Cvičení ze Speciální relativity 14.4.2020

1. Uvažte množinu

$$\mathrm{SO}(3) := \left\{ A \in \mathrm{Mat}_{3\times3}(\mathbb{R}) \;\middle|\; AA^T = \mathbb{1}, \det A = 1 \right\}.$$

   a) Jaký geometrický význam mají prvky této množiny?

   b) Ukažte, že tato množina s maticovým násobením tvoří grupu.

   c) Je tato grupa komutativní? Jestli ano, dokažte, pokud ne, dejte protipříklad (tj. najděte dva prvky této grupy, které nekomutují).

   d) Najděte infinitesimální generátory L_1, L_2 a L_3 této grupy.

   e) Najděte komutační relace mezi infinitesimálními generátory.

   f) Ukažte, že pomocí zobrazení

$$\mathrm{e}^{L_i t} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{L_i^n t^n}{n!}$$

   infinitesimální generátory opravdu generují prvky grupy.

Řešení:

a) Matice 3×3 přirozeně působí na vektory z prostoru $\mathbb{R}^3$. První podmínka znamená, že se jedná o ortogonální transformace, tj. transformace zachovávající skalární součin. Takovýmito transformacemi jsou rotace a zrcadlení. Druhá podmínka znamená, že transformace zachovává orientaci prostoru. Touto podmínkou se odstraní zrcadlení (jelikož ty z pravotočivé soustavy udělají levotočivou a naopak) a zbudou pouze rotace. Tudíž množina SO(3) je množina rotací v prostoru $\mathbb{R}^3$. Množinu SO(3) generují následující prvky

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \cos\psi & 0 & -\sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\psi & 0 & \cos\psi \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

První matice zadává rotaci o úhel φ v rovině xy, to lze vidět jednoduše z maticového násobení

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\varphi - y\sin\varphi \\ y\sin\varphi + y\cos\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

Podobně druhá matice zadává rotaci o úhel ψ v rovině xz a poslední rotaci o úhel θ v rovině yz.

b) Nejprve připomeňme definici grupy. Grupa $(G, \cdot)$ je dvojice, kde G je množina a $\cdot$ je binární operace na množině G, splňující:

- Uzavřenost: $\forall g_1, g_2 \in G:\ g_1 \cdot g_2 \in G$.
- Asociativita: $\forall g_1, g_2, g_3 \in G:\ (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3 = g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3)$.
- Jednotkový prvek: $\exists e \in G$ takový, že $\forall g \in G:\ g \cdot e = g = e \cdot g$.
- Inverzní prvek: $\forall g \in G$, $\exists h \in G$ takový, že $g \cdot h = e = h \cdot g$.

Pojďme tedy dokázat, že množina SO(3) tvoří grupu. Uzavřenost plyne jednoduše z geometrické představy, složení dvou rotací je samozřejmě opět rotace. Asociativita plyne z asociativity maticového násobení. Jednotkový prvek je jednotková matice $\mathbb{1}$ a inverzní prvek vždy existuje, jelikož všechny matice v SO(3) mají nenulový determinant. Množina SO(3) je tedy grupa.

c) Grupa G je komutativní, pokud platí

$$\forall g_1, g_2 \in G: \; g_1 \cdot g_2 = g_2 \cdot g_1.$$

Grupa SO(3) není komutativní jelikož například pro matice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

platí

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = B \cdot A.$$

d) Maticové grupy mívají často velmi složitou strukturu, proto se často pracuje s jednoduššími maticemi, které v určitém smyslu grupu generují. Těmto maticím se říká infinitesimální generátory. Jejich nalezení spočívá v tom, že generátory rozvedeme do Taylorovy řady a ponecháme pouze lineární řád. Konkrétně pro rotace v rovině xy:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \dots & -\varphi + \frac{1}{6}\varphi^3 - \dots & 0 \\ \varphi - \frac{1}{6}\varphi^3 + \dots & 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{1} + \begin{pmatrix} 0 & -\varphi & 0 \\ \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Označme

$$L_1 := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matice L_1 je právě hledaný infinitesimální generátor pro rotace v rovině xy. Podobně můžeme najít infinitesimální generátory i pro rotace v rovinách xz a yz

$$L_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad L_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

e) Násobení matic je obecně nekomutativní. Pro určité matice A a B však může platit $A \cdot B = B \cdot A$ (například pro dva skalární násobky jednotkové matice). Míru, jak moc spolu dvě matice (ne)komutují, měří tzv. komutátor

$$[A, B] := AB - BA.$$

Pokud $[A,B]=0$, pak matice spolu komutují. Pro komutátor platí

$$[A,B]=-[B,A].$$

Pojďme spočítat komutátory pro naše matice L_i,

$$[L_1,L_2]=L_1L_2-L_2L_1=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}=L_3,$$
$$[L_2,L_3]=L_2L_3-L_3L_2=\begin{pmatrix}0&-1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=L_1,$$
$$[L_3,L_1]=L_3L_1-L_1L_3=\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}=L_2.$$

Získané vztahy můžeme kompaktně zapsat jako

$$[L_i,L_j]=\epsilon_{ij}{}^{k}L_k.$$

Vidíme, že infinitesimální generátory mají nějakou strukturu. Této struktuře se říká Lieova algebra. Dále ji však zkoumat nebudeme.

f) Teď ukážeme, jak se z infinitesimálních generátorů dají vytvořit zpět generátory grupy a proč tedy stačí pracovat pouze s infinitesimálními generátory. Provedeme to pouze pro infinitesimální generátor L_1. Vyjdeme z exponenciálního zobrazení

$$\mathrm{e}^{L_1\varphi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_1^n\varphi^n}{n!}=L_1^0+L_1\varphi+\frac{1}{2}L_1^2\varphi^2+\frac{1}{3!}L_1^3\varphi^3+\frac{1}{4!}L_1^4\varphi^4+\dots.$$

Nultou mocninu matice definujeme jako

$$L_1^0=\mathbb{1}.$$

Další mocniny musíme spočítat

$$L_1^2=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad L_1^3=\begin{pmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\quad L_1^4=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Jednoduše vidíme, že $L_1^5=L_1$, jelikož L_1^4 má dvě jedničky na diagonále. Vše dosadíme do exponenciálního zobrazení a získáme

$$\mathrm{e}^{L_1\varphi}=\begin{pmatrix}1-\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{1}{4!}\varphi^4+\dots & -\varphi+\frac{1}{3!}\varphi^3+\dots & 0\\ \varphi-\frac{1}{3!}\varphi^3+\dots & 1-\frac{1}{2}\varphi^2+\frac{1}{4!}\varphi^4+\dots & 0\\ 0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi&0\\ \sin\varphi&\cos\varphi&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2. Uvažte časoprostor s jedním prostorovým směrem (tj. dvoudimenzionální Minkowskiho prostor $\mathbb{R}^{1,1}$). Poincarého transformace je dvojice (a,Λ), kde a je (časoprostorová) translace

a Λ je Lorentzova transformace (v tomto případě jen boost). Vektor $x^\mu := (ct, x)$ se transformuje jako

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu.$$

Pomocí tohoto transformačního pravidla nadefinujte skládání (tj. operaci $\circ$) dvou Poincarého transformací, tj. napište, čemu se rovná

$$(a', \Lambda') \circ (a, \Lambda).$$

Dál ukažte, že množina všech Poicarého transformací společně s operací $\circ$ tvoří grupu.

Řešení: Nadefinujeme nejprve skládání transformací. Pokud první rovnici aplikujeme dvakrát, tak získáme

$$x''^\rho = \Lambda'^\rho_\mu x'^\mu + a'^\rho = \Lambda'^\rho_\mu \left(\Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu\right) + a'^\rho = \Lambda'^\rho_\mu \Lambda^\mu_\nu x^\nu + \Lambda'^\rho_\mu a^\mu + a'^\rho.$$

Pro jednoduchost vynecháme indexy a transformaci můžeme přepsat jako

$$(a', \Lambda') \circ (a, \Lambda)\,(x) = (a', \Lambda')\,(\Lambda x + a) = \Lambda' \Lambda x + \Lambda' a + a'.$$

Odtud jednoduše odvodíme

$$(a', \Lambda') \circ (a, \Lambda) = \left(\Lambda' a + a', \Lambda' \Lambda\right). \tag{1}$$

Dál dokážeme, že množina Poincarého transformací tvoří grupu. Nejprve najdeme jednotkový prvek. Jednotkový prvek $e = (a, \Lambda)$ splňuje

$$(a, \Lambda)(x) = \Lambda x + a \stackrel{!}{=} x.$$

Tudíž jednotkový prvek je

$$e = (0, \mathbb{1}).$$

Dál najdeme k prvku (a, Λ) inverzní prvek (a', Λ'). Musí platit

$$\begin{aligned} (a', \Lambda') \circ (a, \Lambda) &= (0, \mathbb{1}), \\ (\Lambda' a + a', \Lambda' \Lambda) &= (0, \mathbb{1}) \Rightarrow \Lambda' = \Lambda^{-1},\ a' = -\Lambda^{-1}, \\ (a, \Lambda)^{-1} &= \left(-\Lambda^{-1} a, \Lambda^{-1}\right). \end{aligned}$$

Dál ověříme asociativitu. Musí platit

$$\left((a'', \Lambda'') \circ (a', \Lambda')\right) \circ (a, \Lambda) = (a'', \Lambda'') \circ \left((a', \Lambda') \circ (a, \Lambda)\right).$$

Levá strana je

$$\text{LHS} = \left(\Lambda'' a' + a'', \Lambda'' \Lambda'\right) \circ (a, \Lambda) = \left(\Lambda'' \Lambda' a + \Lambda'' a' + a'', \Lambda'' \Lambda' \Lambda\right).$$

A pravá strana je

$$\text{RHS} = (a'', \Lambda'') \circ \left(\Lambda' a + a', \Lambda' \Lambda\right) = \left(\Lambda'' \Lambda' a + \Lambda'' a' + a'', \Lambda'' \Lambda' \Lambda\right).$$

Vidíme, že oba konečné výsledky jsou stejné, proto je operace $\circ$ asociativní. Na závěr ověříme uzavřenost. Pro to ale nejprve budeme potřebovat explicitní tvar matice Lorentzova boostu Λ a (dva)vektoru a

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix},$$

kde $a^0 > 0$ (zajímají nás pouze translace, které míří z minulosti do budoucnosti), $\left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 > 0$ (omezíme se pouze na časupodobné vektory), v je rychlost a

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{2}$$

Z nerovností se dá dále jednoduše získat, že

$$a^0 > a^1. \tag{3}$$

Pro ověření uzavřenosti potřebujeme ukázat, že v rovnici (1) je $\Lambda' a + a'$ (dva)vektor a $\Lambda'\Lambda$ matice Lorentzova boostu. Explicitní tvar (dva)vektoru je

$$\Lambda' a + a' = \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^0 \\ a^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'^0 \\ a'^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma a^0 + \frac{v}{c}\gamma a^1 + a'^0 \\ \frac{v}{c}\gamma a^0 + \gamma a^1 + a'^1 \end{pmatrix}.$$

Nejprve ukážeme, že nulová složka je větší než nula, tj.

$$\left(\gamma a^0 + \frac{v}{c}\gamma a^1 + a'^0\right) \overset{?}{>} 0.$$

Toto plyne z

$$a'^0 > 0, \quad \frac{v}{c} < 1 \quad \text{a} \quad a^0 > a^1,$$

(je důležité nezapomenou, že a^1 může být i záporné). Dále ukážeme časupodobnost, tj.

$$\left(\gamma a^0 + \frac{v}{c}\gamma a^1 + a'^0\right)^2 - \left(\frac{v}{c}\gamma a^0 + \gamma a^1 + a'^1\right)^2 \overset{?}{>} 0.$$

Roznásobíme závorky

$$\gamma^2 \left(a^0\right)^2 + \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 \left(a^1\right)^2 + \left(a'^0\right)^2 + 2\gamma^2 \frac{v}{c} a^0 a^1 + 2\gamma a^0 a'^0 + 2\frac{v}{c}\gamma a^1 a'^0 - \frac{v^2}{c^2}\gamma^2 \left(a^0\right)^2 -$$
$$- \gamma^2 \left(a^1\right)^2 - \left(a'^1\right)^2 - 2\gamma^2 \frac{v}{c} a^0 a^1 - 2\frac{v}{c}\gamma a^0 a'^1 - 2\gamma a^1 a'^1 =$$
$$= \gamma^2 \left(a^0\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) - \gamma^2 \left(a^1\right)^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) + \left(a'^0\right)^2 - \left(a'^1\right)^2 + 2\gamma \left(a^0 a'^0 + \frac{v}{c} a^1 a'^0 - \frac{v}{c} a^0 a'^1 - a^1 a'^1\right).$$

Z (2) platí

$$1 - \frac{v^2}{c^2} = \frac{1}{\gamma^2},$$

tudíž nerovnice má tvar

$$\left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^2 + \left(a'^0\right)^2 - \left(a'^1\right)^2 + 2\gamma \left(a^0 a'^0 + \frac{v}{c} a^1 a'^0 - \frac{v}{c} a^0 a'^1 - a^1 a'^1\right) \overset{?}{>} 0.$$

Kvůli časupodobnosti (dva)vektorů platí

$$\left(a^0\right)^2 - \left(a^1\right)^1 > 0, \quad \left(a'^0\right)^2 - \left(a'^1\right)^1 > 0,$$

proto stačí ukázat

$$a^0 a'^0 + \frac{v}{c} a^1 a'^0 - \frac{v}{c} a^0 a'^1 - a^1 a'^1 \overset{?}{\geq} 0.$$

Zde využijeme nerovnost (3) a budeme zmenšovat

$$a^0 a'^0 + \frac{v}{c} a^1 a'^0 - \frac{v}{c} a^0 a'^1 - a^1 a'^1 > a^1 a'^1 + \frac{v}{c} a^1 a'^1 - \frac{v}{c} a^1 a'^1 - a^1 a'^1 = 0.$$

Pro dokončení důkazu uzavřenosti potřebujeme ještě ukázat, že $\Lambda'\Lambda$ je opět Lorentzův boost, označme ho jako $\tilde{\Lambda}$,

$$\Lambda'\Lambda = \tilde{\Lambda} = \begin{pmatrix} \tilde{\gamma} & \frac{\tilde{v}}{c}\tilde{\gamma} \\ \frac{\tilde{v}}{c}\tilde{\gamma} & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Vynásobme matice boostů

$$\Lambda'\Lambda = \begin{pmatrix} \gamma' & \frac{v'}{c}\gamma' \\ \frac{v'}{c}\gamma' & \gamma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \frac{v}{c}\gamma \\ \frac{v}{c}\gamma & \gamma \end{pmatrix} = \gamma'\gamma \begin{pmatrix} 1 + \frac{v'v}{c^2} & \frac{v+v'}{c} \\ \frac{v+v'}{c} & 1 + \frac{v'v}{c^2} \end{pmatrix}.$$

Našim cílem je získat tvar $\tilde{\gamma}$ a $\tilde{v}$. Začněme upravovat diagonální prvky matice, které by se měly rovnat $\tilde{\gamma}$

$$\begin{aligned} \gamma'\gamma\left(1 + \frac{v'v}{c}\right) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2}}\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}\left(1 + \frac{v'v}{c^2}\right) = \frac{1 + \frac{v'v}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v'^2}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} + \frac{v'^2v^2}{c^4}}} = \\ &= \frac{1 + \frac{v'v}{c}}{\sqrt{1 + 2\frac{v'v}{c^2} + \frac{v'^2v^2}{c^4} - \frac{v'^2}{c^2} - 2\frac{v'v}{c^2} - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1 + \frac{v'v}{c^2}}{\sqrt{\left(1 + \frac{v'v}{c^2}\right)^2 - \left(\frac{v'+v}{c}\right)^2}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(v'+v)^2}{c^2\left(1+\frac{v'v}{c^2}\right)^2}}} \equiv \tilde{\gamma}. \end{aligned}$$

Z tvaru $\tilde{\gamma}$ vyčteme, že

$$\tilde{v} = \frac{v' + v}{1 + \frac{v'v}{c^2}}. \tag{4}$$

Ještě zbývá ověřit, že získané $\tilde{\gamma}$ a $\tilde{v}$ je konzistentní i s mimodiagonálními prvky matice $\tilde{\Lambda}$, ale to je už jednoduché. Z celého příkladu, i když byl ryze matematický, plyne jeden fyzikální závěr, a tím je rovnice (4), jedná se totiž o předpis pro relativistické skládání rychlostí. Tento fyzikální závěr jsme však získali jen z toho, že Poincarého grupa je uzavřená vzhledem k operaci $\circ$.