27.2.2020

$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\alpha \in \mathcal{H};\ |\alpha| \geq 1,\ -\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re}\alpha < \frac{1}{2},\ |\alpha| = 1 \Rightarrow \operatorname{Re}\alpha \leq 0\}$

Opakování z kompl. analýzy

V okolí nějakého bodu $z_0 \in \mathbb{C}$ je daná meromorfní funkce předpisem

$$f(z) = \sum_{n \geq n_0} a_n (z - z_0)^n$$

Je-li f nenulová, pak lze n_0 volit tak, aby $a_{n_0} \neq 0$, v tom případě definujeme

$$\operatorname{ord}_{z_0} f = n_0 .$$

Je-li $\varepsilon > 0$ dost. malé (aby v kruhu o středu z_0 a poloměrem ε neexistovala nula či pól f (s výjimkou středu)), pak integrál po hraniční kružnici C_ε proti směru hod. r.

$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)} = 2\pi i \cdot \operatorname{ord}_{z_0} f .$$

Rozmysleme si, co se stane, budeme-li integrovat jen po části kružnice (po úhlu α). Zřejmě v našem okolí bodu z_0 je

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{\operatorname{ord}_{z_0} f}{z - z_0} + g(z),$$

kde $g(z)$ je holomorfní (v tom okolí)

$$\int_{\text{po úhlu } \alpha} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz \longrightarrow \alpha i \operatorname{ord}_{z_0} f \quad \text{pro } \varepsilon \to 0 .$$

Pozn. Předpokládejme, že f je slabá modulární váhy k (pro $SL_2(\mathbb{Z})$) pro lib. $z_0 \in \mathcal{H}$ tedy máme $\operatorname{ord}_{z_0} f$. Z definice slabé modulární funkce plyne, že pokud z_1, z_2 patří do stejné orbity akce $SL_2(\mathbb{Z})$ na $\mathcal{H}$, pak $\operatorname{ord}_{z_1} f = \operatorname{ord}_{z_2} f$.

Def Řekneme, že slabě modulární funkce f je meromorfní v ∞, jestliže jí odpovídající $\tilde{f}$ je meromorfní v 0, je-li f nenulová, definujeme

$$\operatorname{ord}_\infty f = \operatorname{ord}_0 \tilde{f} .$$

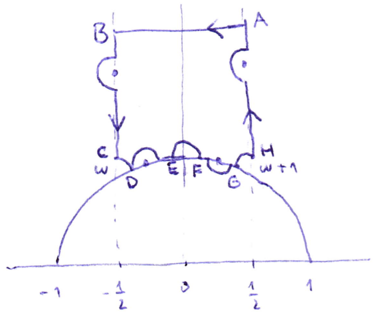
Def Slabé modulární funkci (pro $SL_2(\mathbb{Z})$) se říká modulární funkce, má-li váhu 0 a je meromorfní v ∞.

VĚTA Nechť $f: \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ je nenulová slabě modulární funkce (pro $SL_2(\mathbb{Z})$) váhy k, která je meromorfní v ∞. Pak platí

$$\operatorname{ord}_\infty f + \tfrac{1}{2} \operatorname{ord}_i f + \tfrac{1}{3} \operatorname{ord}_\omega f + \sum_{\substack{z \in \widetilde{\mathcal{F}} \\ z \neq i \\ z \neq \omega}} \operatorname{ord}_z f = \frac{k}{12},$$

přičemž zmíněná suma má jen konečně mnoho nenulových sčítanců.

Důkaz Z meromorfnosti f v ∞ plyne existence $Y \in \mathbb{R}$, $Y > 0$, že f nemá pól ani nulu v $\{z \in \mathcal{H};\ \operatorname{Im} z \geq Y\}$. Budeme integrovat $\frac{f'(z)}{f(z)}$ podél křivky C_ε, kde $\varepsilon > 0$ je dost malé (tj. tak, aby v dotyčných kruzích měla f nulu či pól nejvýše ve středu)



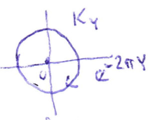
$$\int_{C_\varepsilon} \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{z \in \widetilde{\mathcal{F}} \\ z \neq i, z \neq \omega}} \operatorname{ord}_z f .$$

Platí

$$\int_H^A \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz + \int_B^C \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 0 .$$

$$\int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz$$

když z jde od A do B, tak $q = e^{2\pi i z}$ jde od $e^{2\pi i (\frac{1}{2} + iY)} = e^{-2\pi Y} \cdot e^{\pi i}$ k $e^{2\pi i(-\frac{1}{2} + iY)} = e^{-2\pi Y} \cdot e^{-\pi i}$



$$\frac{d\tilde{f}(q)}{dq} \cdot \frac{dq}{dz} = \frac{df(z)}{dz}$$

$$\int_A^B \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_{K_Y} \frac{\frac{d\tilde{f}(q)}{dq}}{\tilde{f}(q)}\, dq = -2\pi i \operatorname{ord}_\infty f .$$

$$\int_C^D \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \int_G^H \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \longrightarrow -\frac{2\pi i}{3}\cdot \operatorname{ord}_\omega f \quad \text{pro } \varepsilon \to 0$$

$$\int_E^F \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz \longrightarrow -\frac{2\pi i}{2} \operatorname{ord}_i f \quad \text{pro } \varepsilon \to 0$$

Transf. rovnice pro S

$$f\left(-\tfrac{1}{z}\right) = f(S\cdot z) = z^k\cdot f(z)$$

$$\frac{f'(Sz)}{f(Sz)} = \frac{k}{z} + \frac{f'(z)}{f(z)}$$

Potřebujeme spočítat

$$\int_D^E \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz + \int_F^G \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_D^E \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{f'(Sz)}{f(Sz)}\right) dz = \int_D^E \left(-\frac{k}{z}\right) dz = -k\cdot \int_D^E \frac{dz}{z} = k\cdot \int_E^D \frac{dz}{z} \longrightarrow \frac{2\pi i}{12}\cdot k \quad \text{pro } \varepsilon \to 0$$

Označení $\Gamma_1 = SL_2(\mathbb{Z})$

Def Pro libovolné k nechť je $M_k(\Gamma_1)$ množina všech modulárních forem váhy k (pro Γ_1).

Pozn. Zřejmě je $M_k(\Gamma_1)$ vektorový prostor nad $\mathbb{C}$; už víme, že $M_k(\Gamma_1) = \{0\}$, je-li k liché.

Důsledek $M_k(\Gamma_1) = \{0\}$, je-li $k < 0$ a pro sudé $k \geq 0$ platí

$$\dim_{\mathbb{C}} M_k(\Gamma_1) \leq \begin{cases} 1 + \left[\frac{k}{12}\right], & \text{je-li } k \not\equiv 2 \pmod{12} \\ \left[\frac{k}{12}\right], & \text{je-li } k \equiv 2 \pmod{12} \end{cases}$$

Dk. Označme $m = \left[\frac{k}{12}\right] + 1$ a zvolme m různých bodů $P_1, P_2, \dots, P_m$ v $\mathcal{F}$. Sporem: předp., že v $M_k(\Gamma_1)$ leží $m+1$ lin. nezávislých forem $f_1, \dots, f_{m+1}$. Existuje nenulová lin. kombinace forem $f_1, \dots, f_{m+1}$, která nabývá nuly v každém bodě $P_1, \dots, P_m$. Z věty $m \leq \frac{k}{12}$, spor. Předp., že $k = 2 + 12n$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \geq 0$. Pak $\frac{k}{12} = \frac{1}{6} + n$, $\frac{1}{6} + 1 = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}$. Každá mod. forma této váhy má alespoň dvojnásobnou nulu v ω. Dál analogicky.