Astrofyzika I. cvičení

Vladimír Štefl
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Keplerovy zákony - Nová astronomie

Zákon ploch 1602

Zákon ploch vyslovil Kepler v *Nové astronomii* ve dvou zněních:

1. *Rychlost planety se mění nepřímo úměrně se vzdáleností od Slunce*, kap. 39.
2. *Rychlost planety se mění tak, že průvodič spojující planetu se Sluncem opisuje stejné plochy za stejné časy*, kap. 40.

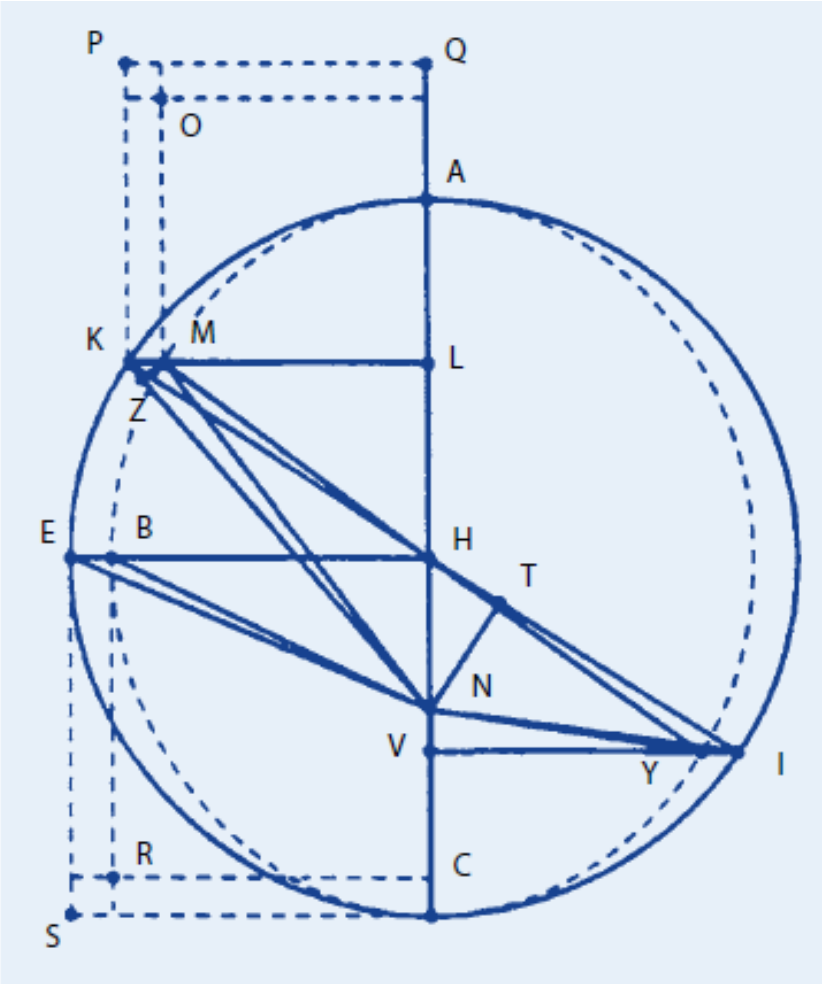
První znění označujeme jako *tzv. zákon vzdáleností*, který byl ve své době chápán jako fyzikální zákon. Dnešní formulaci zákona ploch se blížilo druhé znění, na úrovni podávané Keplerem bylo spíše geometrickým vyjádřením, matematickým prostředkem k interpretaci fyzikální problematiky.

Eliptický zákon 1609

Eliptický zákon

Umístěno do historie, začátkem r. 1605 Kepler dostal inspirující nápad o možném eliptickém tvaru dráhy Marsu. K vyslovení eliptického zákona dospěl autor analýzou tabulky propočítaných vzdáleností, kde zjistil nesoulad výsledků výpočtů a pozorovacích údajů. Provedl proto úpravu libranční metody a dospěl k velmi blízkým hodnotám vzdáleností odpovídajícím pohybu po eliptické dráze, což ho vedlo ke konkrétním závěrům v kap. 58, kde Kepler psal, že dráha z kap. 43 je příliš velká a z kap. 45 příliš malá. Proto pouze elipsa ležící uprostřed obou je správným vystižením dráhy. Na konci kap. 58 *Nové astronomie* uvedl: „*… jakýkoliv tvar planetárních drah musí být opuštěn, kromě dokonalé elipsy…*“

Keplerovy zákony



Přechod k eliptické dráze byl detailně zachycen v článku [9], vybereme z něho pouze některé ukázky. Kepler stanovil elipsu (viz obr. 2) prostřednictvím redukce (lineární transformace) všech souřadnic pomocné excentrické kružnice v poměru velikostí malé a velké poloosy elipsy $b : a$, jestliže $HB = b$, $NB = a$. Elipsu vepsal do zmiňované kružnice tak, že z jejího obvodu spustil kolmice KL, EH na přímku apsid AC, které protínaly v bodech M a B obvod elipsy. Zmiňovaný poměr v původním textu v *Nové astronomii* autor zapsal $BH : HE = ML : KL$. Dále odvodil poměr velikostí ploch elipsy ABC a kruhu AEC, který byl úměrný poměru velikostí kolmic z elipsy a z kružnice, tedy poměru malé a velké poloosy, platilo $ABC : AEC = BH : EH$. To Keplerovi umožnilo zaměnit plochy sektorů elipsy a kruhu. Výsledkem byl poměr obsahu ploch $ANM : AKN = ML : KL = b : a$, odpovídající poměru velikostí kolmic z elipsy a kružnice.

Keplerovy zákony - Nová Astronomie

Následně Kepler přešel ke studiu závislosti oběžné rychlosti – *celeritas* – pohybu Marsu na vzdálenosti od Slunce. Jako první astronom zkoumal souvislost mezi hodnotami spojitých změn úhlových rychlostí planety při pohybu kolem Slunce a jejími vzdálenostmi od něho. Vycházel z úvahy, že doba strávená planetou na malém oblouku dráhy – *mora* – je úměrná její vzdálenosti od Slunce. Celkový čas pro delší oblouk poměřoval součtem všech vzdáleností obsažených v sektoru odpovídajícímu oblouku. Z dnešního pohledu se jednalo o integrační problém.

V *Nové astronomii* Kepler uvedl: „*Protože jsem poznal, že existuje nekonečný počet bodů excentrické kružnice [dráhy] a nekonečný počet jejich vzdáleností [od Slunce], napadlo mne, že všechny tyto vzdálenosti jsou obsaženy v dráhové rovině. Vzpomněl jsem si, že takovým způsobem kdysi také Archimédés rozdělil plochu kruhu na nekonečný počet trojúhelníků, když hledal poměr obvodu kružnice k průměru.*“

Keplerovy zákony - Harmonie světa

Harmonický zákon 1618

Harmonický zákon

První dva Keplerovy zákony se původně historicky týkaly pohybu pouze jediné planety – Marsu. Po roce 1609 Kepler ověřoval a potvrdil jejich platnost postupně také pro ostatní planety. Třetí zákon se vztahoval k více planetám, neboť Kepler přešel k obecnějšímu hledání řádu pro uspořádání a pohyb planet ve Sluneční soustavě, původu v ní existujících harmonických proporcí. Napadla ho myšlenka zkoumat souvislost mezi vzdálenostmi planet od Slunce a jejich oběžnými dobami. Přitom vycházel ze studia vztahu mezi úhlovou rychlostí planet a jejich vzdáleností od Slunce, v dnešní podobě z invariantu $r^3\omega^2 = konst$. Ke konkrétním matematickým závěrům dospěl v roce 1618, zachytil je v knize páté *Harmonie světa* [2] slovy: „*Ale je to věc zcela jasná a přesná – poměr, který je mezi oběžnými dobami kterýchkoliv dvou planet, je přesně půldruha násobkem poměru středních vzdáleností, tedy samotných drah; ovšem je přitom třeba dbát na to, že aritmetický průměr obou průměrů eliptické dráhy je poněkud menší než větší průměr…*“

Keplerovy zákony, jejich přijetí

Nová astronomie 1609 původní historická formulace I. a II. zákona

Harmonie světa 1618-1621 III. Keplerův zákon

Rudolfinské tabulky 1627 tabulky planet a Měsíce

přijetí zákonů nebylo jednoznačné, objevovaly se pokusy o jiný výklad pohybu planet, nejvýraznější postavou *Ismaël Boulliau (1605-1694),* **nebyl uznáván** především **zákon ploch**.

Definitivní uznání až po vydání Principií Newtonem 1687.

některé významné osobnosti K. zákony v 17. století ignorovali, např. *Blaise Pascal (1623-1662), Francis Bacon (1561-1626), Galileo Galilei (1564-1642), René Descartes (1596-1650).*

Do roku 1630 přijali zákony *Giovanni Magini (1555-1617), Thomas Harriot (1560-1621), Severin Longomontanus (1562-1647), David Fabricius (1564-1617), Willebrord Snell (1580-1626), Federigo Cesi (1585-1630), Jacob Bartsch (1600-1633),* kritériem pravdivosti zákonů - **předpovědi astronomických jevů**, např. přechod Merkuru přes sluneční disk 7. listopadu 1631 pozorovaný *Pierrem Gassendim (1592-1655).*

Určování hmotnosti

III. Keplerův zákon

1. Stanovte hmotnost Jupiteru, je-li známo, že měsíc Io obíhá ve vzdálenosti 422 000 km a má oběžnou dobu 1,77 dne.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}\,(M_J + M_{Io})$$

2. Určete hmotnost Marsu, známe-li, že měsíc Phobos obíhá ve vzdálenosti 9 380 km a má oběžnou dobu 0,32 dne.

3. U dvojhvězdy byly stanoveny: paralaxa $\pi = 0{,}05$ " a velké poloosa pozorované dráhy a" = 2" , oběžná doba složek 100 roků. Nalezněte hmotnosti jednotlivých složek, je-li známo, že se nacházejí od hmotného středu dvojhvězdy ve vzdálenostech, které jsou v poměru 4 : 1.

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2}$$

4. Stanovte vzdálenost dvojhvězdy, znáte-li oběžnou dobu složek 27 roků, hmotnosti 3 M_S a 5 M_S a hlavní poloosu pozorované dráhy a" = 0,45".

$$M_1 + M_2 = \left(\frac{a''}{\pi''}\right)^3 T^{-2}\ .$$

Určování hmotností planet, Jupiteru, Marsu

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M_J + M_{Io}) \qquad M_J = \frac{4\pi^2 a^3}{G\,T^2} = \frac{2.96}{1{,}56}10^{27} = 1{,}9.10^{27}\ kg$$

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}(M_M + M_P) \qquad M_M = \frac{4\pi^2 a^3}{G\,T^2} = 6{,}4.10^{23}\ kg$$

Původní historická metoda, viz Principie, určení relativní hmotnosti J, S

Jak určujeme hmotnosti planet, které nemají měsíce?

Později aplikováno na fyzické dvojhvězdy

Slapy na měsíci Io

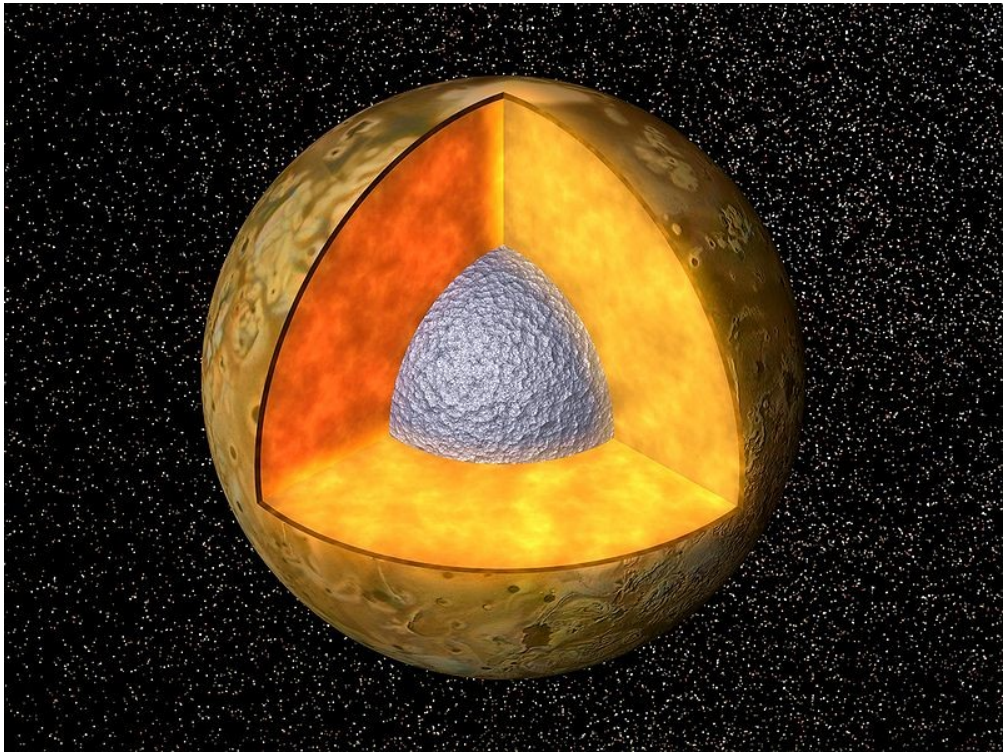
časově proměnné slapy

excentrická dráha Io

- změna vzdálenosti od Jupitera

- změna oběžné rychlosti, mění se natočení vzhledem k výdutím

Io



Jádro železo, síra ?
r = 300 km
20 % hmotnosti měsíce
natavený plášť silikátový
obal ≈ 20 km

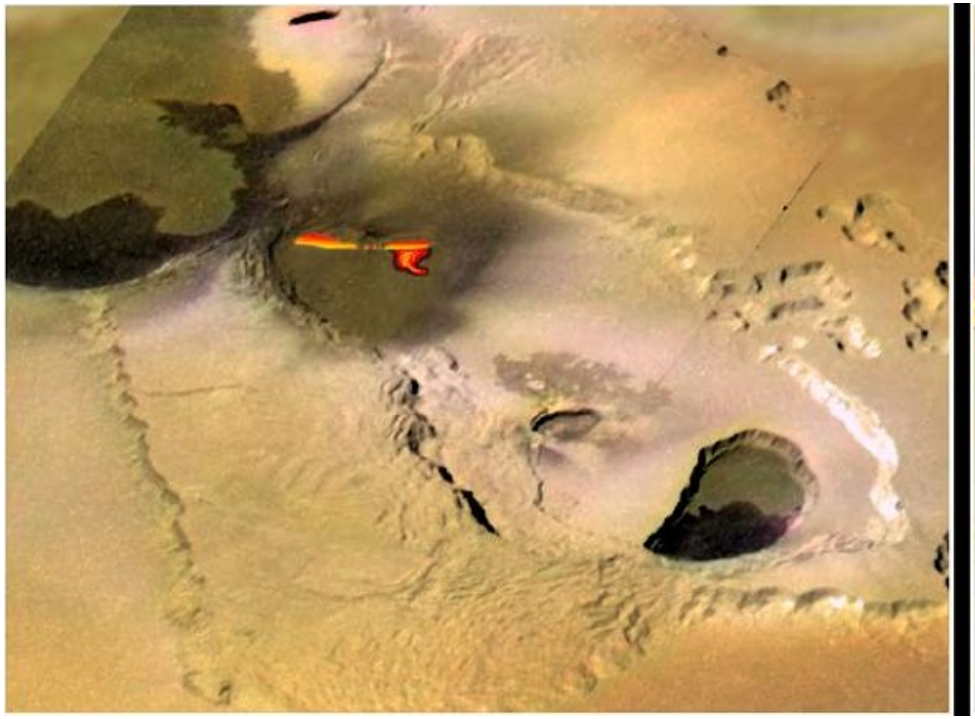
Proměřování toku infračerveného záření → slapy produkují proměnný tepelný výkon, průměrně 9 .10 ^{13} W, tepelný tok na povrchu 2 W.m^{-2}

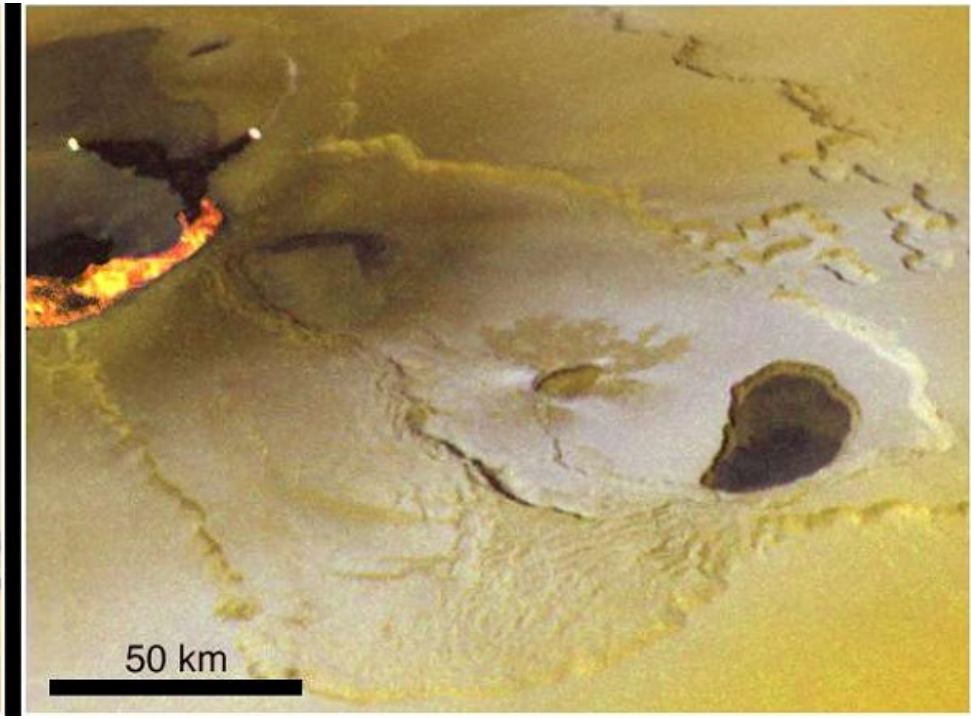
Povrch a atmosféra měsíce Io

. 1974: spektroskopie -v atmosféře zjištěn sodík, vápník, železo mangan, emisní čáry sodíku dominantní, proč?

Voyager 1 – existence šesti sopek na povrchu, který je geologicky nejmladším ve Sluneční soustavě,

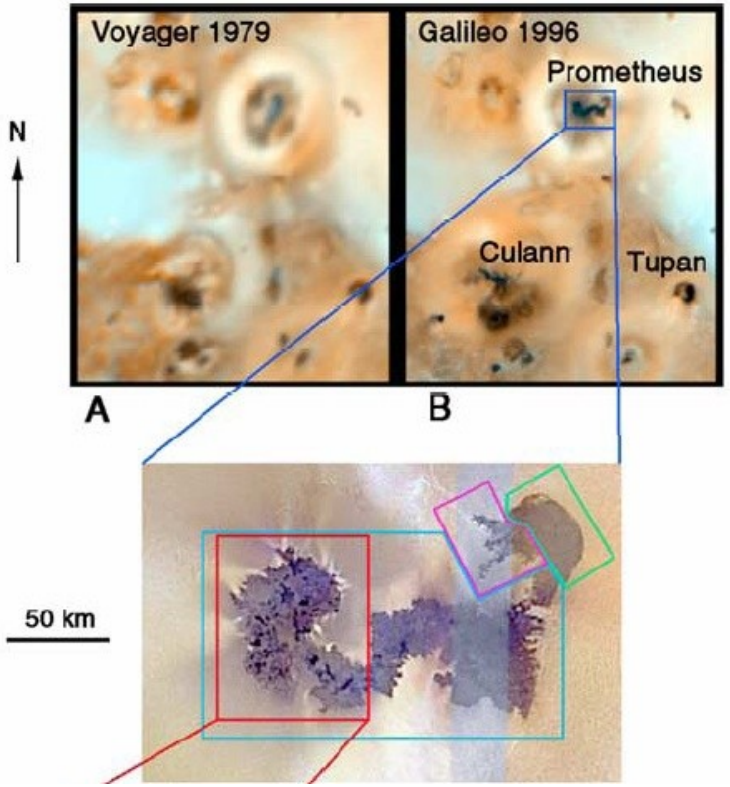
vysoké teploty v blízkosti sopek



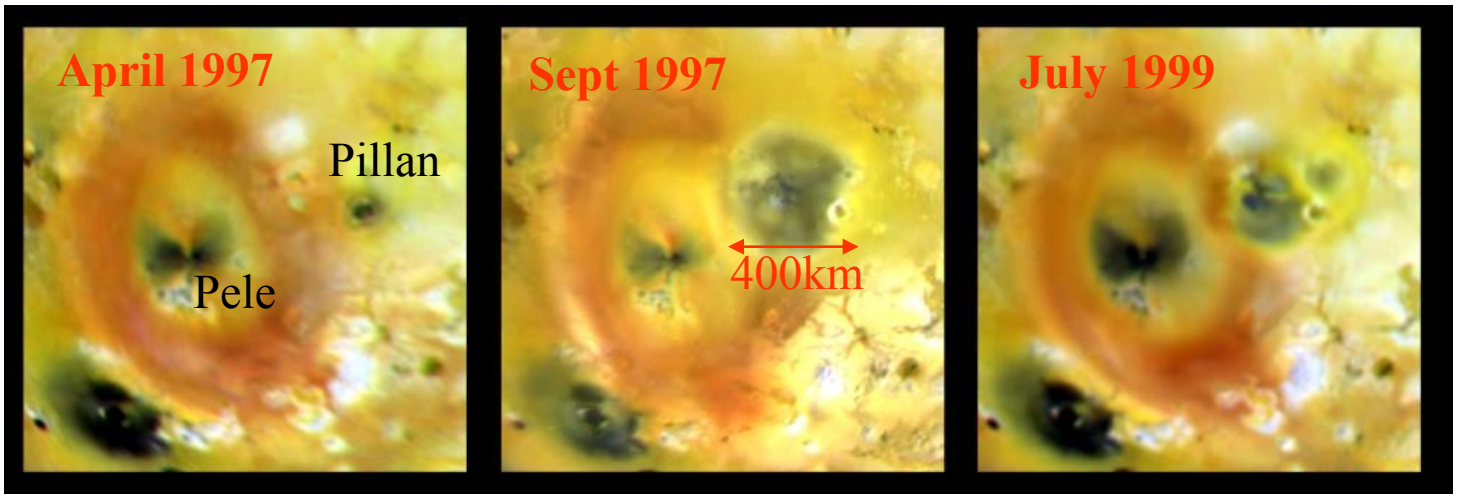


Časová proměnnost povrchu

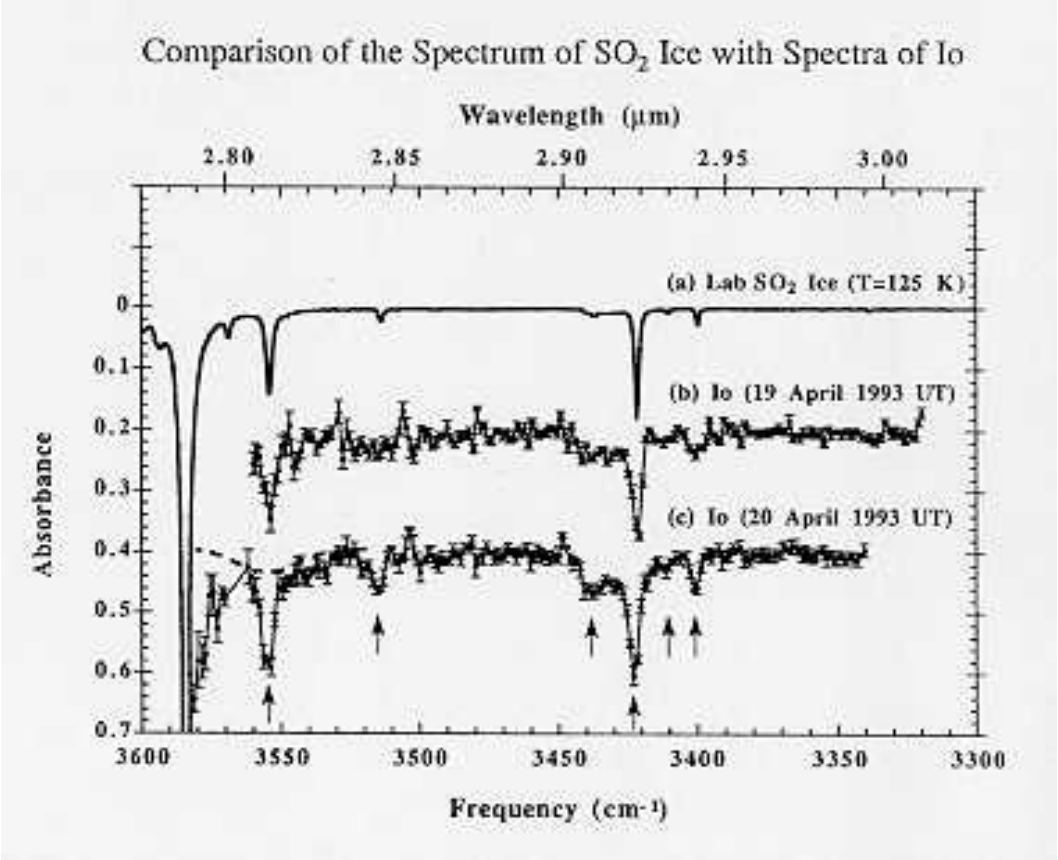
Změny zjištěné od sondy Voyager do Galileo a při misi Galileo



Tekoucí láva vyvržená ze sopky Prometheus mezi misemi Voyager and Galileo

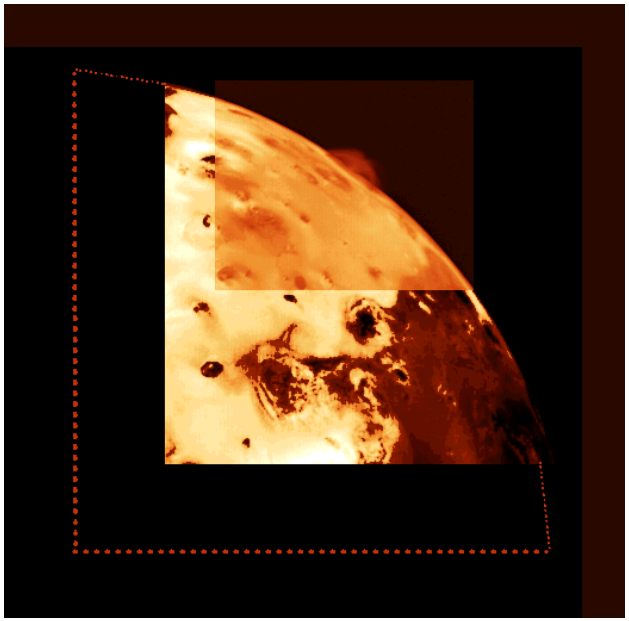


Infračervená astronomie - měsíc Io



Atmosféra: SO_2, SO, Na, K, O

Určení parametrů sopky Prometheus - úloha



snímek sopky - Voyager 1, březen 1979, vzdálenost 20 000 km

g	m.s^{-2}
Io	1.81
Earth	9.81

Ze zjištěné výšky výstupu h určíme rychlost v vyvrhování materiálu sopky, poloměr Io je R =1 821 km, levý dolní roh odpovídá středu měsíce, typické hodnoty h ≈ 300 km, v ≈ 1 km.s^{-1}

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad gh = \frac{1}{2}v^2 \qquad h = \frac{1}{2}gv^2 \qquad v = \sqrt{2g \times h}$$

Ultrafialový snímek HST sopka Pele
červenec 1996, WFPC2, F255W, exp. ≈ 10 minut

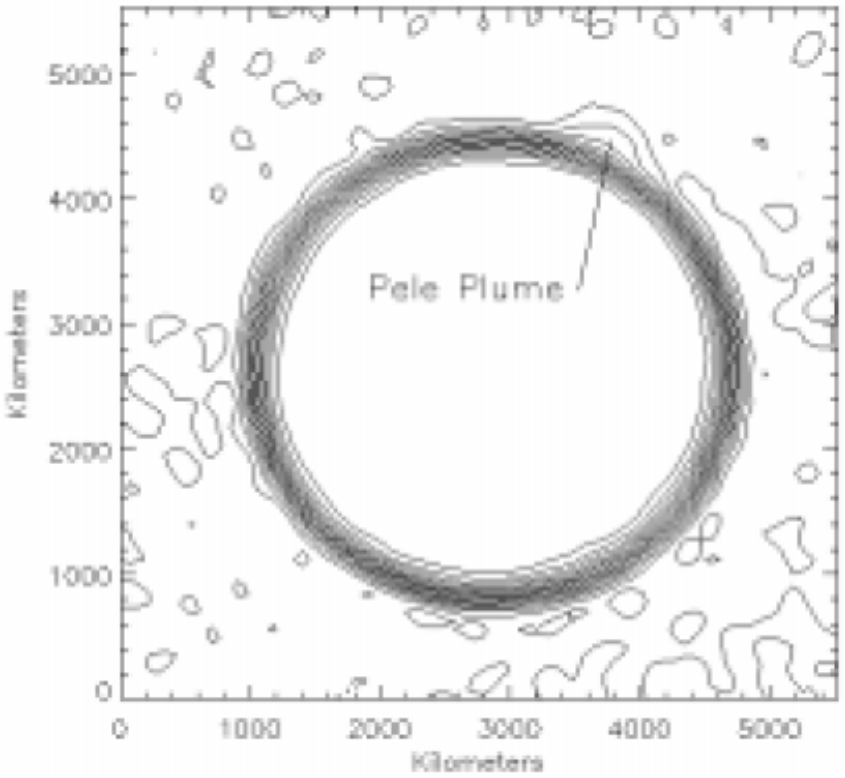


Figure 1. Contour version of an ultraviolet (237-281 nm) HST image of Io transiting Jupiter, showing the Pele plume off Io's limb. Note that Pele and Io's disk are darker than Jupiter, which fills the frame. This map derived from an average of the first two frames of the observing sequence.

HST výzkum sopky Pele

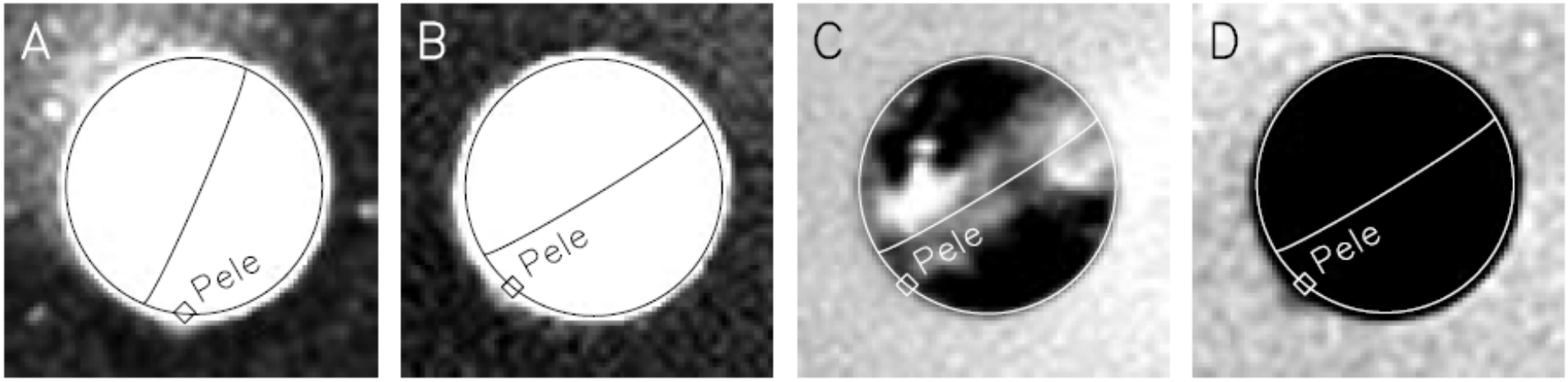


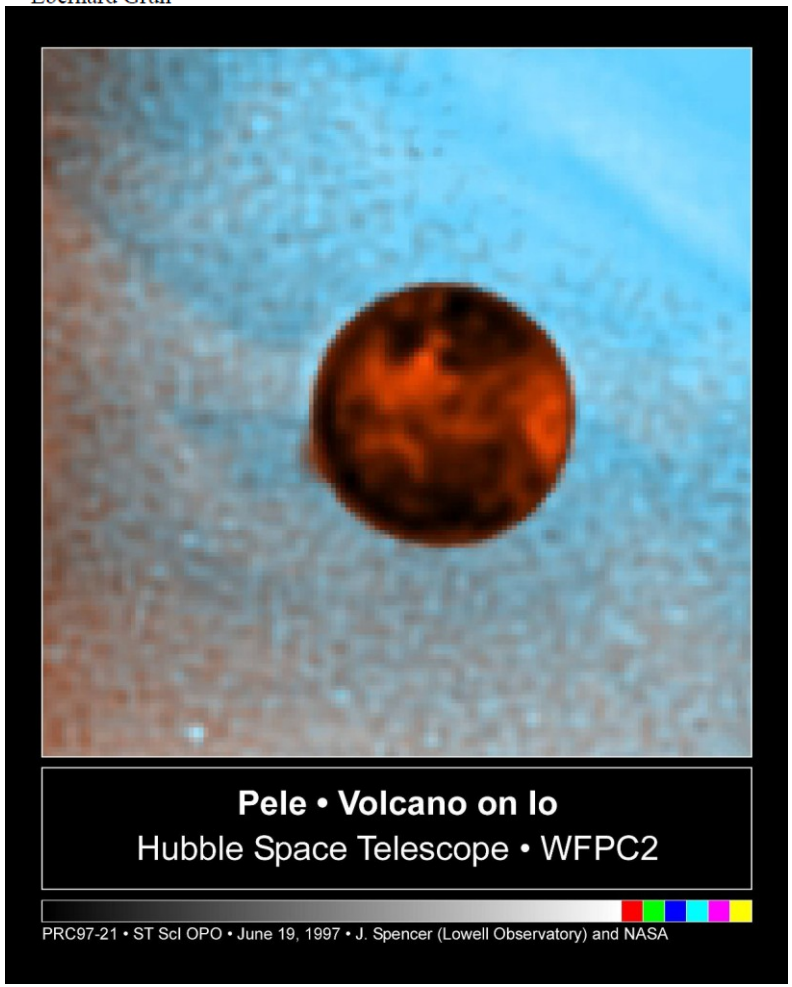
Fig. 1: October 1999 WPFC2 images of Io showing the Pele plume. A: 10/09, 10:46 UT, F255W filter, plume faintly visible against dark sky. B: 10/11, 06:26 UT, F336W filter, plume faintly visible against dark sky. C: 10/11, 06:44 UT, F336W filter, plume invisible against Jupiter. D: 10/11, 06:47 UT, F225W filter, plume visible against Jupiter. Io's limb, equator, and the location of the Pele vent are shown. Images have been sharpened by Lucy-

Vyvrhování prachu při erupcích na Io

GEOPHYSICAL RESEARCH LETTERS, VOL. , NO. , PAGES 1–4,

Jovian Dust Streams: A monitor of Io's volcanic plume activity

Harald Krüger[1], Paul Geissler[2], Mihály Horányi[3], Amara L. Graps[1,4], Sascha Kempf[1], Ralf Srama[1], Georg Moragas-Klostermeyer[1], Richard Moissl[1], Torrence V. Johnson[5], Eberhard Grün[1,6]



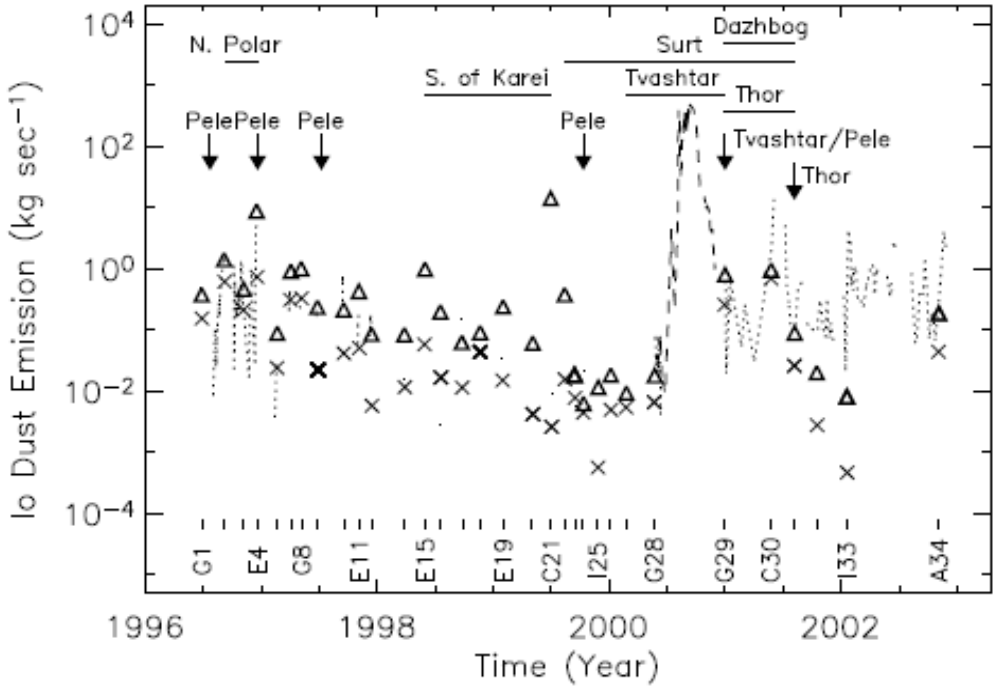
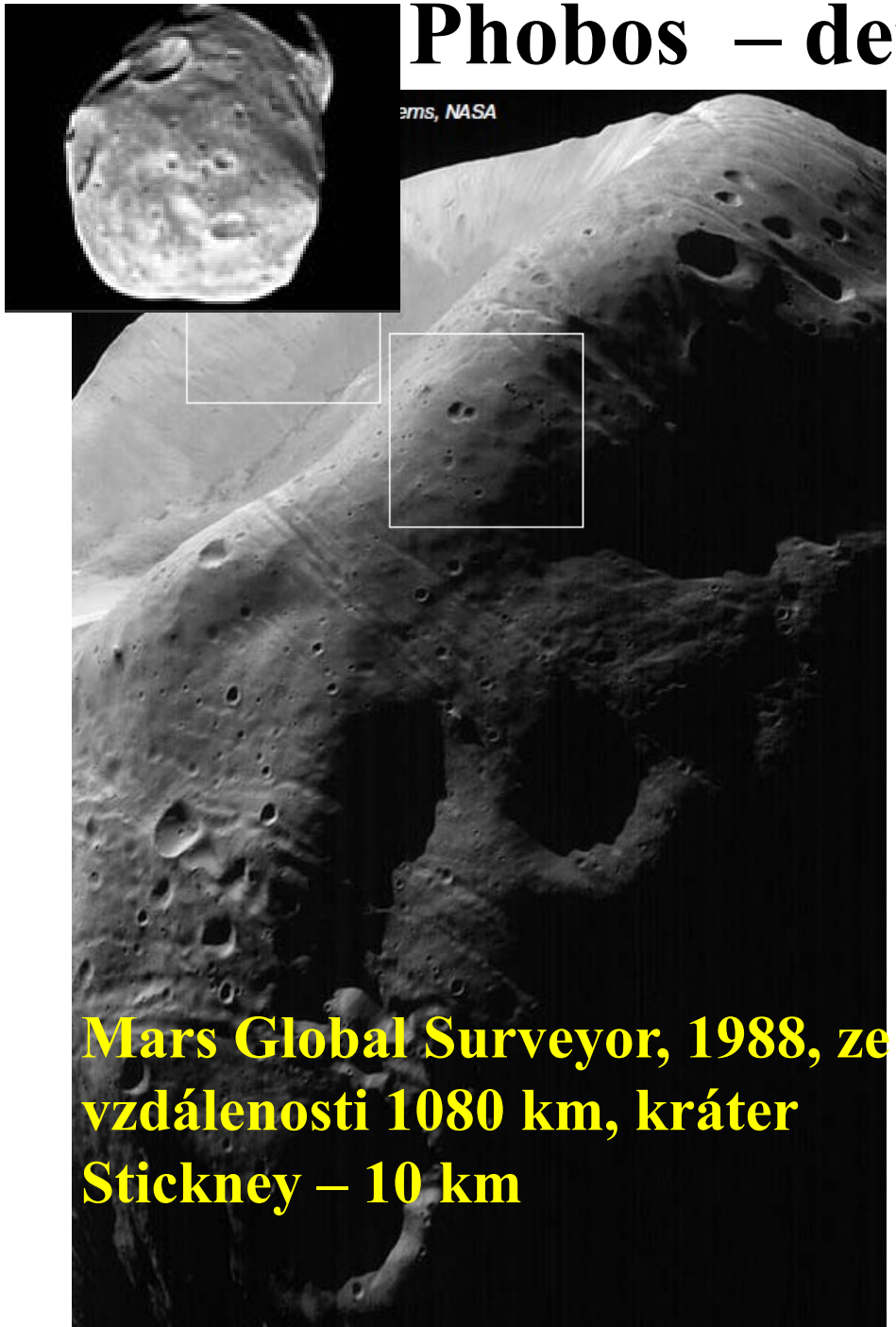
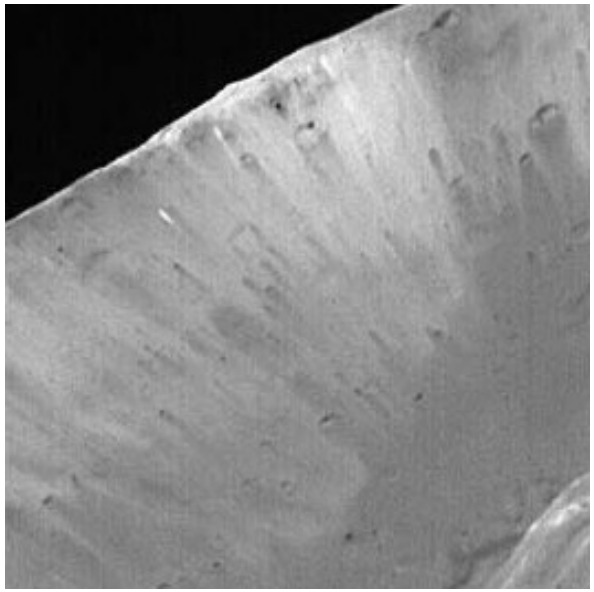


Figure 2. Dust emission rate of Io calculated with Eqn. 1. Triangles and crosses denote the maxima and minima derived from measurements in the distance range $13 < d < 30\,R_J$, respectively. The dashed line is for the G28 orbit in the range $30 < d < 280\,R_J$, dotted lines show the remaining orbits with $30 < d < 400\,R_J$. Thick horizontal bars indicate periods when large-area surface changes occurred on Io [*Geissler et al.*, 2003], arrows indicate individual plume sightings. Note that South of Karei probably erupted just before C21, and that Surt's eruption probably took place between G29 and C30 (see text). Galileo perijove passages (vertical dashes) and orbit labels are indicated at the bottom. No dust stream measurements were collected during Galileo orbits 5 and 13.

Phobos – detaily povrchu

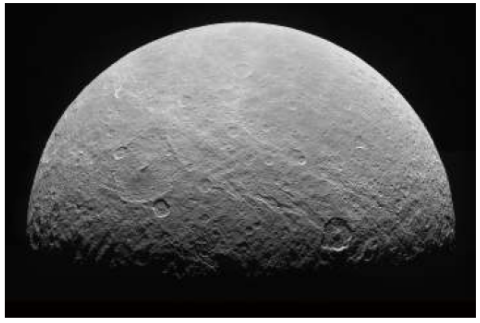


Mars Global Surveyor, 1988, ze vzdálenosti 1080 km, kráter Stickney – 10 km



Určování hustoty Saturnu

Úloha 9. Případní obyvatelé měsíce Rhea (obr. 8), který má pro pozemský život svým složením příhodnou kyslíkovou atmosféru, bohužel však velmi řídkou s nízkou teplotou 50–100 K, by pozorovali Saturn pod středním úhlovým průměrem $\alpha = 0{,}216\,3$ rad.



Obr. 8

Při znalosti oběžné doby měsíce činící $T = 4{,}517\,5$ dne díky svým fyzikálním znalostem určili střední hustotu Saturnu. Zkuste je napodobit.

Řešení. Použijeme III. Keplerův zákon

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2}\left(M_\mathrm{S} + M_\mathrm{R}\right).$$

Dále platí pro úhlovou velikost průměru

$$\alpha = \frac{2R_\mathrm{S}}{a}.$$

Hmotnost měsíce Rhea $M_\mathrm{R} = 2{,}5 \cdot 10^{21}$ kg můžeme oproti hmotnosti Saturna $M_\mathrm{S} = 5{,}7 \cdot 10^{26}$ kg zanedbávat. Dosazením do III. Keplerova zákona při

$$M_\mathrm{S} = \frac{4}{3}\pi R_\mathrm{S}^3 \varrho_\mathrm{S}$$

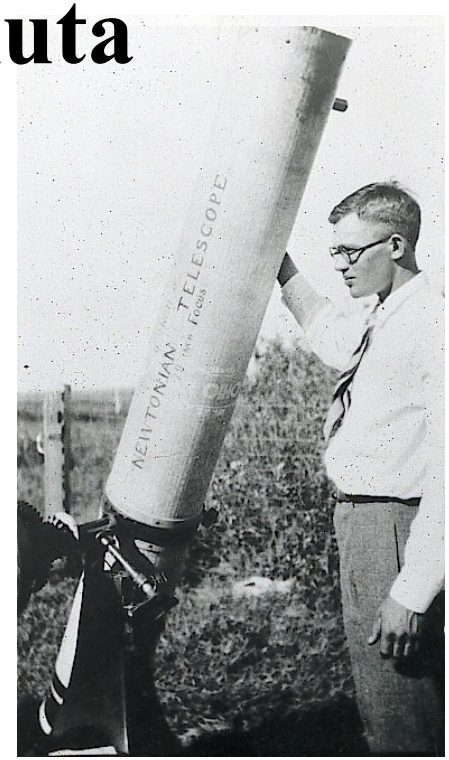
obdržíme pro hustotu

$$\varrho_\mathrm{S} = \frac{24\pi}{GT^2\alpha^3} \doteq 700\ \mathrm{kg \cdot m^{-3}}.$$

Nízká hustota naznačuje, že vodík a helium jsou značně zastoupeny i v nitru planety. Po chemické stránce je planeta složena z molekulárního vodíku, helia, metanu a čpavku.

Objev Pluta

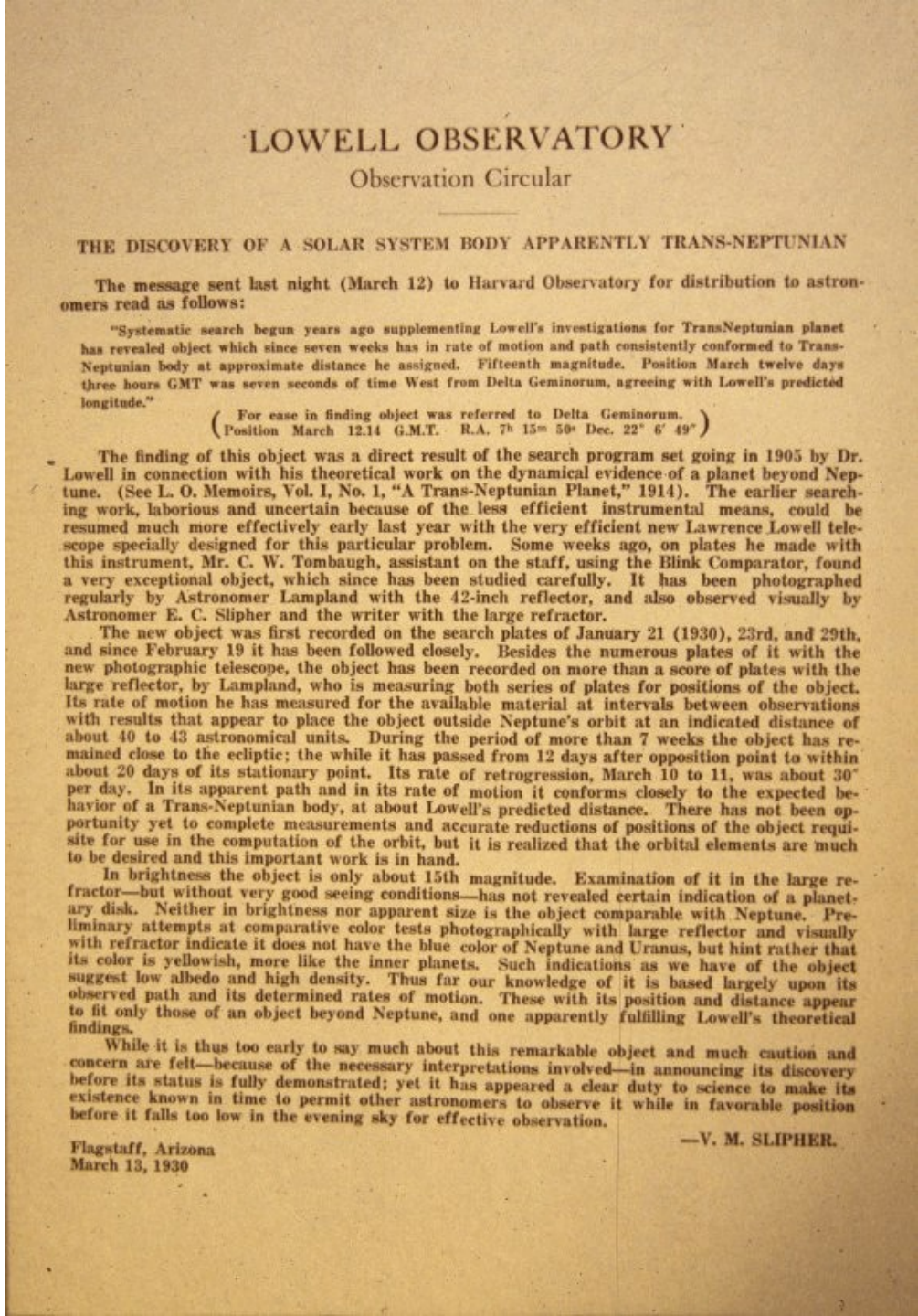
Na základě předběžných výpočtů, objevil v únoru roku 1930 **Clyde William Tombaugh (1906 – 1997)** na snímcích pořízených na Lowellově observatoři ve Flagstaffu v Arizoně nové kosmické těleso sluneční soustavy poblíž hvězdy δ *Gem*
První snímek vlevo je z 23. 1. druhý z 29. 1.1930.



- Šipka označuje kosmické těleso s hvězdnou velikostí 15 mag , jehož poloha se za 6 dnů vzhledem k hvězdám na pozadí změnila. Na fotografických deskách pořízených dalekohledem o průměru 33 cm byla původně zachycena hvězdná velikostech

Objev Pluta

Šipka - těleso s hvězdnou velikostí 15 mag,
dalekohled o průměru 33 cm,
hvězdné pole 13^o x 13^o.
Expozice přibližně hodinová,
na deskách objekty s hvězdnou velikostí do 17 mag.
Oznámení o nalezení planety provedl Vesto Melvin **Slipher** (1875 – 1969) 13. března 1930, v den výročí narození mecenáše Percivala Lowella - 13.3.1855.
Shodou okolností téměř 150 roků po objevu Uranu – 13. března 1781 Williamem **Herschelem** (1732 - 1822).



LOWELL OBSERVATORY

Observation Circular

THE DISCOVERY OF A SOLAR SYSTEM BODY APPARENTLY TRANS-NEPTUNIAN

The message sent last night (March 12) to Harvard Observatory for distribution to astronomers read as follows:

"Systematic search begun years ago supplementing Lowell's investigations for TransNeptunian planet has revealed object which since seven weeks has in rate of motion and path consistently conformed to Trans-Neptunian body at approximate distance he assigned. Fifteenth magnitude. Position March twelve days three hours GMT was seven seconds of time West from Delta Geminorum, agreeing with Lowell's predicted longitude."

(For ease in finding object was referred to Delta Geminorum. Position March 12.14 G.M.T. R.A. 7^h 15^m 50^s Dec. $22°$ $6'$ $49''$)

The finding of this object was a direct result of the search program set going in 1905 by Dr. Lowell in connection with his theoretical work on the dynamical evidence of a planet beyond Neptune. (See L. O. Memoirs, Vol. I, No. 1, "A Trans-Neptunian Planet," 1914). The earlier searching work, laborious and uncertain because of the less efficient instrumental means, could be resumed much more effectively early last year with the very efficient new Lawrence Lowell telescope specially designed for this particular problem. Some weeks ago, on plates he made with this instrument, Mr. C. W. Tombaugh, assistant on the staff, using the Blink Comparator, found a very exceptional object, which since has been studied carefully. It has been photographed regularly by Astronomer Lampland with the 42-inch reflector, and also observed visually by Astronomer E. C. Slipher and the writer with the large refractor.

The new object was first recorded on the search plates of January 21 (1930), 23rd, and 29th, and since February 19 it has been followed closely. Besides the numerous plates of it with the new photographic telescope, the object has been recorded on more than a score of plates with the large reflector, by Lampland, who is measuring both series of plates for positions of the object. Its rate of motion he has measured for the available material at intervals between observations with results that appear to place the object outside Neptune's orbit at an indicated distance of about 40 to 43 astronomical units. During the period of more than 7 weeks the object has remained close to the ecliptic; the while it has passed from 12 days after opposition point to within about 20 days of its stationary point. Its rate of retrogression, March 10 to 11, was about 30" per day. In its apparent path and in its rate of motion it conforms closely to the expected behavior of a Trans-Neptunian body, at about Lowell's predicted distance. There has not been opportunity yet to complete measurements and accurate reductions of positions of the object requisite for use in the computation of the orbit, but it is realized that the orbital elements are much to be desired and this important work is in hand.

In brightness the object is only about 15th magnitude. Examination of it in the large refractor—but without very good seeing conditions—has not revealed certain indication of a planetary disk. Neither in brightness nor apparent size is the object comparable with Neptune. Preliminary attempts at comparative color tests photographically with large reflector and visually with refractor indicate it does not have the blue color of Neptune and Uranus, but hint rather that its color is yellowish, more like the inner planets. Such indications as we have of the object suggest low albedo and high density. Thus far our knowledge of it is based largely upon its observed path and its determined rates of motion. These with its position and distance appear to fit only those of an object beyond Neptune, and one apparently fulfilling Lowell's theoretical findings.

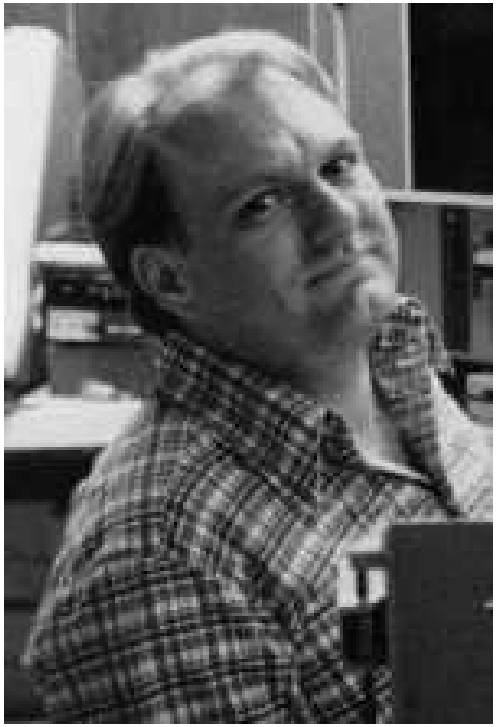
While it is thus too early to say much about this remarkable object and much caution and concern are felt—because of the necessary interpretations involved—in announcing its discovery before its status is fully demonstrated; yet it has appeared a clear duty to science to make its existence known in time to permit other astronomers to observe it while in favorable position before it falls too low in the evening sky for effective observation.

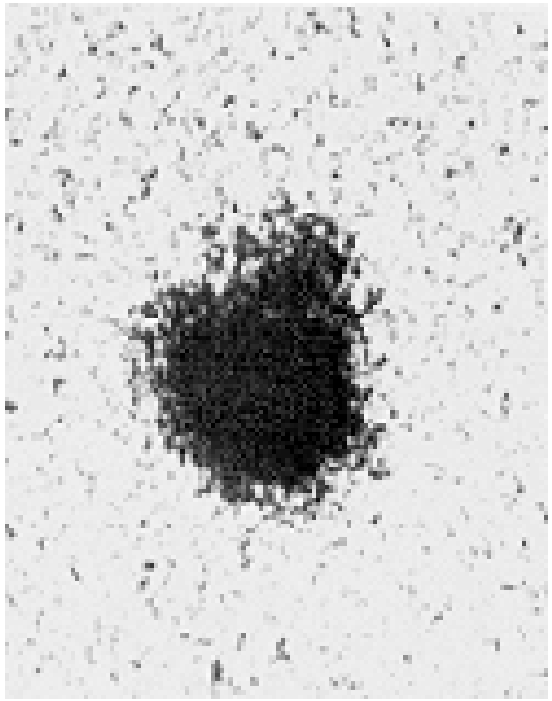
—V. M. SLIPHER.

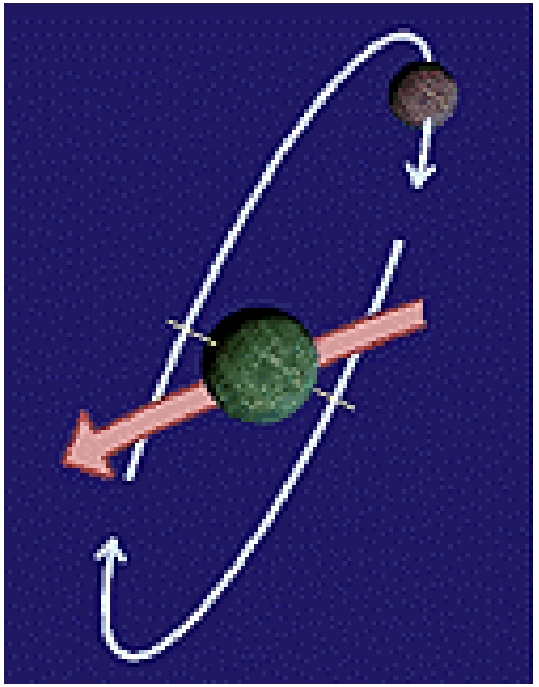
Flagstaff, Arizona
March 13, 1930

Určování hmotnosti Pluta

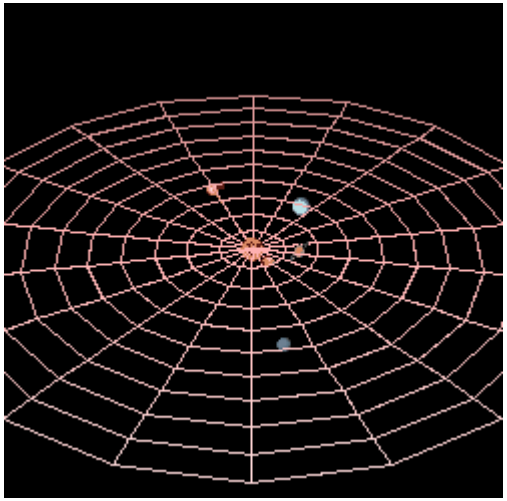
Zásadní objev pro upřesnění hmotnosti Pluta učinil v roce 1978 **James Walter Christy (1938)** na Námořní observatoři ve Flagstaffu, shodou okolností pouze 6 km od Lowellovy observatoře. Objevil měsíc Pluta Charon, jehož oběžná doba byla shodná s rotačními periodami jak Pluta, tak Charona, jde o stav oboustranné vázané rotace těles.

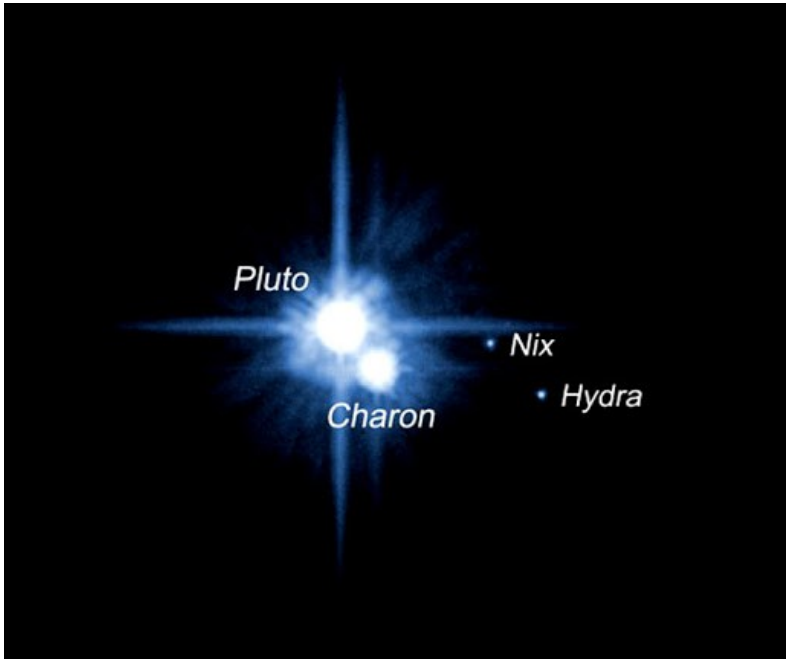






Pluto a jeho měsíce





Určování hmotnosti Pluta a Charona

Úloha 2.25 Měsíc Charon obíhá kolem Pluta ve vzdálenosti $a_{\mathrm{Ch}} = 19\,640\,\mathrm{km}$ za dobu $T_{\mathrm{Ch}} = 6{,}39\,\mathrm{dne}$. Poloměr Pluta je $R_{\mathrm{Pl}} = 1\,150\,\mathrm{km}$, $R_{\mathrm{Ch}} = 600\,\mathrm{km}$. Za zjednodušujícího předpokladu, že obě tělesa mají stejnou hustotu, určete jejich hmotnosti.

Řešení: Z III. Keplerova zákona $a_{\mathrm{Ch}}^3/T_{\mathrm{Ch}}^2 = G(M_{\mathrm{Pl}} + M_{\mathrm{Ch}})/(4\pi^2)$ stanovíme hmotnost soustavy Pluto – Charon $M_{\mathrm{Pl}} + M_{\mathrm{Ch}} = 1{,}4 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$. Vzhledem k objemům těles dostaneme $M_{\mathrm{Pl}} = 1{,}2 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$, $M_{\mathrm{Ch}} = 1{,}7 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}$. Ve skutečnosti je poměr hustot přibližně $\rho_{\mathrm{Pl}} : \rho_{\mathrm{Ch}} = 2 : 1$.

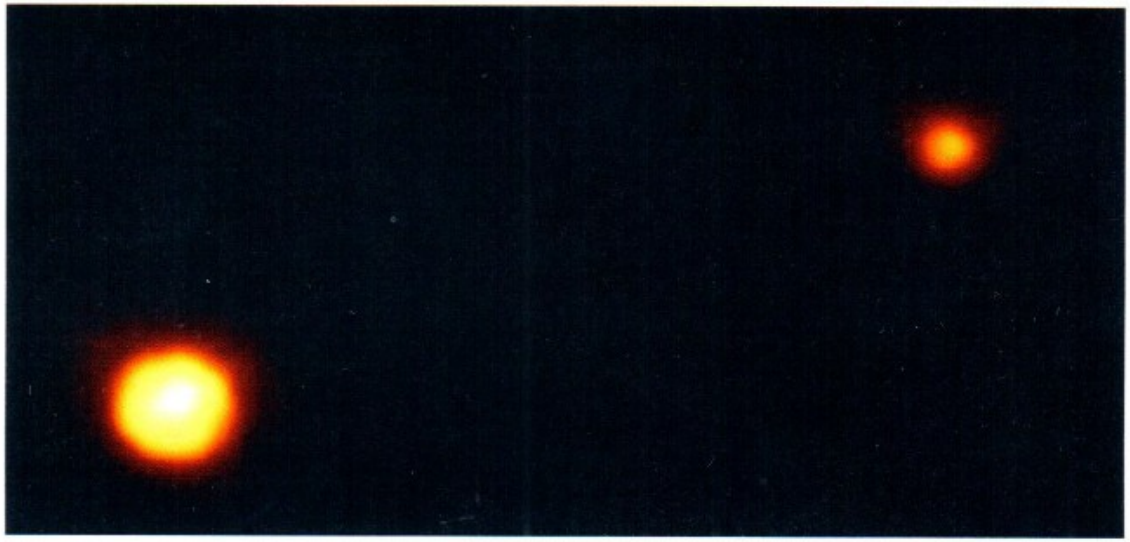
Úloha 2.26 V jaké vzdálenosti od Pluta se nachází hmotný střed soustavy Pluto – Charon? Pluto má hmotnost $M_{\mathrm{Pl}} = 1{,}2 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$ a Charon $M_{\mathrm{Ch}} = 1{,}7 \cdot 10^{21}\,\mathrm{kg}$, velká poloosa dráhy Charona je $19{,}6 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$.

Řešení: Platí vztah $M_{\mathrm{Pl}}a_{\mathrm{Pl}} + M_{\mathrm{Ch}}a_{\mathrm{Ch}} = (M_{\mathrm{Pl}} + M_{\mathrm{Ch}})a_{\mathrm{spol}}$. Zvolme souřadnou soustavu, kde $a_{\mathrm{Pl}} = 0$, a_{Ch} je vzdálenost mezi oběma objekty, a_{spol} je vzdálenost středu hmotnosti a Pluta. Řešením dostaneme $a_{\mathrm{spol}} = M_{\mathrm{Ch}}a_{\mathrm{Ch}}/(M_{\mathrm{Pl}} + M_{\mathrm{Ch}}) = 2\,100\,\mathrm{km}$. Tedy hmotný střed leží asi 1 000 km nad povrchem Pluta.

Úhlové rozlišení

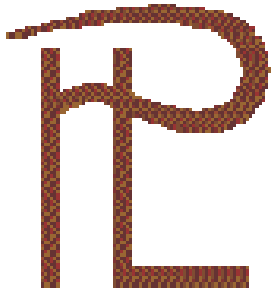
1. Stanovte úhlové rozlišení mezi Plutem a Charonem při jejich pozorování v opozici ze Země v perihéliu jejich dráhy s excentricitou $e = 0,25$. Velikost velké poloosy dráhy Pluta je $a = 39,5$ AU, velikost velké poloosy dráhy Charona je $d = 19\,600$ km. Jaký průměr dalekohledu D je nezbytný k úhlovému rozlišení obou těles na vlnové délce $\lambda = 550$ nm?

Perihéliová vzdálenost obou těles od Slunce je $r = a \cdot (1 - e) = 29,6$ AU, vzdálenost od Země je však pouze $28,6 \cdot 1,5 \cdot 10^{11}$ m $= 4,3 \cdot 10^{12}$ m. K výpočtu úhlového rozlišení dosadíme do vztahu $\Theta = \frac{d}{r} = \frac{19,6 \cdot 10^{6}\ \text{m}}{4,3 \cdot 10^{12}\ \text{m}} = 4,6 \cdot 10^{-6}$ rad $= 0,9''$. Toto rozlišení je dosažitelné z povrchu Země jen za výjimečných pozorovacích podmínek při kvalitním seeingu. Nezbytný minimální průměru dalekohledu nalezneme podle vztahu $D = 1,22 \cdot \frac{\lambda}{\Theta} = 0,13$ m.



Druhou možností je použití dalekohledů vynesených mimo zemskou atmosféru, např. Hubblova kosmického dalekohledu – HST, viz snímek Pluta a Charona z roku 1994.

Pluto a astrologie



Změnu statutu planety komentovali i astrologové, kterým údajně nijak nevadí…Jejich přesným výpočtům vlivu Pluta na člověka nevadila v minulosti ani nepřesná znalost hodnoty hmotnosti Pluta. Nesprávnost jejich úvah lze doložit následující úlohou.

Astrologové tvrdí, že planety svými „astrologickými silami" v okamžiku narození lidí ovlivňují jejich charaktery. Vypočtěte poměr hypotetických astrologických sil Pluta a Země na nově narozené dítě v okamžiku, kdy se Pluto nachází v opozici ve vzdálenosti 38,5 AU od Země.

Určíme poměr gravitačních sil Pluta a Země $\frac{F_{Pl}}{F_Z} = \frac{G\frac{m_d M_{Pl}}{r_{Pl}^2}}{G\frac{m_d M_Z}{R_Z^2}} = 2{,}6.10^{-15}$. Je zřejmé, že

Určování hmotností hvězd

3. U dvojhvězdy byly stanoveny: paralaxa $\pi = 0{,}05$ " a velké poloosa pozorované dráhy a" = 2" , oběžná doba složek 100 roků. Nalezněte hmotnosti jednotlivých složek, je-li známo, že se nacházejí od hmotného středu dvojhvězdy ve vzdálenostech, které jsou v poměru 4 : 1.

$$M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2}$$

4. Stanovte vzdálenost dvojhvězdy, znáte-li oběžnou dobu složek 27 roků, hmotnosti 3 M_S a 5 M_S a hlavní poloosu pozorované dráhy a" = 0,45".

$$M_1 + M_2 = \left(\frac{a''}{\pi''}\right)^3 T^{-2} .$$

Určování hmotností hvězd

Příklad 3

skutečná velká poloosa $a = \frac{a''}{\pi''} = 40\ au.$

platí $M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2}$, po dosazení $6{,}4\ M_S$

dále $\frac{M_1}{M_2} = \frac{4}{1}$, odkud $M_1 = 5{,}1\ M_S$, $M_2 = 1{,}3\ M_S$

Příklad 4

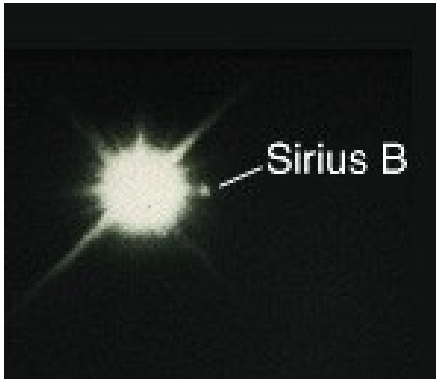
$M_1 + M_2 = (\frac{a''}{\pi''})^3\ T^{-2}$ odtud $\pi'' = a''(M_1 + M_2)^{-\frac{1}{3}}\ T^{-\frac{2}{3}} = 0{,}025''$

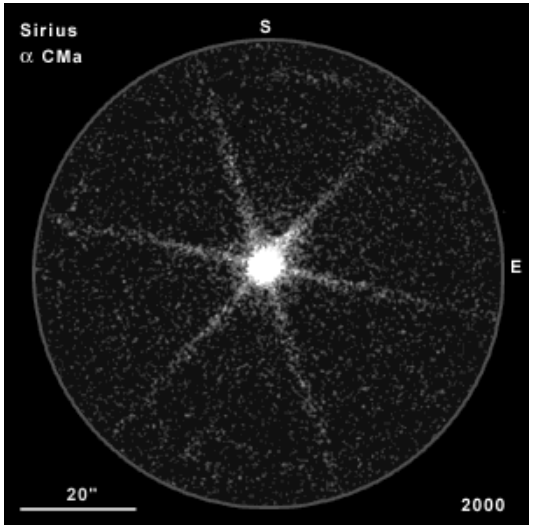
tedy $r = \frac{1}{\pi''} = 40\ pc.$ ***tzv. dynamická paralaxa***

Fyzická dvojhvězda Sirius A a B

Úloha 8.3 Sirius je vizuální dvojhvězda s oběžnou dobou 49,94 roků a roční paralaxou $\pi = 0{,}379''$. Zjednodušeně předpokládejme, že dráhová rovina je kolmá k zornému paprsku. Velikost velké poloosy je $a'' = 7{,}62''$ Poměr vzdáleností složek A a B od středu hmotnosti je $\frac{r_A}{r_B} = 0{,}466$. Nalezněte hmotnosti jednotlivých složek. Určete jejich zářivé výkony, jestliže Sirius A má $M_{bol} = 1{,}36\,\text{mag}$ a Sirius B $M_{bol} = 8{,}9\,\text{mag}$.

Řešení: Dosazením do III. Keplerova zákona stanovíme součet hmotností obou složek $(M_A + M_B) = \frac{a^3}{T^2}\frac{4\pi^2}{G} = 3{,}3\,M_\odot$, kde $a = \frac{a''}{\pi}$. Pomocí vztahu $\frac{r_A}{r_B} = \frac{M_B}{M_A}$ nalezneme $M_A = 2{,}2\,M_\odot$ a $M_B = 1{,}1\,M_\odot$. Zářivé výkony nalezneme ze vztahu $\log L = 0{,}4\,(4{,}75 - M_{bol})$, $L_A = 22{,}7\,L_\odot$, $L_B = 0{,}022\,L_\odot$.

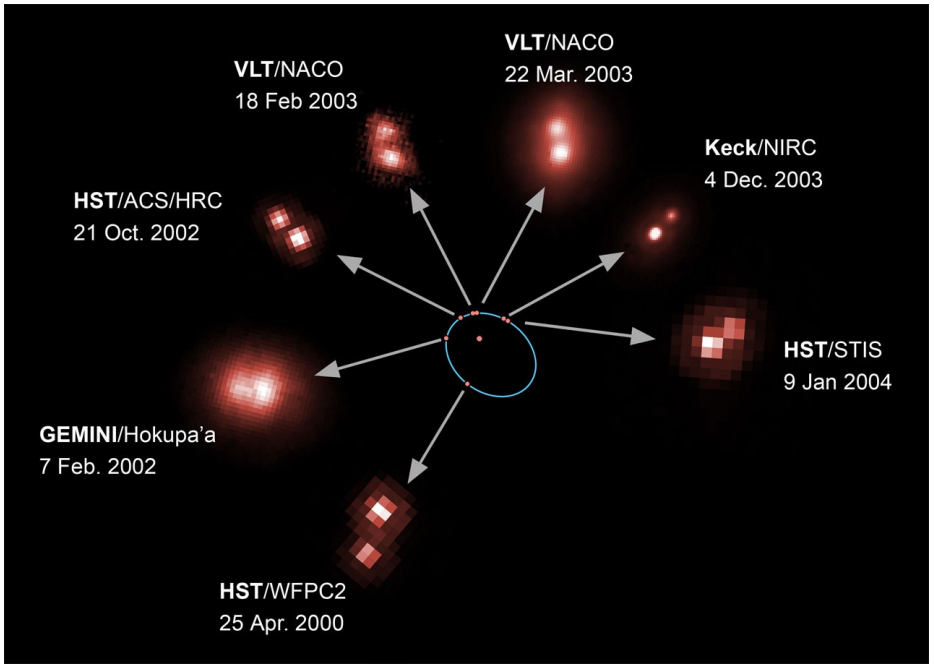




Fyzická dvojhvězda - jedna složka hnědý trpaslík

Úloha 8.5 Fyzická dvojhvězda 2MASSWJ0746425+2000321, se skládá z červeného a hnědého trpaslíka. Z pozorování byla zjištěna oběžná doba $T = 10$ roků, úhlová velikost velké poloosy $a'' = 0{,}20''$ a roční paralaxa $\pi'' = 0{,}08''$. Určete součet hmotností obou složek!

Řešení: Lineární velikost velké poloosy je $a = a''/\pi'' = 2{,}5$ AU, součet hmotností je roven $a^3/T^2 = M_1 + M_2$, tedy $a^3/T^2 = 0{,}16\,M_\odot$. Observačně zjištěné hodnoty hmotností jednotlivých složek jsou $M_1 = 0{,}085\,M_\odot$ a $M_2 = 0{,}066\,M_\odot$. První hvězda je červeným trpaslíkem z nejspodnější části hlavní posloupnosti zatímco druhá hvězdy je již hnědým trpaslíkem.



2MASSWJ
0746425+2000321

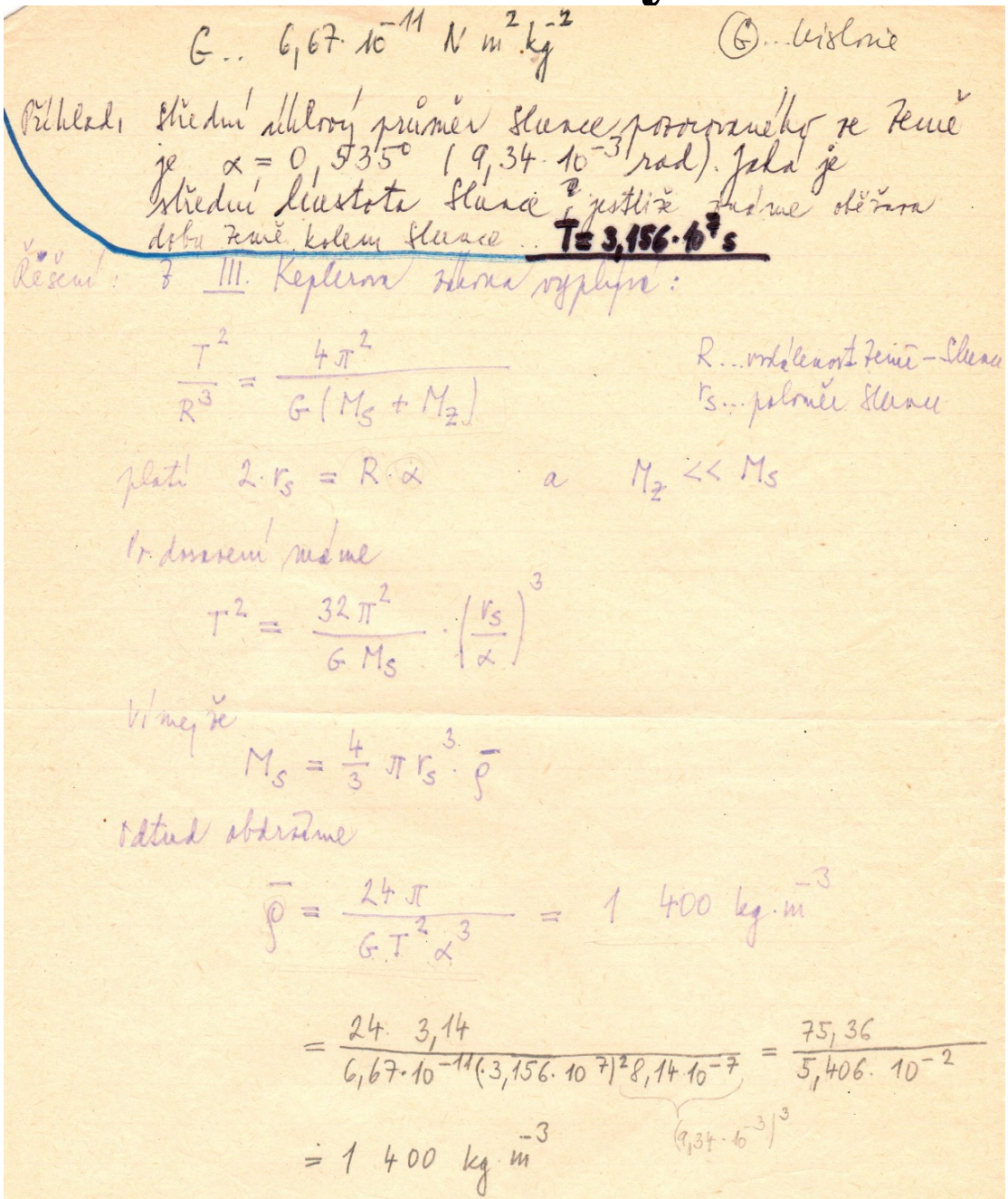
r = 12,3 pc, a = 2,5 au

T = 10,5 roku

$M_1 = 0{,}085\ M_S$

$M_2 = 0{,}065\ M_S$

Určování hustoty Slunce



$G \dots 6{,}67 \cdot 10^{-11}\ N\,m^2\,kg^{-2}$ (G ... gravitační)

Příklad: Střední úhlový průměr Slunce pozorovaného ze Země je $\alpha = 0{,}5^\circ$ ($9{,}34 \cdot 10^{-3}$ rad). Jaká je střední hustota Slunce, jestliže známe oběžnou dobu Země kolem Slunce ... $T = 3{,}156 \cdot 10^7\ s$

Řešení: Z III. Keplerova zákona vyplývá:

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{G(M_S + M_Z)}$$

R ... vzdálenost Země – Slunce
r_S ... poloměr Slunce

platí $2 \cdot r_S = R \cdot \alpha$ a $M_Z << M_S$

Po dosazení máme

$$T^2 = \frac{32\pi^2}{G M_S} \cdot \left(\frac{r_S}{\alpha}\right)^3$$

Víme že

$$M_S = \frac{4}{3}\pi r_S^3 \cdot \bar{\rho}$$

Odtud obdržíme

$$\bar{\rho} = \frac{24\pi}{G T^2 \alpha^3} = 1\,400\ kg\,m^{-3}$$

$$= \frac{24 \cdot 3{,}14}{6{,}67 \cdot 10^{-11} (3{,}156 \cdot 10^7)^2 \underbrace{8{,}14 \cdot 10^{-7}}_{(9{,}34 \cdot 10^{-3})^3}} = \frac{75{,}36}{5{,}406 \cdot 10^{-2}}$$

$$\doteq 1\,400\ kg\,m^{-3}$$