M6150 Funkcionálna analýza I

Lineárne funkcionály

Peter Šepitka

leto 2023

Obsah

Obsah

V tejto prednáške budeme pracovať s normovanými lineárnymi priestormi X nad telesom reálnych/komplexných čísiel $\mathbb{T}$ a študovať vlastnosti lineárnych funkcionálov $f : X \to \mathbb{T}$. Obzvlášť sa budeme zaoberať spojitými lineárnymi funkcionálmi na normovaných lineárnych priestoroch X.

Príklad 1

Pre pevný index $k_0 \in \mathbb{N}$ je zobrazenie $f : l^2 \to \mathbb{T}$ definované $f(x) := x_{k_0}$ pre každé $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$ lineárnym funkcionálom na priestore l^2.

Príklad 2

Pre daný kompaktný interval $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ uvažujme lineárny priestor $X = \mathcal{C}[a, b]$ spojitých funkcií na $[a, b]$. Klasickým príkladom lineárneho funkcionálu na priestore X je zobrazenie $f : X \to \mathbb{R}$ dané predpisom

$$f(u) := \int_a^b u(x)\, y(x)\, \mathrm{d}x, \quad u \in X, \tag{1}$$

kde $y \in \mathcal{C}[a, b]$ je pevne zvolená funkcia. Podobne i zobrazenie

$$\delta_{x_0}(u) := u(x_0), \quad u \in X, \tag{2}$$

kde $x_0 \in [a, b]$ je pevne zvolený bod, je lineárny funkcionál na priestore X.

Definícia 1 (Konvexný funkcionál a pseudonorma na lineárnom priestore)

Nech X je lineárny priestor nad $\mathbb{T}$. Reálny funkcionál $p : X \to \mathbb{R}$ sa označuje prívlastkom konvexný, ak spĺňa vlastnosti

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y), \quad p(\lambda x) = \lambda\, p(x) \quad \text{pre každé } x, y \in X \text{ a } \lambda \in [0, \infty). \tag{3}$$

Konvexný funkcionál p na priestore X, pre ktorý naviac platí

$$p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x) \quad \text{pre každé } x \in X \text{ a } \lambda \in \mathbb{T}, \tag{4}$$

sa nazýva pseudonorma (seminorma) na lineárnom priestore X.

Poznámka 1

Z Definície 1 vyplýva, že každý konvexný funkcionál p na lineárnom priestore X spĺňa $p(0) = 0$ a každá pseudonorma na X je nezáporná.

Príklad 3

Príkladom pseudonormy na lineárnom priestore $X = \mathcal{B}[a, b]$, kde $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval, je zobrazenie $p : X \to \mathbb{R}$ dané predpisom

$$p(f) := |f(a)|, \quad f \in X. \tag{5}$$

Funkcionál p v (5) však nie je normou na X, ako môžeme ľahko ukázať.

Hahnova–Banachova veta

Dostávame sa k jednému z najdôležitejších výsledkov funkcionálnej analýzy. Nasledujúce tvrdenie a jeho rôzne varianty tvoria základné piliere, bez ktorých sa nezaobídeme pri budovaní väčšiny teórií v modernej analýze. Je dôležité poznamenať, že nevyhnutnou ingredienciou v dôkaze tvrdenia je predpoklad axiómy výberu realizovaný platnosťou Kuratowského–Zornovej lemy (Dodatky, Lema 4).

Definícia 2 (Predĺženie lineárneho funkcionálu)

Nech X je lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ a $A \subseteq X$ je daný lineárny podpriestor. Nech $f_A : A \to \mathbb{T}$ je lineárny funkcionál na A. Hovoríme, že lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ na priestore X je predĺženie (rozšírenie) funkcionálu f_A, ak pre každý vektor $x \in A$ platí rovnosť $f(x) = f_A(x)$.

Veta 1 (Algebraická Hahnova–Banachova)

Nech X je reálny lineárny priestor a $A \subseteq X$ je daný lineárny podpriestor. Nech $p : X \to \mathbb{R}$ je konvexný funkcionál na X a $f_A : A \to \mathbb{R}$ je lineárny funkcionál na A, pričom platí $f_A(x) \leq p(x)$ pre každý vektor $x \in A$. Potom existuje lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{R}$ na X, ktorý je predĺžením funkcionálu f_A a spĺňa nerovnosť $f(x) \leq p(x)$ pre každý vektor $x \in X$.

Dôkaz Vety 1.

Skôr, než pristúpime k dôkazu samotnému tvrdenia, odvodíme jedno pozorovanie. Nech $y, z \in A$ sú ľubovoľné vektory. Vďaka konvexnosti funkcionálu p platí

$$f_A(y) - f_A(z) = f_A(y-z) \leq p(y-z) = p(y+u-z-u) \leq p(y+u) + p(-z-u)$$

$$\Downarrow$$

$$-f_A(z) - p(-z-u) \leq -f_A(y) + p(y+u) \quad \text{pre každý vektor } u \in X. \tag{6}$$

Využitím relácie (6) môžeme potom pre ľubovoľné $u \in X$ definovať čísla

$$c_I(u) := \inf\left\{-f_A(y) + p(y+u),\ y \in A\right\}, \tag{7}$$

$$c_S(u) := \sup\left\{-f_A(z) - p(-z-u),\ z \in A\right\}. \tag{8}$$

Zrejme platí $c_S(u) \leq c_I(u)$ pre každý vektor $u \in X$. Ak podpriestor $A = X$, potom predložené tvrdenie platí triviálne. Predpokladajme preto, že $A \subseteq X$ je vlastný lineárny podpriestor, t.j., $A \subsetneq X$. Dokážeme, že lineárny funkcionál f_A je možné predĺžiť na istý väčší (v zmysle inklúzie) lineárny podpriestor $A' \subseteq X$ tak, aby sa zachovala nerovnosť požadovaná vo tvrdení. Zvoľme pevne nejaký vektor $u \in X \setminus A$ a položme

$$A' := \mathrm{Lin}_{\mathbb{R}}\{A, u\} = \{x + tu,\ x \in A,\ t \in \mathbb{R}\}. \tag{9}$$

Množina A' v (9) je lineárny podpriestor v X spĺňajúci $A \subsetneq A'$. Zvoľme reálne číslo c tak, aby $c_S(u) \leq c \leq c_I(u)$, kde $c_S(u), c_I(u)$ sú pre daný vektor u zave-

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

dené v (7) a (8). Definujme zobrazenie $f_{A'} : A' \to \mathbb{R}$ s predpisom

$$f_{A'}(x') := f_A(x) + tc \quad \text{pre každý vektor } x' = x + tu \in A'. \tag{10}$$

Vďaka jednoznačnosti vyjadrenia vektorov podpriestoru A' v (9) je zobrazenie $f_{A'}$ v (10) zavedené korektne, pričom sa jedná o lineárny funkcionál na A', ktorý je v zhode s Definíciou 2 predĺžením funkcionálu f_A. Naviac, ukážeme, že platí

$$f_{A'}(x') \leq p(x') \quad \text{pre každé } x' \in A'. \tag{11}$$

Podľa predpokladov je táto nerovnosť splnená na podpriestore A. Vyberme preto vektor $x' \in A' \setminus A$, t.j., v súlade s (9) platí $x' = x + tu$ pre vhodné $x \in A$ a $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Uvažujme najprv prípad $t > 0$. Kombináciou identít (7) a (10) s nerovnosťou $c \leq c_I(u)$ dostávame

$$f_{A'}(x') \overset{(10)}{=} f_A(x) + tc \leq f_A(x) + tc_I(u) \overset{(7)}{\leq} f_A(x) + t\,[-f_A(y) + p(y+u)] \tag{12}$$

pre každé $y \in A$. Následne, položiac v (12) $y := \frac{x}{t} \in A$ a využijúc vlastnosti funkcionálov f_A a p potom máme

$$f_{A'}(x') \overset{(12)}{\leq} f_A(x) + t\left[-f_A\left(\frac{x}{t}\right) + p\left(\frac{x}{t} + u\right)\right] = f_A(x) - f_A(x) + p(x+tu) = p(x').$$

V prípade $t < 0$ postupujeme analogicky. Pomocou rovností (8) a (10) a nerovnosti $c_S(u) \leq c$ postupne odvodíme

Dôkaz Vety 1 (pokračovanie).

$$f_{A'}(x') \overset{(10)}{=} f_A(x) + tc \le f_A(x) + tc_S(u) \overset{(8)}{\le} f_A(x) + t\left[-f_A(z) - p(-z-u)\right] \quad (13)$$

pre každé $z \in A$. Majúc na zreteli, že $-t > 0$, pre $z := \frac{x}{t} \in A$ má (13) tvar

$$f_{A'}(x') \overset{(13)}{\le} f_A(x) + t\left[-f_A\left(\frac{x}{t}\right) - p\left(-\frac{x}{t} - u\right)\right] = f_A(x) - f_A(x) + p(x+tu) = p(x').$$

Ukázali sme teda existenciu predĺženia každého lineárneho funkcionálu, ktorý pôsobí na ľubovoľnom vlastnom lineárnom podpriestore v X a spĺňa nerovnosť v zadaní tvrdenia. Uvažujme teraz množinu $\mathcal{U}$ všetkých možných predĺžení $\tilde{f}$ lineárneho funkcionálu f_A, ktoré zachovávajú nerovnosť $\tilde{f}(x) \le p(x)$ na svojich definičných oboroch. Množina $\mathcal{U}$ je zrejme vzhľadom na reláciu predĺženia čiastočne usporiadaná. Ak $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{U}$ je nejaký reťazec, potom lineárny funkcionál $\bar{f}$, ktorý je definovaný na zjednotení definičných oborov všetkých funkcionálov z $\mathcal{R}$, a ktorý na definičnom obore každého z nich nadobúda jeho hodnoty, je zrejme horné ohraničenie množiny $\mathcal{R}$. Podľa Kuratowského–Zornovej lemy má teda množina $\mathcal{U}$ aspoň jeden maximálny prvok f. Jedná sa práve o hľadaný lineárny funkcionál. Z jeho maximality a z prvej časti dôkazu vyplýva, že f je nutne definovaný na celom priestore X. A keďže $f \in \mathcal{U}$, je predĺžením lineárneho funkcionálu f_A, ktoré spĺňa nerovnosť $f(x) \le p(x)$ pre každé $x \in X$. ∎

Poznámka 2

Tvrdenie vo Vete 1 je možné obohatiť nasledujúcim dovetkom. Ak konvexný funkcionál p je naviac pseudonorma na priestore X, potom lineárny funkcionál f spĺňa nerovnosť $|f(x)| \leq p(x)$ pre každé $x \in X$. Skutočne, platí

$$-p(x) \overset{(4)}{=} -p(-x) \leq -f(-x) = f(x) \leq p(x) \quad \Rightarrow \quad |f(x)| \leq p(x) \tag{14}$$

pre každý vektor $x \in X$.

Analogická algebraická Hahnova–Banachova veta sa dá formulovať i pre komplexný lineárny priestor X. V tomto prípade však predpoklad konvexnosti funkcionálu p musíme v kontexte Definície 1 prirodzene zosilniť na požiadavku, aby funkcionál p bola pseudonorma na priestore X.

Lema 1

Nech X je komplexný lineárny priestor. Potom zobrazenie $f : X \to \mathbb{C}$ je komplexný lineárny funkcionál na X práve vtedy, keď existuje reálny lineárny funkcionál $g : X \to \mathbb{R}$ s vlastnosťou $f(x) = g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x)$ pre každé $x \in X$.

Dôkaz Lemy 1.

Nech $f : X \to \mathbb{C}$ je komplexný lineárny funkcionál na X. Uvažujme rozklad

Dôkaz Lemy 1 (pokračovanie).

$$f(x) = \mathrm{Re} f(x) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im} f(x), \quad x \in X, \tag{15}$$

kde $\mathrm{Re} f, \mathrm{Im} f : X \to \mathbb{R}$ sú reálne funkcionály na X. Položme $g := \mathrm{Re} f$. Reálny funkcionál g je lineárny na reálnom priestore X, ako vyplýva z výpočtov

$$g(x+y) = \mathrm{Re} f(x+y) = \frac{1}{2}\left[f(x+y) + \overline{f(x+y)}\right] = \frac{1}{2}\left[f(x) + f(y) + \overline{f(x)} + \overline{f(y)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(x) + \overline{f(x)}\right] + \frac{1}{2}\left[f(y) + \overline{f(y)}\right] = g(x) + g(y), \quad x, y \in X,$$

$$g(\lambda x) = \mathrm{Re} f(\lambda x) = \frac{1}{2}\left[f(\lambda x) + \overline{f(\lambda x)}\right] = \frac{1}{2}\left[\lambda f(x) + \overline{\lambda}\,\overline{f(x)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\lambda f(x) + \lambda \overline{f(x)}\right] = \lambda\,\frac{1}{2}\left[f(x) + \overline{f(x)}\right] = \lambda g(x), \quad x \in X, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Z rovnosti $f(\mathrm{i}x) = \mathrm{i} f(x)$ pre každé $x \in X$ odvodíme vzťah medzi reálnymi funkcionálmi $\mathrm{Re} f$ a $\mathrm{Im} f$. Konkrétne pomocou (15) dostávame

$$f(\mathrm{i}x) = \mathrm{Re} f(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\,\mathrm{Im} f(\mathrm{i}x), \quad \mathrm{i} f(x) = \mathrm{i}\,\mathrm{Re} f(x) - \mathrm{Im} f(x), \quad x \in X$$

$$\Downarrow$$

$$\mathrm{Re} f(x) = \mathrm{Im} f(\mathrm{i}x), \quad \mathrm{Im} f(x) = -\mathrm{Re} f(\mathrm{i}x), \quad x \in X. \tag{16}$$

Z druhej rovnosti v (16) máme $\mathrm{Im} f(x) = -g(\mathrm{i}x)$, z čoho podľa (15) získame

Dôkaz Lemy 1 (pokračovanie).

$f(x) = g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x)$ pre každé $x \in X$. Naopak, ak $g : X \to \mathbb{R}$ je lineárny funkcionál na reálnom priestore X, potom zobrazenie $f(x) := g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x)$ je komplexný lineárny funkcionál na komplexnom priestore X. Skutočne, platí

$$\begin{aligned} f(x+y) &= g(x+y) - \mathrm{i}g\left(\mathrm{i}(x+y)\right) = g(x) + g(y) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}y) \\ &= g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x) + g(y) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}y) = f(x) + f(y), \\ f(\lambda x) &= f\left((\alpha + \mathrm{i}\beta)x\right) = g\left((\alpha + \mathrm{i}\beta)x\right) - \mathrm{i}g\left(\mathrm{i}(\alpha + \mathrm{i}\beta)x\right) \\ &= \alpha g(x) + \beta g(\mathrm{i}x) - \mathrm{i}\alpha g(\mathrm{i}x) + \mathrm{i}\beta g(x) \\ &= (\alpha + \mathrm{i}\beta)\left(g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x)\right) = \lambda\left(g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x)\right) = \lambda f(x), \end{aligned}$$

pre každé $x, y \in X$ a $\lambda = \alpha + \mathrm{i}\beta \in \mathbb{C}$. Dôkaz je hotový. ■

Veta 2 (Algebraická Hahnova–Banachova)

Nech X je komplexný lineárny priestor a $A \subseteq X$ je daný lineárny podpriestor. Nech $p : X \to \mathbb{R}$ je pseudonorma na X a $f_A : A \to \mathbb{C}$ je lineárny funkcionál na A, pričom platí $|f_A(x)| \leq p(x)$ pre každý vektor $x \in A$. Potom existuje lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{C}$ na X, ktorý je predĺžením funkcionálu f_A a spĺňa nerovnosť $|f(x)| \leq p(x)$ pre každý vektor $x \in X$.

Dôkaz Vety 2.

Nech $g_A : A \to \mathbb{R}$ je reálny lineárny funkcionál na reálnom podpriestore A, ktorý odpovedá funkcionálu f_A v kontexte Lemy 1, t.j., platí

$$f_A(x) = g_A(x) - \mathrm{i}g_A(\mathrm{i}x), \quad x \in A. \tag{17}$$

Z reprezentácie v (17) a z predpokladov tvrdenia máme nerovnosť

$$|g_A(x)| \le |f_A(x)| \le |p(x)|, \quad x \in A. \tag{18}$$

Podľa Vety 1 a relácie (14) v Poznámke 2 z nerovnosti (18) vyplýva, že existuje reálny lineárny funkcionál $g : X \to \mathbb{R}$ na reálnom priestore X, ktorý je predĺžením funkcionálu g_A a spĺňa $|g(x)| \le p(x)$ pre každé $x \in X$. Uvažujme zobrazenie

$$f(x) := g(x) - \mathrm{i}g(\mathrm{i}x), \quad x \in X. \tag{19}$$

V súlade s Lemou 1 je funkcia $f : X \to \mathbb{C}$ komplexný lineárny funkcionál na komplexnom priestore X. Vzhľadom na (17) sa jedná o predĺženie funkcionálu f_A na celý lineárny priestor X. Zvoľme vektor $x \in X$ a vyberme $\varphi \in [-\pi, \pi)$ tak, že $f(x) = |f(x)|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$. Potom $f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}f(x) = |f(x)|$ je reálne číslo, a tak v súlade s (19) platí $f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}x) = g(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}x)$. Následne dostávame

$$|f(x)| = f(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}x) = g(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}x) \le p(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}x) \overset{(4)}{=} \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}\right| p(x) = p(x). \tag{20}$$

Nakoľko vektor $x \in X$ bol vybraný ľubovoľne, nerovnosť (20) platí pre každé $x \in X$. Lineárny funkcionál f spĺňa závery tvrdenia a dôkaz je kompletný. ∎

Obsah

V ďalšej časti prednášky sa budeme zaoberať spojitými lineárnymi funkcionálmi na lineárnych normovaných priestoroch nad daným telesom $\mathbb{T}$.

Definícia 3 (Ohraničenosť funkcionálu)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a $f : X \to \mathbb{T}$ je funkcionál. Hovoríme, že funkcionál f je ohraničený, ak obraz $f(A)$ každej množiny $A \subseteq X$ ohraničenej v norme $\|\cdot\|$ je množina ohraničená v priestore $\mathbb{E}$.

Veta 3

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a $f : X \to \mathbb{T}$ je lineárny funkcionál. Potom funkcionál f je spojitý na priestore X práve vtedy, keď je spojitý aspoň v jednom bode $x \in X$.

Dôkaz Vety 3.

Stačí zrejme dokázať platnosť implikácie "$\Leftarrow$", nakoľko implikácia "$\Rightarrow$" je triviálna. Prepdokladajme, že lineárny funkcionál f je spojitý v nejakom vektore $x \in X$. Zvoľme $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ s vlastnosťou

$$\text{ak pre } \tilde{x} \in X \text{ platí } \|\tilde{x} - x\| < \delta, \text{ potom } |f(\tilde{x}) - f(x)| < \varepsilon. \tag{21}$$

Nech $y \in X$ je ľubovoľný vektor a uvažujme $\tilde{y} \in X$ také, že $\|\tilde{y} - y\| < \delta$. Keďže

Dôkaz Vety 3.

$\|(\tilde{y} - y + x) - x\| = \|\tilde{y} - y\| < \delta$, v súlade s linearitou f a reláciou v (21) platí

$$|f(\tilde{y}) - f(y)| = |[f(\tilde{y}) - f(y) + f(x)] - f(x)| = |f(\tilde{y} - y + x) - f(x)| \overset{(21)}{<} \varepsilon.$$

Funkcionál f je teda spojitý v y. Nakoľko vektor $y \in X$ bol vybraný ľubovoľne, zobrazenie f je spojité na celom priestore X, čo kompletizuje dôkaz. ■

Veta 4

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a $f : X \to \mathbb{R}$ je lineárny funkcionál. Potom funkcionál f je spojitý na priestore X práve vtedy, keď je ohraničený na nejakom okolí nulového vektora.

Dôkaz Vety 4.

Ak lineárny funkcionál f je spojitý na priestore X, tak potom je spojitý i v nulovom vektore. Obzvlášť, pre $\varepsilon = 1$ máme zaručenú existenciu čísla $\delta > 0$ takého, že platí $|f(x)| = |f(x) - f(0)| < 1$ pre každý vektor $x \in X$ spĺňajúci $\|x\| < \delta$. To znamená, že funkcionál f je ohraničený na otvorenej guli $B(0, \delta)$. Naopak, predpokladajme, že funkcionál f je ohraničený na nejakom okolí nulového vektora, t.j., existujú kladné reálne čísla c, r s vlastnosťou

Dôkaz Vety 4 (pokračovanie).

$$|f(x)| \leq c \quad \text{pre každý vektor } x \in B(0,r). \tag{22}$$

Zvoľme ľubovoľne $\varepsilon > 0$ a položme $\delta := \frac{\varepsilon r}{c}$. Potom pre každé $x \in X$ také, že $\|x\| < \delta$, platí $\|\frac{c}{\varepsilon}x\| = \frac{c}{\varepsilon}\|x\| < r$, a tak vektor $\frac{c}{\varepsilon}x \in B(0,r)$. Následne

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| = \left|\frac{\varepsilon}{c} f\left(\frac{c}{\varepsilon}x\right)\right| = \frac{\varepsilon}{c}\left|f\left(\frac{c}{\varepsilon}x\right)\right| \overset{(22)}{<} \frac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon,$$

a tak funkcionál f je spojitý v nulovom vektore. Napokon, podľa Vety 3 je zobrazenie f spojité na celom priestore X. Dôkaz je hotový. ■

Poznámka 3

Výsledky Viet 3 a 4 predstavujú fundamentálnu vlastnosť lineárnych funkcionálov pôsobiacich na normovaných lineárnych priestoroch. Konkrétne, spojitosť daného lineárneho funkcionálu na priestore X je ekvivalentná s jeho ohraničenosťou na nejakom okolí nulového vektora.

Príklad 4 (Normované lineárne priestory konečnej dimenzie)

Nech X je konečno rozmerný normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$.

Príklad 4 (Normované lineárne priestory konečnej dimenzie)

Potom každé zobrazenie $f \in X^*$ je spojité na X. Toto pozorovanie je dôsledkom skutočnosti, že každé dve normy na danom normovanom lineárnom priestore sú ekvivalentné. Označme $n := \dim X$ a uvažujme lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$. Nech $B = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq X$ je nejaká pevná Hamelova báza priestoru X. Potom pre každý vektor $x \in X$ platí

$$f(x) = \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n), \quad \text{kde } x = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n, \tag{23}$$

t.j., n-tica $(\lambda_1, \ldots, \lambda_2) \in \mathbb{T}^n$ predstavuje súradnice vektora x vzhľadom na Hamelovu bázu B. Položme $M := \max\{|f(x_k)|,\ k \in \{1, \ldots, n\}\}$ a uvažujme na lineárnom priestore X súčtovú normu tvaru

$$\|x\|_1 := |\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|, \quad x = \lambda_1 x_1 + \cdots \lambda_n x_n. \tag{24}$$

Nie je ťažké overiť, že zobrazenie $\|\cdot\|_1$ v (24) je skutočne normou na X. Ukážeme, že funkcionál f je ohraničený vzhľadom na normu $\|\cdot\|_1$. Skutočne, pre každý vektor $x \in X$ postupne máme

$$|f(x)| \overset{(23)}{=} |\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)| \le M\big(|\lambda_1| + \cdots + |\lambda_n|\big) \overset{(24)}{=} M\|x\|_1. \tag{25}$$

Nerovnosť v (25) znamená, že lineárny funkcionál f je ohraničený na každom okolí nulového vektora. Podľa Vety 4 je zobrazenie f spojité v normovanom lineárnom priestore $(X, \|\cdot\|_1)$. A nakoľko normy $\|\cdot\|$ a $\|\cdot\|_1$ sú ekvivalentné, lineárny funkcionál f je spojitý na priestore X i vzhľadom na normu $\|\cdot\|$.

Výsledok Vety 4 umožňuje zaviesť významnú charakteristiku spojitých lineárnych funkcionálov na normovaných lineárnych priestoroch.

Definícia 4 (Norma lineárneho funkcionálu)

Nech X je normovaný priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a $f : X \to \mathbb{T}$ je spojitý lineárny funkcionál. Hodnota definovaná predpisom

$$\|f\| := \sup\{|f(x)|,\ x \in X,\ \|x\| \le 1\} \tag{26}$$

sa nazýva norma lineárneho funkcionálu f.

Poznámka 4

Spojitosť a linearita zobrazenia f podľa Poznámky 3 zaručujú, že funkcionál f je ohraničený na nejakom okolí nulového vektora. V kontexte Definície 3 je preto číslo v (26) konečné a nezáporné pre každý spojitý lineárny funkcionál $f \in X^*$. Nie je ťažké ukázať, že normu $\|f\|$ v (26) možno ekvivalentne vyjadriť v tvaroch

$$\|f\| = \sup\{|f(x)|,\ x \in X,\ \|x\| = 1\}, \quad \|f\| = \sup\left\{\frac{|f(x)|}{\|x\|},\ x \in X \setminus \{0\}\right\}. \tag{27}$$

Obzvlášť, z druhej formuly v (27) vyplýva dôležitá nerovnosť

$$|f(x)| \le \|f\|\,\|x\| \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{28}$$

Príklad 5

V Príklade 4 sme ukázali, že v normovanom lineárnom priestore X konečnej dimenzie je každý lineárny funkcionál spojitý na X. Uvažujme $\dim X = n \in \mathbb{N}$ a zvoľme nejakú pevnú Hamelovu bázu $B \subseteq X$. Ak na priestore X uvažujeme súčtovú normu $\|\cdot\|_1$ definovanú v (24), potom vzhľadom na nerovnosti (25) a (28) pre každý lineárny funkcionál $f \in X^*$ platí $\|f\|_1 \leq M$, kde číslo

$$M := \max\{|f(u)|,\ u \in B\}. \tag{29}$$

Na druhej strane, $M = |f(u_0)|$ pre nejaký vektor $u_0 \in B$ a $\|u_0\|_1 = 1$ podľa (24), preto v súlade s (26) máme $\|f\|_1 \geq M$. Preto dostávame rovnosť

$$\|f\|_1 = M \overset{(29)}{=} \max\{|f(u)|,\ u \in B\}. \tag{30}$$

Analogicky sa dá odvodiť, že ak v priestore X uvažujeme maximálnu normu $\|x\|_\infty := \max_{u\in B} |\lambda_u|$, kde $x = \sum_{u\in B} \lambda_u u$, odpovedajúca norma každého lineárneho funkcionálu $f \in X^*$ má tvar

$$\|f\|_\infty = \sum_{u\in B} |f(u)|. \tag{31}$$

Napokon pre euklidovskú normu $\|x\|_2 = \left(\sum_{u\in B} |\lambda_u|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, kde $x = \sum_{u\in B} \lambda_u u$, odvodíme, že $\|f\|_2 = \left(\sum_{u\in B} |f(u)|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ pre každý lineárny funkcionál $f \in X^*$.

Príklad 6

Pre daný intervale $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ nech $\mathcal{B}_I[a,b]$ je množina všetkých reálnych funkcií, ktoré sú definované, ohraničené a lebesgueovsky integrovateľné na intervale $[a,b]$. Z predchádzajúcich prednášok vieme, že $\mathcal{B}_I[a,b]$ je reálny lineárny priestor, na ktorom je možné zaviesť normu

$$\|u\|_B := \sup_{x \in [a,b]} |u(x)|, \quad u \in \mathcal{B}_I[a,b]. \tag{32}$$

Uvažujme lineárny funkcionál $f : \mathcal{B}_I[a,b] \to \mathbb{R}$ tvaru

$$f(u) := \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x, \quad u \in \mathcal{B}_I[a,b]. \tag{33}$$

Funkcionál f v (33) je ohraničený na istom okolí identicky nulovej funkcie na $[a,b]$, keďže pre každé $u \in \mathcal{B}_I[a,b]$ spĺňajúce $\|u\|_B \leq 1$ platí

$$|f(u)| \overset{(33)}{=} \left| \int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_a^b |u(x)|\,\mathrm{d}x \overset{(32)}{\leq} \underbrace{\|u\|_B}_{\leq 1} \int_a^b \mathrm{d}x \leq b-a. \tag{34}$$

Zobrazenie f je teda podľa Vety 4 spojité na priestore $\mathcal{B}_I[a,b]$. Obzvlášť, v súlade s (26) vyplýva z nerovnosti (34) pre normu $\|f\|$ odhad $\|f\| \leq b-a$. Na druhej strane, pre konštantnú funkciu $u(x) \equiv 1$ na $[a,b]$ podľa (32) a (33) platí $\|u\|_B = 1$ a $|f(u)| = b-a$, takže norma funkcionálu f spĺňa $\|f\| = b-a$.

Príklad 7

Dá sa ukázať, že lineárny funkcionál f v (1) z Príkladu 2 je spojitý na normovanom lineárnom priestore $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_C)$, pričom pre jeho normu platí

$$\|f\| = \int_a^b |y(x)|\,\mathrm{d}x. \tag{35}$$

Poznámka 5 (Geometrický význam normy spojitého lineárneho funkcionálu)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a $f : X \to \mathbb{R}$ je nenulový spojitý lineárny funkcionál. Množina

$$E_f = \{x \in X,\ f(x) = 1\} \tag{36}$$

je nadrovina v lineárnom priestore X rovnobežná s podpriestorom $\operatorname{Ker} f$ (Dodatky, Poznámka 18). Nech d je vzdialenosť vektora 0 od množiny E_f, t.j.,

$$d := \rho(E_f, 0) = \inf\{\|x\|,\ x \in X,\ f(x) = 1\}. \tag{37}$$

Nie je ťažké ukázať, že množina E_f v (36) je uzavretá v normovanom lineárnom priestore X, a keďže zrejme $0 \notin E_f$, číslo $d > 0$. Dokážeme rovnosť

$$d = \frac{1}{\|f\|}, \tag{38}$$

Poznámka 5 (Geometrický význam normy spojitého lineárneho funkcionálu)

kde $\|f\|$ je norma funkcionálu f definovaná v (26). Skutočne, vzhľadom na charakter množiny E_f v (36) podľa nerovnosti (28) platí

$$1 = |f(x)| \overset{(28)}{\leq} \|f\|\,\|x\|, \text{ a tak } \|x\| \geq \frac{1}{\|f\|} \text{ pre každé } x \in E_f, \text{ takže } d \geq \frac{1}{\|f\|} \tag{39}$$

v súlade s (37). Na druhej strane, z druhej identity v (27) v Poznámke 4 vyplýva, že pre každé kladné číslo $\varepsilon < \|f\|$ existuje nenulový vektor $x \in X$ s vlastnosťou

$$0 < \|f\| - \varepsilon < \frac{|f(x)|}{\|x\|}. \tag{40}$$

Položme $\tilde{x} := \frac{x}{f(x)}$. Keďže $f(\tilde{x}) = 1$ a $\|\tilde{x}\| = \frac{\|x\|}{|f(x)|}$, využijúc (36) a (40) máme

$$\tilde{x} \overset{(36)}{\in} E_f \quad \text{a} \quad \|\tilde{x}\| = \frac{\|x\|}{|f(x)|} \overset{(40)}{<} \frac{1}{\|f\| - \varepsilon}, \tag{41}$$

takže v zhode s (37) platí $d < \frac{1}{\|f\|-\varepsilon}$. Napokon, limitovaním tejto nerovnosti pre $\varepsilon \to 0^+$ dostávame $d \leq \frac{1}{\|f\|}$, čo završuje dôkaz formuly (38). Vidíme teda, že normu každého nenulového spojitého lineárneho funkcionálu f pôsobiaceho na normovanom priestore X možno geometricky interpretovať ako prevrátenú hodnotu vzdialenosti nadroviny E_f v (36) od nulového vektora v X.

Príklad 8

Aplikujúc výsledok (38) odvodený v Poznámke 5 na Príklad 5 dostávame, že vzdialenosť množiny všetkých riešení lineárnej rovnice

$$a_1\,x_1+\cdots+a_n\,x_n=1,\quad (a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{T}^n\setminus\{0\},\quad x_k\in\mathbb{T},\quad k\in\{1,\dots,n\},$$

od nulového vektora je rovná $\frac{1}{\sqrt{|a_1|^2+\cdots+|a_n|^2}}$. Podobne, v Príklade 6 platí, že vzdialenosť množiny všetkých funkcií $u\in\mathcal{B}_I[a,b]$ spĺňajúcich $\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}x=1$ od funkcie identicky nulovej na intervale $[a,b]$ je rovná číslu $\frac{1}{b-a}$.

Veta 5 (Hahnova–Banachova pre normované lineárne priestory)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$, $A\subseteq X$ je normovaný podpriestor a $f_A : A\to\mathbb{T}$ je spojitý lineárny funkcionál na A. Potom existuje spojité predĺženie $f : X\to\mathbb{T}$ funkcionálu f_A na celý priestor X, ktoré zachováva normu funkcionálu f_A, t.j., platí rovnosť $\|f\|=\|f_A\|_A$.

Dôkaz Vety 5.

Označme $c:=\|f_A\|_A$ a definujme funkcionál $p : X\to\mathbb{R}$ predpisom

$$p(x):=c\,\|x\|,\quad x\in X. \tag{42}$$

Dôkaz Vety 5 (pokračovanie).

Z vlastností normy $\|\cdot\|$ vieme, že zobrazenie p v (42) je pseudonorma na priestore X, pričom podľa (28) platí pre každý vektor $x \in A$ nerovnosť

$$|f_A(x)| \overset{(28)}{\leq} \|f_A\|_A \, \|x\| = c \, \|x\| \overset{(42)}{=} p(x). \tag{43}$$

Na základe Vety 1 v kombinácii s Poznámkou 2 a Vety 2 máme zaručenú existenciu predĺženia funkcionálu f_A na celý priestor X, ktoré zachováva nerovnosť (43). Presnejšie, existuje lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ s vlastnosťami

$$f(x) = f_A(x) \text{ pre každé } x \in A \text{ a } |f(x)| \leq p(x) = c \, \|x\| \text{ pre každé } x \in X. \tag{44}$$

V súlade s (44) a Definíciou 3 je funkcionál f ohraničený na okolí nulového vektora, a teda podľa Vety 4 je spojitý na X. Obzvlášť, z druhej rovnosti v (27) a nerovnosti v (44) vyplýva, že $\|f\| \leq c$. Na druhej strane, platí $c = \|f_A\|_A$, $A \subseteq X$ a $f = f_A$ na podpriestore A. Preto máme

$$c \overset{(26)}{=} \sup\{|f(x)|, \; x \in A, \; \|x\| \leq 1\} \leq \sup\{|f(x)|, \; x \in X, \; \|x\| \leq 1\} \overset{(26)}{=} \|f\|.$$

To dokazuje, že platí rovnosť $\|f\| = \|f_A\|_A$. Dôkaz je kompletný. ∎

Práve výsledok Vety 5 sa vo väčšine klasickej literatúry označuje názvom Hahnova–Banachova veta. Dodajme, že tvrdenie sa štandarne formuluje pre prípad reálneho normovaného lineárneho priestoru X.

Dôsledok 1

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a $x_0 \in X$ je nenulový vektor. Potom existuje spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ spĺňajúci

$$f(x_0) = \|x_0\| \quad \textit{a} \quad \|f\| = 1. \tag{45}$$

Dôkaz Dôsledku 1.

Označme $A := \mathrm{Lin}_{\mathbb{T}}\{x_0\}$ a definujme zobrazenie $f_A : A \to \mathbb{T}$ dané predpisom

$$f_A(x) := \lambda\, \|x_0\| \quad \text{pre } x = \lambda\, x_0 \in A. \tag{46}$$

Lineárny podpriestor $A \subseteq X$ je nenulový a uzavretý v normovanom priestore X a zobrazenie f_A v (46) je ohraničený lineárny funkcionál na A, nakoľko

$$|f_A(x)| \overset{(46)}{=} |\lambda|\, \|x_0\| = \|\lambda\, x_0\| = \|x\| \quad \text{pre každé } x = \lambda\, x_0 \in A. \tag{47}$$

Podľa Vety 4 je preto funkcionál f_A spojitý na priestore A. Naviac, pre jeho normu $\|f_A\|_A$ vzhľadom na A platí

$$\|f_A\|_A \overset{(27)}{=} \sup\{|f_A(x)|,\ x \in A,\ \|x\| = 1\} \overset{(47)}{=} \sup\{\|x\|,\ x \in A,\ \|x\| = 1\} = 1. \tag{48}$$

Podľa Vety 5 existuje spojitý lineárny funkcionál f pôsobiaci na celom priestore X a spĺňajúci rovnosti v (45). Dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 6

Z Dôsledku 1 vyplývajú dva významné výsledky. Prvý z nich je záruka existencie aspoň jedného netriviálneho spojitého lineárneho funkcionálu $f : X \to \mathbb{T}$ pre každý nenulový normovaný lineárny priestor X nad $\mathbb{T}$. Druhý výsledok je skutočnosť, že množina všetkých nenulových spojitých lineárnych funkcionálov pôsobiacich na danom nenulovom normovanom lineárnom priestore X je "dostatočne bohatá". Presnejšie, pre ľubovoľné dva rôzne vektory $x, y \in X$ vždy existuje spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$, ktorý ich oddeľuje, t.j., platí $f(x) \neq f(y)$. Vyplýva to z Dôsledku 1, v ktorom stačí položiť $x_0 := x - y$.

Dôsledok 2

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$, $A \subsetneq X$ je normovaný lineárny podpriestor a $x_0 \in X \setminus A$ je daný vektor. Označme $d := \rho(A, x_0) > 0$. Potom existuje spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ spĺňajúci

$$f(x) = 0 \text{ pre každé } x \in A, \quad f(x_0) = d \quad \text{a} \quad \|f\| = 1. \tag{49}$$

Dôkaz Dôsledku 2.

Postupujeme podobne ako v dôkaze Dôsledku 1. Uvažujme lineárny priestor

Dôkaz Dôsledku 2 (pokračovanie).

$$\tilde{A} := \operatorname{Lin}_{\mathbb{T}}\{A, x_0\} = \{y + \lambda x_0,\ y \in A,\ \lambda \in \mathbb{T}\}. \tag{50}$$

Priestor $\tilde{A}$ je normovaný lineárny podpriestor v X, t.j., množina $\tilde{A}$ je uzavretá v X. Vďaka predpokladu $x_0 \notin A$ je reprezentácia prvkov množiny $\tilde{A}$ v (50) jednoznačná. Z definície vzdialenosti $d = \rho(A, x_0)$ dostávame

$$0 < d \leq \|x_0 - y\| \quad \text{pre každé } y \in A. \tag{51}$$

Na podpriestore $\tilde{A}$ uvažujme funkcionál $f_{\tilde{A}}$ s predpisom

$$f_{\tilde{A}}(x) := \lambda d, \quad x \overset{(50)}{=} y + \lambda x_0 \in \tilde{A}, \quad y \in A, \quad \lambda \in \mathbb{T}. \tag{52}$$

Nie je ťažké overiť, že $f_{\tilde{A}}$ v (52) je lineárny funkcionál na $\tilde{A}$ spĺňajúci $f_{\tilde{A}}(x) = 0$ pre každý vektor $x \in A$ a $f_{\tilde{A}}(x_0) = d$. Naviac, pre každý vektor $x \in \tilde{A} \setminus A$ platí

$$|f_{\tilde{A}}(x)| \overset{(52)}{=} |\lambda|\, d = \frac{|\lambda|\, d}{\|x\|}\, \|x\| \overset{(50)}{=} \frac{|\lambda|\, d}{\|y + \lambda x_0\|}\, \|x\| = \frac{|\lambda|\, d}{|\lambda| \cdot \left\|\frac{y}{\lambda} + x_0\right\|}\, \|x\|$$

$$= \frac{d}{\left\|x_0 - (-\frac{y}{\lambda})\right\|}\, \|x\| \overset{(51)}{\leq} \frac{d}{d}\, \|x\| = \|x\|, \tag{53}$$

pričom predposlednom kroku sme využili fakt, že vektor $-\frac{y}{\lambda} \in A$. Z nerovnosti (53) v súlade s Definíciou 3 máme, že lineárny funkcionál $f_{\tilde{A}}$ je ohraničený. Pod-

Dôkaz Dôsledku 2 (pokračovanie).

ľa Poznámky 3 je teda zobrazenie f spojité na $\tilde{A}$. Naviac, pre normu $\|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}}$ vzhľadom na $\tilde{A}$ pomocou odhadu (53) a toho, že $f_{\tilde{A}}(A) = \{0\} \subseteq \mathbb{T}$, dostávame

$$\|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}} \overset{(27)}{=} \sup\left\{\frac{|f_{\tilde{A}}(x)|}{\|x\|},\ x \in \tilde{A} \setminus \{0\}\right\} \overset{(53)}{\leq} 1. \tag{54}$$

Na druhej strane, existuje postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ s vlastnosťou

$$\lim_{k\to\infty} \|x_0 - y_k\| = \lim_{k\to\infty} \rho(x_0, y_k) = d. \tag{55}$$

Nakoľko $x_0 - y_k \in \tilde{A}$ pre každé $k \in \mathbb{N}$, z vlastností funkcionálu $f_{\tilde{A}}$ máme

$$\lim_{k\to\infty} f_{\tilde{A}}(x_0 - y_k) = \lim_{k\to\infty} [f_{\tilde{A}}(x_0) - \underbrace{f_{\tilde{A}}(y_k)}_{0}] = \lim_{k\to\infty} \underbrace{f_{\tilde{A}}(x_0)}_{d} = d, \tag{56}$$

$$|f_{\tilde{A}}(x_0 - y_k)| \overset{(28)}{\leq} \|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}}\, \|x_0 - y_k\| \quad \text{pre každý index } k \in \mathbb{N}. \tag{57}$$

Limitovaním nerovnosti (57) pre $k \to \infty$ a využitím relácií (55) a (56) získame $d \leq \|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}}\, d$, a tak $1 \leq \|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}}$. Preto norma $\|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}} = 1$. Napokon Veta 5 zaručuje existenciu spojitého predĺženia $f : X \to \mathbb{T}$ funkcionálu $f_{\tilde{A}}$, ktoré spĺňa $\|f\| = \|f_{\tilde{A}}\|_{\tilde{A}} = 1$. Dôkaz je kompletný. ∎

Tvrdenie Dôsledku 1 je špeciálnym prípadom Dôsledku 2 pre $A := \{0\} \subseteq X$.

Obsah

V tejto sekcii budeme analyzovať množinu všetkých spojitých lineárnych funkcionálov na danom normovanom lineárnom priestore $(X, \|\cdot\|)$ nad daným telesom $\mathbb{T}$. Jedná sa zrejme vždy o podmnožinu algebraického duálneho priestoru X^* (Dodatky, Definícia 14). Nie je ťažké si premyslieť, že množina všetkých spojitých lineárnych funkcionálov na priestore X vytvára lineárny podpriestor v X^* nad $\mathbb{T}$.

Definícia 5 (Duálny priestor normovaného lineárneho priestoru)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$. Lineárny priestor všetkých spojitých lineárnych funkcionálov $f : X \to \mathbb{T}$ sa nazýva duálny priestor/adjungovaný priestor priestoru X a označuje sa symbolom X'.

Veta 6

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$. Potom duálny priestor X' zavedený v Definícii 5 je je normovaným lineárnym priestorom vzhľadom na normu definovanú predpisom (26) v Definícii 4.

Dôkaz Vety 6.

Ukážeme, že zobrazenie definované v (26) je skutočne normou na priestore X'. Zrejme $\|f\| \geq 0$ pre každé $f \in X'$, pričom v súlade s (27) platí $\|f\| = 0$ práve vtedy, keď $f(x) = 0$ pre každý vektor $x \in X$, t.j., f je nulový funkcionál na X.

Dôkaz Vety 6 (pokračovanie).

Rovnosť $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$ pre každé $f \in X'$ a každé $\lambda \in \mathbb{T}$ je podľa (26) evidentná. Napokon dokážeme platnosť trojuholníkovej nerovnosti. Zvoľme dva funkcionály $f, g \in X'$. V súlade s prvou formulou v (27) máme

$$\|f+g\| \overset{(27)}{=} \sup\{|f(x)+g(x)|,\ x \in X,\ \|x\| = 1\}. \tag{58}$$

Pre každý vektor $x \in S(0,1)$ platí $|f(x)| \leq \|f\|$ a $|g(x)| \leq \|g\|$, a tak následne

$$|f(x)+g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\| + \|g\|, \quad x \in S(0,1). \tag{59}$$

Kombináciou (58) a (59) získame nerovnosť $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$. ∎

Príklad 9 (Duálne priestory normovaných priestorov konečnej dimenzie)

V Príkladoch 4 a 5 sme skúmali lineárne funkcionály na normovanom lineárnom priestore $(X, \|\cdot\|)$ konečnej dimenzie. V kontexte Definície 5 môžeme konštatovať, že vzhľadom na každú danú normu $\|\cdot\|$ platí $X' = X^*$, t.j., lineárny podpriestor X' vždy splýva s algebraickým duálnym priestorom X^*. V Príklade 10 dokážeme, že pre každý duálny priestor X', t.j., vzhľadom na každú normu $\|\cdot\|$ v X, platí $\dim X' = \dim X$. To znamená, že duálny priestor $(X', \|\cdot\|)$ je homeomorfný s $(X, \|\cdot\|)$. Obzvlášť, duálne priestory k normovaným lineárnym priestorom s rovnakým podkladovým priestorom sú vzájomne homeomorfné.

Veta 7 (Úplnosť duálneho priestoru)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Potom X' je Banachov priestor vzhľadom na normu v (26).

Dôkaz Vety 7.

Nech $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ je cauchyovská postupnosť spojitých lineárnych funkcionálov na priestore X, t.j., pre každé $\varepsilon > 0$

$$\text{existuje } n_\varepsilon \in \mathbb{N} \text{ tak, že pre každé dva indexy } n, m \geq n_\varepsilon \text{ platí } \|f_n - f_m\| < \varepsilon. \tag{60}$$

Využitím nerovnosti (28) pre každé dva indexy $n, m \geq n_\varepsilon$ dostávame

$$|f_n(x) - f_m(x)| \overset{(28)}{\leq} \|f_n - f_m\| \, \|x\| \overset{(60)}{<} \varepsilon \|x\| \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{61}$$

Z relácie (61) ihneď vyplýva, že pre každý pevný vektor $x \in X$ je číselná postupnosť $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ cauchyovská, a teda vďaka úplnosti euklidovského priestoru $\mathbb{E}$ i konvergentná. Existuje preto funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ daný predpisom

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x), \quad x \in X. \tag{62}$$

Ukážeme, že $f \in X'$, t.j., že zobrazenie f je spojitý lineárny funkcionál na X. Linearitu zobrazenia f možno ľahko vidieť z jeho definície v (62) a z linearity funkcionálov f_k, $k \in \mathbb{N}$. Naviac, limitovaním nerovnosti (61) pre $n \to \infty$ máme

Dôkaz Vety 7 (pokračovanie).

$$|f(x) - f_m(x)| \le \varepsilon \|x\| \quad \text{pre každý index } m \ge n_\varepsilon \text{ a každé } x \in X. \tag{63}$$

Podľa (63) a Definície 3 je preto pre každé pevne zvolené $\varepsilon > 0$ lineárny funkcionál $f - f_m$ pre $m \ge n_\varepsilon$ ohraničený na okoliach nulového vektora, a teda v súlade s Vetou 4 je spojitý na celom priestore X. Vďaka spojitosti každého z lineárnych funkcionálov f_k, $k \in \mathbb{N}$, na X je potom spojitý i lineárny funkcionál $f = (f - f_m) + f_m$, $m \ge n_\varepsilon$, na priestore X. Takže skutočne $f \in X'$ v zhode s Definíciou 5. Napokon dokážeme, že uvažovaná postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje podľa (62) k funkcionálu f nielen bodovo na X, ale i v norme duálneho priestoru X'. Kombináciou druhej formuly v (27) a nerovnosti (63) dostávame, že pre každé $m \ge n_\varepsilon$ je

$$\|f - f_m\| \overset{(27)}{=} \sup \left\{ \frac{|f(x) - f_m(x)|}{\|x\|},\ x \in X \setminus \{0\} \right\} \overset{(63)}{\le} \varepsilon. \tag{64}$$

To znamená, že postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je konvergentná v norme priestoru X' s limitou $f \in X'$. Duálny priestor $(X', \|\cdot\|)$ je teda úplný a dôkaz je hotový. ∎

Poznámka 7

Poznamenajme, že výsledok Vety 7 platí pre každý normovaný lineárny priestor X bez ohľadu na to, či je alebo nie je Banachov priestor. Špeciálne, ak priestor

Poznámka 7

X nie je úplný a $\tilde{X}$ označuje jeho úplný obal, potom sa dá dokázať, že odpovedajúce duálne priestory X' a $\tilde{X}'$ sú izometricky izomorfné. Hlavná myšlienka je založená na skutočnosti, že pre každý funkcionál $f \in X'$ existuje jediné spojité predĺženie $\tilde{f} \in \tilde{X}'$ spĺňajúce $\|\tilde{f}\|_{\tilde{X}} = \|f\|_X$. Naopak, zúžením každého funkcionálu $\tilde{f} \in \tilde{X}$ na priestor X dostaneme spojitý lineárny funkcionál f na X. Priradenie $f \mapsto \tilde{f}$ preto sprostredkováva izometriu duálnych priestorov X' a $\tilde{X}'$.

Veta 8

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Ak $(X', \|\cdot\|)$ je separabilný normovaný lineárny priestor, potom aj normovaný lineárny priestor $(X, \|\cdot\|)$ je separabilný.

Dôkaz Vety 8.

Predpokladajme, že duálny priestor $(X', \|\cdot\|)$ je separabilný. Každá množina $A \subseteq X'$ je ako metrický podpriestor separabilná. Teda aj jednotková sféra

$$S'(0,1) := \{f \in X',\ \|f\| = 1\} \tag{65}$$

je v $(X', \|\cdot\|)$ separabilná. Nech $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq S'(0,1)$ je postupnosť, ktorá je hus-

Dôkaz Vety 8 (pokračovanie).

tá v množine $S'(0,1)$, t.j., pre každý funkcionál $f \in S'(0,1)$ a každé $\varepsilon > 0$ existuje index $k \in \mathbb{N}$ tak, že platí nerovnosť

$$\|f - f_k\| \leq \varepsilon. \tag{66}$$

Nakoľko každý z funkcionálov f_k, $k \in \mathbb{N}$, má jednotkovú normu, v súlade s prvou rovnosťou v (27) máme

$$\sup\{|f_k(x)|,\ x \in X,\ \|x\| = 1\} = 1 \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{67}$$

Z rovnosti (67) a z vlastností supréma následne vyplýva, že pre každý index $k \in \mathbb{N}$ existuje vektor $x_k \in X$ taký, že

$$\|x_k\| = 1, \quad |f_k(x_k)| > \frac{1}{2}. \tag{68}$$

Uvažujme racionálny lineárny obal postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ zostrojenej v (68) vzhľadom na priestor X, t.j.,

$$A := \operatorname{Lin}_{\mathbb{Q}}\{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}. \tag{69}$$

Množina A v (69) predstavuje súbor všetkých konečných lineárnych kombinácií vektorov x_k, $k \in \mathbb{N}$, s racionálnymi koeficientami. Nie je ťažké si premyslieť, že A je najviac spočítateľná množina. Ukážeme, že množina $A \subseteq X$ je hustá v priestore $(X, \|\cdot\|)$, t.j., platí $X = \overline{A}$. Predpokladajme, že $\overline{A} \subsetneq X$. Potom mno-

Dôkaz Vety 8 (pokračovanie).

žina $X \setminus \overline{A}$ je neprázdna. Zvoľme nejaký vektor $y \in X \setminus \overline{A}$. Podľa Dôsledku 2 (pre $A := \overline{A}$ a $x_0 := y$) existuje spojitý lineárny funkcionál f na X spĺňajúci vlastnosti v (49), t.j.,

$$f(x) = 0 \text{ pre každé } x \in \overline{A}, \quad f(y) = \rho(\overline{A}, y) > 0, \quad \|f\| = 1. \tag{70}$$

Obzvlášť, v súlade s (65) a (69) platí $f \in S'(0,1)$ a $f(x_k) = 0$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Využijúc relácie v (28) a (68), pre každí index $k \in \mathbb{N}$ máme

$$\frac{1}{2} \overset{(68)}{<} |f_k(x_k)| = \big|[f_k(x_k) - f(x_k)] + f(x_k)\big| \le |f_k(x_k) - f(x_k)| + \underbrace{|f(x_k)|}_{0}$$

$$= |f_k(x_k) - f(x_k)| \overset{(28)}{\le} \|f_k - f\| \, \|x_k\| \overset{(68)}{=} \|f_k - f\|.$$

Posledná nerovnosť je však v rozpore s odhadom (66) pre hodnotu $\varepsilon = \frac{1}{2}$. To znamená, že spočítateľná množina A v (69) je hustá v X, čo následne implikuje separabilitu priestoru $(X, \|\cdot\|)$. Dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 8

Je nutné zdôrazniť, že opačné tvrdenie k Vete 8 vo všeobecnosti neplatí, t.j., duálny priestor X' separabilného priestoru X nemusí byť nutne separabilný.

Jednou zo základných a dôležitých úloh funkcionálnej analýzy je stanoviť všetky spojité lineárne funkcionály na danom normovanom lineárnom priestore $(X, \|\cdot\|)$ nad telesom $\mathbb{T}$, t.j., popísať duálny priestor $(X', \|\cdot\|)$. V nasledujúcom tvrdení klasifikujeme všetky spojité lineárne funkcionály na Hilbertovom priestore.

Veta 9 (Fréchetova–Rieszova reprezentačná)

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ so skalárnym súčinom $\langle\cdot,\cdot\rangle$ a indukovanou normou $\|\cdot\|$ a nech X' je duálny priestor. Potom pre každý spojitý lineárny funkcionál $f \in X'$ existuje jediný vektor $x_f \in X$ s vlastnosťou

$$f(x) = \langle x, x_f\rangle \quad \textit{pre každé } x \in X \textit{ a } \quad \|f\| = \|x_f\|. \tag{71}$$

Dôkaz Vety 9.

Nech $f \in X'$ je daný nenulový spojitý lineárny funkcionál. Vďaka spojitosti a linearite zobrazenia je jadro $\operatorname{Ker} f$ je uzavretý lineárny podpriestor v X s kodimenziou 1 (Dodatky, Veta 28). Z vlastností Hilbertovho priestoru X následne vyplýva, že $X = \operatorname{Ker} f \oplus (\operatorname{Ker} f)^\perp$, pričom $\dim(\operatorname{Ker} f)^\perp = 1$. Preto bez ujmy na všeobecnosti existuje nenulový vektor $x_0 \in (\operatorname{Ker} f)^\perp$ s $f(x_0) = 1$ taký, že každý vektor $x \in X$ sa dá jednoznačne vyjadriť v tvare (Dodatky, Veta 26)

$$x = f(x)\, x_0 + y, \quad y \in \operatorname{Ker} f. \tag{72}$$

Definujme vektor $x_f \in X$ predpisom

Dôkaz Vety 9 (pokračovanie).

$$x_f := \frac{x_0}{\|x_0\|^2}. \tag{73}$$

Využitím vlastností skalárneho súčinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ pre každé $x \in X$ platí

$$\langle x, x_f \rangle \overset{(72),(73)}{=} \left\langle f(x)\, x_0 + y,\ \frac{x_0}{\|x_0\|^2} \right\rangle = \frac{f(x)}{\|x_0\|^2} \langle x_0, x_0 \rangle + \frac{1}{\|x_0\|^2} \underbrace{\langle y, x_0 \rangle}_{0}$$

$$= \frac{f(x)}{\|x_0\|^2} \|x_0\|^2 = f(x), \tag{74}$$

čo ihneď dokazuje prvú formulu v (71). Obzvlášť, pomocou reprezentácie v (74) a Cauchyho–Schwarzovej–Buňakovského nerovnosti dostávame

$$|f(x)| = |\langle x, x_f \rangle| \leq \|x\|\, \|x_f\| \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{75}$$

V zhode s druhou formulou v (27) ľahko vidíme, že podľa (75) pre normu $\|f\|$ platí $\|f\| \leq \|x_f\|$. Na druhej strane,

$$|f(x_f)| = |\langle x_f, x_f \rangle| = \|x_f\|^2, \quad \text{takže} \quad \frac{|f(x_f)|}{\|x_f\|} = \|x_f\|,$$

a teda, opäť podľa (27), máme $\|x_f\| \leq \|f\|$. Preto $\|f\| = \|x_f\|$, ukázajúc druhú identitu v (71). Zostáva overiť jednoznačnosť vektora x_f v (73) pre daný funkcionál f. Ak vektor $x'_f \in X$ spĺňa $f(x) = \langle x, x'_f \rangle$ pre každé $x \in X$, potom

Dôkaz Vety 9 (pokračovanie).

so zreteľom na (74) platí $\langle x, x'_f \rangle = \langle x, x_f \rangle$, a tak $\langle x, x'_f - x_f \rangle = 0$ na H. Obzvlášť, $\|x'_f - x_f\|^2 = \langle x'_f - x_f, x'_f - x_f \rangle = 0$, a tak $x'_f = x_f$. Napokon, dodajme, že v prípade nulového lineárneho funkcionálu $f = 0$ na X pre odpovedajúci vektor x_f v (71) platí $x_f = 0$. Dôkaz je teraz úplný. ∎

Poznámka 9

Z vlastností skalárneho súčinu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ vyplýva, že pre každý daný vektor $y \in X$ je zobrazenie f_y dané predpisom

$$f_y(x) := \langle x, y \rangle, \quad x \in X, \tag{76}$$

spojitý lineárny funkcionál na X, t.j., $f_y \in X'$. Podľa Vety 9 je priradenie

$$X \ni y \mapsto f_y := \langle \cdot, y \rangle \in X', \tag{77}$$

bijektívne zobrazenie medzi priestormi X a X' zachovávajúce normu, t.j., izometria priestorov X a X'. Naviac, zobrazenie $\langle \cdot, \cdot \rangle_{X'} : X' \times X' \to \mathbb{T}$ definované

$$\langle f, g \rangle := \langle x_f, x_g \rangle, \quad f, g \in X', \tag{78}$$

kde vektory $x_f, x_g \in X$ sú jednoznačne určené podľa (71), predstavuje skalárny súčin na priestore X', ktorý indukuje normu funkcionálu v (26). Nie je ťažké o-

Poznámka 9

veriť, že zobrazenie v (77) je aditívne. V prípade reálneho Hilbertovho priestoru sa jedná dokonca o lineárne, t.j., platí

$$f_{\lambda y}(x) \overset{(76)}{=} \langle x,\, \lambda y\rangle = \lambda\langle x,\, y\rangle \overset{(76)}{=} \lambda f_y(x) \quad \text{pre každé } x, y \in X \text{ a každé } \lambda \in \mathbb{R},$$

teda $f_{\lambda y} = \lambda f_y$ pre každý vektor $y \in X$ a každý skalár $\lambda \in \mathbb{R}$. Pre komplexný Hilbertov priestor X je zobrazenie v (77) antilineárne, t.j., platí $f_{\lambda y} = \overline{\lambda} f_y$ pre každé $y \in X$ a každé $\lambda \in \mathbb{C}$.

Poznámka 10

Zobrazenie v (77) a zavedenie skalárneho súčinu (78) na X' implikujú, že duálny priestor X' je Hilbertov priestor, ktorý je izometrický s priestorom X. Z definície (78) naviac vyplýva, že každá ortonormálna báza $S \subseteq X$ priestoru X sa pomocou (77) bijektívne zobrazí na nejakú ortonormálnu bázu $S' \subseteq X'$ duálneho priestoru X'. To znamená, že Hilbertove priestory X a X' majú rovnakú Hilbertovu dimenziu, t.j., $\dim_H X = \dim_H X'$. Preto duálny priestor X' je izometricky izomorfný s priestorom X. Dodajme, že v súlade s Poznámkou 9 sa v prípade reálneho priestoru X tento izometrický izomorfizmus realizuje napríklad pomocou zobrazenia v (77). Toto však neplatí, ak X je komplexný Hilbertov priestor, keďže v tomto prípade zobrazenie v (77) nie je lineárne.

Príklad 10

Pre dané $n \in \mathbb{N}$ uvažujme normovaný lineárny priestor X nad $\mathbb{T}$ s danou normou $\|\cdot\|$, pričom $\dim X = n$. Nech $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq X$ je daná Hamelova báza lineárneho priestoru X. V Príklade 4 sme ukázali, že každý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ je spojitý na X, pričom platí

$$f(x) = x_1\, f(e_1) + \cdots + x_n\, f(e_n) \quad \text{pre každé } x = x_1\, e_1 + \cdots + x_n\, e_n \in X. \tag{79}$$

Uvažujme množinu lineárnych funkcionálov $B' = \{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq X'$ spĺňajúcich

$$g_i(e_j) := \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{80}$$

V súlade s (79) potom pre každé $x \in X$ platí

$$g_i(x) \overset{(79),(80)}{=} x_i, \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \tag{81}$$

z čo následne, s ohľadom na (79), vyplýva pre každé $f \in X'$ reprezentácia

$$f = f(e_1)\, g_1 + \cdots + f(e_n)\, g_n. \tag{82}$$

Množina B' je lineárne nezávislá v lineárnom priestore X' a zo zreteľom na (82) predstavuje Hamelovu bázu duálneho priestoru X'. Jedná sa o duálnu Hamelovu bázu vzhľadom na Hamelovu bázu B. Skaláry

Príklad 10

$$f_k := f(e_k), \quad k \in \{1, \ldots, n\}, \tag{83}$$

sú v zhode s (82) súradnice daného funkcionálu $f \in X'$ vzhľadom na bázu B'. Duálny priestor X' je teda n-rozmerný normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou funkcionálu $\|\cdot\|$, ktorá je indukovaná danou normou $\|\cdot\|$ na priestore X podľa (26). Je potrebné zdôrazniť, že rôzne normy na X indukujú rôzne normy na X'. Napríklad pre každé zvolené $p \in (1, \infty)$ platí, že

$$\text{norma } \|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{indukuje normu } \|f\|_q := \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{84}$$

kde $q \in (1, \infty)$ je číslo konjugované s p, t.j., platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Podobne

$$\text{norma } \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k| \quad \text{indukuje normu } \|f\|_\infty = \max_{k \in \{1, \ldots, n\}} |f_k|, \tag{85}$$

$$\text{norma } \|x\|_\infty = \max_{k \in \{1, \ldots, n\}} |x_k| \quad \text{indukuje normu } \|f\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |f_k|. \tag{86}$$

Špeciálne, ak X je n-rozmerný Hilbertov priestor, t.j., norma $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$, potom podľa (84) s $p = 2 = q$ je na duálnom priestore X' indukovaná opäť euklidovská norma $\|\cdot\|_2$, t.j., X' je n-rozmerný Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$.

Príklad 11

V tomto príklade ilustrujeme výsledky prezentované v Príklade 10 v prípade normy $\|\cdot\|_p$ pre hodnotu $p = 3$. Konkrétne, ukážeme, že na normovanom lineárnom priestore X nad $\mathbb{T}$ s danou dimenziou $n \in \mathbb{N}$ norma

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{\frac{1}{3}}, \quad x = x_1\, e_1 + \cdots + x_n\, e_n, \tag{87}$$

indukuje podľa (84) s $q = \frac{3}{2}$ na jeho duálnom priestore X' normu

$$\|f\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{3}{2}}, \quad f = f_1\, g_1 + \cdots + f_n\, g_n. \tag{88}$$

Skutočne, využitím Hölderovej nerovnosti (Dodatky, Veta 2) pre každý daný lineárny funkcionál $f \in X'$, ktorý je v súlade s (82) a (83) reprezentovaný pomocou n-tice $(f_1, \ldots, f_n) \in \mathbb{T}^n$, a pre každý vektor $x \in X$ reprezentovaný v zhode s (87) pomocou n-tice $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{T}^n$ postupne platí

$$|f(x)| \overset{(79),(83)}{=} \left|\sum_{k=1}^{n} x_k\, f_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k\, f_k| \overset{\text{Hölder}}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^3\right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$$

Príklad 11

$$\overset{(87)}{=} \|x\| \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}, \quad \text{a tak } \|f\| \overset{(27)}{\leq} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}. \tag{89}$$

Na druhej strane, špeciálnou voľbou $\tilde{x}_k := \frac{\overline{f_k}}{\sqrt{|f_k|}}$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, máme

$$|f(\tilde{x})| \overset{(79),(83)}{=} \left| \sum_{k=1}^{n} \tilde{x}_k\, f_k \right| = \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\overline{f_k}}{\sqrt{|f_k|}} \right|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{n} |\tilde{x}_k|^3 \right)^{\frac{1}{3}} \left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \overset{(87)}{=} \|\tilde{x}\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}},$$

čo v súlade s druhou formulou v (27) znamená, že

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |f_k|^{\frac{3}{2}} \right)^{\frac{2}{3}} \leq \|f\|. \tag{90}$$

Príklad 11

Kombináciou nerovností v (89) a (90) potom dostávame identitu v (88).

Príklad 12 (Duálne priestory priestorov l^p)

Pre dané reálne číslo $p > 1$ je duálny priestor normovaného lineárneho priestoru l^p izometricky izomorfný s normovaným lineárnym priestorom l^q, kde $q > 1$ je číslo konjugované s p, t.j., platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Konkrétne, pre každý spojitý lineárny funkcionál $F \in (l^p)'$ existuje jediná postupnosť $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$ taká, že

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k \quad \text{pre každé } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p, \quad \text{pričom } \|F\| = \|f\|_q. \tag{91}$$

Poznamenajme, že vďaka Hölderovej nerovnosti (Dodatky, Veta 4) je nekonečný číselný rad v (91) absolútne konvergentný pre každé $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$. Postupnosť $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je definovaná predpisom

$$f_k := F(e_k), \quad e_k = \{\delta_{kn}\}_{n=1}^{\infty}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{92}$$

Izometrický izomorfizmus normovaných lineárnych priestorov $(l^p)'$ a l^q je realizovaný prostredníctvom zobrazenia

$$\Phi : (l^p)' \to l^q, \quad \Phi(F) = f, \quad \text{kde postupnosť } f \text{ je definovaná v (92).} \tag{93}$$

Príklad 13 (Duálne priestory priestorov l^1 a l^∞)

Duálny priestor normovaného lineárneho priestoru l^1 je izometricky izomorfný s normovaným lineárnym priestorom l^∞. Konkrétne, pre každý spojitý lineárny funkcionál $F \in (l^1)'$ existuje jediná postupnosť $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty \in l^\infty$ taká, že

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k \quad \text{pre každé } x = \{x_k\}_{k=1}^\infty \in l^1, \quad \text{pričom } \|F\| = \|f\|_\infty. \tag{94}$$

Nekonečný číselný rad v (94) je absolútne konvergentný pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^\infty \in l^1$. Postupnosť $f = \{f_k\}_{k=1}^\infty$ je definovaná analogicky ako v (92). Izometrický izomorfizmus normovaných lineárnych priestorov $(l^1)'$ a l^∞ je realizovaný prostredníctvom zobrazenia

$$\Phi : (l^1)' \to l^\infty, \quad \Phi(F) = f, \quad \text{kde postupnosť } f \text{ je definovaná v (92).} \tag{95}$$

Na druhej strane, duálny priestor $(l^\infty)'$ nie je izometricky izomorfný s normovaným lineárnym priestorom l^1. Je to jednoduchý dôsledok Vety 8. Keďže priestor l^∞ nie je separabilný, v súlade s Vetou 8 nemôže byť separabilný ani jeho duálny priestor $(l^\infty)'$. Priestor l^1 však separabilný je, a preto nemôže byť izometricky izomorfný s duálnym priestorom $(l^\infty)'$. Platí však, že priestor l^1 je izometricky izomorfný s vhodným vlastným podpriestorom duálneho priestoru $(l^\infty)'$, t.j., existuje izometrický monomorfizmus priestoru l^1 do priestoru $(l^\infty)'$.

Príklad 14 (Duálne priestory priestorov c_0 a c)

Duálne priestory oboch normovaných lineárnych priestorov c_0 a c sú izometricky izomorfné s normovaným lineárnym priestorom l^1. Pre každý spojitý lineárny funkcionál $F \in (c_0)'$ existuje jediná postupnosť $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^1$ s vlastnosťou

$$F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k \quad \text{pre každé } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c_0, \quad \text{pričom } \|F\| = \|f\|_1. \tag{96}$$

Nekonečný číselný rad v (96) je absolútne konvergentný pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c_0$. Postupnosť $f = \{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ je definovaná analogicky ako v (92). Izometrický izomorfizmus normovaných lineárnych priestorov $(c_0)'$ a l^1 je realizovaný prostredníctvom zobrazenia

$$\Phi : (c_0)' \to l^1, \quad \Phi(F) = f, \quad \text{kde postupnosť } f \text{ je definovaná v (92).} \tag{97}$$

Podobne, pre každý spojitý lineárny funkcionál $F \in c'$ existuje jediná postupnosť $f = \{f_k\}_{k=0}^{\infty} \in l^1$ s vlastnosťou

$$F(x) = df_0 + \sum_{k=1}^{\infty} x_k f_k \quad \text{pre každé } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c, \quad \text{pričom } \|F\| = \|f\|_1, \tag{98}$$

kde $d := \lim_{k\to\infty} x_k$. Nekonečný číselný rad v (98) je absolútne konvergentný pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in c$. Postupnosť $f = \{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ je definovaná

Príklad 14 (Duálne priestory priestorov c_0 a c)

$$f_0 := F(e), \quad f_k := F(e_k), \quad e = \{1\}_{n=1}^{\infty}, \quad e_k = \{\delta_{kn}\}_{n=1}^{\infty}, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{99}$$

Izometrický izomorfizmus normovaných lineárnych priestorov c' a l^1 je realizovaný prostredníctvom zobrazenia

$$\Phi : c' \to l^1, \quad \Phi(F) = f, \quad \text{kde postupnosť } f \text{ je definovaná v (99).} \tag{100}$$

Príklad 15 (Duálne priestory priestorov L^p)

Nech $(X, \mathcal{M}, \mu)$ je daný merateľný priestor a $p \in [1, \infty)$ dané reálne číslo. Duálny priestor $(L^p(X,\mu))'$ pre $p > 1$ je izometricky izomorfný s normovaným lineárnym priestorom $L^q(X,\mu)$, kde $q > 1$ je číslo konjugované s p, t.j., platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Konkrétne, pre každý spojitý lineárny funkcionál $F \in (L^p(X,\mu))'$ existuje funkcia $g \in L^q(X,\mu))$, určená jednoznačne skoro všade na množine X (vzhľadom na mieru μ), s vlastnosťou

$$F(f) = \int_X f g \,\mathrm{d}\mu \quad \text{pre každé } f \in L^p(X,\mu), \quad \text{pričom } \|F\| = \|g\|_q. \tag{101}$$

Ak miera μ je σ-konečná, potom duálny priestor $(L^1(X,\mu))'$ je izometricky izomorfný s normovaným lineárnym priestorom $L^\infty(X,\mu)$, pričom funkcionály $F \in (L^1(X,\mu))'$ sa dajú reprezentovať analogickým spôsobom ako v (101).

Príklad 16 (Duálny priestor priestoru spojitých funkcií)

Nech $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ je daný uzavretý a ohraničený interval. Duálny priestor normovaného lineárneho priestoru $(\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_C)$ je izometricky izomorfný s istým normovaným podpriestorom priestoru $(\mathcal{BV}[a, b], \|\cdot\|_{BV})$ funkcií s konečnou variáciou na $[a, b]$. Konkrétne, pre každý spojitý lineárny funkcionál $f \in (\mathcal{C}[a, b])'$ existuje jediná sprava spojitá funkcia $g \in \mathcal{BV}[a, b]$ s $g(a) = 0$ taká, že platí

$$f(u) = \int_a^b u(t)\, \mathrm{d}g(t) \quad \text{pre každé } u \in \mathcal{C}[a, b] \text{ a } \quad \|f\| = \|g\|_{BV} = \bigvee_a^b (g). \tag{102}$$

Integrál v (102) je Riemannov–Stieltjesov integrál vzhľadom na danú funkciu g. Ide o rozšírenie Riemannovho integrálu, kde sa pre zvolené konečné delenie

$$D_m : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b, \quad m \in \mathbb{N}, \tag{103}$$

a danú funkciu u ohraničenú na $[a, b]$ uvažujú integrálne súčty tvaru

$$S(u; g, D_m, \xi_1, \ldots, \xi_m) := \sum_{k=1}^{m} f(\xi_k)\,(g(t_k) - g(t_{k-1}))\,, \quad \xi_k \in [t_k, t_{k-1}]. \tag{104}$$

Dá sa ukázať, že ak funkcia u je spojitá na $[a, b]$ a funkcia g má konečnú variáciu na $[a, b]$, potom pre každú nulovú postupnosť delení $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ intervalu $[a, b]$ postupnosť súčtov v (104) vždy konverguje nezávisle na výbere čísiel $\xi_1, \ldots, \xi_m$,

Príklad 16 (Duálny priestor priestoru spojitých funkcií)

a to k rovnakej hodnote. Toto číslo definuje integrál v (102). Stručne naznačíme odvodenie formúl v (102). Zvoľme spojitý lineárny funkcionál $f : \mathcal{C}[a,b] \to \mathbb{T}$. V súlade s Vetou 5 existuje jeho spojité rozšírenie F na normovaný lineárny priestor $(\mathcal{B}[a,b], \|\cdot\|_B)$ so zachovaním normy, t.j., $\|f\| = \|F\|$. Uvažujme systém funkcií

$$e_t(s) := \begin{cases} 1, & s \in [a,t), \\ 0, & s \in [t,b], \end{cases} \qquad t \in [a,b]. \tag{105}$$

Zrejme $\{e_t\}_{t\in[a,b]} \subseteq \mathcal{B}[a,b]$, a preto definujme funkciu $g : [a,b] \to \infty$ predpisom

$$g(t) := F(e_t), \quad t \in [a,b]. \tag{106}$$

Z (106) platí, že $g(a) = 0$ a funkcia g má konečnú variáciu na $[a,b]$, pričom

$$\bigvee_a^b (g) \leq \|F\| = \|f\|. \tag{107}$$

Následne, uvažujúc delenia D_m, $m \in \mathbb{N}$, v (103), každú funkciu $u \in \mathcal{C}[a,b]$ aproximujeme postupnosťou schodovitých funkcií $\{y_m\}_{m=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}[a,b]$ tvaru

$$y_m(t) := \sum_{k=1}^{m} u(t_k)\left(e_{t_k}(t) - e_{t_{k-1}}(t)\right), \quad t \in [a,b]. \tag{108}$$

Príklad 16 (Duálny priestor priestoru spojitých funkcií)

Pre každú nulovú postupnosť $\{D_m\}_{m=1}^{\infty}$ je daná funkcia u rovnomernou limitou postupnosti $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ na intervale $[a,b]$, t.j., $\lim_{m\to\infty} \|y_m - u\|_B = 0$. Preto

$$\lim_{m\to\infty} F(y_m) = F(u) = f(u) \quad \text{pre každé } u \in \mathcal{C}[a,b]. \tag{109}$$

Na druhej strane, podľa (108) pre každé $u \in \mathcal{C}[a,b]$ a $m \in \mathbb{N}$ máme

$$F(y_m) \overset{(108)}{=} \sum_{k=1}^{m} u(t_k)\left(F(e_{t_k}) - F(e_{t_{k-1}})\right) \overset{(106)}{=} \sum_{k=1}^{m} u(t_k)\left(g(t_k) - g(t_{k-1})\right)$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{m\to\infty} F(y_m) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} u(t_k)\left(g(t_k) - g(t_{k-1})\right) = \int_a^b u(t)\,\mathrm{d}g(t). \tag{110}$$

Kombináciou rovností (109) a (110) dostávame prvú formulu v (102). Naviac,

$$|f(u)| \overset{(102)}{=} \left|\int_a^b u(t)\,\mathrm{d}g(t)\right| \le \int_a^b |u(t)|\,|\mathrm{d}g(t)| \le \|u\|_C \bigvee_a^b (g), \quad u \in \mathcal{C}[a,b],$$

a tak $\|f\| \le \bigvee_a^b (g)$. V súlade s (107) napokon platí $\|f\| = \bigvee_a^b (g) = \|g\|_{BV}$. Je zrejmé, že pre každú funkciu $g \in \mathcal{BV}[a,b]$ s $g(a) = 0$ je zobrazenie f v (102) spojitý lineárny funkcionál na $\mathcal{C}[a,b]$ s normou spĺňajúcou formulu v (102).

Obsah

Nasledujúca sekcia je venovaná štúdiu spojitých lineárnych funkcionálov na duálnych priestoroch normovaných lineárnych priestorov nad telesom $\mathbb{T}$.

Definícia 6 (Druhý duálny priestor normovaného lineárneho priestoru)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je odpovedajúci duálny priestor. Normovaný lineárny priestor všetkých spojitých lineárnych funkcionálov na X', t.j., duálny priestor $(X')'$, sa nazýva druhý duálny priestor priestoru X a označujeme ho X''.

Veta 10

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Potom pre každý vektor $x \in X$ je zobrazenie $F_x : X' \to \mathbb{T}$ definované

$$F_x(f) := f(x), \quad f \in X', \tag{111}$$

spojitý lineárny funkcionál na priestore X', pričom platí $\|F_x\| = \|x\|$.

Dôkaz Vety 10.

Zvoľme nejaký nenulový vektor $x \in X$. Je zrejmé, že zobrazenie F_x definované v (111) je lineárny funkcionál pôsobiaci na duálnom priestore X', keďže

Dôkaz Vety 10 (pokračovanie).

$$F_x(\alpha\, f + \beta\, g) \overset{(111)}{=} (\alpha\, f + \beta\, g)(x) = \alpha\, f(x) + \beta\, g(x) \overset{(111)}{=} \alpha\, F_x(f) + \beta\, F_x(g) \quad (112)$$

pre každé $f, g \in X'$ a $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$. Naviac, v súlade s nerovnosťou (28) máme

$$|F_x(f)| \overset{(111)}{=} |f(x)| \overset{(28)}{\leq} \|x\|\,\|f\| \quad \text{pre každé } f \in X'. \quad (113)$$

Nerovnosť (113) podľa Definície 3 a Vety 4 znamená, že zobrazenie F_x v (111) je ohraničené na okolí nulového funkcionálu, a teda spojité na celom X'. Preto F_x je spojitý lineárny funkcionál na X', t.j., $F_x \in X''$. Pre jeho normu platí

$$\|F_x\| \overset{(27)}{=} \sup\left\{ \frac{|F_x(f)|}{\|f\|},\ f \in X' \setminus \{0\} \right\} \overset{(113)}{\leq} \|x\|. \quad (114)$$

Na druhej strane, z Dôsledku 1 vieme, že pre daný nenulový vektor x existuje spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ spĺňajúci $f(x) = \|x\|$ a $\|f\| = 1$, teda

$$|F_x(f)| \overset{(111)}{=} |f(x)| = \|x\| = \|x\|\,\|f\|, \quad \text{a tak} \quad \frac{|F_x(f)|}{\|f\|} = \|x\|. \quad (115)$$

V zhode s druhou formulou v (27) to znamená, že norma $\|F_x\| \geq \|x\|$. Preto platí $\|F_x\| = \|x\|$. Napokon dodajme, že v prípade voľby $x = 0$ je odpovedajúce zobrazenie F_x v (111) zrejme identicky nulový funkcionál na X', a teda opäť $F_x \in X''$ s $\|F_x\| = 0 = \|x\|$. Dôkaz je teraz kompletný. ■

Poznámka 11 (Kanonické vnorenie do druhého duálneho priestoru)

Výsledok Vety 10 ukazuje, že na každom danom normovanom lineárnom priestore X je korektne definované zobrazenie $\pi : X \to X''$ s predpisom

$$\pi(x) := F_x \quad \text{s } F_x \text{ zavedeným v (111) pre } x \in X. \tag{116}$$

Zobrazenie π v (116) sa štandardne označuje ako prirodzené zobrazenie priestoru X do jeho druhého duálneho priestoru X''. Zrejme sa jedná o lineárne zobrazenie, nakoľko využitím (111) pre každé $x, y \in X$, $\alpha, \beta \in \mathbb{T}$ a $f \in X'$ máme

$$F_{\alpha\, x+\beta\, y}(f) = f(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, f(x) + \beta\, f(y) = \alpha\, F_x(f) + \beta\, F_y(f), \tag{117}$$

a tak v súlade s (116) platí $\pi(\alpha\, x + \beta\, y) = \alpha\, \pi(x) + \beta\, \pi(y)$. Naviac, podľa druhej časti Vety 10 je prirodzené zobrazenie π izometrické, t.j.,

$$\|\pi(x)\| \overset{(116)}{=} \|F_x\| = \|x\| \quad \text{pre každý vektor } x \in X. \tag{118}$$

Obzvlášť, π je spojitá injekcia. Z tohto dôvodu sa preto o prirodzenom zobrazení π často hovorí ako o kanonickom vnorení priestoru X do priestoru X''.

Definícia 7 (Reflexívny normovaný lineárny priestor)

Normovaný lineárny priestor X sa nazýva reflexívny, ak prirodzené zobrazenie $\pi : X \to X''$ zavedené v (116) je surjektívne, t.j., platí rovnosť $\pi(X) = X''$.

Poznámka 12

Z Definície 7 a Poznámky 11 ihneď vyplýva, že každý reflexívny normovaný lineárny priestor X je izometricky izomorfný s druhým duálnym priestorom X''. Príslušný izomorfizmus je sprostredkovaný prirodzeným zobrazením π v (116), keďže v tomto prípade sa jedná o lineárnu bijekciu medzi normovanými lineárnymi priestormi X a X'', ktorá zachováva normu. Následne, so zreteľom na Vetu 7, každý reflexívny priestor je nutne Banachov, t.j., úplný normovaný lineárny priestor. Je však potrebné zdôrazniť, že opačné tvrdenia neplatia. Konkrétne, z izometrického izomorfizmu priestorov X a X'' vo všeobecnosti nevyplýva reflexívnosť priestoru X. Klasickým príkladom nereflexívneho normovaného lineárneho priestoru X, ktorý je izometricky izomorfný so svojim druhým duálnym priestorom X'', je tzv. Jamesov priestor. Základné nereflexívne Banachove priestory uvedieme v Príkladoch 20, 21 a 23.

Veta 11 (Pettisovo kritérium reflexívnosti Banachových priestorov)

Nech X je Banachov priestor nad $\mathbb{T}$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Priestor X je reflexívny.*

(ii) *Duálny priestor X' je reflexívny.*

Poznámka 13

Podľa Vety 7 je duálny priestor X' každého normovaného lineárneho priestoru X úplný. Podľa Vety 11 je tak X' reflexívny práve vtedy, keď je reflexívny X''.

Príklad 17 (Reflexívnosť priestorov s konečnou dimenziou)

Každý normovaný lineárny priestor X s konečnou dimenziou $n \in \mathbb{N}$ je reflexívny. Vyplýva to z pozorovania v Príklade 10, podľa ktorého duálny priestor X' má opäť dimenziu n. Obzvlášť, druhý duálny priestor X'' je n-rozmerný normovaný lineárny priestor. A nakoľko každé homomorfné vnorenie lineárnych priestorov s rovnakou konečnou dimenziou je nutne surjektívne, prirodzené zobrazenie π v (116) je izometrický izomorfizmus priestorov X a X''.

Príklad 18 (Reflexívnosť Hilbertovho priestoru)

Každý Hilbertov priestor X je reflexívny. Tento významný a klasický výsledok je bezprostredným dôsledkom lineárnej izometrie priestorov X a X', a následne i priestorov X' a X'', diskutovanej v Poznámke 10. V oboch prípadoch je uvedený izomorfizmus realizovaný pomocou skalárnych súčinov v súlade s (77) a (78). Na druhej strane, obraz každého vektora $x \in X$ v prirodzenom zobrazení $\pi : X \to X''$ je možné reprezentovať práve skalárnym súčinom $\langle x, \cdot \rangle$.

Príklad 19 (Reflexívnosť priestorov l^p)

Dôležitým príkladom reflexívnych normovaných lineárnych priestorov, ktoré nie sú nutne Hilbertovými priestormi, sú priestory l^p pre $p \in (1, \infty)$. Podľa Príkladu 12 je pre dané $p > 1$ duálny priestor $(l^p)'$ izometricky izomorfný s priestorom l^q a duálny priestor $(l^q)'$ je izometricky izomorfný s priestorom l^p, kde $q > 1$ je číslo konjugované s p, t.j., platí $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Celkovo je teda priestor l^p izometricky izomorfný so svojim druhým duálnym priestorom $(l^p)''$, pričom jedna z týchto izometrií je sprostredkovaná práve prirodzeným zobrazením π v (116). Tento záver vyplýva z nasledujúcich úvah. Vďaka Hölderovej nerovnosti (Dodatky, Veta 4) platí, že pre každú dvojicu postupností $\{F_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ a $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^q$ je nekonečný číselný rad

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_k f_k \tag{119}$$

absolútne konvergentný. Podľa výsledkov v Príklade 12 môžeme súčet radu v (119) interpretovať dvomi spôsobmi, konkrétne ako

- hodnotu funkcionálu $F \in (l^p)''$ (reprezentovaného pomocou $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$) na funkcionále $f \in (l^p)'$ (reprezentovaného pomocou $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$), t.j., $F(f)$;
- hodnotu funkcionálu $f \in (l^p)'$ (reprezentovaného pomocou $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$) na vektore $\{F_k\}_{k=1}^{\infty}$, t.j., $f(\{F_k\}_{k=1}^{\infty}) = [\pi(\{F_k\}_{k=1}^{\infty})](f)$ podľa (116).

Platí $F = \pi(\{F_k\}_{k=1}^{\infty})$ pre každé $F \in (l^p)''$, a tak π je surjektívne zobrazenie.

Príklad 20 (Nereflexívnosť priestorov l^1 a l^∞)

Normovaný lineárny priestor l^1 nie je reflexívny. Vyplýva to z Príkladu 13, podľa ktorého druhý duálny priestor $(l^1)''$ je izometricky izomorfný s duálnym priestorom $(l^\infty)'$, avšak l^1 nie je izometricky izomorfný s $(l^\infty)'$. Preto priestor l^1 nie je izometricky izomorfný so svojím druhým duálnym priestorom $(l^1)''$, a teda v súlade s Poznámkou 12 nemôže byť ani reflexívny. Obzvlášť, duálny priestor $(l^\infty)'$ nie je reflexívny. A keďže l^∞ je Banachov priestor, z Vety 11 vyplýva, že ani normovaný lineárny priestor l^∞ nemôže byť reflexívny.

Príklad 21 (Nereflexívnosť priestorov c a c_0)

Normované lineárne priestory c a c_0 sú Banachove priestory. Podľa Príkladu 14 vieme, že obidva duálne priestory c' a $(c_0)'$ sú izometricky izomorfné s normovaným lineárnym priestorom l^1, a teda v zhode s Príkladom 20 sa jedná o nereflexívne priestory. Následne podľa Vety 11 sú priestory c a c_0 nereflexívne.

Príklad 22 (Reflexívnosť/nereflexívnosť priestorov L^p)

Využitím Príkladu 15 môžeme úplne analogické závery vysloviť aj o normovaných lineárnych priestoroch $L^p(X,\mu)$, $p \in [1,\infty)$, a $L^\infty(X,\mu)$.

Príklad 23 (Nereflexívnosť priestoru spojitých funkcií)

Ďalším významným príkladom nereflexívneho Banachovho priestoru je normovaný lineárny priestor $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_C)$, kde $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je daný interval. Výnimočnosť priestoru $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_C)$ je zvýraznená i skutočnosťou, že nie je izometricky izomorfný s duálnym priestorom žiadneho normovaného lineárneho priestoru.

Poznámka 14

Napokon ešte dodajme, že v prípade reflexívnych normovaných priestorov možno tvrdenie vo Vete 8 obrátiť. Presnejšie, reflexívny normovaný lineárny priestor X je separabilný práve vtedy, keď je separabilný jeho duálny priestor X'.

Veta 12 (Jamesovo kritérium reflexívnosti Banachových priestorov)

Nech X je Banachov priestor nad $\mathbb{T}$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Priestor X je reflexívny.*

(ii) *Pre každý spojitý lineárny funkcionál $f \in X'$ platí*

$$\|f\| = \max\{|f(x)|,\ x \in X,\ \|x\| \leq 1\}. \tag{120}$$

Obsah

V tomto kurze sme v normovaných lineárnych priestoroch nad $\mathbb{T}$ zatiaľ vždy pracovali s topológiu, ktorá je indukovaná odpovedajúcou normou. Táto topológia má mnoho významných vlastností. Spomeňme napríklad správanie sa spojitých zobrazení na kompaktných množinách, kde spojitosť a kompaktnosť uvažujeme práve v "normovej" topológii. Na druhej strane sme však ukázali, že takýchto kompaktných množín nie je "dostatočne veľa". Obzvlášť, v priestoroch s nekonečnou dimenziou žiadna uzavretá guľa/sféra nie je kompaktná. Z tohto pohľadu je teda "normová" topológia príliš silný koncept a v tejto sekcii ju budeme i označovať prívlastkom silná (topológia). Z praktických aplikácii je preto vhodné na normovaných lineárnych priestoroch uvažovať aj iné topológie, ktoré by umožňovali zostrojiť "dostatočne veľa" kompaktných množín, obvzlášť v nekonečno rozmerných priestoroch. Takéto topológie budeme označovať prívlastkom slabé. Ich tvar odvodíme na základe optimálneho zoslabenia pojmu konvergencia postupnosti v normovaných lineárnych priestoroch.

Definícia 8 (Slabá ohraničenosť v normovanom lineárnom priestore)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a $A \subseteq X$ je množina. Hovoríme, že množina A je slabo ohraničená v X, ak pre každý spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ je množina

$$f(A) := \{f(x),\ x \in A\} \text{ ohraničená v } \mathbb{E}. \tag{121}$$

Poznámka 15

Nech X' je duálny priestor normovaného lineárneho priestoru X. V kontexte Definície 8 budeme ohraničenosť množiny $A \subseteq X$ v zmysle normy $\|\cdot\|$ označovať termínom silná ohraničenosť v priestore X. Pomocou nerovnosti (28) platiacej pre každé $f \in X'$ ľahko overíme, že každá silno ohraničená množina $A \subseteq X$ je v súlade s (121) zároveň i slabo ohraničená v priestore X.

V nasledujúcom texte ukážeme, že v každom normovanom lineárnom priestore X nad $\mathbb{T}$ koncepty silnej a slabej ohraničenosti množín $A \subseteq X$ splývajú. Dokážeme to ako dôsledok série niekoľkých tvrdení.

Lema 2

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Nech $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je postupnosť vektorov taká, že existuje uzavretá guľa $B' \subseteq X'$ s vlastnosťou

$$\text{množina } \{f(x_k),\ f \in B',\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{T} \text{ je ohraničená.} \tag{122}$$

Potom postupnosť noriem $\{\|x_k\|\}_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená v $\mathbb{E}$.

Dôkaz Lemy 2.

Nech $f_B \in X'$ je stred a $r \in (0, \infty)$ je polomer gule B', t.j., platí

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

$$B' = \{f \in X',\ \|f - f_B\| \leq r\}. \tag{123}$$

Podľa(123) množina všetkých funkcionálov $\frac{1}{r}(f - f_B)$, $f \in B'$, predstavuje uzavretú guľu $B'[0,1]$ v X'. V súlade s (122) nech $K > 0$ je také, že

$$|f(x_k)| \leq K \quad \text{pre každé } f \in B' \text{ a } k \in \mathbb{N}. \tag{124}$$

Využitím trojuholníkovej nerovnosti následne máme

$$\left|\frac{1}{r}(f - f_B)(x_k)\right| = \left|\frac{1}{r}f(x_k) - \frac{1}{r}f_B(x_k)\right| \leq \frac{|f(x_k)|}{r} + \frac{|f_B(x_k)|}{r} \overset{(124)}{\leq} \frac{2K}{r} \tag{125}$$

pre každý funkcionál $f \in B'$ a každý index $k \in \mathbb{N}$. V kontexte vyššie uvedených pozorovaní to znamená, že pre guľu $B'[0,1]$ platí relácia

$$|g(x_k)| \leq \frac{2K}{r} \quad \text{pre každé } g \in B'[0,1] \text{ a } k \in \mathbb{N}. \tag{126}$$

Pre každé $k \in \mathbb{N}$ uvažujme spojitý lineárny funkcionál $F_{x_k} : X' \to \mathbb{T}$ definovaný v (111). Podľa Vety 10 platí $\|x_k\| = \|F_{x_k}\|$. Využitím formúl (26) a (111) v kombinácii s nerovnosťu (126) potom dostávame

$$\|x_k\| = \|F_{x_k}\| \overset{(26)}{=} \sup\{|F_{x_k}(g)|,\ g \in B'[0,1]\} \overset{(111)}{=} \sup\{|g(x_k)|,\ g \in B'[0,1]\}$$
$$\overset{(126)}{\leq} \frac{2K}{r} \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{127}$$

Dôkaz Lemy 2 (pokračovanie).

Podľa (127) je teda postupnosť noriem $\{\|x_k\|\}_{k=1}^{\infty}$ je ohraničená v $\mathbb{E}$. ∎

Veta 13

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je slabo ohraničená postupnosť v kontexte Definície 8. Potom postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je silno ohraničená v priestore X.

Dôkaz Vety 13.

Nech X' je duálny priestor priestoru X. Tvrdenie dokážeme sporom. Predpokladajme teda, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ nie je ohraničená v norme priestoru X, t.j., postupnosť noriem $\{\|x_k\|\}_{k=1}^{\infty}$ nie je ohraničená v $\mathbb{E}$. Vo svetle Lemy 2 to znamená, že pre každú nedegenerovanú uzavretú guľu $B' \subseteq X'$ je množina

$$M_{B'} := \{f(x_k),\ f \in B',\ k \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R} \tag{128}$$

neohraničená v $\mathbb{E}$. Nech $B'_0 \subseteq X'$ je nejaká uzavretá guľa s polomerom $r_0 = 1$. Nakoľko odpovedajúca množina $M_{B'_0}$ v (128) nie je ohraničená, existuje index $k_0 \in \mathbb{N}$ a funkcionál $f_0 \in B'_0$ tak, že platí $|f_0(x_{k_0})| > 1$. Obzvlášť, funkcionál $F_{x_{k_0}} \in X''$ v (111) spĺňa $|F_{x_{k_0}}(f_0)| > 1$. Vďaka spojitosti zobrazenia $F_{x_{k_0}}$ existuje uzavretá guľa $B'_1 \subseteq B'_0$ so stredom f_0 a polomerom $r_1 < \frac{1}{2}$ taká, že

Dôkaz Vety 13 (pokračovanie).

$$|f(x_{k_0})| \overset{(111)}{=} |F_{x_{k_0}}(f)| > 1 \quad \text{pre každý funkcionál } f \in B_1'. \tag{129}$$

Vyššie uvedené argumenty teraz aplikujeme na uzavretú guľu B_1'. Príslušná množina $M_{B_1'}$ v (128) opäť nie je ohraničená v $\mathbb{E}$, preto existuje index $k_1 > k_0$ a uzavretá guľa $B_2' \subseteq B_1'$ s polomerom $r_2 < \frac{1}{4}$ taká, že

$$|f(x_{k_1})| > 2 \quad \text{pre každý funkcionál } f \in B_2'. \tag{130}$$

Existuje teda rastúca postupnosť indexov $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ a odpovedajúca postupnosť do seba vložených uzavretých gulí $\{B_n'\}_{n=0}^{\infty}$ v duálnom priestore X' tak, že

$$\text{polomer } B_n' \text{ je menší než } \frac{1}{2^n} \text{ a } |f(x_{k_n})| > n \text{ pre každý funkcionál } f \in B_n'. \tag{131}$$

Normovaný lineárny priestor X' je podľa Vety 7 úplný, a tak postupnosť $\{B_n'\}_{n=0}^{\infty}$ má neprázdny prienik v X', t.j., existuje jediný funkcionál $\tilde{f} \in X'$ spĺňajúci $\tilde{f} \in \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n'$. Obzvlášť, v súlade s (131) platí nerovnosť

$$|\tilde{f}(x_{k_n})| > n \text{ pre každý index } n \in \mathbb{N}. \tag{132}$$

Z (132) vyplýva, že postupnosť $\{\tilde{f}(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ nie je ohraničená v $\mathbb{E}$. Podľa Definície 8 to však znamená, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ nie je slabo ohraničená v X. To je spor, preto postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ musí byť silno ohraničená v X. ∎

Veta 14

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$. Každá množina $A \subseteq X$, ktorá je slabo ohraničená v X, je i silno ohraničená v X. Inými slovami, slabá a silná ohraničenosť množín v normovaných lineárnych priestoroch splývajú.

Dôkaz Vety 14.

Nech $A \subseteq X$ je slabo ohraničená množina v priestore X. Predpokladajme, že A nie je silno ohraničená v X. To znamená, že existuje postupnosť vektorov $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq A$ s vlastnosťou $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \infty$. Z predpokladu slabej ohraničenosti množiny A vyplýva, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je slabo ohraničená v priestore X. V súlade s Vetou 13 je teda postupnosť noriem $\{\|x_k\|\}_{k=1}^{\infty}$ ohraničená v $\mathbb{E}$, čo však zrejme odporuje jej definícii. Množina A je preto silno ohraničená v priestore X a dôkaz je kompletný. ■

Nasledujúca časť prednášky bude venovaná slabým topológiám v normovanom lineárnom priestore X a jeho duálnom priestore X'. Existuje niekoľko spôsobov zavedenia slabej topológie na prestore X. Pre nás bude východiskovým bodom vhodné zoslabenie pojmu konvergencia postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ v priestore X. Dôležitou požiadavkou je, aby spojité lineárne funkcionály $f \in X'$ zostali "spojité" i vzhľadom na "slabú" konvergenciu. Podľa Heineho podmienky

funkcia $g : X \to \mathbb{T}$ je spojitá v bode $x \in X$ práve vtedy, keď
pre každú postupnosť $x_k \to x$ platí $g(x_k) \to g(x)$ pre $n \to \infty$.

Chceme, aby z predpokladu "slabej" konvergencie postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ k vektoru $x \in X$ nutne vyplývala konvergencia postupnosti $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{T}$ k hodnote $f(x) \in \mathbb{T}$ v $\mathbb{E}$ pre každé $x \in X$ a každý funkcionál $f \in X'$.

Definícia 9 (Slabá konvergencia v normovanom lineárnom priestore)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$. Hovoríme, že postupnosť vektorov $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ konverguje slabo v priestore X k vektoru $x \in X$, ak pre každý spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ na X je postupnosť $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{T}$ konvergentná v $\mathbb{E}$ s limitou $f(x) \in \mathbb{T}$. Vektor x nazývame slabou limitou postupnosti $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ v priestore X a píšeme $x_k \rightharpoonup x$ pre $k \to \infty$.

Poznámka 16

Podobne ako v Poznámke 15 budeme konvergenciu v norme $\|\cdot\|$ označovať prívlastkom silná. V súlade s Definíciou 9 každá silno konvergentná postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ s limitou $x \in X$ je i slabo konvergentná v X s rovnakou slabou limitou x. Táto skutočnosť je dôsledkom spojitosti funkcionálov $f \in X'$.

Veta 15

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je daná postupnosť vektorov. Platia nasledujúce tvrdenia.

(i) *Postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ má najviac jednu slabú limitu v X.*

(ii) *Ak $x_k \rightharpoonup x$ pre $k \to \infty$, kde $x \in X$, potom každá vybraná podpostupnosť $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ je slabo konvergentná v X s limitou x.*

(iii) *Ak $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ slabo konverguje v X, potom je silno ohraničená v X.*

Dôkaz Vety 15.

(i) Ak platí $x_k \rightharpoonup x$ a $x_k \rightharpoonup y$ pre $k \to \infty$, kde $x, y \in X$ sú rôzne vektory, potom podľa Poznámky 6 existuje spojitý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ s vlastnosťou $f(x) \neq f(y)$. V súlade s Definíciou 9 má teda číselná postupnosť $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{T}$ dve rôzne limity $f(x)$ a $f(y)$ v $\mathbb{E}$, čo však je zrejmý spor. Preto postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ môže mať najviac jednu slabú limitu v priestore X.
(ii) Tvrdenie vyplýva zo skutočnosti, že pre každý funkcionál $f \in X'$, kde X' je duálny priestor, je $\{f(x_{k_n})\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{T}$ vybraná podpostupnosť konvergentnej číselnej postupnosti $\{f(x_k)\}_{k=1}^{\infty}$ v $\mathbb{E}$ s limitou $f(x)$. Preto $\lim_{n\to\infty} f(x_{k_n}) = f(x)$, a tak v zhode s Definíciou 9 je v priestore X slabo konvergentná i postupnosť $\{x_{k_n}\}_{n=1}^{\infty}$ s rovnakou slabou limitou x.

Dôkaz Vety 15 (pokračovanie).

(iii) Z kombinácie Definícií 8 a 9 vyplýva, že každá postupnosť, ktorá slabo konverguje v priestore X, je slabo ohraničená v X. Následne Veta 14 zaručuje jej silnú ohraničenosť v X. Dôkaz je kompletný. ∎

Veta 16

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je slabo konvergentná v priestore X s limitou $x \in X$ práve vtedy, keď je silno ohraničená v priestore X a existuje množina $A' \subseteq X'$ s vlastnosťami

$$\overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A'} = X' \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} g(x_k) = g(x) \text{ pre každý funkcionál } g \in A'. \tag{133}$$

Dôkaz Vety 16.

Platnosť implikácie "$\Rightarrow$" je priamym dôsledkom Definície 9 a Vety 15(iii). Zameriame sa preto na dôkaz implikácie "$\Leftarrow$". Nech postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ je silno ohraničená v X a nech existuje množina $A' \subseteq X'$ spĺňajúca relácie v (133) pre nejaký prvok $x \in X$. Obzvlášť, existuje $K > 0$ také, že platí

$$\|x\| \leq K, \quad \|x_k\| \leq K \quad \text{pre každý index } k \in \mathbb{N}. \tag{134}$$

Z prvej relácie v (133) vyplýva, že pre každý funkcionál $f \in X'$ existuje postup-

Dôkaz Vety 16 (pokračovanie).

nosť $\{g_l\}_{l=1}^{\infty} \subseteq \mathrm{Lin}_{\mathbb{T}} A'$ s vlastnosťou $\lim_{l\to\infty} \|f - g_l\| = 0$. V súlade s druhou rovnosťou v (133) každý funkcionál g_l, $l \in \mathbb{N}$, spĺňa formulu

$$\lim_{k\to\infty} g_l(x_k) = g_l(x). \tag{135}$$

Zvoľme pevne funkcionál $f \in X'$ a nech $\varepsilon > 0$ je dané. Podľa definície postupnosti $\{g_l\}_{l=1}^{\infty}$ existuje index $l_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou

$$\|f - g_{l_\varepsilon}\| < \frac{\varepsilon}{3K}. \tag{136}$$

Následne, rovnosť (135) s $l := l_\varepsilon$ zaručuje existenciu indexu $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ spĺňajúceho

$$|g_{l_\varepsilon}(x) - g_{l_\varepsilon}(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pre každé } k \geq k_\varepsilon. \tag{137}$$

Pomocou nerovností (28), (134), (136) a (137) potom pre každé $k \geq k_\varepsilon$ máme

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_k)| &= \big|[f(x) - g_{l_\varepsilon}(x)] + [g_{l_\varepsilon}(x) - g_{l_\varepsilon}(x_k)] + [g_{l_\varepsilon}(x_k) - f(x_k)]\big| \\ &\leq |f(x) - g_{l_\varepsilon}(x)| + |g_{l_\varepsilon}(x) - g_{l_\varepsilon}(x_k)| + |g_{l_\varepsilon}(x_k) - f(x_k)| \\ &\overset{(28),(137)}{<} \|f - g_{l_\varepsilon}\|\,\|x\| + \frac{\varepsilon}{3} + \|f - g_{l_\varepsilon}\|\,\|x_k\| \\ &\overset{(134),(136)}{<} \frac{\varepsilon}{3K} \cdot K + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3K} \cdot K = \varepsilon. \end{aligned} \tag{138}$$

Dôkaz Vety 16 (pokračovanie).

Získaná nerovnosť (138) znamená, že $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$. Keďže funkcionál $f \in X'$ bol zvolený ľubovoľne, v súlade s Definíciou 9 je postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ slabo konvergentná v X so slabou limitou x. Dôkaz je hotový. ■

Príklad 24 (Slabá konvergencia v priestoroch s konečnou dimenziou)

V normovanom lineárnom priestore X s konečnou dimenziou $n \in \mathbb{N}$ je slabá konvergencia ekvivalentná s konvergenciou v danej norme $\|\cdot\|$. Nech $B = \{e_1, \ldots, e_n\} \subseteq X$ je daná Hamelova báza priestoru X a $B' = \{g_1, \ldots, g_n\} \subseteq X'$ je duálna báza v Príklade 10. Nech postupnosť $x^k \rightharpoonup x \in X$ pre $k \to \infty$. Píšme

$$x = x_1\, e_1 + x_2\, e_2 + \cdots + x_n\, e_n, \quad x^k = x_1^k\, e_1 + x_2^k\, e_2 + \cdots + x_n^k\, e_n, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{139}$$

Podľa rovností v (81) v Príklade 10 a reprezentácií v (139) platí

$$g_i(x^k) = x_i^k, \quad g_i(x) = x_i, \quad k \in \mathbb{N}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{140}$$

Keďže $g_i \in X'$ pre každé $i \in \{1, \ldots, n\}$, v súlade s Definíciou 9 máme

$$\lim_{k\to\infty} x_i^k \overset{(140)}{=} \lim_{k\to\infty} g_i(x^k) = g_i(x) \overset{(140)}{=} x_i, \quad \text{pre každé } i \in \{1, \ldots, n\}. \tag{141}$$

Rovnosti v (141) znamenajú súradnicovú konvergenciu postupnosti $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ vzhľadom na bázu B, ktorá je ekvivalentná s konvergenciou v norme $\|\cdot\|$.

Príklad 25 (Slabá konvergencia v priestoroch l^p)

Pri charakterizácii slabej konvergencie v priestore l^p, kde hodnota $p > 1$, využijeme výsledok Vety 16. Pre každé $n \in \mathbb{N}$ označme

$$e^n := \{\delta_{kn}\}_{k=1}^{\infty}, \quad \text{kde } \delta_{kn} \text{ je Kroneckerov symbol.} \tag{142}$$

Je zrejmé, že postupnosť $e^n \in l^p$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Ďalej uvažujme množinu

$$A' := \{g_n : l^p \to \mathbb{T},\ n \in \mathbb{N}\} \subseteq (l^p)' \tag{143}$$

spojitých lineárnych funkcionálov na l^p tvaru

$$g_m(e^n) := \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n, \end{cases} \qquad m, n \in \mathbb{N}. \tag{144}$$

Z detailnej konštrukcie duálneho priestoru $(l^p)'$ v Príklade 12 môžeme ľahko usúdiť, že množina A' v (143) spĺňa rovnosť $\overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A'} = (l^p)'$ a pre každú postupnosť $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ platí

$$g_n(x) = x_n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{145}$$

Pomocou Vety 16 potom nie je ťažké si premyslieť, že postupnosť $\{x^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq l^p$, t.j., $x^n = \{x_k^n\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ pre každé $n \in \mathbb{N}$, je slabo konvergentná v priestore l^p so slabou limitou $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^p$ práve vtedy, keď platia podmienky

Príklad 25 (Slabá konvergencia v priestoroch l^p)

(i) postupnosť $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ je silno ohraničená v l^p, t.j., číselná postupnosť $\{\|x^n\|_p\}_{n=1}^{\infty}$ je ohraničená v $\mathbb{E}$,

(ii) postupnosť $\{x^n\}_{n=1}^{\infty}$ po zložkách konverguje k vektoru x, t.j., platí

$$\lim_{n\to\infty} x_k^n = x_k \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N}. \tag{146}$$

Poznamenajme, že na rozdiel od predchádzajúceho Príkladu 24 v tomto prípade slabá konvergencia nie je ekvivalentná so silnou konvergenciou. Napríklad postupnosť $\{e^n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq l^p$ definovaná v (142) konverguje slabo k identicky nulovej postupnosti, keďže je očividne silno ohraničená a máme

$$\lim_{n\to\infty} e_k^n \overset{(142)}{=} \lim_{n\to\infty} \delta_{kn} = 0 \quad \text{pre každé pevné } k \in \mathbb{N}.$$

Na druhej strane, postupnosť $\{e^n\}_{n=1}^{\infty}$ nemá v priestore l^p silnú limitu, pretože nie je ani cauchyovská vzhľadom na normu $\|\cdot\|_p$. Skutočne, pre každé dva rôzne indexy $m, n \in \mathbb{N}$ platí $\|e^m - e^n\|_p = 2^{\frac{1}{p}}$, ako sa môžeme ľahko presvedčiť.

Príklad 26 (Slabá konvergencia v priestore l^1 – Schurova veta)

V priestore l^1 slabá konvergencia a konvergencia v norme $\|\cdot\|_1$ splývajú.

Príklad 27 (Slabá konvergencia v priestore spojitých funkcií)

V prípade normovaného lineárneho priestoru $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|_{C})$, kde $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ je daný kompaktný interval, má slabá konvergencia obzvlášť významnú interpretáciu. Dá sa ukázať, že postupnosť funkcií $\{u_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{C}[a,b]$ je slabo konvergentná v priestore $(\mathcal{C}[a,b], \|\cdot\|)$ so slabou limitou $u \in \mathcal{C}[a,b]$ práve vtedy, keď

(i) postupnosť $\{u_k\}_{n=1}^{\infty}$ je rovnomerne ohraničená, t.j., existuje kladná konštanta K taká, že platí

$$|u_k(x)| \leq K \quad \text{pre každé } k \in \mathbb{N} \text{ a každé } x \in [a,b], \tag{147}$$

(ii) postupnosť $\{u_k\}_{n=1}^{\infty}$ konverguje bodovo k funkcii u na intervale $[a,b]$, t.j.,

$$\lim_{k\to\infty} u_k(x) = u(x) \quad \text{pre každé } x \in [a,b]. \tag{148}$$

Príklad 28 (Slabá a silná konvergencia v Hilbertovom priestore)

Nech X je Hilbertov priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ indukovanou daným skalárnym súčinom. Platí, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ konverguje v norme k vektoru $x \in X$ práve vtedy, keď je slabo konvergentná v X so slabou limitou x a $\lim_{k\to\infty} \|x_k\| = \|x\|$. Doplňme, že táto ekvivalencia platí nielen v Hilbertových priestoroch, ale v každom unitárnom lineárnom priestore nad $\mathbb{T}$.

Stručne teraz načrtneme konštrukciu slabej topológie, ktorá indukuje slabú konvergenciu zavedenú v Definícii 9. Nech X je daný normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Nie je ťažké overiť, že pre každý lineárny funkcionál $f : X \to \mathbb{T}$ je zobrazenie $|f|$ pseudonorma na X. Uvažujme

$$\text{systém pseudonoriem } |f|, \; f \in X'. \tag{149}$$

Pomocou systému zobrazení (149) definujme pre daný vektor $x \in X$, daný konečný systém funkcionálov $f_1, \ldots, f_m \in X'$ a dané $\varepsilon > 0$ množinu

$$\mathcal{O}_x(f_1, \ldots, f_m, \varepsilon) := \{y \in X, \; |f_i(y-x)| < \varepsilon, \; i \in \{1, \ldots, m\}\}. \tag{150}$$

Množinu $G \subseteq X$ nazveme slabo otvorenou, ak pre každý vektor $x \in G$ existuje $\varepsilon > 0$ a funkcionály $f_1, \ldots, f_m \in X'$ s vlastnosťou $\mathcal{O}_x(f_1, \ldots, f_m, \varepsilon) \subseteq G$.

Definícia 10 (Slabá topológia na normovanom lineárnom priestore)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Systém všetkých slabo otvorených množín $G \subseteq X$ vytvára na priestore X topológiu, ktorá sa nazýva slabá topológia a budeme ju označovať $\mathcal{T}_w$.

Doplnky množín systému $\mathcal{T}_w$ budeme označovať ako slabo uzavreté množiny v topologickom priestore $(X, \mathcal{T}_w)$.

Propozícia 1

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Platia nasledujúce základné výsledky.

(i) *Slabá topológia $\mathcal{T}_w$ spĺňa Hausdorffovu axiómu oddeliteľnosti.*

(ii) *Platí inklúzia $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}$, kde $\mathcal{T}$ je silná topológia na priestore X indukovaná normou $\|\cdot\|$. To znamená, že každá slabo otvorená množina $G \subseteq X$ je aj silno otvorená, a každá slabo uzavretá množina $F \subseteq X$ je aj silno uzavretá.*

(iii) *Pre každý vektor $x \in X$, každý funkcionál $f \in X'$ a každé ε je množina $\mathcal{O}_x(f,\varepsilon)$ v (150) slabo otvorená a množina*

$$\overline{\mathcal{O}}_x(f,\varepsilon) := \{y \in X,\ |f(y-x)| \le \varepsilon\} \text{ je slabo uzavretá.} \tag{151}$$

Nasledujúce tvrdenie ukazuje presnú súvislosť medzi medzi slabou konvergenciou a slabou topológiou.

Propozícia 2

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$. Daná postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ konverguje slabo k vektoru $x \in X$ práve vtedy, keď konverguje k vektoru x vzhľadom na slabú topológiu $\mathcal{T}_w$ na priestore X.

Dôkaz Propozície 2.

Nech $x_k \rightharpoonup x$ pre $k \to \infty$. Podľa Definície 9 platí $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$ pre každý funkcionál $f \in X'$. Zvoľme $\varepsilon > 0$ a konečný systém funkcionálov $f_1, \dots, f_m \in X'$. Pre každý index $i \in \{1, \dots, m\}$ existuje $k_\varepsilon^i \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou

$$|f_i(x_k - x)| = |f_i(x_k) - f_i(x)| < \varepsilon \quad \text{pre každé } k \geq k_\varepsilon^i. \tag{152}$$

Položme $k_\varepsilon := \max\left\{k_\varepsilon^i,\ i \in \{1, \dots, m\}\right\}$. V súlade s (150) a (152) potom slabé okolie $\mathcal{O}_x(f_1, \dots, f_m, \varepsilon)$ vektora x obsahuje každý člen x_k s indexom $k \geq k_\varepsilon$. To znamená, že $\lim_{k\to\infty} x_k = x$ vzhľadom na slabú topológiu $\mathcal{T}_w$ zavedenú v Definícii 10. Naopak, predpokladajme, že postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^\infty \subseteq X$ konverguje k vektoru $x \in X$ vzhľadom na slabú topológiu $\mathcal{T}_w$. Zvoľme funkcionál $f \in X'$. Pre každé $\varepsilon > 0$ existuje index $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou, že $x_k \in \mathcal{O}(f, \varepsilon)$ pre každé $k \geq k_\varepsilon$. Podľa (150) potom máme

$$|f(x_k) - f(x)| = |f(x_k - x)| < \varepsilon \quad \text{pre každé } k \geq k_\varepsilon. \tag{153}$$

Nerovnosť (153) znamená, že $\lim_{k\to\infty} f(x_k) = f(x)$. Keďže funkcionál $f \in X'$ bol zvolený ľubovoľne, v zhode s Definíciou 9 postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^\infty$ konverguje slabo k vektoru x v priestore X. Dôkaz je hotový. ■

V niektorých dôležitých smeroch sa slabé topológie na nekonečno rozmerných normovaných lineárnych priestoroch nad $\mathbb{T}$ správajú podstatne odlišne než silné topológie indukované normami, resp. metrikami.

Propozícia 3

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a $\dim X = \infty$.

(i) *Každá neprázdna slabo otvorená množina $G \subseteq X$ je neohraničená v X.*

(ii) *Toplogický priestor $(X, \mathcal{T}_w)$ nie je metrizovateľný.*

(iii) *Slabý uzáver jednotkovej sféry $S[0,1]$ v normovanom lineárnom priestore X je uzavretá jednotková guľa $B[0,1]$ v priestore X.*

Výsledok v Propozícii 3(iii) hovorí, že na rozdiel od uzáverov množín $A \subseteq X$ v silnej topológii, slabé uzávery množín $A \subseteq X$ nepozostávajú iba zo slabých limitných bodov postupností v A. Názorne to ukazuje Príklad 26 pre priestor l^1.

Propozícia 4 (Charakterizácie reflexívnosti Banachových priestorov)

Nech X je Banachov priestor nad $\mathbb{T}$. Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné.

(i) *Priestor X je reflexívny.*

(ii) *Uzavretá jednotková guľa $B[0,1] \subseteq X$ je slabo kompaktná* – **Banachova–Bourbakiho charakterizácia**.

(iii) *Z každej ohraničenej postupnosti v X je možné vybrať slabo konvergentnú podpostupnosť* – **Eberleinova–Šmuljanova charakterizácia**.

Princíp rovnomernej ohraničenosti

Dostávame sa k druhému základnému pilieru funkcionálnej analýzy s mnohostranným aplikáciami v rôznych oblastiach matematiky. Všeobecný výsledok popisuje vlastnosti množín spojitých lineárnych operátorov na Banachových priestoroch, avšak v tejto prednáške sa obmedzíme iba na verziu príslušného tvrdenia týkajúceho sa spojitých lineárnych funkcionálov.

Definícia 11 (Bodová a rovnomerná ohraničenosť v duálnom priestore)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Hovoríme, že množina $A' \subseteq X'$ je bodovo ohraničená v duálnom priestore X', ak pre každý vektor $x \in X$ je množina

$$A'_x := \{f(x),\ f \in A'\} \text{ ohraničená v } \mathbb{E}. \tag{154}$$

Množina $A' \subseteq X$ je rovnomerne ohraničená v duálnom priestore X', ak je ohraničená v norme X', t.j., existuje $K > 0$ tak, že $\|f\| \leq K$ pre každé $f \in A'$.

Bodovú ohraničenosť množiny $A' \subseteq X'$ v (154) môžeme ekvivalentne vyjadriť

$$\sup\{|f(x)|,\ f \in A'\} < \infty \quad \text{pre každé } x \in X. \tag{155}$$

Rovnomerná ohraničenosť množiny $A' \subseteq X'$ znamená $\sup\{\|f\|,\ f \in A'\} < \infty$.

Poznámka 17

V súlade s Definíciou 11 nie je ťažké overiť, že každá rovnomerne ohraničená množina $A' \subseteq X'$ je zároveň i bodovo ohraničená v priestore X'. Ak totiž pre nejaké $K > 0$ je $\|f\| \le K$ pre každé $f \in A'$, potom podľa (28) máme

$$|f(x)| \overset{(28)}{\le} \|f\| \, \|x\| \le K\|x\| \quad \text{pre každé } x \in X. \tag{156}$$

Množina A'_x v (154) je teda pre každý daný vektor $x \in X$ ohraničená v $\mathbb{E}$. Opačné tvrdenie však neplatí, t.j., bodová ohraničenosť množiny $A \subseteq X'$ v prípade všeobecného normovaného lineárneho priestoru X neimplikuje jej rovnomernú ohraničenosť v X'. Ilustrujeme to v Príklade 29.

Poznámka 18 ($*$-slabá ohraničenosť v duálnom priestore)

Poznamenajme, že bodová ohraničenosť množín duálneho priestoru X' zavedená v Definícii 11 sa v niektorej literatúre označuje termínom $*$-slabá ohraničenosť. Opodstatnenie tohto pomenovania súvisí so symetriou podmienok (121) a (154). Okrem toho ukážeme, že na duálnom priestore X' je možné popri slabej konvergencii a slabej topológii predstavených Definíciách 9 a 10 zaviesť ďalší typ konvergencie a topológie, ktoré sa štandardne nazývajú $*$-slabá konvergencia a $*$-slabá topológia v duálnom priestore X'.

Príklad 29

Uvažujme normovaný lineárny priestor X tvaru

$$X := \{x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty},\ x \text{ má konečne veľa nenulových členov}\}, \tag{157}$$

na ktorom uvažujeme normu priestoru l^1, t.j., $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|$ pre $x \in X$. Nech X' je odpovedajúci duálny priestor a A' označuje množinu funkcionálov $f_n : X \to \mathbb{T}$, $n \in \mathbb{N}$, s predpisom

$$f_n(x) := n x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X. \tag{158}$$

Nie je ťažké overiť, že pre každé $n \in \mathbb{N}$ je zobrazenie f_n v (158) spojitý lineárny funkcionál na X, t.j., $A' \subseteq X'$. Zvoľme vektor $x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ a položme

$$K_x := \max_{k \in \mathbb{N}} |x_k|, \quad n_x := \max\{k \in \mathbb{N},\ x_k \neq 0\}. \tag{159}$$

Využitím relácií v (158) a (159) potom pre každý index $n \in \mathbb{N}$ dostávame

$$|f_n(x)| \overset{(158)}{=} n\,|x_n| \overset{(159)}{=} \left\{ \begin{array}{ll} n\,|x_n|, & n \leq n_x, \\ 0, & n > n_x, \end{array} \right\} \overset{(159)}{\leq} n_x K_x, \tag{160}$$

a teda odpovedajúca množina A'_x v (154) je ohraničená. V súlade s Definíciou 11 to znamená, že množina A' je bodovo ohraničená v X'. Nie je však rovnomerne ohraničená v X', nakoľko pre každé $n \in \mathbb{N}$ je $|f_n(e^n)| = n$, kde $e^n \in X$ je postupnosť v (142). A keďže $\|e^n\|_1 = 1$, podľa (27) platí $\|f_n\| \geq n$.

Veta 17 (Princíp rovnomernej ohraničenosti)

Nech X je Banachov priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Potom pre každú množinu $A' \subseteq X'$ sú nasledujúce tvrdenia ekvivalentné.

(i) *Platí* $\sup\{\|f\|,\ f \in A'\} < \infty$.

(ii) *Platí* $\sup\{|f(x)|,\ f \in A'\} < \infty$ *pre každý vektor* $x \in X$.

Dôkaz Vety 17.

V súlade s (155) sme platnosť implikácie "$\Rightarrow$" komentovali v Poznámke 17. Predpokladajme, že množina A' je bodovo ohraničená v duálnom priestore X', t.j., platí podmienka (155). Pre každé dané $n \in \mathbb{N}$ definujme množinu

$$F_n := \bigcap_{f \in A'} \{x \in X,\ |f(x)| \leq n\}. \tag{161}$$

Vďaka spojitosti funkcionálov $f \in A'$ je každá z množín F_n, $n \in \mathbb{N}$, ako prienik uzavretých množín, uzavretá. Zvoľme vektor $x \in X$. Podľa predpokladu (155) existuje $n_x \in \mathbb{N}$ také, že $\sup\{|f(x)|,\ f \in A'\} \leq n_x$, t.j., platí $|f(x)| \leq n_x$ pre každé $f \in A$. V súlade s (161) potom máme $x \in F_{n_x}$. Obzvlášť, teda dostávame inklúziu $X \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Na druhej strane, triviálne $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \subseteq X$. Platí teda reprezentácia $X = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Keďže priestor X je úplný, podľa Baire-

Dôkaz Vety 17 (pokračovanie).

ovej vety o kategóriách existuje index $m \in \mathbb{N}$ s vlastnosťou, že množina F_m v (161) nie je riedka v priestore X, t.j., $(\overline{F_m})^o = F_m^o \neq \emptyset$. Inými slovami, množina F_m má aspoň jeden vnútorný bod. Existuje teda vektor $x \in F_m$ a $\varepsilon > 0$ také, že $B(x, 2\varepsilon) \subseteq F_m$. Zvoľme ľubovoľný vektor $z \in B[0,1]$, t.j., s $\|z\| \leq 1$. Potom vektor $y_\varepsilon := x + \varepsilon z$ leží v otvorenej guli $B(x, 2\varepsilon)$, keďže

$$\|y_\varepsilon - x\| = \|\varepsilon z\| \leq \varepsilon < 2\varepsilon, \quad \text{a tak platí } y_\varepsilon \in F_m. \tag{162}$$

Následne pre každý funkcionál $f \in A'$ postupne dostávame

$$|f(z)| = \left| f\left(\frac{1}{\varepsilon}(y_\varepsilon - x)\right)\right| = \frac{1}{\varepsilon}|f(y_\varepsilon) - f(x)| \leq \frac{1}{\varepsilon}|f(y_\varepsilon)| + \frac{1}{\varepsilon}|f(x)|$$

$$\overset{(161),(162)}{\leq} \frac{1}{\varepsilon} m + \frac{1}{\varepsilon} m = \frac{2m}{\varepsilon}, \quad \text{z čoho vyplýva } \|f\| \leq \frac{2m}{\varepsilon}. \tag{163}$$

Posledná nerovnosť v (163) znamená, že množina A' je ohraničená v norme duálneho priestoru X'. Podľa Definície 11 je množina A' rovnomerne ohraničená v X', t.j. platí $\sup\{\|f\|,\ f \in A'\} < \infty$. Dôkaz je kompletný. ∎

Poznámka 19

Dôležitým predpokladom vo Vete 17 je úplnosť normovaného lineárneho priestoru X. Poznamenajme, že v Príklade 29 skúmaný priestor X v (157) nie je Banachov.

Priamym dôsledkom Vety 17 je nasledujúca Banachova–Steinhausova veta.

Veta 18 (Banachova–Steinhausova)

Nech X je Banachov priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Nech $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ je postupnosť funkcionálov s vlastnosťou

$$\text{pre každé } x \in X \text{ existuje } \lim_{k\to\infty} f_k(x) =: f(x). \tag{164}$$

Potom zobrazenie $f : X \to \mathbb{T}$ je spojitý lineárny funkcionál na priestore X a platí

$$\|f\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|. \tag{165}$$

Dôkaz Vety 18.

Podľa predpokladu (164) je postupnosť $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{T}$ pre každý vektor $x \in X$ konvergentná, a teda ohraničená v $\mathbb{E}$. V súlade s (154) v Definícii 11 je teda postupnosť funkcionálov $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ bodovo ohraničená v X'. Následne podľa Vety 17 je $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ rovnomerne ohraničená v duálnom priestore X', t.j., v zhode s Definíciou 11 existuje $K > 0$ také, že $\|f_k\| \leq K$ pre každé $k \in \mathbb{N}$. Funkcionál f definovaná podmienkou (164) je zrejme lineárny. Naviac, pre každý vektor $x \in B[0,1] \subseteq X$ postupne dostávame

$$|f(x)| \overset{(164)}{=} \lim_{k\to\infty} |f_k(x)| = \liminf_{k\to\infty} |f_k(x)| \overset{(28)}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \|f_k\|\,\|x\| \leq \liminf_{k\to\infty} \|f_k\| \leq K.$$

Dôkaz Vety 18 (pokračovanie).

Z odvodenej nerovnosti vyplýva, že lineárny funkcionál f je ohraničený na množine $B[0,1]$, a teda v súlade s Poznámkou 3 spojitý na priestore X. Napokon podľa (26) platí nerovnosť (165). Dôkaz je hotový. ■

Príklad 30 (Aplikácie princípu rovnomernej ohraničenosti)

Tvrdenie Vety 17 má mnohé významné a ďalekosiahlé aplikácie v matematickej analýze. V spektrálnej analýze sa napríklad pomocou neho dá dokázať existencia spojitej funkcie $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{T}$, ktorej trigonometrický Fourierov rad diverguje v bode $t = 0$. V klasickej teórii nekonečných číselných radov z Vety 17 vyplýva, že ak postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq \mathbb{T}$ má vlastnosť, že pre každú postupnosť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$ je nekonečný rad $\sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k$ absolútne konvergentný, potom $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^2$.

Zvyšok prednášky venujeme slabým topológiám v duálnych priestoroch. Nech X je daný normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Na priestore X' môžeme zaviesť slabú topológiu podľa Definície 10, ktorú zostrojíme pomocou systému pseudonoriem $|F|$, $F \in X''$. Existuje však i ďašia významná "slabá" topológia v X'. Motivovaný výsledkom Vety 18 najprv vhodne zoslabíme konvergenciu na priestore X'.

Definícia 12 ($*$-slabá konvergencia v duálnom priestore)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ a X' je duálny priestor. Hovoríme, že postupnosť funkcionálov $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ konverguje $*$-slabo v priestore X' k funkcionálu $f \in X'$, ak pre každý vektor $x \in X$ je postupnosť $\{f_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ konvergentná v $\mathbb{E}$ s limitou $f(x)$. Funkcionál f nazývame $*$-slabou limitou postupnosti $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ v duálnom priestore X' a píšeme $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pre $k \to \infty$.

Poznámka 20

Podobne ako v Poznámke 16 každá silno konvergentná postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ s limitou $f \in X'$ je i $*$-slabo konvergentná v priestore X' s rovnakou $*$-slabou limitou f. Táto skutočnosť vyplýva z nerovnosti (28), podľa ktorej platí

$$|f_k(x) - f(x)| = |(f_k - f)(x)| \overset{(28)}{\leq} \|f_k - f\| \, \|x\| \quad \text{pre každé } x \in X. \tag{166}$$

Ak $\lim_{k\to\infty} f_k = f$ v norme duálneho priestoru X', t.j., $\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\| = 0$, potom podľa (166) máme $\lim_{k\to\infty} |f_k(x) - f(x)| = 0$ pre každý vektor $x \in X$. V kontexte Definície 12 to potom znamená, že postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje $*$-slabo k funkcionálu f, t.j., $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} f$ pre $k \to \infty$. Opačná implikácia samozrejme vo všeobecnosti neplatí, ako ukazujeme v Príklade 31.

Príklad 31

Uvažujme normovaný lineárny priestor $X = c_0$. Z Príkladu 14 vieme, že odpovedajúci duálny priestor X' je izometricky izomorfný s priestorom l^1, pričom príslušná korešpondencia má podľa (96) tvar

$$X' \ni f \leftrightarrow \lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty} \in l^1, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\, x_k\,, \quad x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X. \tag{167}$$

Nech $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \in X'$ je postupnosť funkcionálov, ktorá v kontexte ekvivalencie (167) odpovedá postupnosti $\{e^n\}_{n=1}^{\infty}$, kde $e^n = \{\delta_{kn}\}_{k=1}^{\infty} \in l^1$ pre každé $n \in \mathbb{N}$. Každý z funkcionálov f_n, $n \in \mathbb{N}$, teda spĺňa

$$f_n(x) \overset{(167)}{=} x_n \quad \text{pre každé } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X. \tag{168}$$

Platí $\lim_{k\to\infty} x_k = 0$ pre každé $\{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X$, a tak z (168) vyplýva

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) \overset{(168)}{=} \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \quad \text{pre každý prvok } x = \{x_k\}_{k=1}^{\infty} \in X. \tag{169}$$

Podľa Definície 12 teda postupnosť $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ $*$-slabo konverguje v duálnom priestore X' k nulovému funkcionálu, t.j., $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} 0$ pre $k \to \infty$. Nejedná sa však o silnú konvergenciu v priestore X', pretože pre každý daný index $n \in \mathbb{N}$ máme $f_n(e^n) = 1$, a keďže $\|x\| = 1$, platí $\|f_n\| \geq 1$.

Príklad 32

Podľa Príkladov 2 a 7 pre danú funkciu y spojitú na $I = [-1, 1]$ je zobrazenie

$$f(u) := \int_{-1}^{1} u(x)\, y(x)\, \mathrm{d}x, \quad \text{kde } u \text{ je funkcia spojitá na } [-1, 1],$$

spojitý lineárny funkcionál na normovanom lineárnom priestore $X = \mathcal{C}[-1, 1]$ s normou $\|\cdot\|_C$. Uvažujme postupnosť $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X$ spĺňajúcu vlastnosti

$$y_k(x) \geq 0, \quad x \in [-1, 1], \quad y_k \equiv 0 \text{ na } I \setminus \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right], \quad \int_{-1}^{1} y_k(x)\, \mathrm{d}x = 1. \tag{170}$$

Systém $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ v (170) definuje postupnosť funkcionálov $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ tvaru

$$f_k(u) := \int_{-1}^{1} u(x)\, y_k(x)\, \mathrm{d}x, \quad u \in X. \tag{171}$$

Pomocou (171), formuly (35) a podmienok v (170) nie je ťažké overiť, že

$$\|f_k\| \overset{(171),(35)}{=} \int_{-1}^{1} |y_k(x)|\, \mathrm{d}x \overset{(170)}{=} \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} y_k(x)\, \mathrm{d}x = 1. \tag{172}$$

Dokážeme, že postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ konverguje $*$-slabo v duálnom priestore X' k funkcionálu $\delta_0 \in X'$ z Príkladu 2 s predpisom

Príklad 32

$$\delta_0(u) := u(0), \quad u \in X. \tag{173}$$

Skutočne, pre každý index $k \in \mathbb{N}$ a každý vektor $u \in X$ postupne platí

$$\begin{aligned}
|f_k(u) - \delta_0(u)| &\overset{(171),(173)}{=} \left| \int_{-1}^{1} u(x)\, y_k(x)\, \mathrm{d}x - u(0) \right| \\
&\overset{(170)}{=} \left| \int_{-1}^{1} [u(x) - u(0)]\, y_k(x)\, \mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int_{-1}^{1} |u(x) - u(0)|\, y_k(x)\, \mathrm{d}x \\
&\overset{(170)}{=} \int_{-1/k}^{1/k} |u(x) - u(0)|\, y_k(x)\, \mathrm{d}x \\
&= |u(\eta_k) - u(0)| \int_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} y_k(x)\, \mathrm{d}x \\
&\overset{(170)}{=} |u(\eta_k) - u(0)| \quad \text{pre isté } \eta_k \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right].
\end{aligned} \tag{174}$$

Príklad 32

V predposlednom kroku v (174) sme využili kombináciu vety o strednej hodnote a Bolzanovej vety pre spojitú funkciu $|u-u(0)|$ na kompaktnom intervale $[-\frac{1}{k},\frac{1}{k}]$. A keďže postupnosť $\{\eta_k\}_{k=1}^{\infty}$ očividne spĺňa $\lim_{k\to\infty}\eta_k = 0$, máme

$$\lim_{k\to\infty}|f_k(u)-\delta_0(u)| \overset{(174)}{=} \lim_{k\to\infty}|u(\eta_k)-u(0)| = |u(0)-u(0)| = 0 \quad \text{pre každé } u\in X,$$

a tak podľa Definície 12 platí $f_k \overset{*}{\rightharpoonup} \delta_0$ pre $k\to\infty$. Naviac, platí $\|\delta_0\| = 1$, ako sa môžeme ľahko presvedčiť. Na druhej strane, dá sa ukázať, že uvažovaná postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ pre žiadnu voľbu funkcií y_k, $k\in\mathbb{N}$, spĺňajúcich vlastnosti (170) nekonverguje silno, t.j., v norme duálneho priestoru X'. Dôkaz je založený na pozorovaní, že postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ nie je cauchyovská v norme priestoru X', a teda nemôže byť ani silno konvergentná v priestore X'.

Veta 19

Nech X je Banachov priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}\subseteq X'$ je $*$-slabo konvergentná v priestore X' s limitou $f\in X'$ práve vtedy, keď je silno ohraničená v priestore X' a existuje množina $A\subseteq X$ s vlastnosťami

$$\overline{\operatorname{Lin}_{\mathbb{T}} A} = X \quad \text{a} \quad \lim_{k\to\infty} f_k(x) = f(x) \quad \text{pre každý vektor } x\in A. \tag{175}$$

Myšlienka konštrukcie $*$-slabej topológie v duálnom priestore X' je podobná ako pri slabej topológii v normovanom lineárnom priestore X. Pre každý funkcionál $f \in X'$ definujeme $*$-slabé okolia tvaru

$$\mathcal{O}^*_f(x_1, \dots, x_m, \varepsilon) := \{g \in X',\ |(g - f)(x_i)| < \varepsilon,\ i \in \{1, \dots, m\}\}, \qquad (176)$$

kde $x_1, \dots, x_m \in X$ je konečný systém vektorov a $\varepsilon > 0$. Množinu $G' \subseteq X'$ nazveme $*$-slabo otvorenou, ak pre každý funkcionál $f \in G'$ existuje $\varepsilon > 0$ a vektory $x_1, \dots, x_m \in X$ s vlastnosťou $\mathcal{O}_f(x_1, \dots, x_m, \varepsilon) \subseteq G'$.

Definícia 13 ($*$-slabá topológia na duálnom priestore)

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Systém všetkých $*$-slabo otovrených množín $G' \subseteq X'$ vytvára na priestore X' topológiu, ktorá sa nazýva $*$-slabá topológia a označujeme ju $\mathcal{T}_{w^*}$.

Doplnky množín systému $\mathcal{T}_{w^*}$ budeme označovať ako $*$-slabo uzavreté množiny v topologickom priestore $(X, \mathcal{T}_{w^*})$. Pre topológiu $\mathcal{T}_{w^*}$ platia analogické tvrdenia ako pre slabú topológiu na normovanom lineárnom priestore X. Nasledujúce tvrdenie sumarizuje základné vlastnosti $*$-slabej topológie na duálnom priestore X'. Ich dôkazy je možné viesť podobným spôsobom ako v prípade slabej topológie na priestore X.

Propozícia 5

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ s normou $\|\cdot\|$ a X' je duálny priestor. Platia nasledujúce základné výsledky.

(i) *Topológia $\mathcal{T}_{w^*}$ spĺňa Hausdorffovu axiómu oddeliteľnosti.*

(ii) *Platí inklúzia $\mathcal{T}_{w^*} \subseteq \mathcal{T}$, kde $\mathcal{T}$ je silná topológia na duálnom priestore X' indukovaná normou $\|\cdot\|$ v (26).*

(iii) *Postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ konverguje $*$-slabo k funkcionálu $f \in X'$ práve vtedy, keď konverguje k funkcionálu f vzhľadom na $*$-slabú topológiu $\mathcal{T}_{w^*}$ na duálnom priestore X'.*

(iv) *Ak X je Banachov priestor nekonečnej dimenzie, potom topologický priestor $(X, \mathcal{T}_{w^*})$ nie je metrizovateľný.*

Poznamenajme, že v duálnom priestore X' môžeme okrem pojmov $*$-slabá ohraničenosť a konvergencia zavedených v Definíciách 11 a 12 uvažovať i štandardnú slabú ohraničenosť a konvergenciu v zmysle Definícií 8 a 9, v ktorých budeme X' chápať ako východiskový normovaný lineárny priestor a druhý duálny priestor X'' ako k nemu odpovedajúci duálny priestor. Konkrétne, množina spojitých lineárnych funkcionálov $A' \subseteq X'$ je slabo ohraničená v priestore X', ak pre každý spojitý lineárny funkcionál $F : X' \to \mathbb{T}$ je množina

$$F(A') := \{F(f),\ f \in A'\} \text{ ohraničená v } \mathbb{E}. \tag{177}$$

Podobne, postupnosť $\{f_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq X'$ je slabo konvergentná v X' so slabou limitou $f \in X'$, ak pre každý funkcionál $F \in X''$ je $\lim_{k\to\infty} F(f_k) = F(f)$.

Propozícia 6

Nech X je normovaný lineárny priestor nad $\mathbb{T}$ a X' je duálny priestor. Nech $\mathcal{T}_{w^*}$ a $\mathcal{T}_w$ sú $*$-slabá a slabá topológia na X'. Platí inklúzia $\mathcal{T}_{w^*} \subseteq \mathcal{T}_w$, pričom rovnosť nastáva práve vtedy, keď X je reflexívny priestor.

Dôkaz Propozície 6.

Vďaka kanonickému vnoreniu π v (116) a (111) a jeho vlastnostiam platí

$$\begin{aligned}(g-f)(x) = g(x) - f(x) &\overset{(111)}{=} F_x(g) - F_x(f) \\ &\overset{(116)}{=} [\pi(x)](g) - [\pi(x)](f) = [\pi(x)](g-f), \quad x \in X, \quad f, g \in X'. \end{aligned} \tag{178}$$

Následne, pre každé $*$-slabé okolie $\mathcal{O}^*_f(\{x_i\}_{i=1}^m, \varepsilon)$ máme

$$\begin{aligned}\mathcal{O}^*_f(\{x_i\}_{i=1}^m, \varepsilon) &\overset{(176)}{=} \{g \in X',\ \{|(g-f)(x_i)| < \varepsilon\}_{i=1}^m\} \\ &\overset{(178)}{=} \{g \in X',\ \{|[\pi(x_i)](g-f)| < \varepsilon\}_{i=1}^m\} \overset{(150)}{=} \mathcal{O}_f(\{\pi(x_i)\}_{i=1}^m, \varepsilon).\end{aligned}$$

Dôkaz Propozície 6 (pokračovanie).

Posledná rovnosť ukazuje, že každé $*$-slabé okolie v duálnom priestore X' je zároveň i slabým okolím v X'. To dokazuje inklúziu $\mathcal{T}_{w^*} \subseteq \mathcal{T}_w$. Rovnosť nastáva práve vtedy, keď prirodzené zobrazenie π v (116) je surjektívne, t.j., v súlade s Definíciou 7 práve vtedy, keď normovaný lineárny priestor X je reflexívny. ∎

Obsahom posledných dvoch tvrdení je kompaktnosť v slabých topológiách. Prvý výsledok ukazuje, že hoci slabá topológia nie je vo všeobecnosti metrizovateľná, slabo kompaktné množiny sa správajú podobne ako klasické kompaktné množiny. Druhé tvrdenie hovorí, že $*$-slabá kompaktnosť v duálnych priestoroch vykazuje niektoré vlastnosti klasickej kompaktnosti v priestoroch konečnej dimenzie.

Veta 20 (Eberleinova–Šmuljanova)

V slabej topológii každého Banachovho priestoru X nad $\mathbb{T}$ pojmy (relatívna) kompaktnosť, (relatívna) spočítateľná kompaktnosť a (relatívna) sekvenciálna kompaktnosť množín v X vzájomne splývajú.

Veta 21 (Banachova–Alaogluova)

V duálnom priestore X' každého normovaného lineárneho priestoru X nad $\mathbb{T}$ je uzavretá jednotková guľa $B'[0,1]$ kompaktná v $*$-slabej topológii v X'.