D. Hemzal, F. Münz
hemzal@physics.muni.cz

Příklad – Helmholtzova rovnice

Uvažujme stacionární formu skalární homogenní vlnové rovnice

$$\Delta U - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0.$$

Stacionarita předpokládá časově ustálený stav, o kterém u vlnové rovnice víme, že je realizován harmonickým řešením $U(\boldsymbol{x}, t) = u(\boldsymbol{x}) \exp(\mathrm{i}\omega t)$. Dosazením tohoto ansatzu vskutku odstraníme z rovnice časovou závislost a dostáváme *Helmholtzovu* rovnici

$$\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u = 0.$$

Protože je vlnová rovnice lineární, lze se na Helmholtzovu rovnici dívat také jako na rovnici pro jednu frekvenční kopmonentu časově proměnného pole, neboť obecně

$$U(\boldsymbol{x}, t) = \sum_{\omega} u_{\omega}(\boldsymbol{x}) \exp(\mathrm{i}\omega t)$$

Obecné časově proměnné pole pak můžeme získat tak, že provedeme větší množství stacionárních simulací pro různé frekvence a ty potom v prostoru složíme s váhami, které získáme jako komponenty Fourierova rozvoje budícího pulzu.

D. Hemzal, F. Münz
hemzal@physics.muni.cz

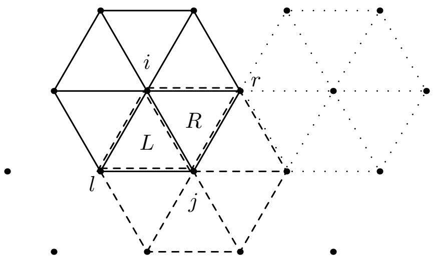
Sestavme nyní slabou formulaci úlohy s Helmholtzovou rovnicí:

$$\int_\Omega \left(\Delta u + \frac{\omega^2}{c^2} u \right) \mathrm{d}\Omega = 0.$$

Dosazením operátoru $L(u) \equiv \Delta u + (\omega^2/c^2)u$ do funkcionálu MKP, přičemž $u(\boldsymbol{x}) = \sum u[i]N[i]$, dostáváme

$$j: \qquad \sum_i u[i] \int_{\partial\Omega} N[j] \boldsymbol{\nabla} N[i] \, \mathrm{d}\boldsymbol{W} - \sum_i u[i] \int_\Omega \left[\boldsymbol{\nabla} N[i] \boldsymbol{\nabla} N[j] - \frac{\omega^2}{c^2} N[j] N[i] \right] \mathrm{d}\Omega = 0.$$

První integrál opět představuje příspěvek od okrajových podmínek a druhý od samotného operátoru Helmholtzovy rovnice.



K diagonální členům K_{ii} budou přispívat všechny elementy, obsahující uzel i.

K nediagonálním členům K_{ij} přispějí vždy pouze dva elementy, které oba uzly i, j obsahují.

D. Hemzal, F. Münz
hemzal@physics.muni.cz

Sestavení rovnic ve 2D

Pro diagonální integrál K_{ii} platí

$$K_{ii} = \sum_{T_k \in \mathrm{supp} N[i]} \int\limits_{T_k} \left(\boldsymbol{\nabla} N[i] \cdot \boldsymbol{\nabla} N[i] - \frac{\omega^2}{c^2} N[i] N[i] \right) \mathrm{d}S,$$

přičemž

$$\int\limits_{T_k} \left(\boldsymbol{\nabla} N^{T_k}[i] \cdot \boldsymbol{\nabla} N^{T_k}[i] - \frac{\omega^2}{c^2} N^{T_k}[i] N^{T_k}[i] \right) \mathrm{d}S =$$

$$= - \left(\frac{1}{-2S_k} \right)^2 \frac{\omega^2}{c_k^2} \Big\{ (y_l - y_r)^2 I(2,0) + (x_r - x_l)^2 I(0,2) + 2(y_l - y_r)(x_r - x_l) I(1,1) +$$

$$+ 2(y_l - y_r)(x_l y_r - x_r y_l) I(1,0) + 2(x_r - x_l)(x_l y_r - x_r y_l) I(0,1) +$$

$$+ \big[(x_l y_r - x_r y_l)^2 - \frac{c_k^2}{\omega^2} [(y_l - y_r)^2 + (x_r - x_l)^2] \big] I(0,0) \Big\},$$

kde uzly l, r jsou v tomto případě zbývající dva uzly vyhodnocovaného elementu, platí $T_k(i,l,r)$.

D. Hemzal, F. Münz
hemzal@physics.muni.cz

Obdobně, pro nediagonální členy platí

$$K_{ij} = \int\limits_{L_j} + \int\limits_{R_j} \left(\boldsymbol{\nabla} N_i^{()} \cdot \boldsymbol{\nabla} N_j^{()} - \frac{\omega^2}{c^2} N_i^{()} N_j^{()} \right) \mathrm{d}\Omega \equiv I_l + I_r.$$

Odtud,

$$\begin{aligned} I_v = -\left(\frac{1}{2S_V}\right)^2 \frac{\omega^2}{c_k^2} \Big\{ & (y_v - y_j)(y_i - y_v) I(2,0) + (x_j - x_v)(x_v - x_i) I(0,2) + \\ & + \big[(y_v - y_j)(x_v - x_i) + (y_i - y_v)(x_j - x_v)\big] I(1,1) + \\ & + \big[(y_v - y_j)(x_i y_v - x_v y_i) + (y_i - y_v)(x_v y_j - x_j y_v)\big] I(1,0) + \\ & + \big[(x_j - x_v)(x_i y_v - x_v y_i) + (x_v - x_i)(x_v y_j - x_j y_v)\big] I(0,1) + \\ & + \Big[(x_v y_j - x_j y_v)(x_i y_v - x_v y_i) - \frac{c_k^2}{\omega^2}[(y_v - y_j)(y_i - y_v) + (x_j - x_v)(x_v - x_i)]\Big] I(0,0) \Big\}, \end{aligned}$$

kde příspěvek pro levý a pravý trojúhelník získáme jako $I_l = I_{v \equiv l}$ a $I_r = I_{v \equiv r}$.

D. Hemzal, F. Münz
hemzal@physics.muni.cz

Helmholtzova rovnice - okrajové podmínky

Na závěr prozkoumejme možné okrajové podmínky pro Helmholtzovu rovnici. Dirichletova podmínka předepisuje amplitudu vybrané frekvenční komponenty v daném místě hranice. Homogenní Neumannova podmínka představuje plně odrazivou hranici. Poslední podmínka, kterou je vhodné připravit, je pak hranice volně vlnění propouštějící. Tuto podmínku lze však realizovat pouze přibližně, a to například takto: uvažujme rovinnou vlnu

$$u = u_0 \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}).$$

Má-li taková vlna volně projít hranicí, musí být její gradient

$$\boldsymbol{\nabla} u = u_o \mathrm{i}\boldsymbol{k} \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\boldsymbol{k} u$$

rovnoběžný s normálou k této hranici. Přenásobíme-li obě strany rovnice normálou $\boldsymbol{n}$,

$$\boldsymbol{\nabla} u \cdot \boldsymbol{n} \equiv u_n = \mathrm{i}\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} u$$

vede požadavek rovnoběžnosti obou vyskytujících se vektorů na podmínku $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{k}||\boldsymbol{n}|$ a tedy

$$\partial\Omega : \qquad u_n = \frac{2\pi \mathrm{i}}{\lambda} u,$$

což je podmínka smíšeného typu. Protože tato podmínka zajišťuje, že vlnění bude procházet kolmo každou příslušnou částí okraje úlohy, je velmi důležité konstruovat tvar hranice pro numerickou simulaci v souladu s předpokládáným průběhem analytického řešení úlohy.

Jinou možností je k hranici, kterou má vlna simulovaný objem opouštět, přidat několik vrstev prostředí, ve kterém gradientně budeme zvyšovat útlum prostředí. Při vhodném nastavení se téměř žádná energie nevrátí zpět do simulovaného objemu a vlna efektivně prostředí volně opustí (nezávisle na směru letu vůči hranici).