Astrofyzika IV. cvičení

Nitro hvězd

Vladimír Štefl
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Nitro hvězd

Úloha 6.1 Určete množství uvolněné energie při vzniku 1 jádra atomu helia ze čtyř jader atomů vodíku. Porovnejte s množstvím energie uvolňovaným při 3α procesu.

Řešení: pp řetězec: $\Delta m = 4\,{}^1_1\mathrm{H} - {}^4_2\mathrm{He} = 4{,}76 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg}$, $\Delta E = \Delta mc^2 = 4{,}29 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$, tedy $26{,}8\,\mathrm{MeV}$. Pro 3α proces: $\Delta m = 3\,{}^4_2\mathrm{He} - {}^{12}_6\mathrm{C} = 1{,}29 \cdot 10^{-29}\,\mathrm{kg}$, $\Delta E = \Delta mc^2 = 1{,}16 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{J}$, tudíž $7{,}2\,\mathrm{MeV}$.

klidová hmotnost protonu $1{,}67.10^{-27}$ kg

klidová hmotnost jádra helia $6{,}63.10^{-27}$ kg

Δ m = $(4.\ 1{,}67.10^{-27} - 6{,}63.10^{-27})$ kg = $5.\ 10^{-29}$ kg

$\Delta m c^2 = 4{,}3\ .\ 10^{-12}$ J

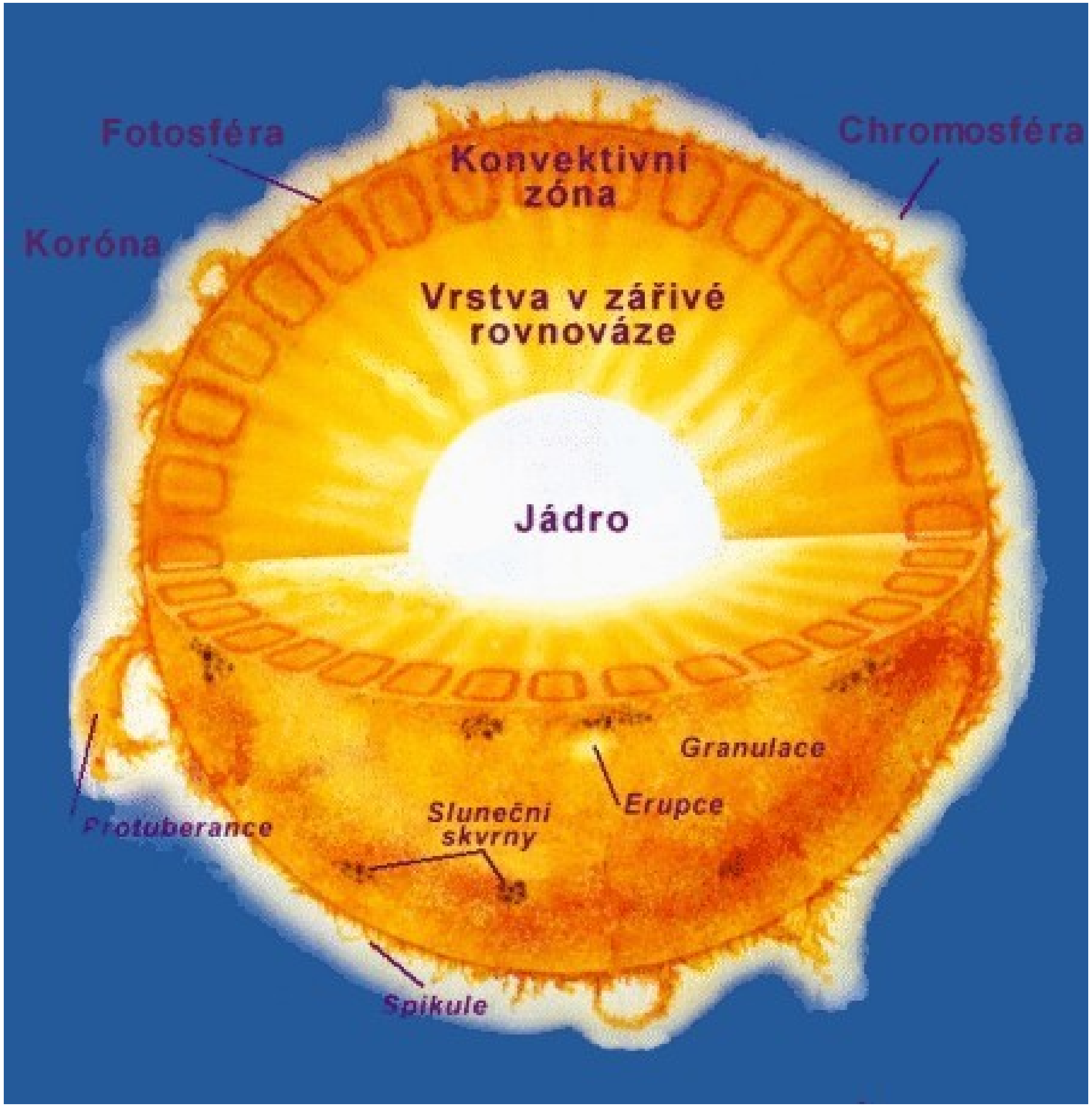
Slunce vyzáří za 1 sekundu energii $3{,}86.10^{26}$ J …ΔW

úbytek hmotnosti Slunce za 1 s je $\Delta m_S = \frac{\Delta W}{c^2} = 4{,}2.10^9$ kg

Nitro Slunce

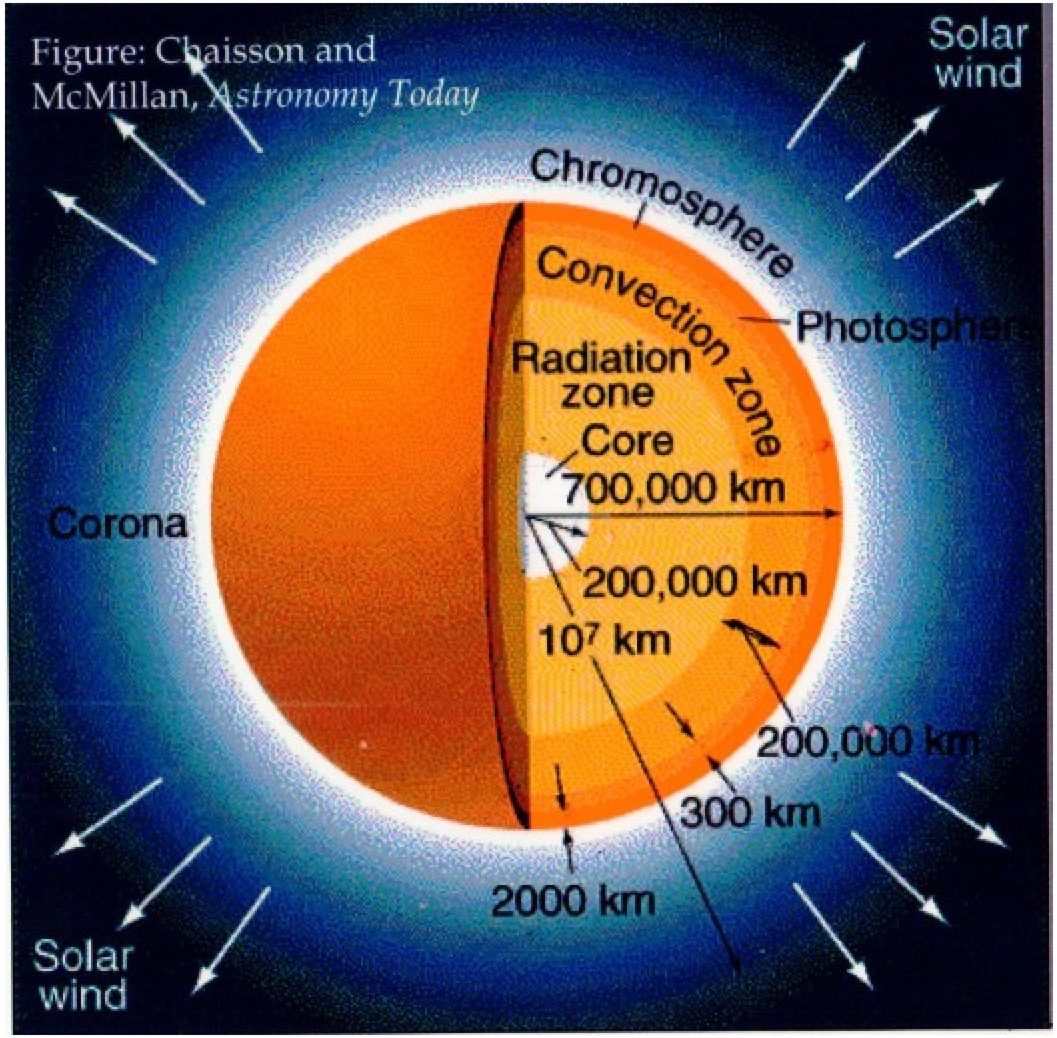
Aktivita Slunce

Stavba nitra Slunce



- Core
- Radiation zone
- Convection zone
- Photosphere
- Chromosphere
- Corona

Stavba Slunce



Slunce - helioseismologie

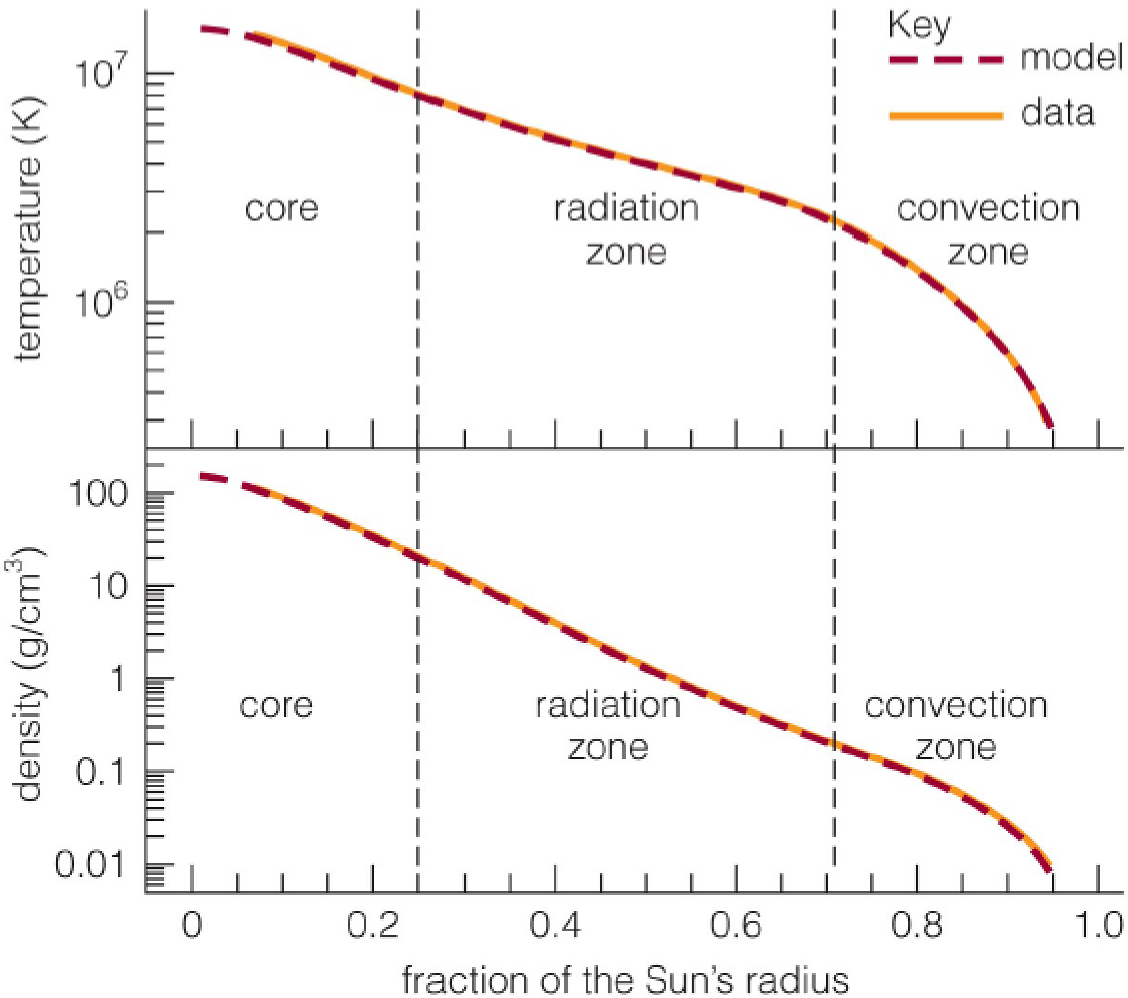
Solar vibrations (helioseismology)

Patterns of vibration on the surface tell us about what the Sun is like inside.

Actual solar vibrations measured by the Doppler shift of the sun's photosphere.

Slunce - helioseismologie

Solar vibrations (helioseismology)



Data on solar vibrations agree very well with **mathematical models** of solar interior.

Nitro hvězd

Úloha 6.5 Centrální teploty dvou hvězd jsou $T_1 = 2\cdot 10^8$ K a $T_2 = 1{,}8\cdot 10^8$ K. Stanovte poměr množství uvolňované energie v nitrech obou hvězd.

Řešení: Z uvedených hodnot centrálních teplot vyplývá, že jde o hvězdy s velkými hmotnostmi, kde probíhá CNO cyklus, u něhož množství uvolňované energie $\sim T^{18}$. Hledaný poměr je $\left(\frac{20}{18}\right)^{18}$, k jehož výpočtu využijeme vztah $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$, tedy $\left(\frac{20}{18}\right)^{18} = \left(1+\frac{2}{18}\right)^{18} \cong \mathrm{e}^2 \cong 7$.

Procvičení -

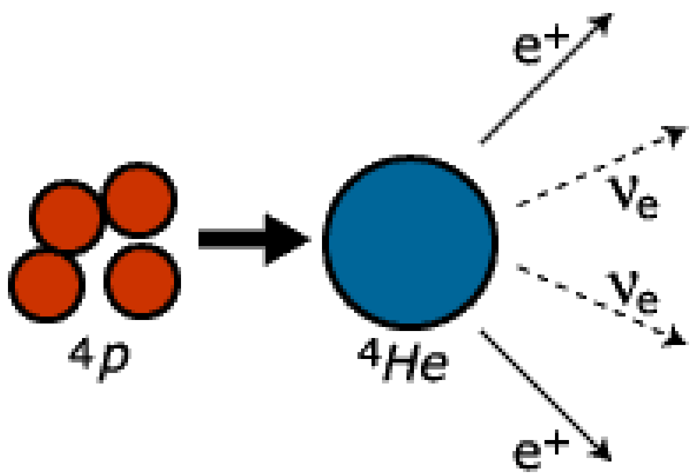
pro případ uvolňované energie CNO $\sim T^{16}$, stejné řešení,

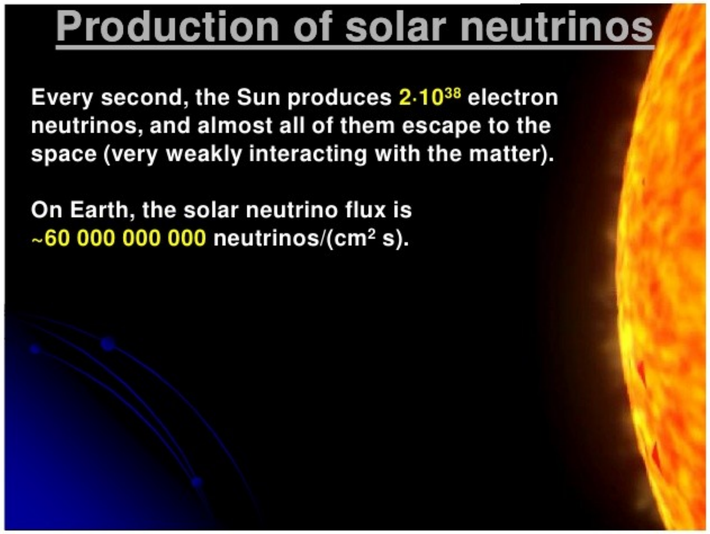
$$\left(\frac{20}{16}\right)^{16} = \left(1+\frac{4}{16}\right)^{16} \cong e^4 \cong 55$$

Nitro Slunce

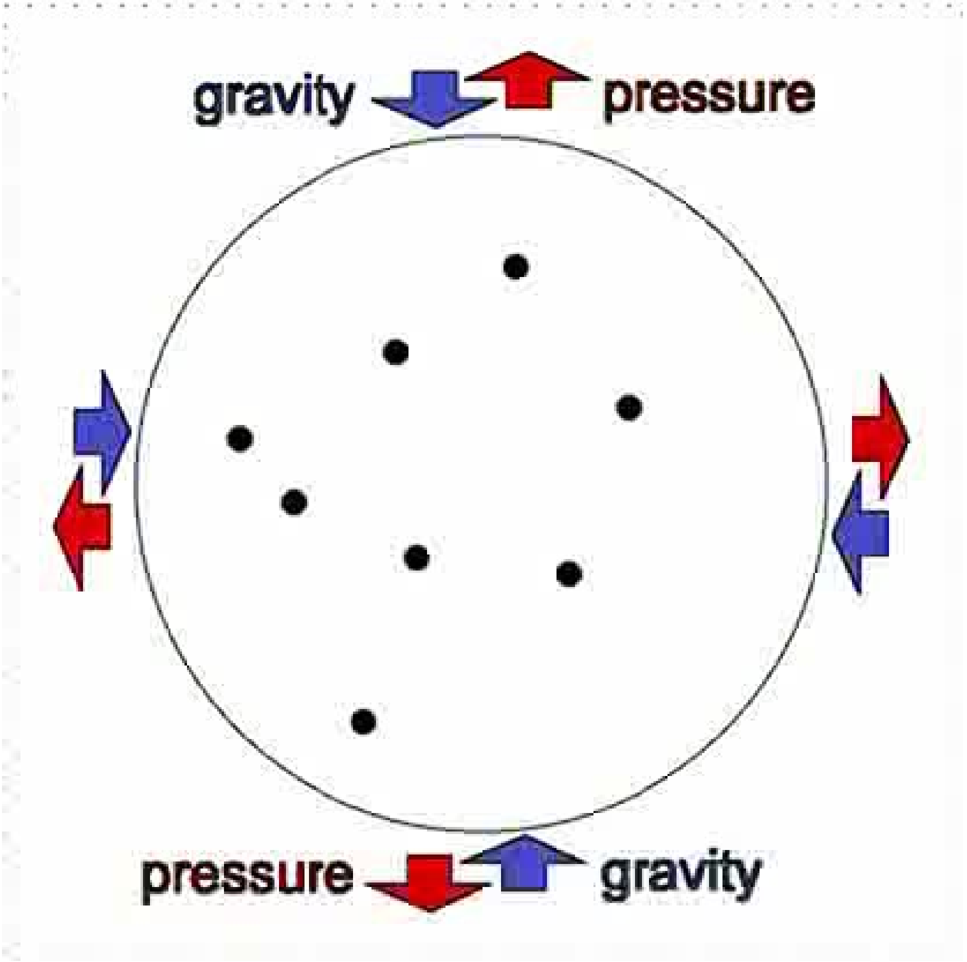
Úloha 6.7 Odhadněte poměr počtu fotonů a neutrin vyzařovaných Sluncem za 1 sekundu. Při termonukleární syntéze prostřednictvím pp řetězce se uvolňuje energie 26,8 MeV, přičemž neutrina odnáší asi 2–5% této energie.

Řešení: Počet fotonů vyzářených Sluncem za 1 sekundu je dán vztahem $\frac{\sigma T^4}{2{,}7kT} 4\pi R_\odot^2 \cong 1{,}8 \cdot 10^{45}$. Počet neutrin se střední energií lze odhadnout takto. V první úloze jsme vypočetli energii $4{,}29 \cdot 10^{-12}$ J uvolňovanou při syntéze vodík $\rightarrow$ helium. Slunce za jednu sekundu vyzáří $3{,}8 \cdot 10^{26}$ J. Tedy za jednu sekundu vznikne přibližně 10^{38} heliových jader. Při vzniku jednoho heliového jádra vzniknou dvě neutrina, proto za každou sekundu vznikne $2 \cdot 10^{38}$ elektronových neutrin. Poměr počtu fotonů a neutrin je přibližně 10^7.

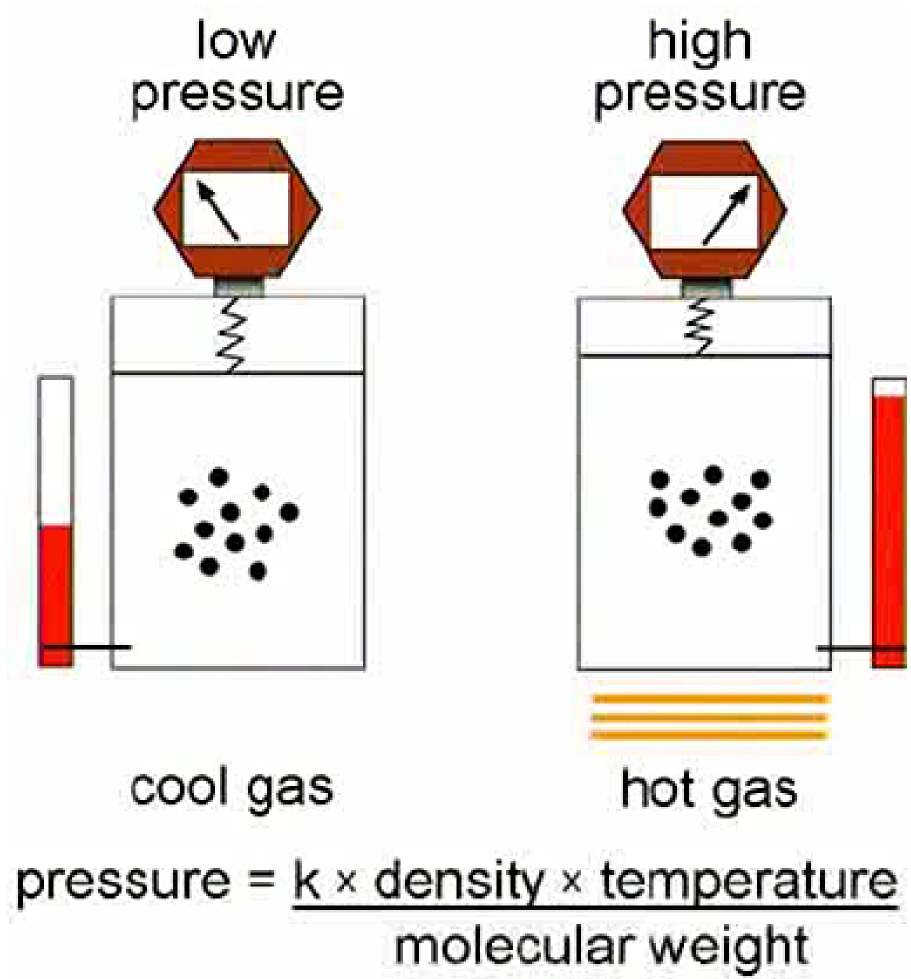




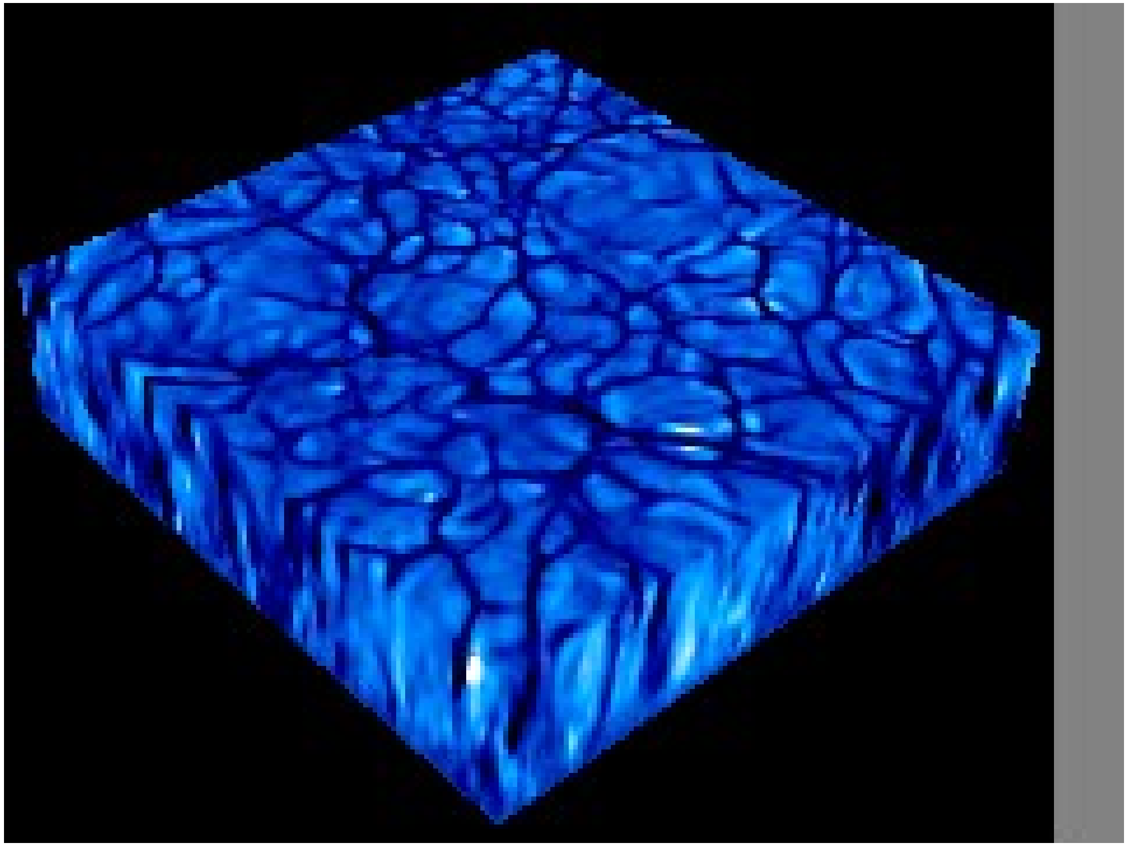
Nitro Slunce – činnost



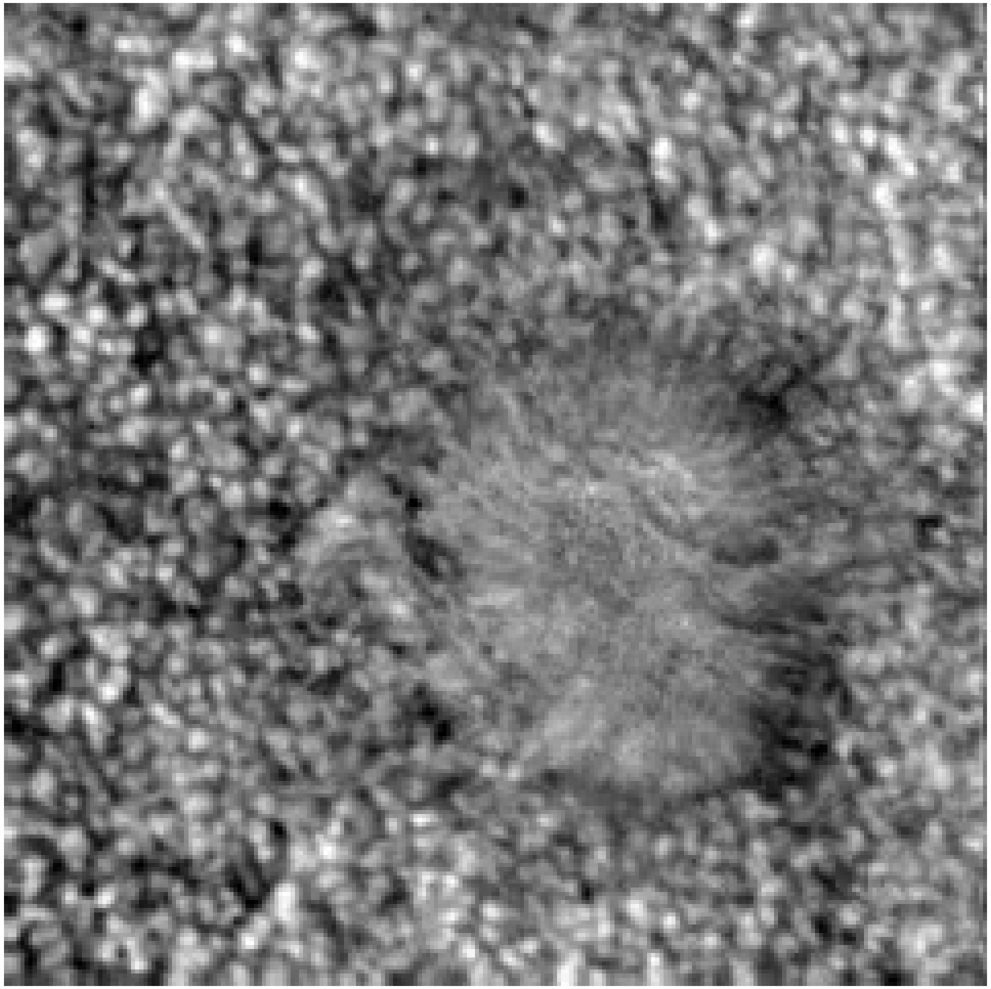
Nitro Slunce – činnost



Slunce – konvekce



Slunce – granulace



Slunce – sluneční vítr

Nitro Slunce – neutrina

Z detailního měření rozpadů neutrálního kalibračního bosonu Z v experimentech na urychlovači LEP v CERN víme, že **existují právě tři druhy (lehkých) neutrin**, tzv. elektronová ν_e, mionová ν_μ a tauonová ν_τ a jejich antičástice $\overline{\nu_e}$, $\overline{\nu_\mu}$ a $\overline{\nu_\tau}$. Elektronová antineutrina byla objevena až 26 let po Pauliho předpovědi v reakci: $\overline{\nu}_e + p \to n + e^+$ antineutrin z jaderného reaktoru. V letošním roce si tedy připomeneme 60. výročí objevu neutrina. V roce 1962 bylo prokázáno, že svazky urychlovačových neutrin z rozpadů nabitých pionů při interakcích s protony a neutrony produkují miony, tj. že se jedná o mionová neutrina. Existence tauonového neutrina byla experimentálně prokázána až v roce 2000.

Nitro Slunce

Úloha 6.8 Odhadněte hodnotu centrálního tlaku v nitru Slunce.

Řešení: V zjednodušeném přiblížení platí pro tlakovou sílu na jednotkovou plochu tedy tlak $P_c = 4G\frac{\rho M}{R}$, po dosazením číselných hodnot hmotnosti a poloměru Slunce a průměrné hustoty $\rho = 1{,}4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ dostaneme pro tlak $P_c \cong 10^{15}\,\mathrm{Pa}$. Podle standardních modelů Bahcalla je ve skutečnosti centrální tlak o řád vyšší.

Úloha 6.11 Podle standardního modelu nitra má hvězdná látka v centrální části Slunce hustotu $1{,}48 \cdot 10^5\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a teplotu $1{,}56 \cdot 10^7\,\mathrm{K}$, hmotnostní zastoupení vodíku $X = 0{,}73$ a helia $Y = 0{,}27$, příspěvek těžších prvků lze v prvním přiblížení zanedbat. Vypočtěte tlak, který zde působí za předpokladu, že vodík a helium jsou plně ionizovány a chovají se jako ideální plyn. Vypočtěte rovněž tlak záření a oba tlaky porovnejte. Střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi označíme μ_r

Řešení: $P_g = \frac{\mathscr{R}}{\mu_r}\rho T = 3{,}2 \cdot 10^{16}\,\mathrm{Pa}$, $P_r = \frac{4\sigma}{3c}T^4 = 1{,}5 \cdot 10^{13}\,\mathrm{Pa}$. Podstatný je tlak plynu, tlak záření je zanedbatelný.

Nitro hvězd

Úloha 6.10 Odhadněte centrální tlak a teplotu ve hvězdě hlavní posloupnosti s poloměrem $1{,}3\,R_\odot$ a hmotností $1{,}8\,M_\odot$. Pro zjednodušení předpokládáme stejnou stavbu a chemické složení jako má Slunce.

Řešení: $\frac{P_c}{P_{c\odot}} \cong \left(\frac{R_\odot}{R}\right)^4 \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^2 \cong 1{,}1,\ \frac{T_c}{T_{c\odot}} \cong \frac{R_\odot}{R}\frac{M}{M_\odot} \cong 1{,}4.$

$$P \sim \frac{M^2}{R^4} \qquad P \sim \rho\, T \sim \frac{M}{R^3}\, T \qquad T \sim \frac{M}{R}$$

podmínky úlohy

Nitro hvězd

Úloha 6.20 Dokažte, že střední relativní hmotnost připadající na jednu částici směsi plně ionizovaných atomů v nitru hvězd je rovna $\mu_\mathrm{r} = \frac{2}{1+3X+0{,}5Y}$, kde X, Y, Z označuje relativní množství vodíku, helia a ostatních prvků.

Řešení: $\mu_\mathrm{H} = \frac{1}{2}$, $\mu_\mathrm{He} = \frac{4}{3}$, $\mu_\mathrm{kovy} = 2$, $\mu_\mathrm{r} = \dfrac{1}{\frac{X}{\mu_\mathrm{H}} + \frac{Y}{\mu_\mathrm{He}} + \frac{Z}{\mu_\mathrm{kovy}}} = \dfrac{1}{2X + \frac{3}{4}Y + \frac{1}{2}Z}$ Protože platí $X + Y + Z = 1$ dostaneme $\mu_\mathrm{r} = \dfrac{2}{1 + 3X + 0.5Y}$.

střední relativní hmotnost μ_r připadající na jednu částici směsi úplně ionizovaných plynů je dána vztahem $\mu_r = \dfrac{1}{\frac{X}{\mu_H}+\frac{Y}{\mu_{He}}+\frac{Z}{\mu_{kov}}} = \dfrac{1}{2X+\frac{3}{4}Y+\frac{1}{2}Z} = \dfrac{2}{1+3X+0{,}5Y}$,

platí $\mu_H = \frac{1}{2}$ $\mu_{He} = \frac{4}{3}$ $\mu_{kov} = 2$, dále $X + Y + Z = 1$

Nitro Slunce

Úloha 6.29 Dokažte, že v centrální oblasti Slunce nenastává přenos energie konvekcí. Velikost zářivého výkonu uvolňovaného na jednotku hmotnosti je odhadována na $1{,}35 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W \cdot kg^{-1}}$, $\gamma = \frac{5}{3}$, $P = 3{,}20 \cdot 10^{16}\,\mathrm{Pa}$, $T = 1{,}56 \cdot 10^{7}\,\mathrm{K}$, $\kappa = 0{,}138\,\mathrm{m^2 \cdot kg^{-1}}$.

Řešení: Minimální kritická hodnota zářivého výkonu na jednotku hmotnosti přenášená konvekcí je dána vztahem $\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{16\pi Gc}{\kappa}\frac{aT^4}{3}\frac{1}{P}$, kde $a = \frac{4\sigma}{c}$. Po číselném dosazení obdržíme $1{,}36 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{W \cdot kg^{-1}}$. Protože propočítaná hodnota je větší, přenos konvekcí nenastává.

Úloha 6.30 Předpokládejme střední hustotu Slunce $1{,}4 \cdot 10^{3}\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ a střední opacitu v nitru Slunce pro ionizovaný vodík $\kappa = 0{,}1\,\mathrm{m^2 \cdot kg^{-1}}$. Určete střední volnou dráhu fotonu ve středu Slunce a střední teplotní gradient. Za zjednodušujícího předpokladu, že střední volná dráha fotonu směrem k povrchu je stále stejná, odhadněte charakteristický čas, za který foton dospěje z nitra k povrchu Slunce.

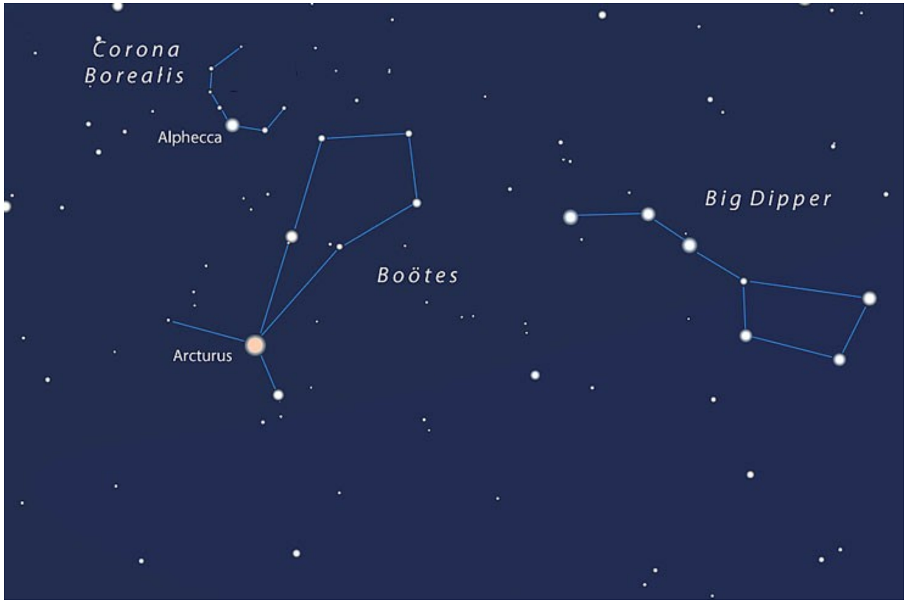
Řešení: Střední volná dráha fotonu je $l = \frac{1}{\kappa\rho} = 7 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$. Při centrální teplotě Slunce $T_{\mathrm{c}} = 1{,}4 \cdot 10^{7}\,\mathrm{K}$ a přibližné povrchové teplotě $T_{\mathrm{p}} = 6 \cdot 10^{3}\,\mathrm{K}$ je střední teplotní gradient roven $\frac{\Delta T}{\Delta r} = \frac{T_{\mathrm{c}} - T_{\mathrm{p}}}{R_\odot} \cong 2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{K \cdot m^{-1}}$. Pro šíření fotonu nitrem Slunce k povrchu platí $R_\odot = \sqrt{z}\,l$, kde z udává počet absorpcí a emisí. Dosazením dostaneme $z = 10^{22}$. Každá emise respektive reemise proběhne průměrně za $10^{-8}\,\mathrm{s}$, tedy za $10^{22}10^{-8} = 10^{14}\,\mathrm{s} \cong 3 \cdot 10^{6}$ roků dospěje foton k povrchu.

Přechod Slunce – červený obr

Červení obři - Arcturus

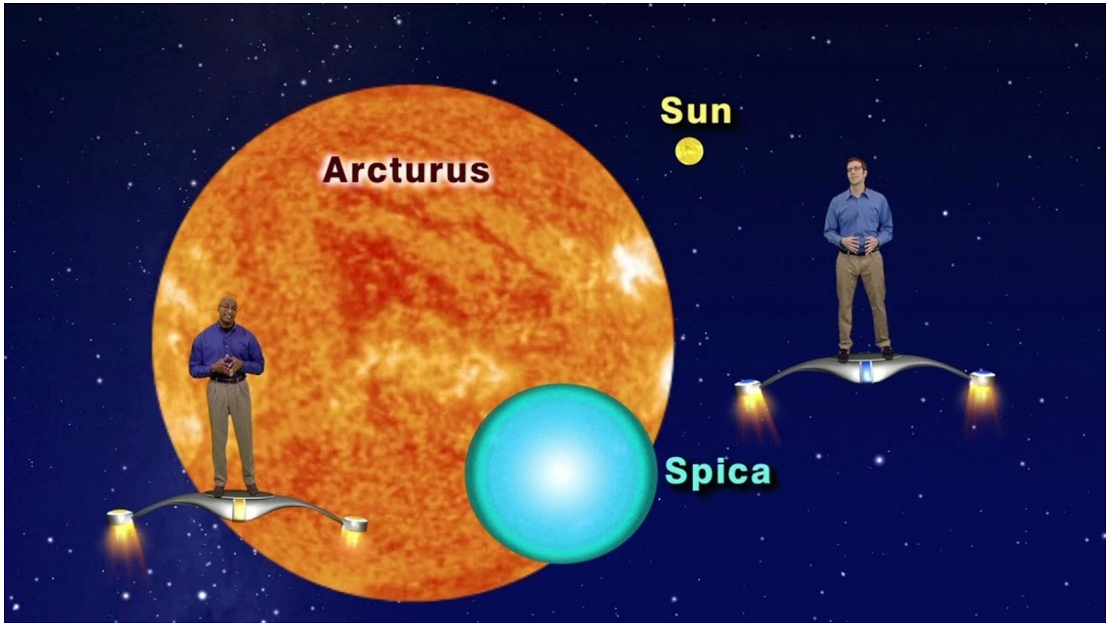
Úloha 10.2 Určete gravitační potenciální energii vnější konvektivní obálky červeného obra Arktura, u kterého je hmotnost jádra $M_J = 0{,}8\,M_\odot$ a vnější obálky $M_{ob} = 0{,}3\,M_\odot$, poloměr dosahuje $30\,R_\odot$. Stanovte celkovou energii hvězdy.

Řešení: Gravitační potenciální energie je rovna $E_p = -GM_J M_{ob}/R = -3{,}0 \cdot 10^{39}$ J. Za předpokladu $\gamma = 5/3$ má viriálová věta tvar $2\langle E_k\rangle + \langle E_p\rangle = 0$. Celková energie hvězdy – červeného obra je $\langle E_c\rangle = \langle E_k\rangle + \langle E_p\rangle = -1{,}5 \cdot 10^{39}$ J.



Červení obři - Arcturus

1,1 Ms , 25 Rs, 4 300 K, 170 Ls , Vr = - 5,2 km/s



Červení obři – model

Úloha 10.3 Modelový červený obr má poloměr $20\,R_\odot$. Kompaktní jádro o hmotnosti $M_\mathrm{j} = 0{,}6\,M_\odot$ je obklopeno rozsáhlou vnější konvektivní obálkou o hmotnosti $M_\mathrm{ob} = 0{,}2\,M_\odot$. Určete gravitační potenciální energii obálky! Aplikací viriálové věty, za předpokladu $\gamma = 5/3$ stanovte tepelnou energii E_k plynu. Za zjednodušujícího předpokladu, že obálka je složena z plně ionizovaného vodíku, určete velikost energie, která by se uvolnila při ochlazování a rekombinaci na neutrální vodík. Rekombinační energie je $13{,}6\,\mathrm{eV}$.

Řešení: Gravitační potenciální energie je $E_\mathrm{p} \cong -GM_\mathrm{j}M_\mathrm{ob}/R \cong -2{,}3{\cdot}10^{39}\,\mathrm{J}$. Při platnosti viriálové věty $\langle E_\mathrm{p}\rangle + 2\langle E_\mathrm{k}\rangle = 0$ obdržíme $E_\mathrm{k} \cong 1{,}15 \cdot 10^{39}\,\mathrm{J}$. Celková rekombinační energie obálky je $E_\mathrm{rek} = \frac{M_\mathrm{ob}}{m_\mathrm{H}} 2{,}18 \cdot 10^{-18} = 5{,}2 \cdot 10^{38}\,\mathrm{J}$.

Cefeidy – perioda pulsace

Vraťme se k výkladu použití rozměrové analýzy ve fyzikální výuce na střední škole, kde je zpravidla uváděna tradičním řešením úlohy – hledání vztahu pro dobu kmitu kyvadla. Obdobně lze v astrofyzikální výuce začínat problematikou pulsací hvězd. Analogicky jako u kyvadla vycházíme z předpokladu malých amplitud pulsací hvězd, tj. zkoumáme lineární pulsace. Připomínám, že observačně zjištěná amplituda kmitů zpravidla nepřesahuje asi 10 %. Pulsace představují periodické smršťování a rozšiřování poloměru hvězd, při kterých zjednodušeně předpokládáme jejich radiální sféricko-symetrický průběh. Fyzikální podstata obou analyzovaných jevů – kmitání kyvadla či pulsace hvězd jsou stejné. Jde o mechanické pohyby v gravitačním poli, odpovídající nevelkým odchylkám od rovnovážného stavu, v případě hvězd popisovaného rovnicí hydrostatické rovnováhy. Základním parametrem zachycujícím pulsace hvězd je jejich doba kmitu, v astrofyzice hovoříme o periodě vlastních kmitů T. Položme si otázku na čem závisí?

Cefeidy – perioda pulsace

Z astrofyzikálního hlediska bude závislá na přitažlivosti charakterizované gravitační konstantou G, dále lze předpokládat závislost na parametrech respektive charakteristikách hvězd, hustotě ϱ (při vyloučení hmotnosti M dosazením $\varrho = \frac{3M}{4\pi R^3}$ a poloměru R. Při hledání závislosti periody pulsace vyjdeme z předpokladu, že $T \sim G$, ϱ, R. Platí $T \sim G^x \varrho^y R^z$, rozměr jednotlivých parametrů je $[T] = \mathrm{s}$, $[G] = \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg}^{-1} \cdot \mathrm{s}^{-2}$, $[\varrho] = \mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^{-3}$, $[R] = \mathrm{m}$. Porovnáním rozměrů levé a pravé části vztahu obdržíme $s = \mathrm{m}^{3x} \cdot \mathrm{kg}^{-x} \cdot \mathrm{s}^{-2x} \cdot \mathrm{kg}^{y} \cdot \mathrm{m}^{-3y} \cdot \mathrm{m}^{z}$. K platnosti rozměrové rovnice musejí být splněny algebraické rovnice:

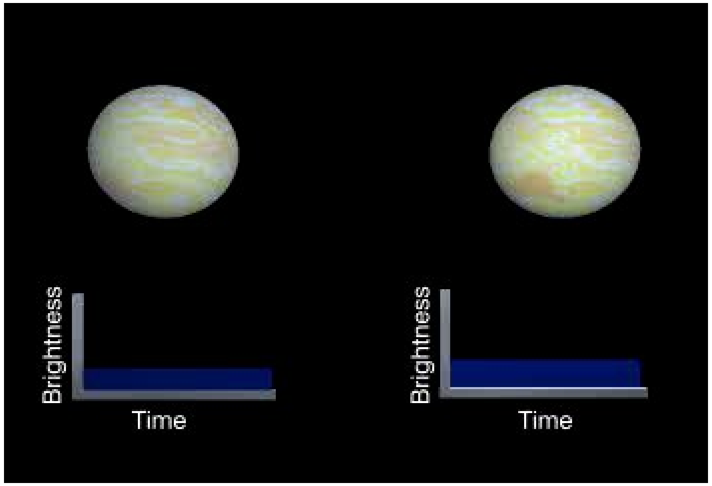
$$\begin{aligned} [\mathrm{s}] \quad & 1 = -2x \\ [\mathrm{m}] \quad & 0 = 3x - 3y + z \\ [\mathrm{kg}] \quad & 0 = -x + y \end{aligned}$$

Jejich řešením dostaneme $x = -\frac{1}{2}$, $y = -\frac{1}{2}$, $z = 0$. Po úpravě a dosazení získáme závislost pro periodu pulsací hvězd $T \sim (G\varrho)^{-\frac{1}{2}}$, kterou obvykle

Cefeidy – perioda pulsace

upravujeme na vztah $T\varrho^{\frac{1}{2}} =$ konst.. Perioda závisí na hustotě hvězdy, jak v původním teoretickém historickém odvození dokázal *Eddington* na základě termodynamických úvah v [6]. Čím je větší hustota hvězdy, tím je kratší perioda pulsací, což potvrzují astronomická pozorování, miridy s nízkou hustotou se vyznačují periodami pulsací stovky dnů, zatímco naopak periody u bílých trpaslíků o vysoké hustotě jsou menší než hodinu.

Poznámka: *Uvedený vztah $T \sim (G\varrho)^{\frac{1}{2}}$ je charakteristický pro každý astrofyzikální objekt, udává časovou škálu procesů spojených s expanzí, kolapsem, pulsací atd. v situacích, kdy je dominující gravitační síla. V závislosti na hustotě je časová škála milisekundy, hodiny, roky, miliony až miliardy roků.*



Úlohy

11.1, 11.5. 11.8, 11. 9, 11.11, 11. 12, 11.13, 11.14, 11.15. 11.16

Studenti úlohy

1. Střední úhlový průměr Slunce pozorovaného ze Země činí $9{,}34.10^{-3}$ rad. Určete střední hustotu Slunce, jestliže známe oběžnou dobu Země kolem Slunce $T = 3{,}156.10^7$ s.

2. Při pozorování cefeidy byla zjištěna perioda pulsace 2,5 dne a pozorovaná hvězdná velikost 18,6 mag. Určete její vzdálenost, jestliže mezi periodou pulsace a absolutní hvězdnou velikostí platí vztah

$\log P + 0{,}394\, M = -\,0{,}657$.

3. Supernova Ia s maximálním zářivým výkonem $L \approx 10^9\, L_S$ se vyznačuje pozorovanou bolometrickou hvězdnou velikostí $m = 20$ mag. Určete její absolutní hvězdnou bolometrickou magnitudou M a vzdálenost r.

4. Dvě srážející se galaxie se vyznačují obě pozorovanou hvězdnou velikostí 12,00 mag. Jaká je jejich výsledná hvězdná velikost m_c?

5. Stanovte pozorovanou hvězdnou velikost složek trojhvězdy, jejíž celková pozorovaná bolometrická hvězdná velikost je $m_c = 3{,}70$ mag, poměr hustot zářivých toků druhé a třetí složky je 2,8 a rozdíl pozorovaných bolometrických hvězdných velikostí třetí a první složky činí $m_3 - m_1 = 3{,}32$ mag.

6. Rozdíl absolutních bolometrických hvězdných velikostí dvou hvězd o stejných efektivních povrchových teplotách činí 6,4 mag. Určete poměr poloměrů obou hvězd.

Studenti úlohy

7. Hmotnost Vegy činí 2 M_S, poloměr 3R_S a zářivý výkon 60 L_S. Vypočtěte její Kelvinovu-Helmholtzovu časovou škálu a nukleární časovou škálu.

8. Typická hustota slunečního větru ve vzdálenosti Země činí 7. 10^6 částic v m^3. Střední složka slunečního větru má rychlost ~ 500 km.s^{-1}. Zjednodušeně předpokládejme, že je složen převážně z protonů. Určete úbytek hmotnosti Slunce v jednotkách M_S za rok. Jaké to má důsledky pro dráhu planet?

9. Stanovte hmotnost bílého trpaslíka Procyon B, jehož efektivní teplota činí 7 750 K, zářivý výkon 0,0005 L_s a gravitační rudý posuv $z = 10^{-4}$.

10. Určete poměr gravitačních rudých posuvů bílých trpaslíků 40 Eri B a 40 Eri C. Hvězdy se vyznačují následujícími charakteristikami.

40 Eri B: efektivní teplota 17 000 K, zářivý výkon 0,017 L_s, hmotnost 0,4 M_s

40 Eri C: efektivní teplota 3 100 K, zářivý výkon 0,008 L_s, hmotnost 0,2 M_s