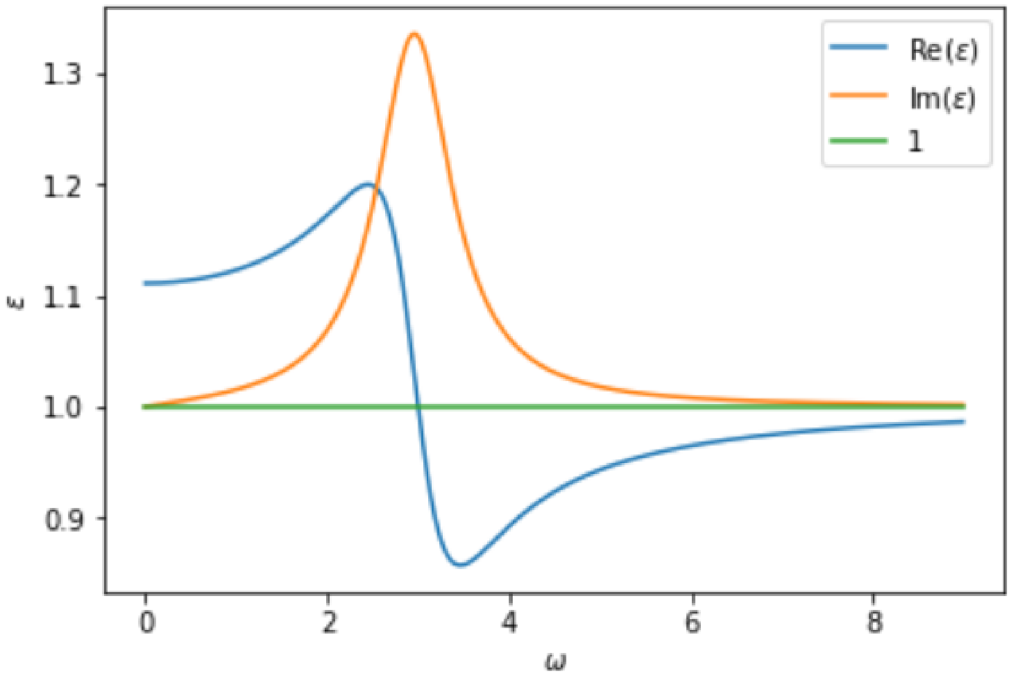
$$C\Omega^2\mathrm{e}^{\Omega t}+C\gamma\Omega\mathrm{e}^{\Omega t}+C\omega_0^2\mathrm{e}^{\Omega t}=\frac{qE}{m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Hned vidíme, že

$$\Omega=\mathrm{i}\omega \quad \text{a} \quad C(\Omega^2+\gamma\Omega+\omega_0^2)=\frac{qE}{m}.$$

Tudíž partikulární řešení je dáno jako

$$x(t)=\frac{qE\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{m\left(\mathrm{i}\gamma\omega+(\omega_0^2-\omega^2)\right)}.$$



Obrázek 1: Závislost permitivity na frekvenci, konstanty jsou voleny jako $m = 1$, $q = 1$, $N = 1$, $\gamma = 1$ a $\omega_0 = 3$.

Permitivitu získáme ze vztahu

$$\begin{aligned}\varepsilon E(t) &= \varepsilon_0 E(t) + P(t) = \\ &= \varepsilon_0 E \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + Nqx(t) = \\ &= \varepsilon_0 E \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t} + \frac{Nq^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}}{m\left(\mathrm{i}\gamma\omega + (\omega_0^2 - \omega^2)\right)}.\end{aligned}$$

Permitivita tedy je

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \frac{Nq^2}{m\left(\mathrm{i}\gamma\omega + (\omega_0^2 - \omega^2)\right)}.$$

Fyzikální závěr lze udělat z imaginární a reálné části permitivity

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(\varepsilon) &= \varepsilon_0 + \frac{Nq^2}{m}\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}, \\ \mathrm{Im}(\varepsilon) &= \varepsilon_0 + \frac{Nq^2}{m}\frac{\gamma\omega}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}.\end{aligned}$$

Imaginární část permitivity souvisí s absorpcí. Pokud si permitivity vykreslíme v grafu (viz Obrázek (1)), vidíme, že kolem hodnoty ω_0 má imaginární část permitivity nárůst. To znamená, že pokud má elektrické pole podobnou frekvenci, jako je frekvence vlastních kmitů elektronů ve mřížce, tak elektrony absorbují více elektrické energie.

2. (†) Nekonečně dlouhým drátem začne v čase $t_0 = 0$ procházet konstantní proud, tj.

$$I(t) = I\Theta(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ I & t \geq 0, \end{cases}$$

kde $I \in \mathbb{R}$. Najděte magnetické pole $\vec{B}(\vec{x},t)$ a elektrické pole $\vec{E}(\vec{x},t)$. Ukažte, že pro $t \to \infty$ obdržíte známé vzorce z magnetostatiky (elektrostatiky).

Řešení: Jedná se o první opravdový elektrodynamický problém, který na cvičení počítáme. Proud už totiž nezávisí pouze na souřadnicích, ale i na čase. Nejprve spočítáme vektorový potenciál, který je dán vzorcem

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\vec{j}(\vec{x}', t_{\mathrm{ret}})}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}^3\vec{x}', \quad t_{\mathrm{ret}} = t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c},$$

kde t_{ret} je tzv. retardovaný čas. Důvod, proč musíme uvážit retardovaný čas, je následující. Zajímá nás vektorový potenciál v bodě $(\vec{x},t)$, ale informace se k nám může šířit maximálně rychlostí světla. Tudíž drát vidíme v čase menším, protože informace k nám musí doletět. Čas je menší o vzdálenost od drátu dělenou rychlostí šíření informace. Dále postupujeme stejně jako ve statickém případě, sestavíme hustotu proudu a spočítáme integrál. Drát položíme na osu z. To zajistíme pomocí dvou delta funkcí $\delta(x')$ a $\delta(y')$. Proud bude téct v kladném směru osy z, tudíž hustota proudu bude dána úměrná vektoru $(0,0,1) = \hat{z}$. Na závěr v hustotě proudu bude $I(t)$, celkově

$$\vec{j}(\vec{x}', t_{\mathrm{ret}}) = I\Theta\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)\delta(x')\delta(y')\hat{z}.$$

Začněme počítat vektorový potenciál

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x},t) &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{I\Theta\left(t - \frac{|\vec{x}-\vec{x}'|}{c}\right)\delta(x')\delta(y')\hat{z}}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\mathrm{d}^3\vec{x}' = \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{z}\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}\Theta\left(t - \frac{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}}{c}\right)\mathrm{d}z' = \\
&= \left|\begin{array}{ll} \zeta = z - z' & -\infty \to \infty \\ \mathrm{d}\zeta = -\mathrm{d}z' & \infty \to -\infty \\ r^2 = x^2+y^2 & \end{array}\right| = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{z}\int_{\mathbb{R}} \frac{\Theta\left(t - \frac{\sqrt{r^2+\zeta^2}}{c}\right)}{\sqrt{r^2+\zeta^2}}\mathrm{d}\zeta.
\end{aligned}$$

Pojďme se zaměřit na Heavisideovu funkci. Heavisideova funkce je nenulová pouze tedy, když je její argument větší než nula. Tedy

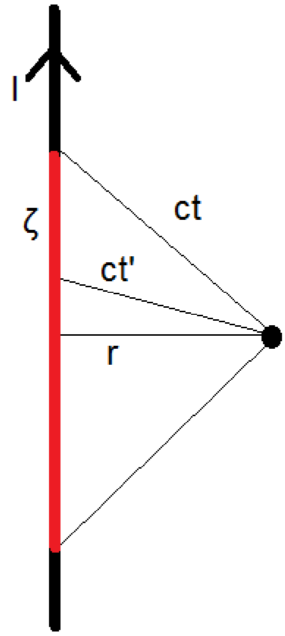
$$t - \frac{\sqrt{r^2+\zeta^2}}{c} \geq 0.$$

Vyjádřeme z této nerovnosti ζ

$$\begin{aligned}
tc &\geq \sqrt{r^2+\zeta^2} \\
\zeta^2 &\leq (ct)^2 - r^2 \\
|\zeta| &\leq \sqrt{(ct)^2 - r^2}.
\end{aligned}$$

Tato nerovnost nám omezení integrační obor, tedy vektorový potenciál je

$$\vec{A}(\vec{x},t) = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{z}\int_{-\sqrt{(ct)^2-r^2}}^{\sqrt{(ct)^2-r^2}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{r^2+\zeta^2}}.$$



Obrázek 2: Znázornění situace pro $t' < t$

Tento integrál lze hezky fyzikálně vysvětlit. Nacházíme se v tečce napravo v Obrázku (2) v čase $t > 0$. (V čase $t = 0$ začal probíhat proud.) Vidíme, že platí $\zeta^2 = (ct)^2 - r^2$, což odpovídá mezím integrálu. Tedy v čase t k nám doletí informace z červené části drátu, černou část drátu uvidíme až v dalších časech. Samotná integrace je jednoduchá

$$\begin{aligned}
\vec{A}(\vec{x}, t) &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{z}\int_{-\sqrt{(ct)^2-r^2}}^{\sqrt{(ct)^2-r^2}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{r^2+\zeta^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\hat{z}2\int_0^{\sqrt{(ct)^2-r^2}} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\sqrt{r^2+\zeta^2}} = \\
&= \left| \begin{array}{ll} \frac{\zeta}{r} = \sinh\varphi & 0 \to 0 \\ \frac{\mathrm{d}\zeta}{r} = \cosh\varphi \mathrm{d}\varphi & \sqrt{(ct)^2-r^2} \to \operatorname{arcsinh}\frac{\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r} \end{array} \right| = \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\hat{z}\int_0^{\operatorname{arcsinh}\frac{\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r}} \frac{\cosh\varphi \mathrm{d}\varphi}{\sqrt{1+\sinh^2\varphi}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\hat{z}\left[\varphi\right]_0^{\operatorname{arcsinh}\frac{\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r}} = \\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\hat{z}\operatorname{arcsinh}\frac{\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r}.
\end{aligned}$$

Jelikož drát není nabitý na žádný elektrický potenciál elektrická intenzita je dána jako

$$\vec{E}(\vec{x}, t) = -\frac{\partial\vec{A}(\vec{x}, t)}{\partial t} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi\sqrt{1+\frac{(ct)^2-r^2}{r^2}}}\frac{1}{2r}\frac{2c^2 t}{\sqrt{(ct)^2-r^2}}\hat{z} = -\frac{c\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(ct)^2-r^2}}\hat{z}.$$

Magnetická indukce je dána jako $\vec{B}(\vec{x},t) = \mathrm{rot}\vec{A}(\vec{x},t)$, pro to spočítáme následující derivaci

$$\partial_y A = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{(ct)^2-r^2}{r^2}}} \frac{\sqrt{x^2+y^2}\frac{-2y}{2\sqrt{(ct^2)-x^2-y^2}} - \sqrt{(ct)^2-x^2-y^2}\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{r^2} =$$
$$= -\frac{r}{ct}\left(\frac{y}{r\sqrt{(ct)^2-r^2}} + \frac{y\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r^3}\right).$$

Celkově bude magnetická indukce následující

$$\vec{B}(\vec{x},t) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{ct}\left[\left(\frac{y}{\sqrt{(ct)^2-r^2}} + \frac{y\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r^2}\right)\hat{x} - \left(\frac{x}{\sqrt{(ct)^2-r^2}} + \frac{x\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r^2}\right)\hat{y}\right].$$

Před porovnáním s elektrostatickým případem nejprve jeden komentář. Ve chvíli, kdy pozorovatel poprvé zaznamená změnu v elektrickém proudu ve drátu, tj. v čase

$$t = \frac{r}{c},$$

obě veličiny divergují (jelikož platí $(ct)^2 - r^2 = 0$). Toto ale nejsou fyzikální divergence, ale jsou dány modelem, který jsme použili. Pro elektrický proud jsme použili Heavisideovu funkci, která je ovšem nespojitá. A derivace nespojité funkce v bodě nespojitosti dává nekonečna. Tento problém se dá jednoduše odstranit spojitým proudem, což bude taky domácí úkol ke cvičení. Na závěr ukažme, jak se z tohoto elektrodynamického procesu dá udělat elektrostatický, či magnetostatický. Jednoduše se budeme chtít zbavit závislosti na čase, proto čas pošleme do nekonečna. Jednoduše si to lze představit tak, že k pozorovateli dolétla informace z velké části drátu a že nový přírůstek k polím díky nové informaci je již zanedbatelný. (Samozřejmě, že statický případ můžeme uvážit jen proto, že po čase $t = 0$ je proud opět konstantní). Počítejme

$$\vec{E}(\vec{x}) = \lim_{t\to\infty}\vec{E}(\vec{x},t) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{c\mu_0 I}{2\pi\sqrt{(ct)^2-r^2}}\hat{z}\right) = 0,$$
$$\vec{B}(\vec{x}) = \lim_{t\to\infty}\vec{B}(\vec{x},t) =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{ct}\left[\left(\frac{y}{\sqrt{(ct)^2-r^2}} + \frac{y\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r^2}\right)\hat{x} - \left(\frac{x}{\sqrt{(ct)^2-r^2}} + \frac{x\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r^2}\right)\hat{y}\right]\right) =$$
$$= \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{1}{ct}\left[\frac{y\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r^2}\hat{x} - \frac{x\sqrt{(ct)^2-r^2}}{r^2}\hat{y}\right]\right) = \lim_{t\to\infty}\left(-\frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}\frac{1}{ct}\left[yct\hat{x} - xct\hat{y}\right]\right) =$$
$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r^2}(-y, x, 0).$$

Elektrická intenzita je nulová, jelikož drát není nabitý na žádný potenciál a magnetická indukce by měla být stejná jako ve druhém příkladě ze sedmého cvičení.

3. Ukažte, že vždy lze zvolit potenciály $\vec{A}$ a ϕ tak, aby platila Lorenzova kalibrace

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0.$$

Jsou pak potenciály $\vec{A}$ a ϕ určeny jednoznačně?

Řešení: Nejprve zavedeme potenciály. Vyjdeme ze dvou Maxwellových rovnic

$$\mathrm{div}\vec{B} = 0, \quad \mathrm{rot}\vec{E} = -\partial_t \vec{B}.$$

Víme, že div rot $= 0$, proto můžeme z první rovnice zavést vektorový potenciál $\vec{A}$ jako

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}.$$

Toto dosadíme do druhé Maxwellovy rovnice a získáme

$$\mathrm{rot}\left(\vec{E} + \partial_t \vec{A}\right) = 0.$$

Dále víme, že rot grad $= 0$. Proto můžeme zavést skalární potenciál ϕ jako

$$\vec{E} = -\partial_t \vec{A} - \mathrm{grad}\phi.$$

(Znaménko mínus před gradientem je konvence.) Potenciály ale opět můžeme měnit. Například k vektorovému potenciálu můžeme přičíst gradient libovolné funkce f (která má alespoň spojité parciální derivace), jelikož to nezmění magnetickou indukci $\vec{B}$:

$$\vec{A}' = \vec{A} + \mathrm{grad}f, \tag{1}$$

$$\vec{B}' = \mathrm{rot}\vec{A}' = \mathrm{rot}\left(\vec{A} + \mathrm{grad}f\right) = \vec{B}.$$

Podobně od skalárního potenciálu můžeme odečíst časovou derivaci funkce f, jelikož to nezmění elektrickou intenzitu $\vec{E}$:

$$\phi' = \phi - \partial_t f, \tag{2}$$

$$\vec{E}' = -\partial_t \vec{A}' - \mathrm{grad}\phi' = -\partial_t \vec{A} - \partial_t \mathrm{grad}f - \mathrm{grad}\phi + \mathrm{grad}\partial_t f = -\partial_t \vec{A} - \mathrm{grad}\phi = \vec{E}.$$

Předpokládejme teď, že máme potenciály $\vec{A}$ a ϕ, které nesplňují Lorenzovu kalibraci, tj.

$$\mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi \neq 0.$$

Budeme hledat funkci f takovou, aby nové potenciály $\vec{A}'$ a ϕ', definované v (1) a (2), již Lorenzovu kalibraci splňovaly, tj.

$$\mathrm{div}\vec{A}' + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi' = 0. \tag{3}$$

Dosaďme potenciály (1) a (2) do rovnice (3)

$$\begin{aligned}
0 &= \mathrm{div}\left(\vec{A} + \mathrm{grad}f\right) + \frac{1}{c^2}\partial_t\left(\phi - \partial_t f\right), \\
0 &= \mathrm{div}\vec{A} + \triangle f + \frac{1}{c^2}\partial_t \phi - \frac{1}{c^2}\partial_t^2 f, \\
\Box f &= -\mathrm{div}\vec{A} - \frac{1}{c^2}\partial_t \phi. \qquad (4)
\end{aligned}$$

Dostali jsme parciální diferenciální rovnici pro f. Tudíž, pro libovolné potenciály $\vec{A}$ a ϕ, můžeme najít nové potenciály $\vec{A}'$ a ϕ', které již splňují Lorenzovu kalibraci. Samotnou funkci f můžeme zjistit například metodou Greenovy funkce

$$f(\vec{x},t) = -\int_{\mathbb{R}^4} \mathrm{d}^3\vec{x}'\mathrm{d}t' G(\vec{x},\vec{x}',t,t') \left(\mathrm{div}\vec{A}(\vec{x}',t') + \frac{1}{c^2}\partial_{t'}\phi(\vec{x}',t') \right),$$

kde $G(\vec{x},\vec{x}',t,t')$ je Greenova funkce k d'Alambertovu operátoru, tj. splňuje rovnici

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t^2} \right) G(\vec{x},\vec{x}',t,t') = \delta^4(\vec{x}-\vec{x}',t-t').$$

Zbývá vyřešit, jestli jsou již potenciály dány jednoznačně. A odpověď je ne. K funkci f můžeme totiž kdykoliv přičíst funkci g, která je řešením homogenní rovnice

$$\Box g = 0,$$

a funkce $f' = f + g$ bude opět řešením rovnice (4).