

Nelineární systémy



[PolyX]

3 / Systémy druhého řádu

1. Úvod

2. Příklady

3. Systémy druhého řádu

4. Matematické základy

5. Stabilita a Lyapunova funkce

6.

8.

9.

10.

- chování nelineárního systému v okolí ustáleného stavu můžeme poznat studiem jeho linearizace v tom stavu
- Systém $\dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2)$ $\dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2)$ můžeme v okolí bodu $p = (p_1, p_2)$

rozvinout v Taylorovu řadu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(p_1, p_2) + a_{11}(x_1 - p_1) + a_{12}(x_2 - p_2) + \text{tayl} \\ \dot{x}_2 &= f_2(p_1, p_2) + a_{21}(x_1 - p_1) + a_{22}(x_2 - p_2) + \text{tayl}\end{aligned}$$

- kde

$$\begin{aligned}a_{11} &= \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2} & a_{12} &= \left. \frac{\partial f_1(x_1, x_2)}{\partial x_2} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2} \\ a_{21} &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2} & a_{22} &= \left. \frac{\partial f_2(x_1, x_2)}{\partial x_{2s}} \right|_{x_1=p_1, x_2=p_2}\end{aligned}$$

- a tayl jsou členy vyššího řádu jako

$$(x_1 - p_1)^2, (x_2 - p_2)^2, (x_1 - p_1)(x_2 - p_2), \dots$$

- když $p = (p_1, p_2)$ je ekvilibrium, pak

$$f_1(p_1, p_2) = f_2(p_1, p_2) = 0$$

- protože se zajímáme o chování blízko bodu $p = (p_1, p_2)$ definujeme $y_1 = x_1 - p_1, y_2 = x_2 - p_2$ takže

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= \dot{x}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \text{tayl} \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \text{tayl}\end{aligned}$$

- když se omezíme na dostatečně malé okolí, jsou členy vyššího řádu zanedbatelně malé takže $\dot{y}_1 = \dot{x}_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2$
 $\dot{y}_2 = \dot{x}_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2$

- nebo v kompaktním tvaru $\dot{y} = Ay$ kde

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{array} \right]_{x=p} = \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=p}$$

je Jacobiho matice
neboli jakobián

Lineární systém 2. řádu $\dot{x} = A(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$ převedeme transformací souřadnic $z = T^{-1}x$ na

$$\dot{z} = T^{-1}ATz = Jz$$

kde $T^{-1}AT = J$ je Jordanova matice tvaru

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

pro dvě různá reálná v.č.

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, k = 0, 1$$

pro jedno dvojnásobné v.č.

$$J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$$

pro dvojici komplexně sdružených v.č.

Reálná různá vlastní čísla

Pro $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathfrak{R}$ je

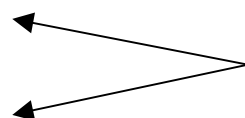
$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Systém lze převést do tvaru

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda_1 z_1 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 \end{aligned}$$

a platí

$$\begin{aligned} z_1(t) &= z_{10} e^{\lambda_1 t} \\ z_2(t) &= z_{20} e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$



módy

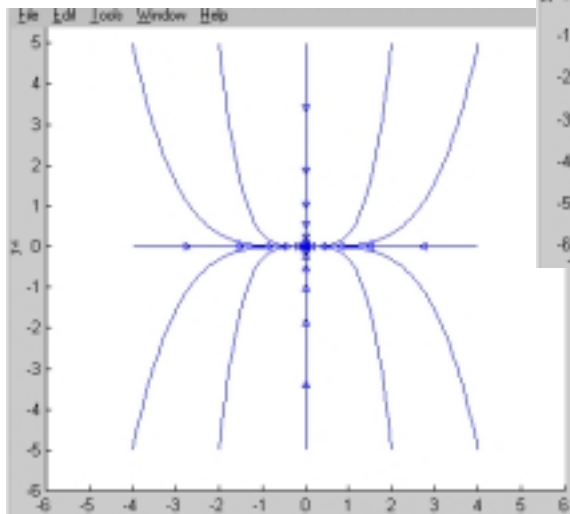
a z toho

$$\frac{z_1}{z_{10}} = \left(\frac{z_2}{z_{20}} \right)^{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

$$\frac{dz_2}{dz_1} = \frac{z_{20}}{z_{10}} \frac{\lambda_2}{\lambda_1} z_1^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - 1}$$

Fázový portrét v modálních souřadnicích

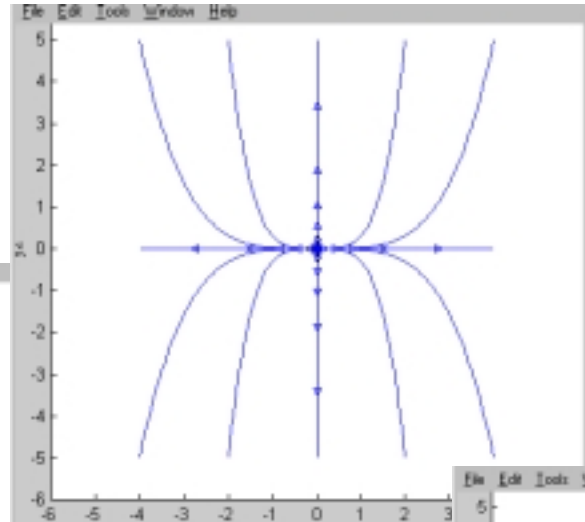
$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$$



stabilní
uzel

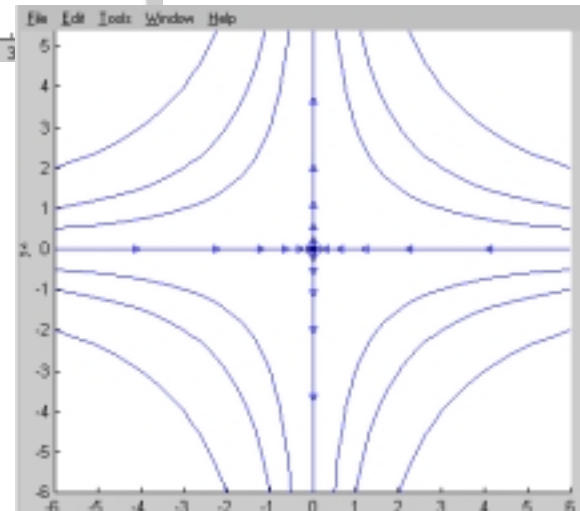
$$\lambda_2 > \lambda_1 > 0$$

nestabilní
uzel



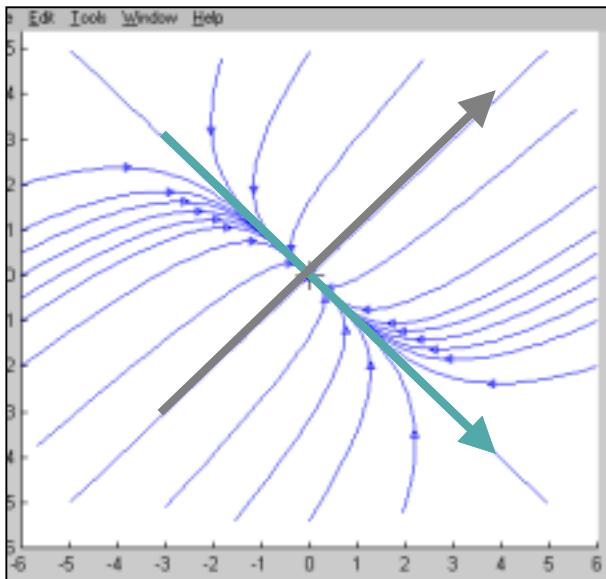
sedlo

$$\lambda_2 < \lambda_1 < 0$$

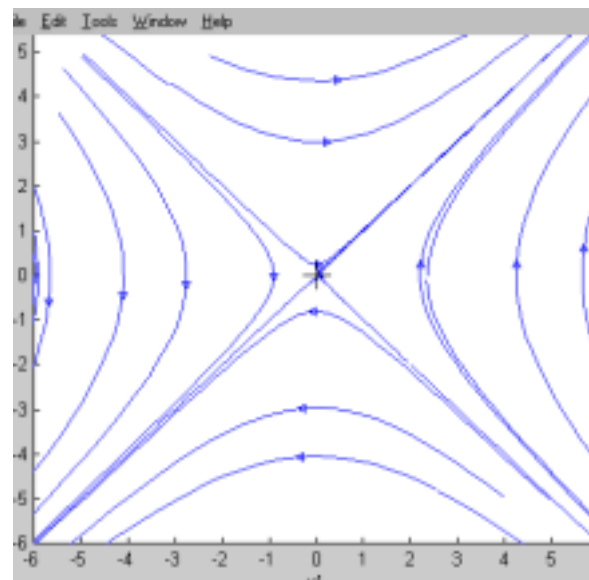


V původních souřadnicích

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_{T^{-1}} \underbrace{\begin{bmatrix} (\lambda_1 + \lambda_2)/2 & (\lambda_2 - \lambda_1)/2 \\ (\lambda_2 - \lambda_1)/2 & (\lambda_1 + \lambda_2)/2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}}_{\begin{matrix} T \\ v_1 & v_2 \end{matrix}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$



uzel



sedlo

Komplexní vlastní čísla

Pro $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ je $J = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$

a systém lze převést do tvaru

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= \alpha z_1 - \beta z_2 \\ \dot{z}_2 &= \beta z_1 + \alpha z_2\end{aligned}$$

V polárních souřadnicích $r = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$, $\theta = \tan^{-1}\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$

dostaneme hezčí tvar

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha r \\ \dot{\theta} &= -\beta\end{aligned}$$

který má řešení

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \theta(t) = \theta_0 + \beta t$$

logaritmická
spirála

Fázový portrét v modálních souřadnicích

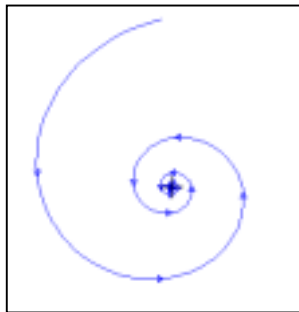
- spirála zatáčí ve směru hodinových ručiček když $\beta > 0$ a proti když $\beta < 0$
- konverguji do středu pro $\alpha < 0$ a diverguje od něj pro $\alpha > 0$

$\alpha < 0$

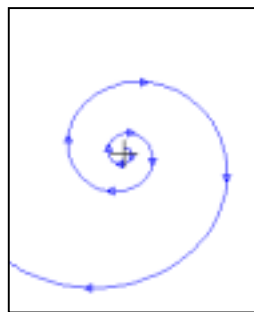
$\alpha > 0$

$\alpha = 0$

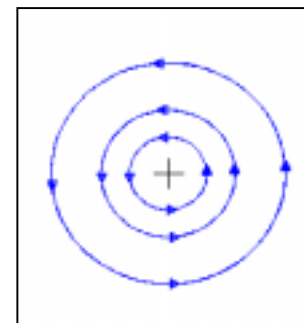
$\beta > 0$



stabilní ohnisko

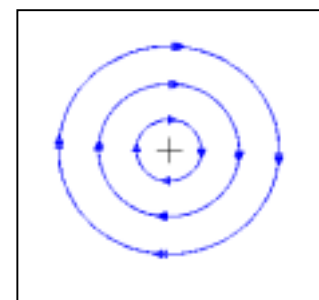
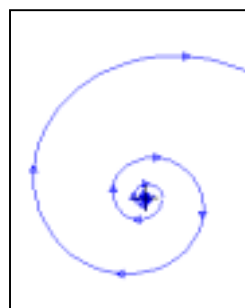
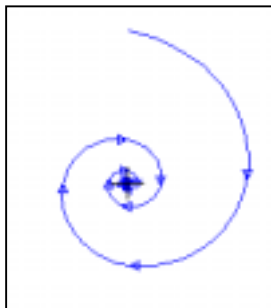


nestabilní ohnisko



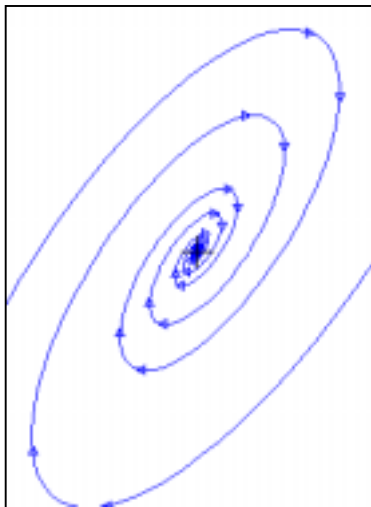
střed

$\beta < 0$



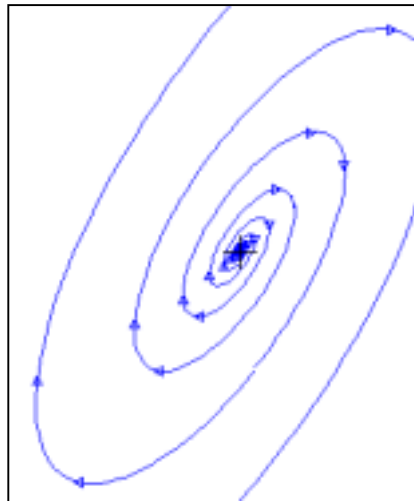
a v původních souřadnicích

$$\alpha < 0$$



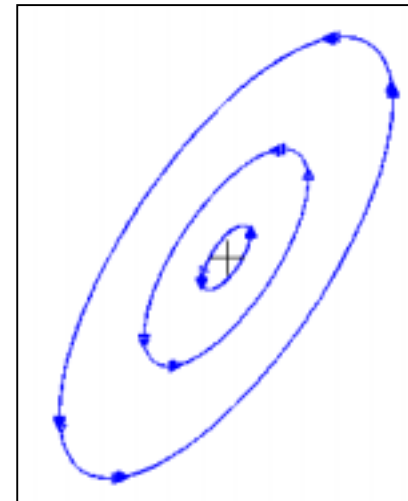
stabilní ohnisko

$$\alpha > 0$$



nestabilní ohnisko

$$\alpha = 0$$



střed

Nenulové násobné vlastní číslo

■ Pro $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \neq 0$ je

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & k \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, k = 0, 1$$

system lze převést na tvar

$$\lambda > 0$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \lambda z_1 + k z_2 \\ \dot{z}_2 &= \lambda z_2 \end{aligned}$$

$$\lambda < 0$$

s řešením

$$z_1(t) = e^{\lambda t} (z_{10} + k z_{20} t), \quad z_2(t) = z_{20} e^{\lambda t}$$

$$k = 0$$

$$k = 1$$

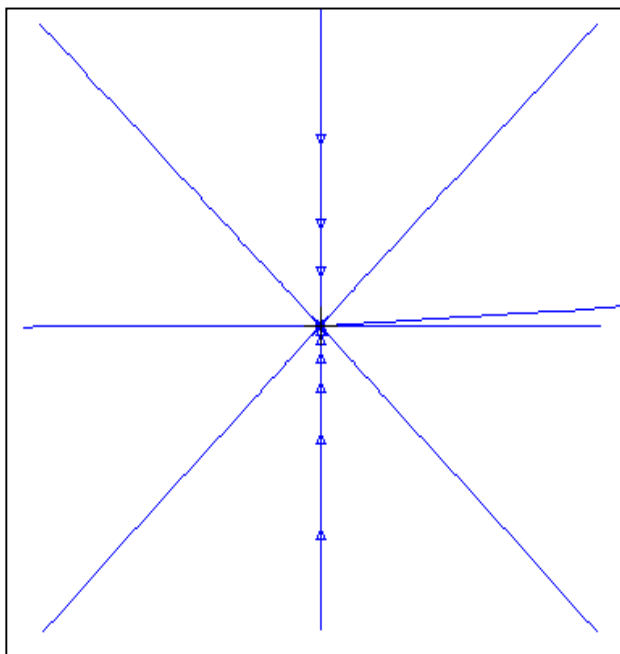
z čehož plyne

$$z_1 = z_2 \left[\frac{z_{10}}{z_{20}} + \frac{k}{\lambda} \ln \left(\frac{z_2}{z_{20}} \right) \right]$$

$$x_e = 0$$

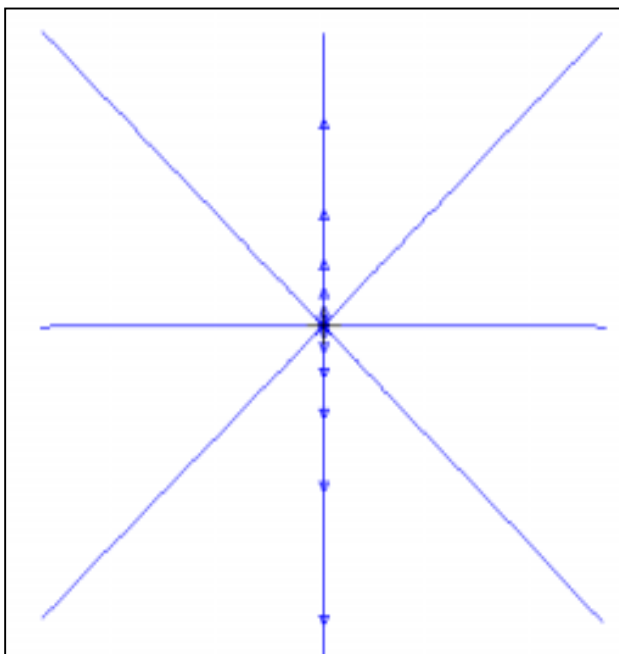
$$k = 0$$

$$\lambda < 0$$



stabilní uzel

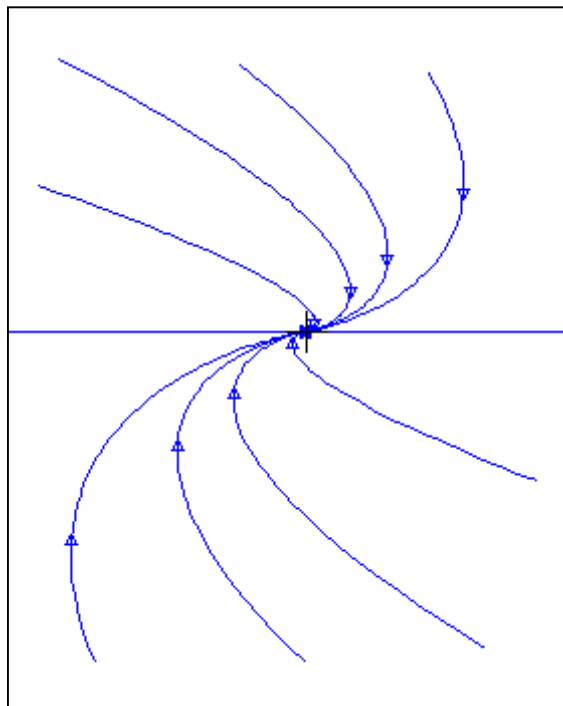
$$\lambda > 0$$



nestabilní uzel

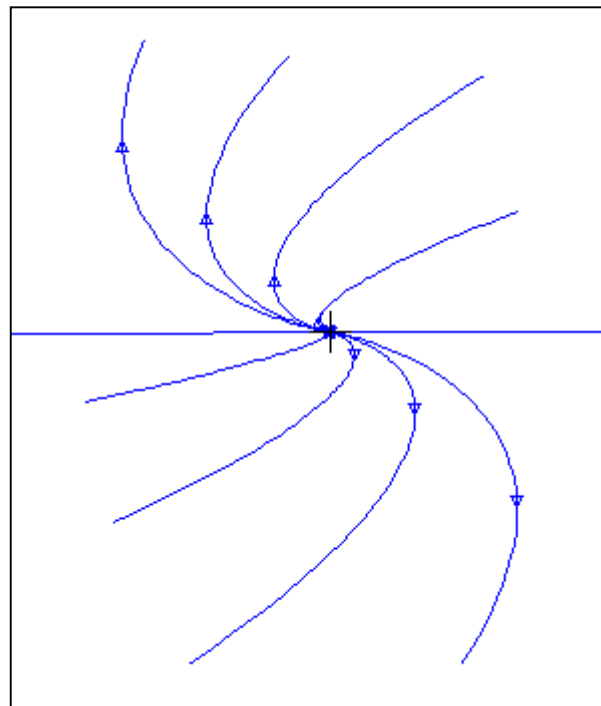
k různé od 0

$\lambda < 0$



nevlastní stabilní uzel


$\lambda > 0$



nevlastní nestabilní uzel

Jedno vlastní číslo = 0

■ Pro $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \neq 0$ je $J = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ a $T = [v_1, v_2]$



takže

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= 0 \\ \dot{z}_2 &= \lambda_2 z_2 \end{aligned}$$

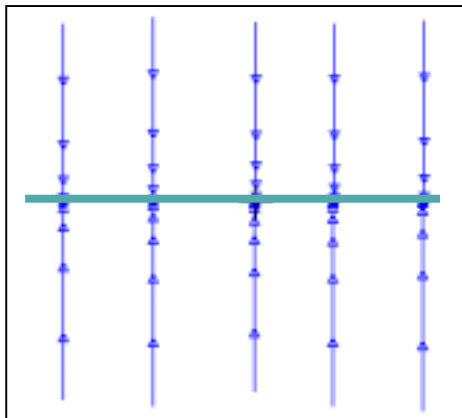
a

$$z_1(t) = z_{10}, \quad z_2(t) = z_{20} e^{\lambda_2 t}$$

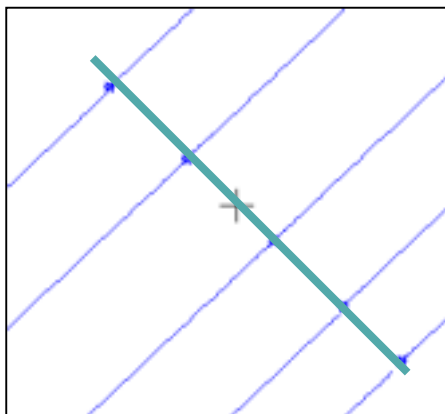
■ systém nemá izolovaný rovnovážný bod, ale rovnovážný podprostor definovaný vektorem v_1

a v obrázcích

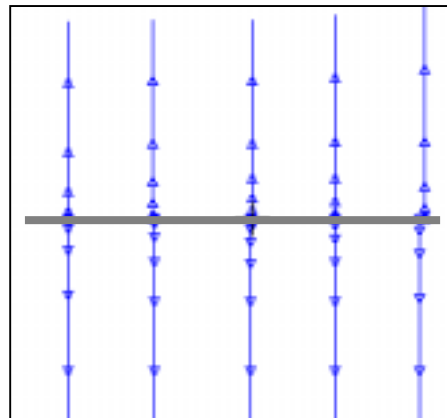
$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 < 0$$



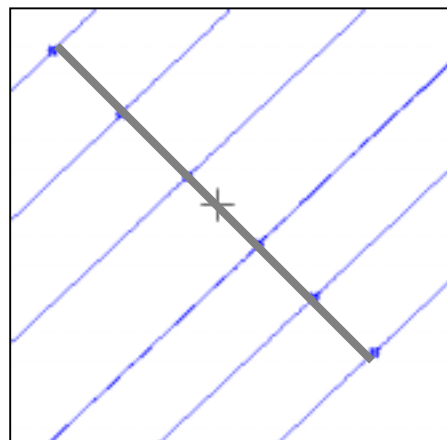
stabilní podprostor



$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 > 0$$



nestabilní podprostor



Dvojnásobné vlastní číslo 0

■ Pro $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ je $J = \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $T = [v_1, v_2]$

a systém lze převést na

$$\begin{aligned}\dot{z}_1 &= kz_2 \\ \dot{z}_2 &= 0\end{aligned}$$

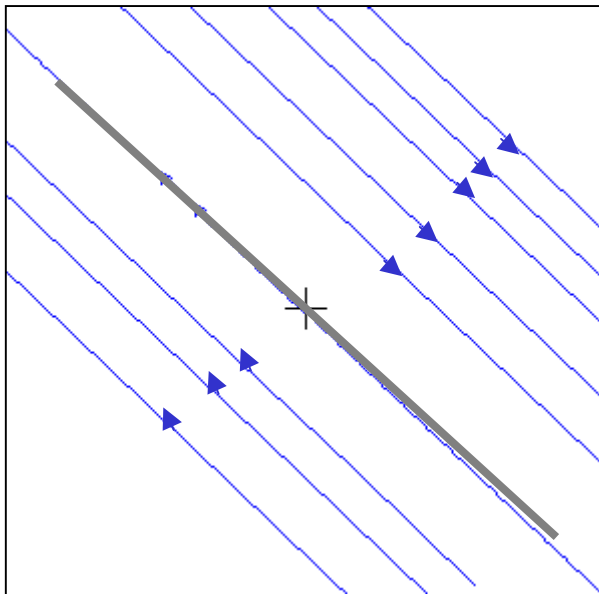
s řešením

$$z_1(t) = z_{10} + kz_{20}t, \quad z_2(t) = z_{20}$$

- systém má izolovaný rovnovážný podprostor definovaný vektorem v_1 (pro $k = 1$)
- nebo dokonce dvourozměrný (pro $k = 0$)

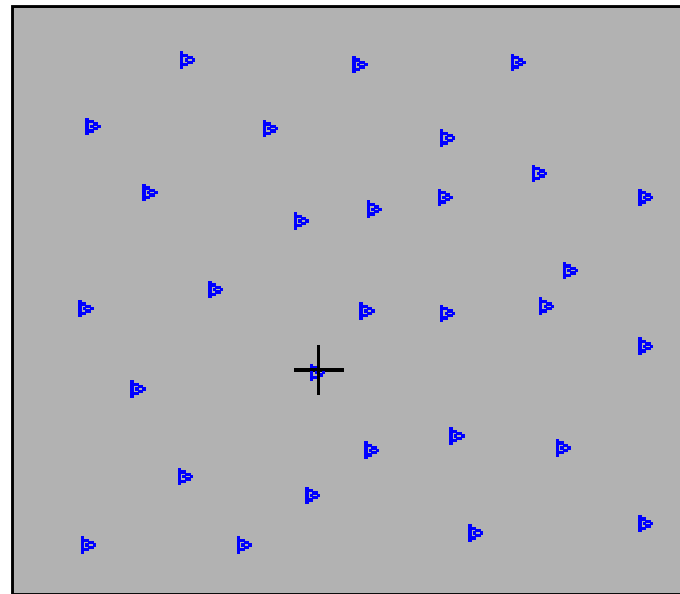
dvojnásobné vlastní číslo 0

$k = 1$



1-D rovnovážný podprostor

$k = 0$



2-D rovnovážný podprostor

Izolovaného ekvilibrium

- stabilní uzel
- nestabilní uzel
- sedlo
- stabilní ohnisko
- nestabilní ohnisko
- centrum

1-D ekvilibrium

- „přitahuje“
- „odpuzuje“
- „rovnobežné“

2-D ekvilibrium

aneb jak se chová kousek vedle:

Porovnejme vlastní čísla matic A a $A + \Delta A$, ΔA malé

- vlastní čísla matice jsou spojitou funkcí prvků

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : |\Delta A_{ij}| < \delta \quad \forall ij \Rightarrow |\lambda_{A,k} - \lambda_{A+\Delta A,k}| < \varepsilon \quad \forall k$$

- stabilní v.č. zůstane stabilní a naopak
- ale pro vlastní čísla na mezi stability to neplatí
- Tedy pokud $x_e = 0$ je e. typu uzel, ohnisko nebo sedlo pro systém $\dot{x} = Ax$, pak má stejný typ i pro systém $\dot{x} = (A + \Delta A)x$
- uzel, ohnisko a sedlo jsou strukturálně stabilní

- To ale neplatí pro centrum $\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$
- perturbace Jordanova tvaru $\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$ vede na
- nestabilní ohnisko pokud $\mu > 0$ a na
- stabilní ohnisko pokud $\mu < 0$
- ať je μ jakkoli malé, ale nenulové
- sebemenší perturbace střed zničí, takže
- střed není **strukturálně stabilní**

To vede na pojem **hyperbolického ekvilibria**:

$x_e = 0$ je hyperbolické e. lineárního systému $\dot{x} = Ax$ jestliže A nemá žádné vlastní číslo na imaginární ose

- nenulové dvojnásobné v.č. se může stát komplexní dvojicí, takže (ne-)stabilní uzel může zůstat uzlem nebo se změnit na (ne-)stabilní ohnisko
- jedno nulové v.č. se může stát kladným nebo záporným což vede na uzel nebo sedlo podle znaménka toho druhém
- z dvojnásobného v.č. v nule může vzniknout každý tvar. Uvažte tyto možné perturbace Jordanova tvaru

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\mu^2 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -\mu^2 & \mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \mu & 1 \\ 0 & -\mu \end{bmatrix}$$

Hyperbolické ekvilibrium

Nechť autonomní systém 2. řádu

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 &= f_2(x_1, x_2)\end{aligned}$$

NL

má izolované e. $x_0 \in \mathbb{R}^2$. Pak $f_1(x_0) = f_2(x_0) = 0$ a přitom $\exists \delta > 0$ takové, že v kruhu $B(x_0, \delta)$ o poloměru δ se středem x_0 už není žádné další e. Nechť

$$A(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} (x_0) \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$$

je Jakobián f v x_0 (linearizace vektorového pole f v x_0). Pak linearizovaný systém

$$\dot{z} = A(x_0)z$$

L

má podobný fázový portrét, pokud A nemá vlastní čísla na imaginární ose, tj. pokud má hyperbolické ekvilibrium 0.

Věta: Hartman-Grobman

Pokud linearizace $A(x_0)$ nelineárního systému NL nemá
ryze imaginární v.č., pak existuje homeomorfismus
z okolí U bodu x_0 do \mathbb{R}^2

$$h: U \rightarrow \mathbb{R}^2$$

spojité zobrazení
se spojitou inverzí

které zobrazuje trajektorie systému NL na trajektorie L

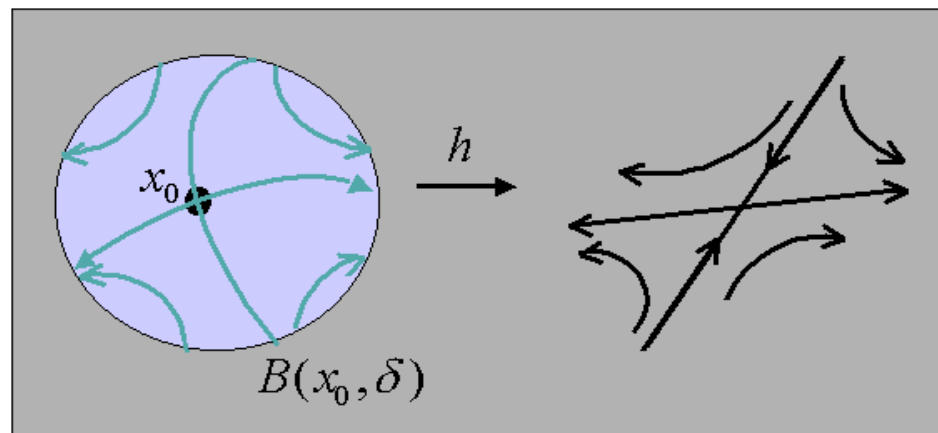
Zejména,

$$h(x_0) = 0$$

Navíc lze homeomorfismus vybrat tak, aby zachovával
parametrizaci časem.

Důkaz: vynechán

- homeomorfismus = one-to-one (vzájemně jednoznačné) spojitě zobrazení se spojitou inverzí
- HG: trajektorie NL lze spojitě deformovat na trajektorie L a to
- jediným zobrazením (v okolí)
- prakticky obtížné ho najít - konceptuální význam
- umožňuje posoudit kvalitativní dynamiku kolem x_0



Tok (Flow)

Stav v čase t systému [NL] začínajícího z x v čase 0 se nazývá tok a označuje $\phi_t(x)$.

HG: Jestliže $x \in U \subset \mathbb{R}^2$ a $\phi_t(x) \in U$, pak

$$h(\phi_t(x)) = e^{A(x_0)t} h(x)$$

tok linearizovaného systému

Pokud trajektorie [NL] zůstane uvnitř $B(x_0, \delta)$ a známe h , pak můžeme k výpočtu řešení použít levou stranu a

$$\phi_t(x) = h^{-1}(e^{A(x_0)t} h(x))$$

Kvalitativní vlastnosti nelineárního systému v okolí izolovaného ekvilibria jsou určeny jeho linearizací (pokud ta nemá vlastní číslo na imaginární ose)

Vlastní číslo na imaginární ose

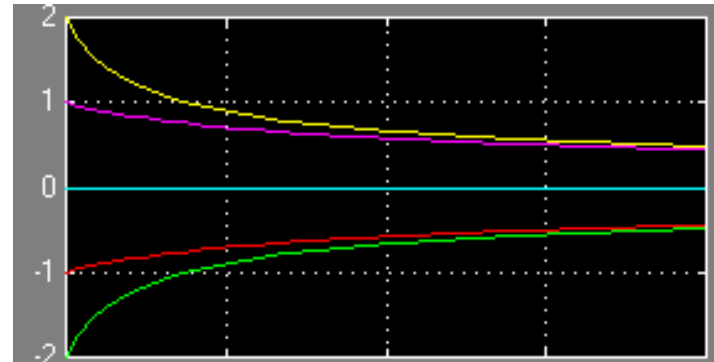
Když linearizace má ryze v. č. na imaginární ose pak

- to předpovídá kontinuum e. (NL ho může ale nemusí mít)
- kvalitativní chování se může měnit (závisí to na členech vyššího řádu)

Příklad 1

Systém $\dot{x} = -x^3$ má

- jedno izolované e. v bodu 0
- v bodu 0 má linearizaci $\dot{x} = 0$
- všechny poč. podmínky jdou k 0



```
» syms x0
» sol=dsolve('Dx=-x^3','x(0)=x0')
sol =
[ -1/(2*t+1/x0^2)^(1/2)]
[ 1/(2*t+1/x0^2)^(1/2)]
```

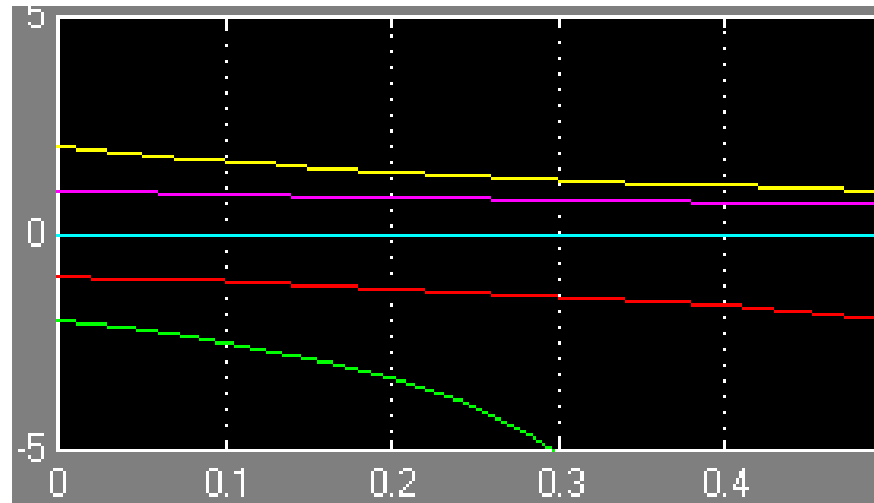
- odmocnina z hyperboly posunuté do $-1/x_0^2$
- znaménko podle znaménka počáteční podmínky

Vlastní číslo na imaginární ose / 2

Příklad 2

System $\dot{x} = -x^2$ má

- také jedno izolované e. v bodu 0
- v bodu 0 má stejnou linearizaci $\dot{x} = 0$
- ale jen kladné počáteční podmínky jdou k 0

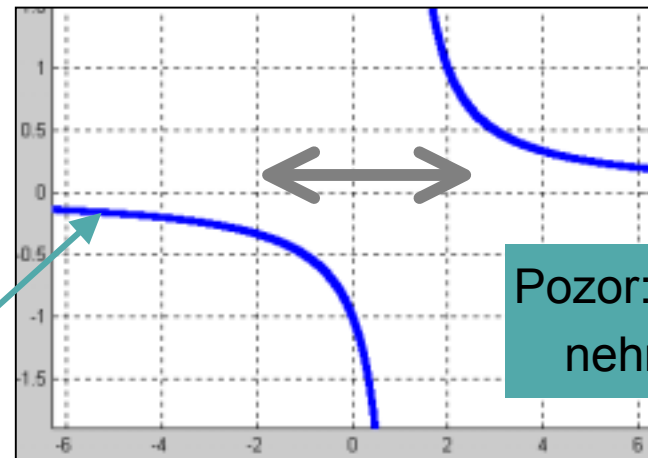


```
>> sol=dsolve('Dx=-x^2','x(0)=x0')
sol = 1/(t+1/x0)

>> sol=dsolve('Dx=-x^2','x(0)=-1')
sol = 1/(t-1)

>> ezplot(sol)
```

- hyperbola posunutá do $-1/x_0$
- t.j. pro $x_0 < 0$ druhá větev !!



Pozor: $\lim_{t \rightarrow \infty}$ nehraje roli

Shrnutí:

- linearizace předpovídá tok v okolí 0 podobný ohnisku, ale
- skutečný nelineární s. takový může (př. 1) ale nemusí (př. 2) být
- což závisí na členech vyššího řádu

Tedy, pokud má v.č. na imaginární ose, je linearizace k ničemu !

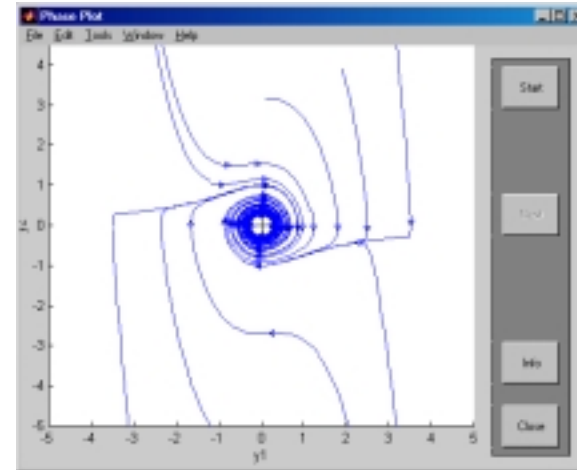
Vlastní číslo na imaginární ose / 4

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - \varepsilon x_1^2 x_2\end{aligned}$$

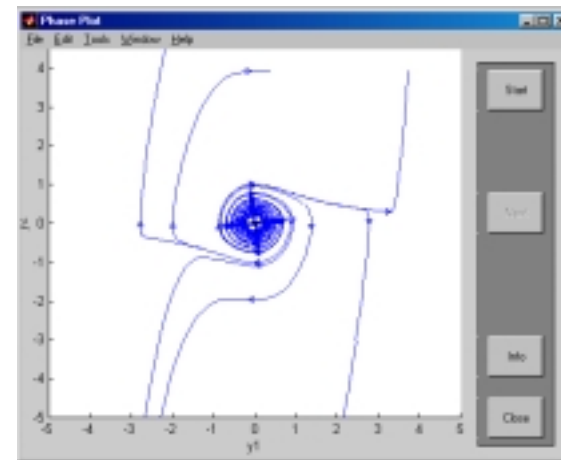
$$A(.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 - 2\varepsilon x_1 x_2 & -\varepsilon x_1^2 \end{bmatrix}$$

$$A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \text{ centrum}$$

```
>> syms x1 x2 e
>> jcb=jacobian([x2;-x1-e*x1^2*x2],[x1,x2])
jcb =
      0,      1
[-1-2*e*x1*x2, -e*x1^2]
>> A0=subs(jcb,[x1,x2],[0,0])
A0 =
      0,      1
     -1,      0
```



$\varepsilon > 0$



$\varepsilon < 0$

Čemu odpovídají vlastní podprostory linearizace?

- nelineární systém má také „nelineární vl. podprostory“ zvané „invariantní variety (manifold)“
 - definice později - něco jako zakřivené kusy podpr.
- ty jsou lokálně tečné k vl. poprostorům linearizace v bodu

DOPLNIT ?? Sp40

Definice:

Uzavřená orbita dynamického systému je stopa trajektorie netriviálního (= ne bodového) periodického řešení.

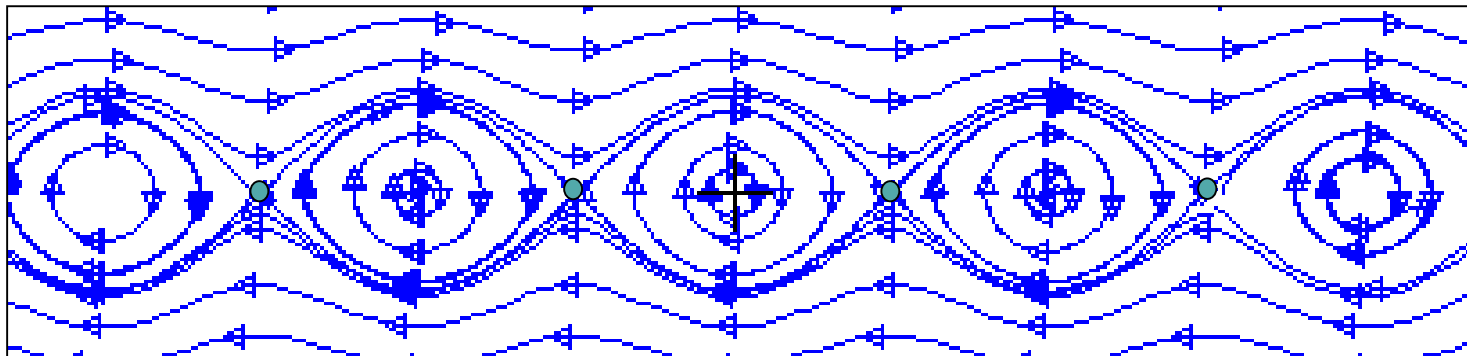
Tedy $\gamma \subset \mathbb{R}^2$ je uzavřená orbita jestliže to není rovnovážný bod a přitom existuje čas $T < \infty$ takový, že

$$\forall x \in \gamma : \phi_{nT}(x) = x \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Spojení sedlových bodů

Poznámka:

- trajektorii spojující řetěz sedlových bodů se neříká uzavřená orbita
- říká se jim **sedlová spojení**
- zhruba to jsou „uzavřené orbity s nekonečnou periodou“



Příklad systému s uzavřenou orbitou

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \alpha x_1 (\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \alpha x_1 (\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

- díky radiální symetrii můžeme zavést

$$\begin{aligned}r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)\end{aligned}$$

- což vede na rovnice

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \alpha r (\beta^2 - r^2) \\ \dot{\phi} &= -1\end{aligned}$$

Systém $\dot{r} = \alpha r(\beta^2 - r^2)$
 $\dot{\phi} = -1$

- má uzavřená orbita ve tvaru kružnice se středem v počátku a poloměrem $r = \beta$
- má také v počátku nestabilní e. typu zdroj
- protože má v počátku linearizaci

$$\begin{bmatrix} \alpha\beta^2 & 1 \\ -1 & \alpha\beta^2 \end{bmatrix}$$

s vlastními čísly

- Má řešení

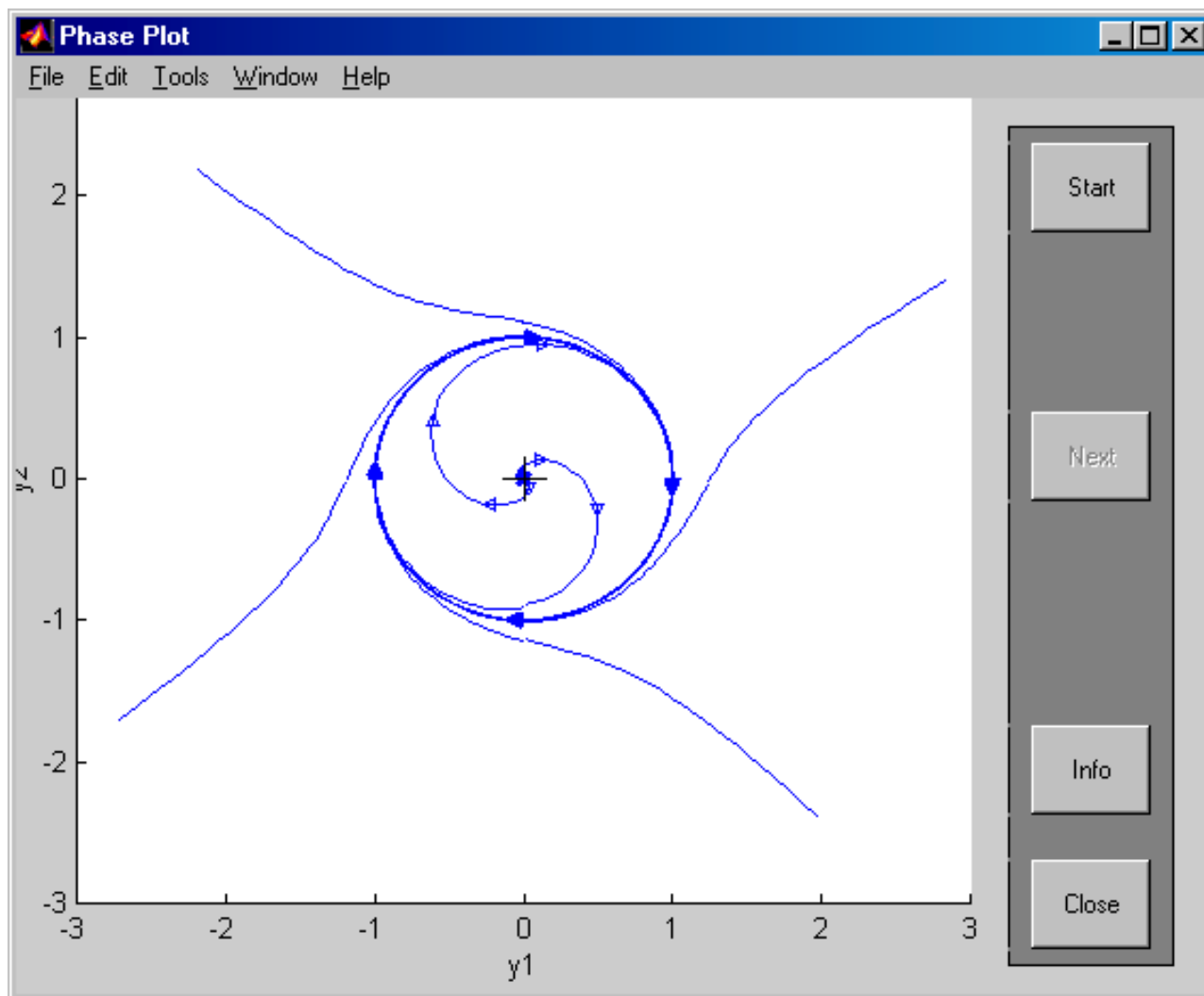
$$r(t) = \beta \left(1 + \left(\frac{\beta}{r(0)} - 1 \right) e^{-2\alpha\beta^2 t} \right)^{-1/2}$$

takže všechny nenulové p.p.konvergují k $r = \beta$

Obycně není snadné orbit najít -

potřebujeme podmínky existence (nebo neexistence)

Příklad / 3



Bendixonova věta o absenci uzavřených orbit:

Nechť D je jednoduše souvislá oblast v \mathbb{R}^2 taková že

$$\operatorname{div}(f) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$$

není identicky nulová v žádné podoblasti D a nemění v D znaménko. Pak D neobsahuje uzavřenou orbitu systému

jednoduše souvislá oblast =
můžeme spojitě kontrahovat na bod,
„jen jedna kulička bez děr“

Naznačíme důkaz

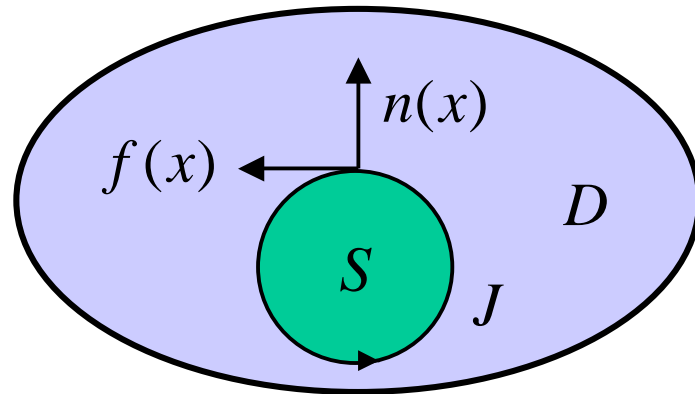
sporem:

- Nechť J je uzavřená orbita systému. Pak $f(x)$ je jeho tečna.
- Nechť $n(x)$ je jednotková normál směrem ven.
- Pak $f(x).n(x) = 0$
- Ale Gaussův teorém o divergenci říká (pomiňme požadavek spojitosti f)

$$\int_J f(x).n(x)dl = 0 = \iint_S \operatorname{div}(f) dx dy$$

- Přitom ale $\operatorname{div} f$ není nulová ani nemění znaménko v J

spor !



Linearizace systému

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + x_1 x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_1^2 x_2\end{aligned}$$

má vlastní čísla $\pm j$, ale nelineární systém má

$$\operatorname{div} f = x_1^2 + x_2^2 > 0 \quad \text{pro } x \neq 0$$

která není identicky nulová ani nemění znaménko.

➡ systém nemá nikde uzavřené orbity

```
» A=jacobian([x2+x1*x2^2;-x1+x1^2*x2],[x1,x2])
A =
      x2^2,   1+2*x1*x2
[ -1+2*x1*x2,   x1^2]
» A0=subs(A,[x1,x2],[0,0])
A0 =
      0      1
     -1      0
```

Příklad - Duffingova rovnice

Nebuzená Duffingova rovnice

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} - x + x^3 = 0$$

se stavovým popisem

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^3 - \delta x_2\end{aligned}$$

má

$$\operatorname{div} f = -\delta$$

Když $\delta > 0$, pak nemá žádné uzavřené orbity.

```
» syms delta
» jacobian([x2;-x1+x1^3-delta*x2],[x1,x2])
ans =
[ 0, 1]
[-1+3*x1^2, -delta]
```


Je důležité, aby oblast D ve Větě byla jednoduše souvislá!

Systém (viz dříve)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + \alpha x_1 (\beta^2 - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \alpha x_1 (\beta^2 - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

má

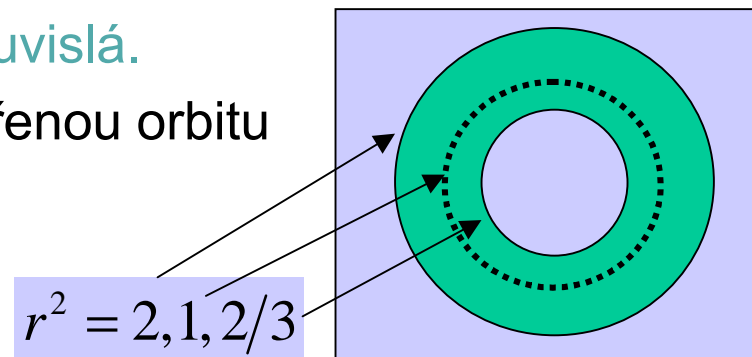
$$\operatorname{div}(f) = 2\alpha\beta^2 - 4\alpha(x_1^2 + x_2^2)$$

která je záporná na oblasti

$$D = \left\{ (x_1, x_2) : \frac{2}{3}\beta^2 \leq x_1^2 + x_2^2 \leq 2\beta^2 \right\}$$

Tato oblast ale není **jednoduše souvislá**.

A také systém v ní má jednu uzavřenou orbitu
(viz)



Definice:

- Bod $z \in \mathbb{R}^2$ se nazývá ω limitní bod trajektorie $\phi_t(x)$ systému NL jestliže existuje posloupnost časů $t_n, n = 1, \dots, \infty$, $n \uparrow \infty \Rightarrow t_n \uparrow \infty$ pro níž

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_{t_n}(x) = z$$

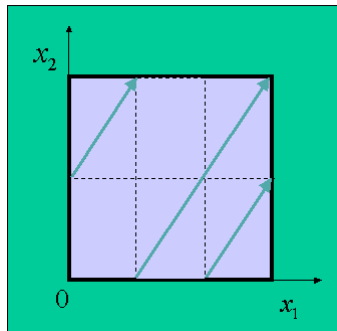
- množina všech limitních bodů trajektorie se nazývá ω limitní množina této trajektorie
- značím ji $\omega(x)$

- Obdobně pro systém řádu n
- Podobně se definuje α **limitní množina** pro $t_n \rightarrow -\infty$
Tedy prvním a posledním písmenem řecké abecedy označujeme limity v $-\infty$ a $+\infty$.
- $\alpha(x), \omega(x)$ označuje limitní množiny trajektorií procházejících bodem x v čase $t = 0$.
- také říkáme že $\alpha(x), \omega(x)$ jsou limitní množiny bodu x
- je-li x_0 bod e., pak $\alpha(x_0) = \omega(x_0) = x_0$
- je-li $x_0 \in \gamma$ bod uzavřené orbity, pak $\alpha(x_0) = \omega(x_0) = \gamma$
- limitní množiny mohou být **komplikované** a **neintuitivní**
- pokud $\alpha(x) = \omega(x)$, pak mluvíme o **limitní množině**

Příklad: **Dynamika na toru** (daughtnut, duše pneu)

- torus můžeme zkonstruovat z jednotkového čtverce (přilepením posunutých protilehlých stran)
- trajektorie se lépe sledují na čtverci
- představme si konstantní vektorové pole
- je-li poměr p/q racionální, je ω limitní množina trajektorie ta trajektorie samotná
- je-li poměr p/q iracionální, je ω limitní množina trajektorie celý torus

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= p \\ \dot{x}_2 &= q\end{aligned}$$



DEFINICE

Limitní cyklus je uzavřená orbita χ , pro kterou existuje aspoň jedno x neležící na χ takové, že χ je α -limitní nebo ω -limitní množinou x .

Tj. $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_t(x) = z$ nebo $\lim_{n \rightarrow -\infty} \phi_t(x) = z$

- každý limitní cyklus je uzavřenou orbitou, ale ne naopak.
- Např. lineární systém s dvojicí nenulových ryze imaginárních v.č. (typ centrum) má uzavřené orbity, ale nejsou to limitní cykly.
- Bendixonova věta to bohužel nerozezná. Platí pro uzavřené orbity, ne limitní cykly.

Věta: Poincaré-Bendixon

DEF - Pozitivně (negativně) invariantní oblast

Oblast $M \subset \mathbb{R}^2$ je pozitivně (negativně) invariantní pro tok $\phi_t(x)$ jestliže $\forall x \in M : \phi_t(x) \in M \quad \forall t \geq 0$ ($t \leq 0$)

- neformálně: oblast je pozitivně (negativně) invariantní když trajektorie v ní začínající v ní zůstane po celou budoucnost (minulost).
- někdy se říká jen „invariantní“ a myslí se „pozitivně invariantní“

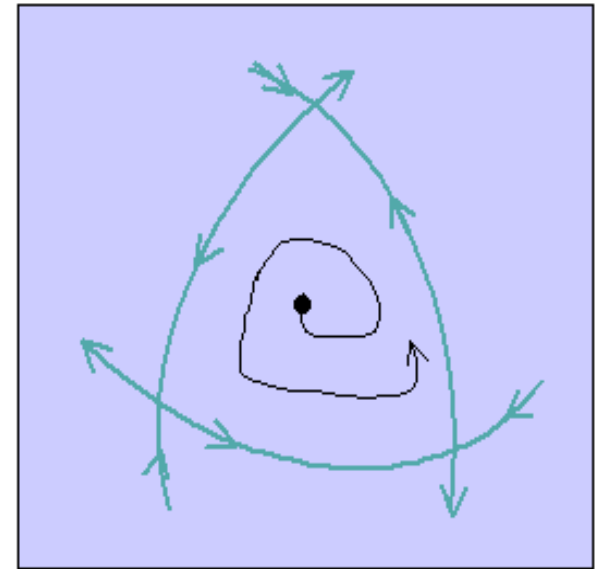
VĚTA: Poincaré-Bendixon

Uvažme spojitý systém druhého řádu a necht' M je kompaktní pozitivně i. množina pro tok $\phi_t(x)$. Necht' p leží v M . Jestliže M neobsahuje ekvilibrium, pak $\omega(p)$ je uzavřená orbita.

Důkaz ?

- není těžký (S,p.45)
- Založen na tomto faktu:
V rovině, pokud ω limitní množina neobsahuje ekvilibrium, pak je to uzavřená orbita.

- Je těžké dokázat, že oblast je invariantní. Není to ale těžké graficky ověřit (zkoumáním směru trajektorií na hranici)
- Z předchozího plyne, že každá kompaktní neprázdná pozitivně invariantní množina K obsahuje ekvilibrium nebo uzavřenou orbitu.
- Jsou jediné ω limitní množiny v K e. a uzavřené orbity?
- Ne ještě to mohou být sjednocení trajektorií spojujících e., tedy sjednoc. konečného počtu sedlových spojení.
- Uvnitř každé uzavřené orbity je e.
- Pro větší řád to takhle hezké není.



Co je na rovině tak zvláštního ???

To, že ji uzavřená křivka rozděluje na dvě části: vnitřní a vnější !!!

DEF

Nechť J je jednoduchá, uzavřená, pozitivně orientovaná křivka uzavírající oblast D . Pak **index** D vzhledem k f (f nenulové na J) je definován jako

$$I_f(D) = \frac{1}{2\pi} \oint_J d\theta_f(x_1, x_2),$$

kde

$$\theta_f(x_1, x_2) = \tan^{-1} \frac{f_1}{f_2}$$

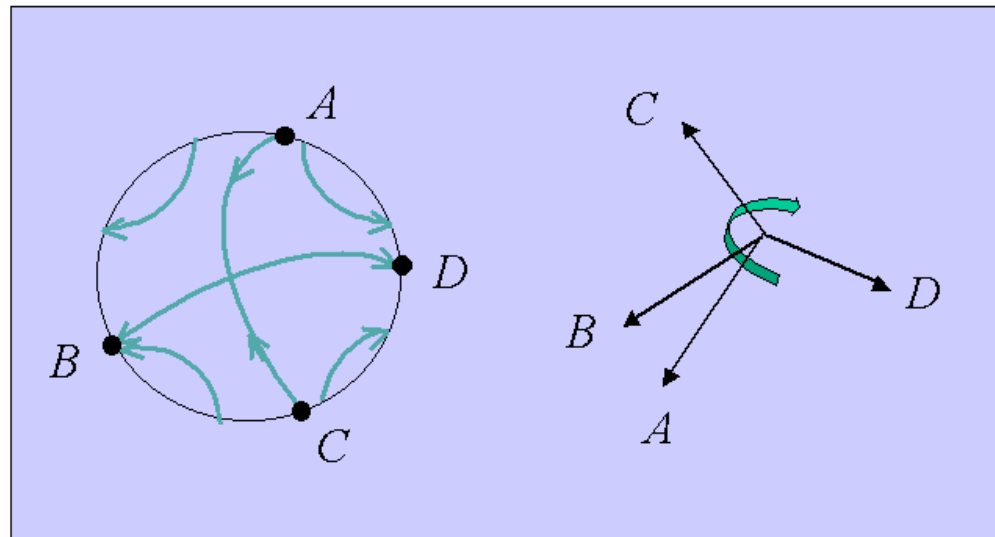
jednoduchou
uzavřenou
křivku jde spojitě
zkrátit na bod

Tedy

$$I_f(D) = \frac{1}{2\pi} \oint_J \frac{f_1 df_2 - f_2 df_1}{f_1^2 + f_2^2}$$

- index je celé číslo
- je to změna úhlu f od osy x_1 při oběhu J dělená 2π
- pokud uvnitř D je jediné ekvilibrium x_0 , pak $I_f(D)$ říkáme index bodu e. x_0 a značíme $I_f(x_0)$
- index centra, ohniska a uzlu je 1
- index sedla je -1
- pokud linearizace v bodu e. nemá v.č. v počátku, můžeme index poznat z těch v.č. a je buď 1 nebo -1.
- Když D obsahuje více e., pak
$$I_f(D) = \sum I_f(x_i)$$

- integrál se nikdy nepočítá, ale uhodne graficky
- stačí sledovat rotace vektorového pole f při průběhu kolem křivky J
- Např. grafický „důkaz“, že index sedla je -1 vypadá takhle



Systém

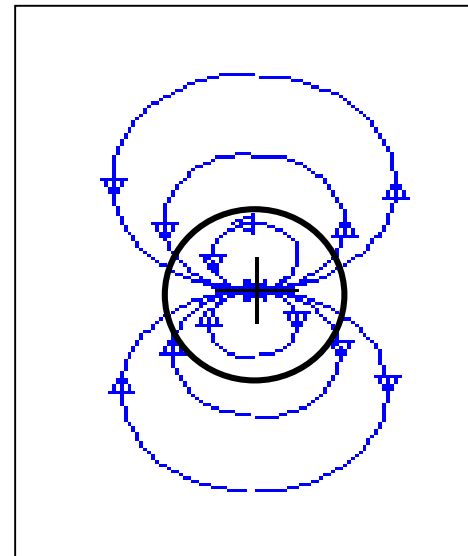
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1^2 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 &= 2x_1x_2\end{aligned}$$

má v počátku ekvilíbrium s indexem 2.

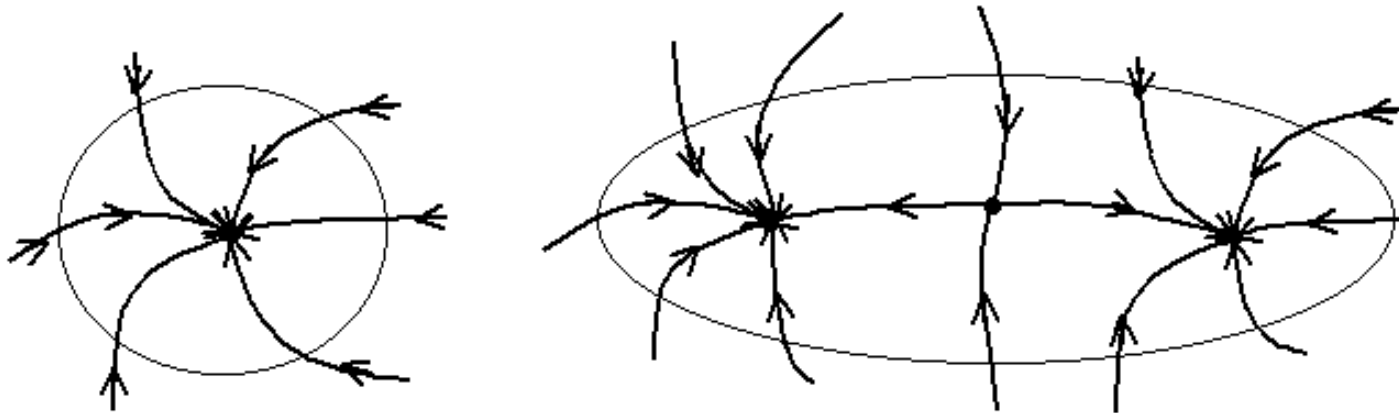
Jeho linearizace tam má dvojnásobné nulové v.č.

neboť to je nulová matice

```
» syms x1 x2
» jacobian([x1^2-x2^2;2*x1*x2],[x1; x2])
ans =
[ 2*x1, -2*x2]
[ 2*x2,  2*x1]
```



- Pokud má oblast nenulový index, pak obashuje aspoň jedno e.
- Pokud je D uzavřeno uzavřenou orbitou, má index 1 (bez ohledu na orientaci orbity)
- Když všude na hranici D pole f směřuje dovnitř, má D index 1. Např.:





Henri Poincaré
1854 - 1912

■ Životopis

- termín zavedl H. Poincaré, když zkoumal větvení e. pro systém

$$\dot{x} = f_{\mu}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in \mathbb{R}^k$$

- ukážeme si teď základy teorie pro $n = 2$
- ekvilibria splňují

$$f_{\mu}(x) = 0$$

- při změně parametru μ je řešení $x^*(\mu)$ hladkou funkcí μ pokud Jakobián

$$D_x f_{\mu}(x^*(\mu)) = \frac{\partial f_{\mu}}{\partial x}(x^*(\mu))$$

nemá nulové vlastní číslo

dle věty o implicitních funkcích

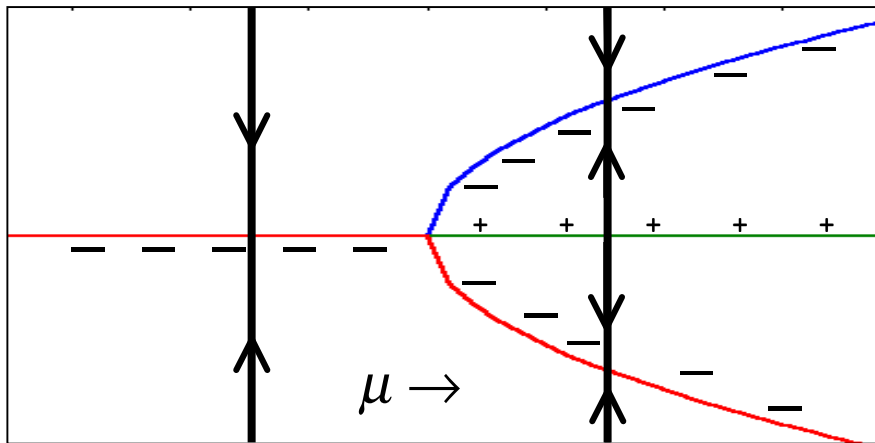
- graf každého $x^*(\mu)$ je větev e. systému
- v bodě $(x_0 = x^*(\mu_0), \mu_0)$, kde má Jakobián nulové v.č. se může několik větví spojit
- pak (x_0, μ_0) říkáme bod bifurkace

Příklad 1

Vezměme například $f_\mu(x) = \mu x - x^3$, $x, \mu \in \mathbb{R}$

kde $D_x f_\mu = \mu - 3x^2$ a jediný bifurkační bod je $(0,0)$.

- systém má e. $x_0 = 0$, které je stabilní pro $\mu \leq 0$ a nestabilní pro $\mu > 0$
- pro $\mu = 0$ dojde k bifurkaci a přibudou 2 další (stabilní) e. $\pm\sqrt{\mu}$



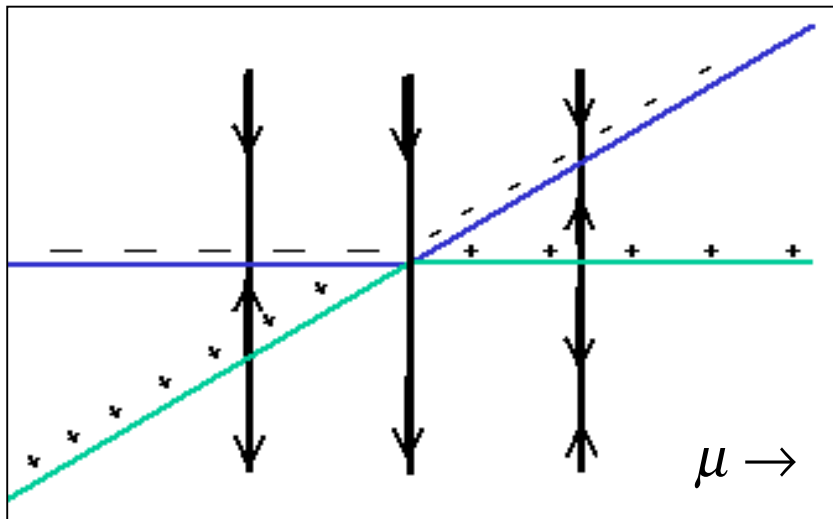
pitchfork
= vidle

Příklad 2

- Bifurkace může nastat, jen když má jakobián nulové v.č. Ale nemusí tam nastat vždy!

Například systém $f_\mu(x) = \mu x - x^2$, $x, \mu \in \mathbb{R}$

má e. 0 a jakobián $D_x f_\mu = \mu - 2x$ je v (0,0) nulový, ale k bifurkaci nedojde. Dojde k tzv. **transkritické situaci** neboli **výměně stability**



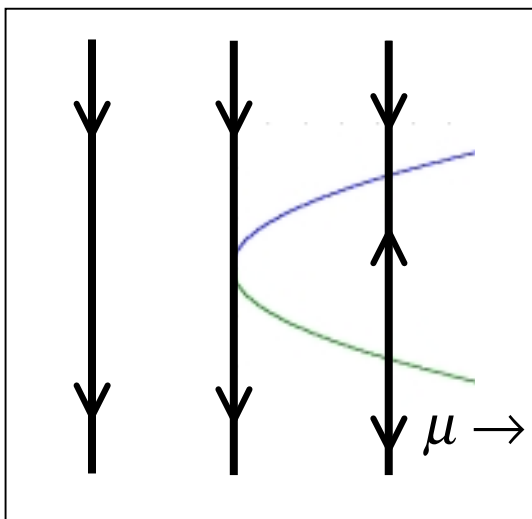
transkritická situace,
= výměna stability

Příklad 3

- v jistém smyslu kanonickým stavebním blokem bifurkací je **sedlová bifurkace** popsaná rovnicí

$$\dot{x} = \mu - x^2$$

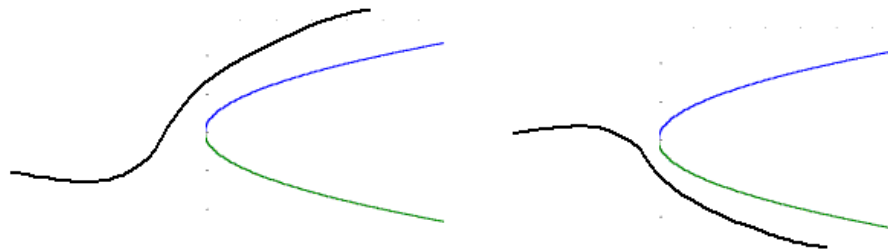
- pro $\mu > 0$ má dvě e., (stabilní a nestabilní)
- ty se pro $\mu = 0$ **spojí** a pro $\mu < 0$ **zmizí**



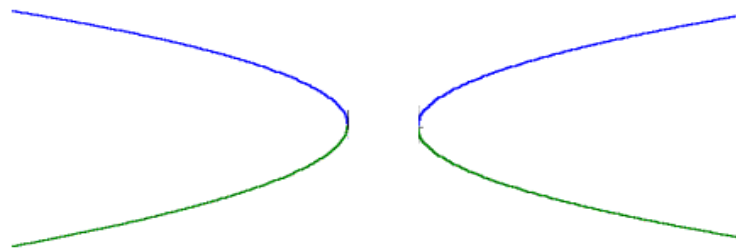
fold,
= ohyb

Příklad 3

- přidáme-li aditivní perturbaci na pravou stranu příslušné rovnice, pak se
- vidle změní na nebo na



- a transkritická na



$$n = 2$$

- bifurkace se mohou objevit když v.č. linearizace v e. přecházejí (jako funkce parametru μ) imaginární osu
- tj. nejenom přes 0, ale i přes $j\omega$
- ohnutí: objeví/zmizí pár sedlo-zdroj
- vidle: zdroj \rightarrow 2 zdroje+sedlo, nebo
sedlo \rightarrow 2 sedla+zdroj
- přechod přes bifurkaci zachovává index

Příklad pro $n = 2$

Bifurkace při přechodu přes $j\omega$:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1(\mu - x_1^2 - x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2(\mu - x_1^2 - x_2^2)\end{aligned}$$

má v (0,0) linearizaci $\begin{bmatrix} \mu & 1 \\ -1 & \mu \end{bmatrix}$ s v.č. $\mu \pm j$

■ jak μ prochází přes nulu, e. se mění stab. zdroj \rightarrow nestab. z.

V polárních souřadnicích

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} &= 1\end{aligned}$$

■ tj. e. je pro $\mu > 0$ obklopeno uzavřenou orbitou s pol. $\sqrt{\mu}$

■ tedy nestabilní limitní cyklus + stabilní zdroj \rightarrow nestabilní zdroj

■ tzv. superkritická Hopfova bifurkace

Zajímavý příklad

Uvažme zajímavý systém

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 \sin \mu - x_2 \cos \mu + (1 - x_1^2 - x_2^2)(x_1 \cos \mu - x_2 \sin \mu) \\ \dot{x}_2 &= x_1 \cos \mu - x_2 \sin \mu + (1 - x_1^2 - x_2^2)(x_1 \sin \mu + x_2 \cos \mu)\end{aligned}$$

nebo

$$\begin{aligned}\dot{r} &= r \left[(1 - r^2)^2 \cos \mu - \sin \mu \right] \\ \dot{\theta} &= (1 - r^2)^2 \sin \mu + \cos \mu\end{aligned}$$

- pro $\mu < 0$ má jedno nestabilní e.
- pro $\mu = 0$ se, úžasně, objeví uzavřená orbita s poloměrem 1
- pro $\mu > 0$ se roztrhne na 2 orbity, stabilní s poloměrem $\sqrt{1 - \sqrt{\tan \mu}} < 1$ a nestabilní s pol. $\sqrt{1 + \sqrt{\tan \mu}} > 1$
- stab. orbita+nestab.orbita se spojí/rozpojí

blue sky catastrophe = ktastorfa z čistého nebe

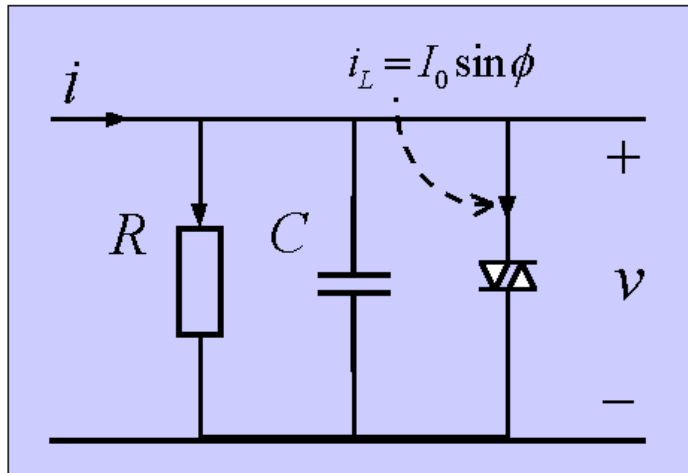
Zajímavý příklad / 2

- ve $\mu = \pi/4$ nastane subkritická Hopfova bifurkace
stabilní orbita + nestabilní e. \leftrightarrow stabilní e. v počátku
pro $\mu > \pi/4$
- pro $\mu = \pi/2$ zmizí nestabilní uzavřená orbita,
neboť má nekonečný poloměr

Na závěr: aplikace probraných metod

- Na závěr ukážeme aplikaci metod vyložených v této kapitole při studiu bifurkací v Josphsonově přechodu.
- Stejně rovnice má i tlumené kyvadlo a také
- synchronní elektrický generátor připojený na (nekonečnou) rozvodnou síť

Josephsonův přechod



Zjednodušený model:

- RLC obvod s
- lineárním rezistorem (prosakování přes přechod)

- lineární kapacitance (model samotného přechodu)
- nelineární induktance (mod. tunelový proud skrz)
- ϕ je tok induktorem (v kvantovém modelu fáze vlnové funkce na přechodu)
- tunelující proud $i_L = I_0 \sin \phi$
- dle Josephsona je napětí na přechodu

Planck. konst./ 2π

$$v = \frac{\hbar}{2e} \frac{\partial \phi}{\partial t}$$

náboj elektronu

Rovnice obvodu je

$$i = I_0 \sin \phi + \frac{\hbar}{2eR} \dot{\phi} + \frac{\hbar C}{2e} \ddot{\phi}$$

kde i je vstupní proud - předpokládáme konstantní.

Označíme-li

$$\alpha = \frac{1}{RC}, \beta = \frac{2eI_0}{\hbar C}, \gamma = \frac{2ei}{\hbar C}$$

pak

$$\ddot{\phi} + \alpha \dot{\phi} + \beta \sin \phi = \gamma$$

Konečně pro $x_1 = \phi$, $x_2 = \dot{\phi}$ dostaneme

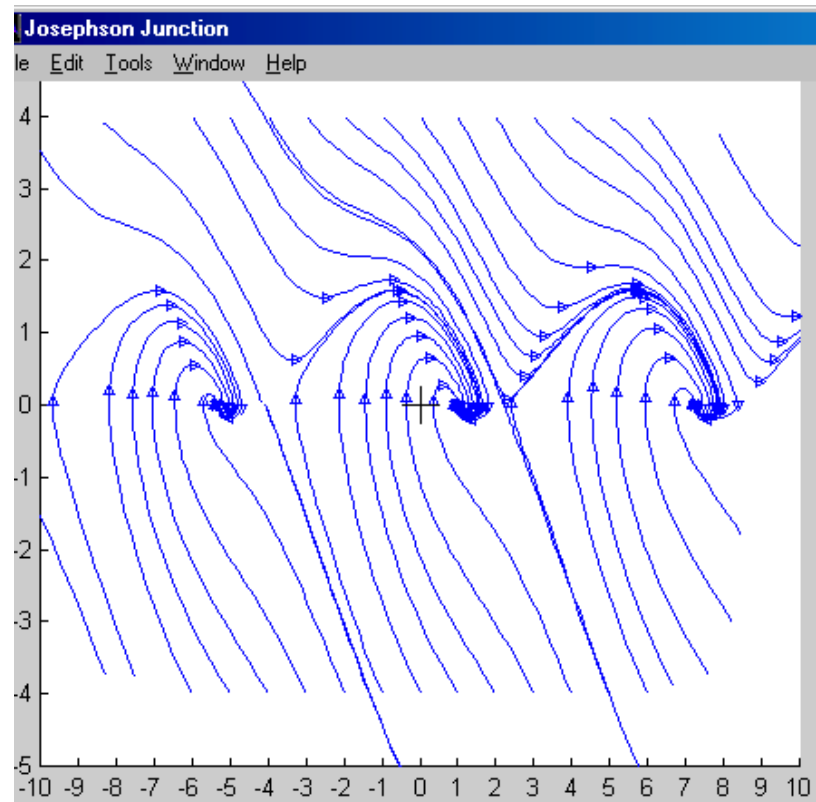
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\alpha x_2 - \beta \sin(x_1) + \gamma$$

Budeme studovat fázové portréty pro pevný přechod α, β konstantní a proměnné buzení γ . Budeme sledovat průměrné napětí na přechodu, tj. průměrnou hodnotu $v = \hbar \dot{\phi} / 2e$

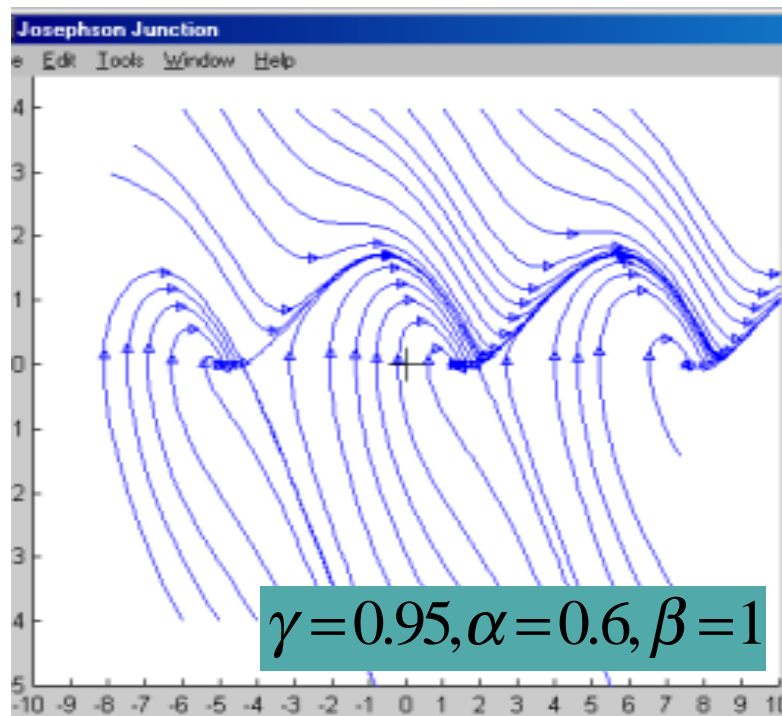
Pro malé buzení $\gamma=0.8, \alpha=0.6, \beta=1$

- 2 druhy e.: $x_2=0$
- stab. ohnisko v $x_1 = \sin^{-1}(\frac{\gamma}{\beta})$
- sedlo v $x_1 = \pi - \sin^{-1}(\frac{\gamma}{\beta})$
- opakuje se s periodou 2π
- stabilní varieta sedla má tvar valchy
- supravodivá oblast, neboť
- nenulový budící proud způsobí nulový průměr napětí na přechodu (úměrný x_2)
- platí pro $\gamma < \beta$



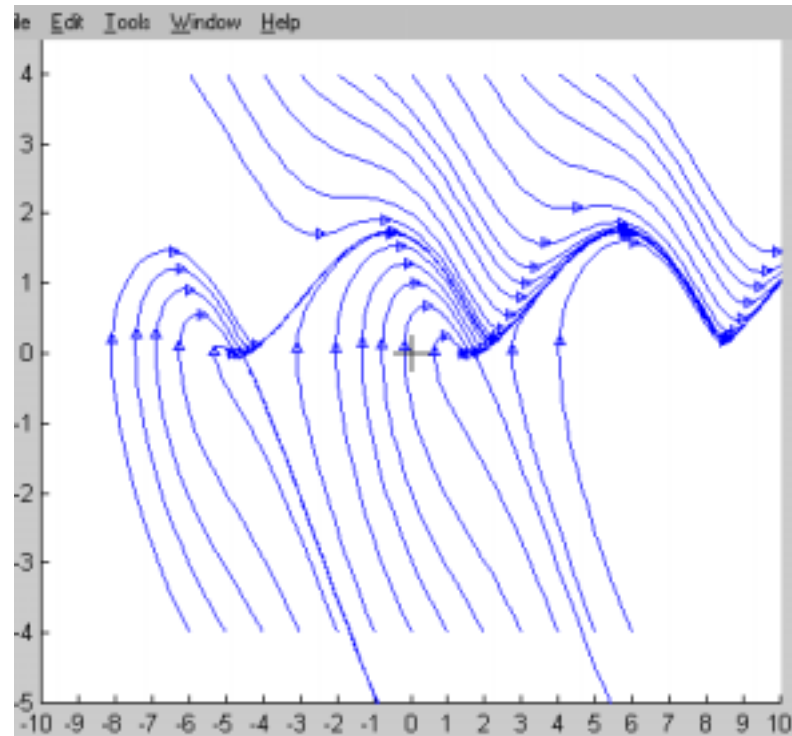
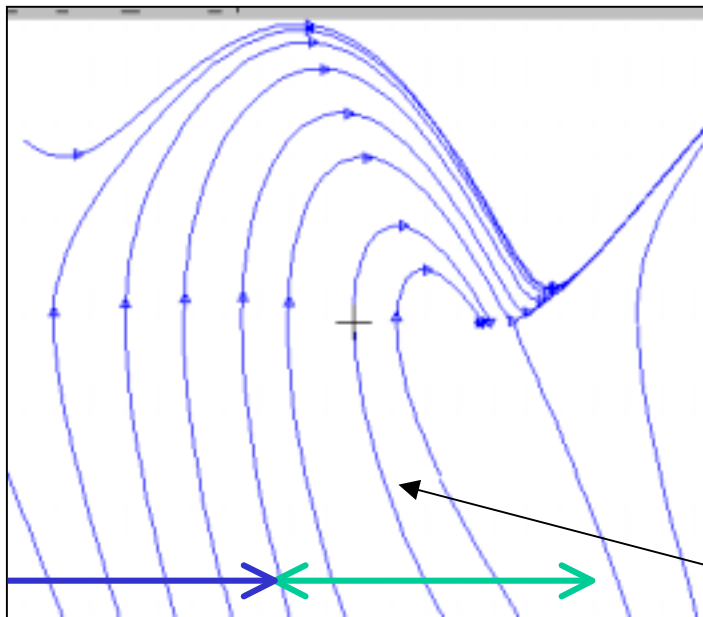
Sedlové spojení

- pro rostoucí $\gamma \rightarrow \beta$ se průhyby ve valše (stabilní varietě sedla) blíží následujícímu sedlu.
- pro $\gamma = \gamma_c(\alpha, \beta) < \beta$ se jich právě dotknou
- vzniknou sedlová spojení
- a kladné kloboučky (oblast pod nimi je přitahována ohnisky, nad nimi sedly
- stále existují dva druhy e. neboť $\gamma < \beta$
- nakresleno na válci by sedla splývala
- ω limitní množina horní části je sedlové spojení
- je to „u. o.“ s nek. časem (dosáhnout sedla trvá nek.dlouho)
- tedy tam jsou prům. hodnoty napětí na přechodu = 0



Limitní cyklus + ohnisko

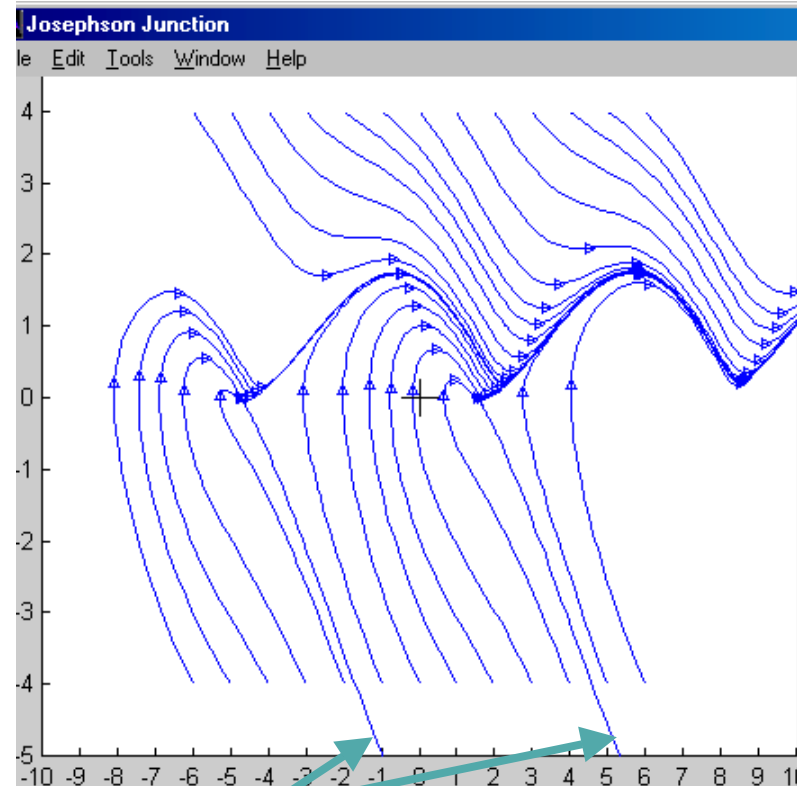
- pro $\beta > \gamma > \gamma_c$ se sedlové spojení rozpadne na limitní cyklus
- cyklus je dobře vidět na válci
- i některé pp. dole přitahuje LC
- pro ně už není průměrné v nulové. Zvětšeno:



klobouček

Bifurkace sedlo-zdorj

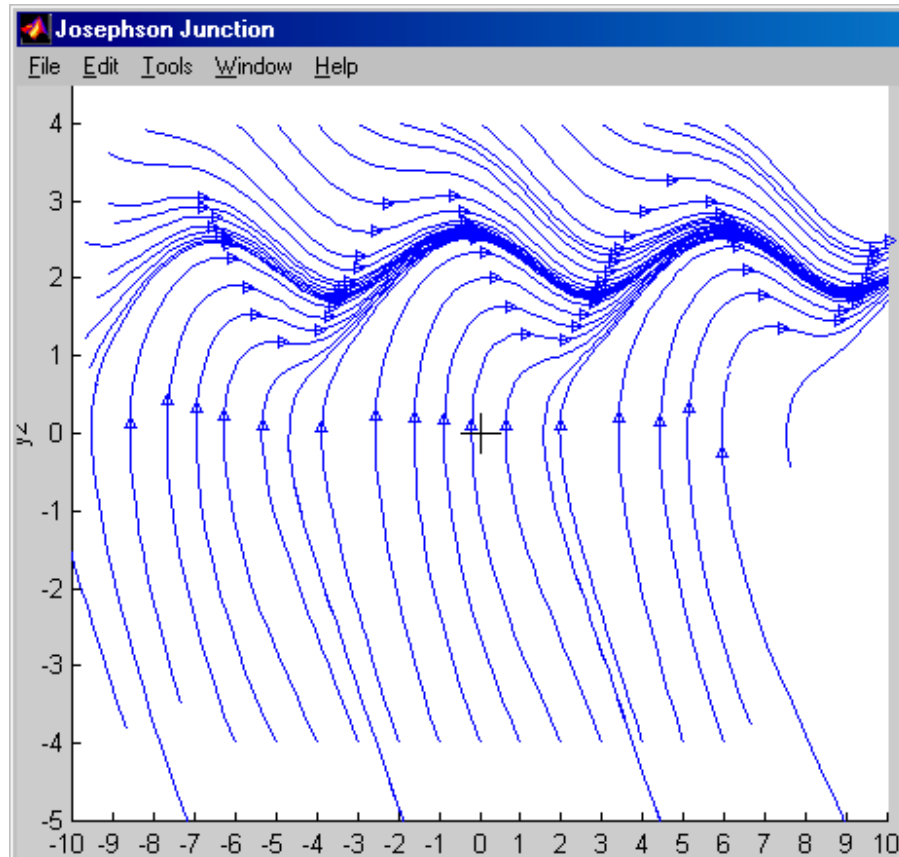
- sedlo a ohnisko se setkají pro $\gamma = \beta$
- klobouček se smrskne na (polo)-křivku
- všechny ostatní pp přitahuje LC
- průměrná hodnota napětí je nenulová



jediné vedou do e.

Pouze limitní cyklus

- pro $\gamma > \beta$ má systém pouze limitní cyklus a žádné e.
- všechny pp. jsou přitahovány limitním cyklem
- průměrné napětí je nenulové
- roste s γ
- je to resistivní oblast Josephsonova přechodu



■ S p. 60 ?

Degenerovaná Van der Polova rovnice

Představme si RC obvod

- s lineární kapacitou

$$C=1F$$

- a kubickým rezistorem

$$v=i-i^3$$

- jeho rovnice jsou

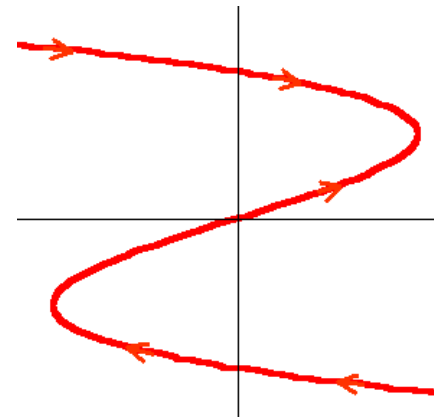
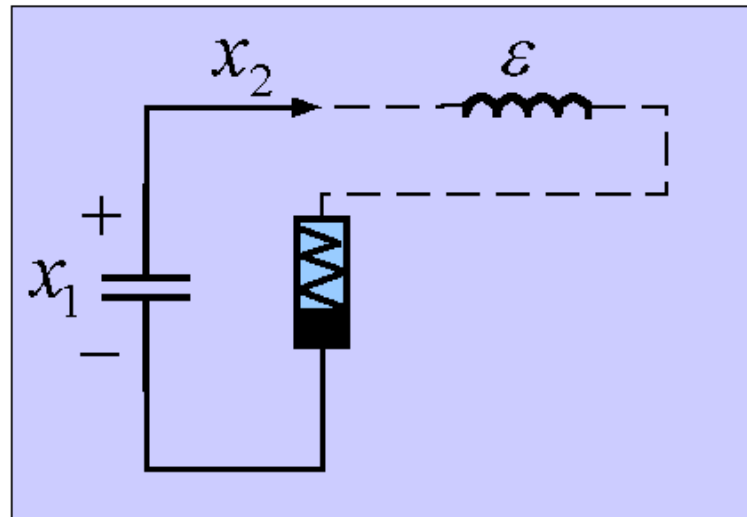
$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$0 = -x_1 + x_2 - x_2^3$$

algebraická rovnice

- algebraická rovnice omezuje x_1, x_2 , aby leželi na křivce

```
syms x1 x2
» ezplot('-x1+x2-x2^3=0')
```



- podle první rovnice x_1 roste když $x_2 > 0$

- ale co v bodech

$$x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad ?$$

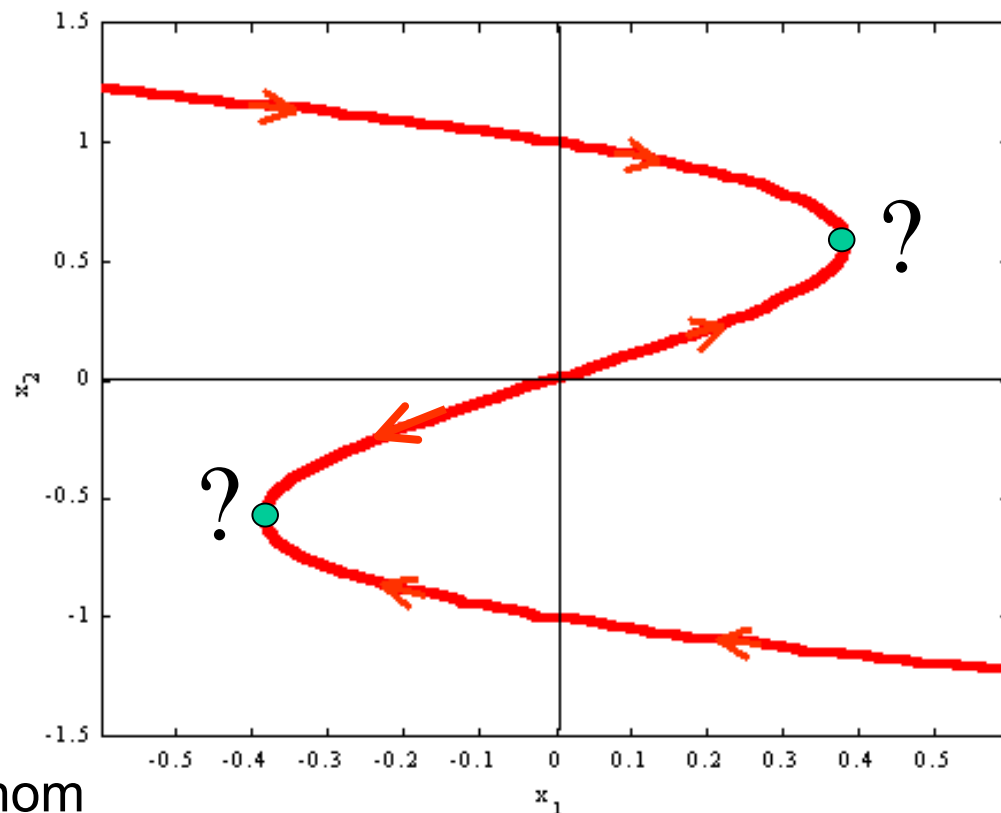
- nezdá se v nich možné integrovat diferenciální rovnici a přitom splnit algebraickou

- říká se jim

body slepé uličky

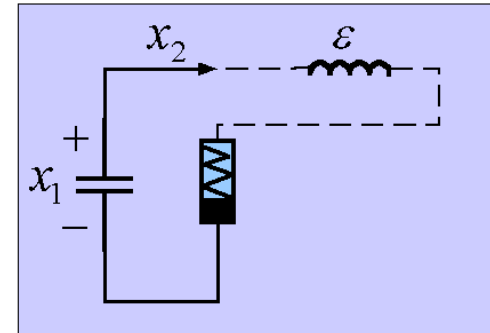
- abychom situaci vyřešili a také abychom mohli modelovat start systém z pp. nekompatibilních s omezením

popis systému regularizujeme



- regularizace = zahrneme jisté parazitické elementy zanedbané v původním modelu
- zde konkrétně přidáme indukčnost drátů v RC modelu zahrnutím induktoru
- dynamika výsledného RLC obvodu je

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \varepsilon \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2 - x_2^3\end{aligned}$$



- kde $\varepsilon > 0$ je malý parametr modelující parazitní indukčnost
- tento systém je dobře definován na celé rovině
- přitom pro malé ε vně malé oblasti, kde $-x_1 + x_2 - x_2^3$ je řádu ε , platí $\dot{x}_2 \gg \dot{x}_1$ takže trajektorie jsou téměř vertikální

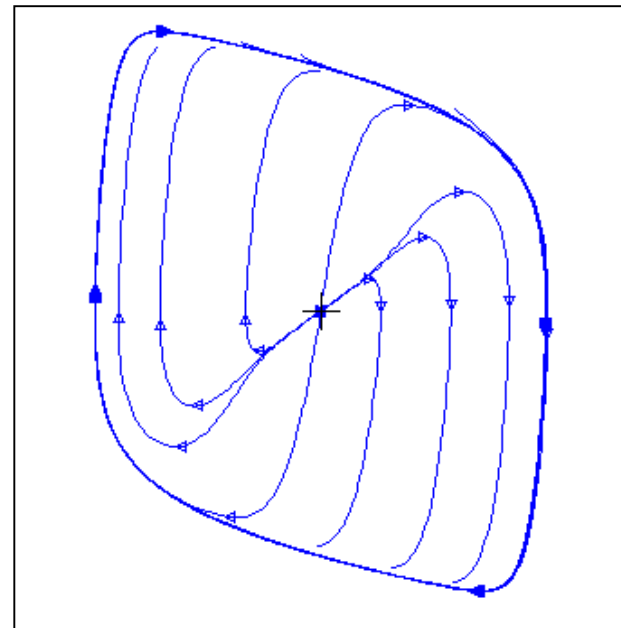
Regularizovaný systém

- má nestabilní e. v počátku
- limitní cyklus
- Ic se skládá ze dvou pomalých segmentů blízkých křivce
$$x_1 = x_2 - x_2^3$$
- a ze dvou rychlých téměř vertikálních segmentů blízko

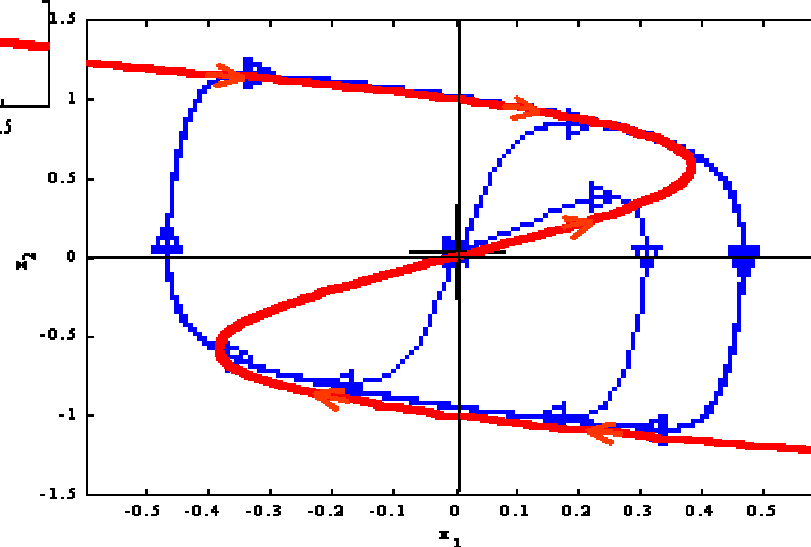
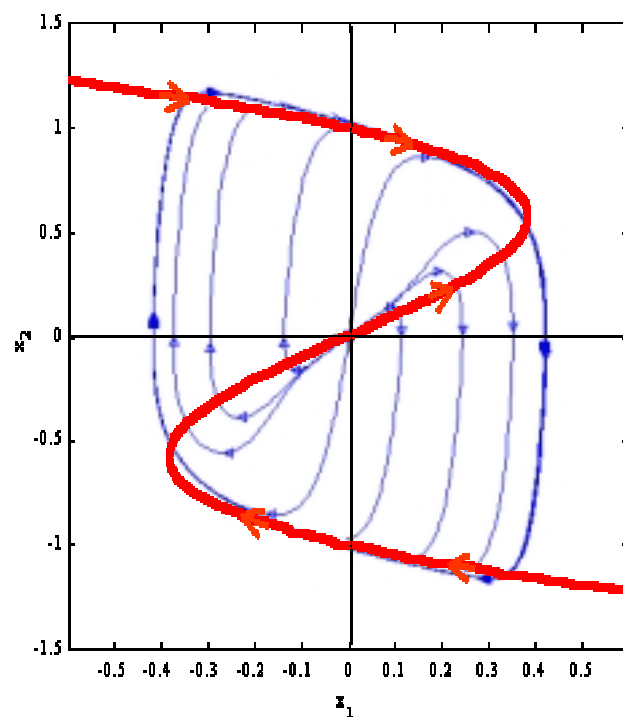
$$x_2 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

- původní systém dostaneme jako limitu regularizovaného pro $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\varepsilon = 0.1$$

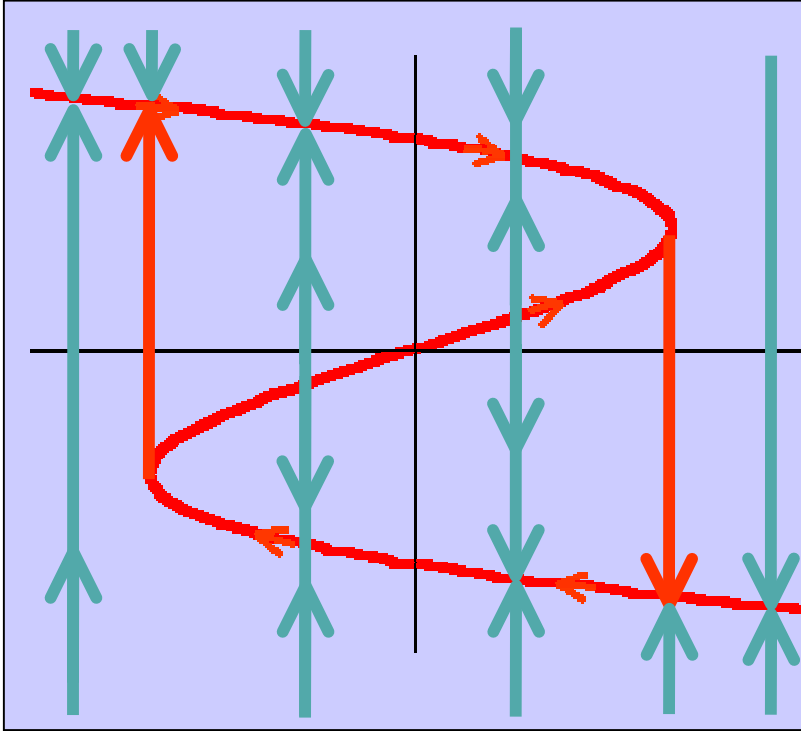


■ k



Degenerovaný systém

Degenerovaný systém má fázový portrét:

- trajektorie přeskočí z bodu slepé uličky nespojitě na druhou větev
 - tak vznikne limitní cyklus s dvěma skoky
 - říká se tomu relaxační oscilace
 - b.s.u se říká body obratu
 - pp. neležící na křivce se tam dostanou za nulový čas po svislé trajektorii
- 
- The diagram shows a phase portrait on a light blue background. A horizontal black line represents the zero line. Several vertical teal lines with arrows indicate the flow of the system. A red trajectory forms a limit cycle with two jumps. The trajectory moves horizontally from left to right at the top, then jumps down to the bottom horizontal segment, moves horizontally from right to left, and jumps back up to the top horizontal segment. The vertical segments of the cycle are marked with orange arrows indicating the direction of flow.
- v počátku je nestabilní e., všechny ostatní pp. konvergují k relaxačním oscilacím
 - vnitřní část křivky je nestabilní, přeskoky na vnější
 - tak vzniká **hystereze** (charakterizovaná přeskoky a nesymetrií)

Diskrétní systém druhého řádu je popsán rovnicí

$$x_{n+1} = G(x_n)$$

kde $G: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ je hladké zobrazení, $x \in \mathbb{R}^2, n \in \mathbb{Z}^2$

Tok diskrétního systému

Rozhodnout

- def.jako $\Phi_n(x) = G \circ \dots \circ G(x)$, kompozice
- často se značí jen $G^{[n]}$ nebo G^n , kde n není mocnina
- pokud G je invertovatelné, lze tok def. i pro $n \leq 0$
- budeme předpokládat, že G je invertovatelné

- kvalitativní chování je podobné spojitým systémům (zdroje, sedla, ohniska, centra)
- trajektorie jsou posloupnosti (ne křivky)
- trajektorie jsou reflexivní ??? pokud

Ekvilibrium

- rovnovážný bod \bar{x} diskrétního systému splňuje

$$\bar{x} = G(\bar{x})$$

- tj., je to pevný bod zobrazení G

Linearizace

- L. v e. opět důležitý nástroj
- pro $z = x - \bar{x}$ má linearizace tvar

$$z_{n+1} = DG(\bar{x})z_n$$

- chování lineárního systému závisí na v.č. $DG(\bar{x})$
- mají-li velikost < 1 , je e. stabilní (tj, přitahuje pp.)
- mají-li velikost > 1 , je e. nestabilní (tj, odpuzuje nenulové pp.)
- vše je podobné spojitým systémům

V. Hartman-Grobman pro zobrazení

Uvažme diskrétní systém druhého řádu s pevným bodem \bar{x} a linearizací $z_{n+1} = DG(\bar{x})z_n$

Linearizace se nazývá **hyperbolická** když $A = DG(\bar{x})$ nemá v.č. na **jednotkové kružnici**.

Je-li taková, pak existuje homeomorfismus

$$h : B(\bar{x}, \delta) \rightarrow \mathbb{R}^2$$

který zobrazuje trajektorie nelineárního s. na trajektorie lineárního s. H. lze vybrat tak, aby zachovával čas.

Platí

$$h(G^n(x)) = A^n h(x)$$

Příklad: Zpožděné logistické zobrazení

Jako příklad diskrétního systému v rovině uvažme logistické zobrazení (viz dříve) se zpožděním o jeden krok

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= y_n \\ y_{n+1} &= \lambda y_n (1 - x_n)\end{aligned}$$

kde $\lambda > 0$. (Srovnej s $y_{n+1} = \lambda y_n (1 - y_{n-1})$)

Toto zobrazení má dva pevné body: $(0,0)$ a $(1-1/\lambda, 1-1/\lambda)$

Linearizace v počátku je $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ s v.č. $0, \lambda$, tedy počátek je stabilní pro $\lambda < 1$

Linearizace ve druhém bodu je $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1-\lambda & 1 \end{bmatrix}$ s v.č. $(1 \pm \sqrt{5-4\lambda})/2$

Toto je je sedlo pro $0 < \lambda < 1$ a stabilní zdroj pro $1 < \lambda < 2$

Fázový portrét pro λ blízko 2 je moc hezký

Periodické body s periodou N

DEF

N -tice různých bodů $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}^2$ tvoří periodické body s periodou N když

$$x_2 = G(x_1), x_3 = G(x_2), \dots, x_N = G(x_{N-1}), x_1 = G(x_N)$$

- jsou protějškem periodických orbit u spojitých systémů
- každé x_i je pevným bodem zobrazení $F(x) = G^N(x)$
- velké zjednodušení: stabilita bodu x_i se určí linearizací F v x_i
- jakobiány $DF(x_i) = DG^N(x_i)$ jsou různé pro různé body
- ale mají stejná v.č.
- orbita je diskrétní, proto neexistuje obdoba Bendixonovy a Poicaré-Bendixonovy věty

- lineární systém

$$z_{n+1} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} z_n$$

- má v.č. $\cos \theta \pm j \sin \theta$ na jednotkové kružnici
- přesto má periodické body s periodou N pouze když

$$\frac{\theta}{2\pi} = \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}$$

```
z1=[(-charfcn[0](n)*sin(theta)^2*X1z+sin(theta)^2*cos(theta)^n*X1z-  
sin(theta)^2*cos(theta)^n*X1z*n+sin(theta)*cos(theta)^n*cos(theta)*n+cos(theta)^n*cos  
(theta)^2)/cos(theta)^2]  
  
z2=[(charfcn[0](n)*sin(theta)*X1z-  
cos(theta)^n*sin(theta)*X1z+cos(theta)^n*cos(theta))/cos(theta)]  
  
>> z2pi=subs(z2,theta,pi)  
z2pi=(-1)^n  
  
>> z1pi=subs(z1,theta,pi)  
z1pi=(-1)^n
```

■ p. 68

Uvažme znovu logistické zobrazení z úvodní přednášky

$$x_{k+1} = \mu x_k (1 - x_k) \quad x \in [0, 1]$$

Řešením rovnice

$$x = \mu x(1 - x)$$

$$\mu x^2 + x(1 - \mu) = x(\mu x - \mu + 1) = 0 \rightarrow x = 0, x = 1 - \frac{1}{\mu}$$

■ pevný bod v

$$x = 1 - 1/\mu$$

■ vidlová bifurkace pro

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{1-1/\mu} = \mu - 2\mu x \Big|_{1-1/\mu} = \mu - 2\mu + 2 = 2 - \mu \stackrel{!}{=} -1 \rightarrow \mu = 3$$

■ vznikne 1 nestabilní pevný bod a dva stabilní periodické body s periodou 2, což jsou pevné body

$$f^{[2]} = \mu(\mu x(1 - x))(1 - (\mu x(1 - x)))$$

Masařky - znovu a teoreticky / 2

```
» syms x mu, f=mu*x*(1-x);f2=subs(f,x,f)
f2 = mu^2*x*(1-x)*(1-mu*x*(1-x))

» x2=solve(f2-x)
x2 =
[
                                0]
[
                    (-1+mu)/mu]
[ (1/2*mu+1/2+1/2*(-3-2*mu+mu^2)^(1/2))/mu]
[ (1/2*mu+1/2-1/2*(-3-2*mu+mu^2)^(1/2))/mu]
```

periodické body
s periodou 2

■ Další bifurkace - zdvojení periody

```
» Df2=diff(f2,x)
Df2 = mu^2*(1-x)*(1-mu*x*(1-x))-mu^2*x*(1-mu*x*(1-x))+mu^2*x*(1-
x)*(-mu*(1-x)+mu*x)

» Df2x21=subs(Df2,x,x2(3));
» [solve(Df2x21+1)',solve(Df2x21-1)']
ans = [ 1+6^(1/2), 1-6^(1/2), -1, 3]

» mu2=double(ans(1))
mu2 = 3.4495

» Df2x22=subs(Df2,x,x2(4)); [solve(Df2x22+1)',solve(Df2x22-1)']
ans = [ 1+6^(1/2), 1-6^(1/2), -1, 3]
```