Nelineární systémy

4 / Stabilita a metody jejího určování.

Přehled

1. Úvod
2. Příklady
3. Frekvenční metody a nelinearity
4. Kvalitativní analýza nelineárních systémů
5. Stabilita a Lyapunovova funkce
6. Řízení NS pomocí přibližné linearizace
7. Řízení NS pomocí strukturálních metod – základní pojmy
8. Struktura a řízení NS s jedním vstupem a výstupem
9. Struktura a řízení NS s více vstupy a výstupy

Historie

- studium stability dynamických systémů má bohatou historii
- podílelo se na ní mnoho významných matematiků, fyziků a astronomů
- zájem přitahoval „problém stability *n* těles“ (stabilita sluneční soustavy)
- Torricelli (1608-1647): princip nejmenší celkové energie:
  Systém těles je ve stabilním rovnovážném stavu když je ve stavu (lokálně) minimální energie.

> *konzervativní* = zachovává energii (kinetickou+potenciální)
> *disipativní* = energie klesá

- Laplace a Lagrange, 18. stol.: konzervativního systému je stav s nulovou kinetickou a minimální potenciální energií stab. rovnovážný
- další: platí i pro disipativní (energie klesá podél trajektorie)
- Ale abstraktní definice stability až
- Lyapunov 1892 :
- definuje funkce vhodné k popisu „energie“
- a definuje co znamená „klesání podél trajektorie“

Opakování

Systém $\dot{x} = f(t,x), x(t_0) = x_0, x \in R^n, t \geq 0$ je

- autonomní: *f* nezávisí explicitně na *t:* $f(x)$
- lineární: $f(x,t) = A(t)x(t),\ t \geq 0$
- lineární autonomní $f(x,t) = Ax(t),\ t \geq 0$
- po částech spojitý v t:
  nejvýše konečně mnoho skokových nespojitostí

Označíme-li kruh (kouli) $B_h = B(0,h)$,
pak řekneme, že nějaká vlastnost platí

- lokálně, když platí $\forall x_0 \in B_h$ pro nějaké *h*
- globálně, když platí $\forall x_0 \in R^n$
- semi-globálně, když platí $\forall x_0 \in B_h$ pro každé *h,* ale s jinými parametry
- stejnoměrně (uniformně), když platí $\forall t \geq 0$

Definice stability

Lyapunovovská stabilita

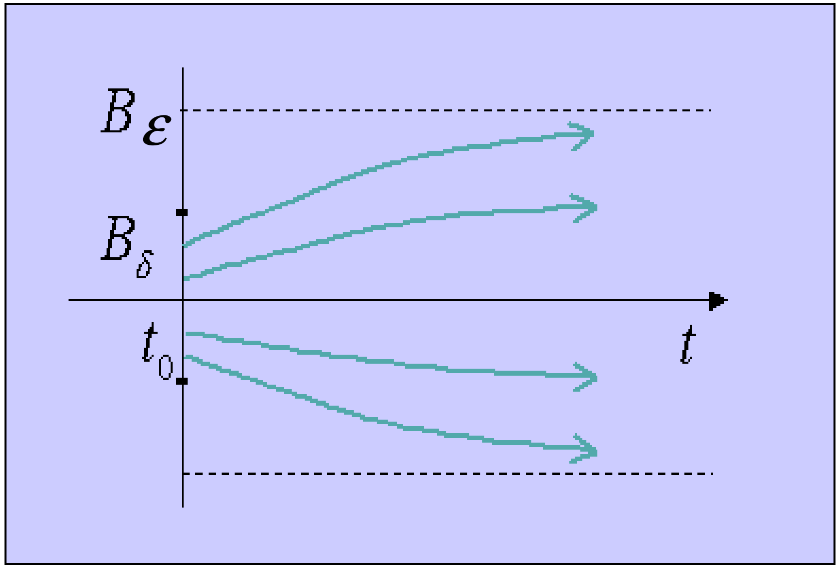
DEFINICE Lyapunovská stabilita

Ekvilibrium $x = 0$ je Lyapunovsky stabilní jestliže

$$\forall t_0 \geq 0 \wedge \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0 : |x_0| \leq \delta(t_0, \varepsilon) \Rightarrow |x(t)| < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

kde $x(t)$ je řešení začínající z x_0 v čase t_0 .

- <u>neformálně:</u>
  čím blížeji řešení začne,
  tím blížeji zůstane, přičemž
  se lze přibližovat neomezeně.
- Jedná se vlastně o
  spojitou závislost na
  počátečních podmín.
  v neomezeném čase



Stejnoměrná stabilita

DEFINICE Stejnoměrná stabilita

Ekvilibrium $x = 0$ je stejnoměrně stabilní jestliže v předchozí definici $\delta(\varepsilon)$ nezávisí na t_0 .

- stejnoměrně stabilní e. se s rostoucím časem nestává postupně méně stabilní
- zejména $\delta(t_0,\varepsilon)$ okolí nutné k udržení trajektorií uvnitř ε okolí nejde s rostoucím časem k nule.

Asymptotická stabilita

DEFINICE Asymptotická stabilita

Ekvilibrium $x = 0$ je asymptoticky stabilní jestliže

- je Lyapunovovsky stabilní a
- je atraktor, tj. $\forall t_0 \geq 0\ \exists \delta(t_0) > 0 : |x_0| \leq \delta \Rightarrow \lim_{t \to 0} |x(t)| = 0$

- Definice dvě různé podmínky.
- To se může zdát přehnané, ale není: konvergující trajektorie nezaručují stabilitu.
- Druhé podmínce se někdy říká kvaziasymptotická stabilita

Stejnoměrná asymptotická stabilita

DEFINICE Stejnoměrná asymptotická stabilita

Ekvilibrium $x = 0$ je stejnoměrně asymptoticky stabilní jestliže

- je Lyapunovsky stabilní a
- trajektorie konvergují k 0 stejnoměrně, tj. existuje $\delta > 0$ a funkce $\gamma(\tau, x_0) : R_+ \times R^n \to R_+$ taková, že

$$\forall x_0 \in B_\delta : \lim_{\tau \to \infty} \gamma(\tau, x_0) = 0$$

a

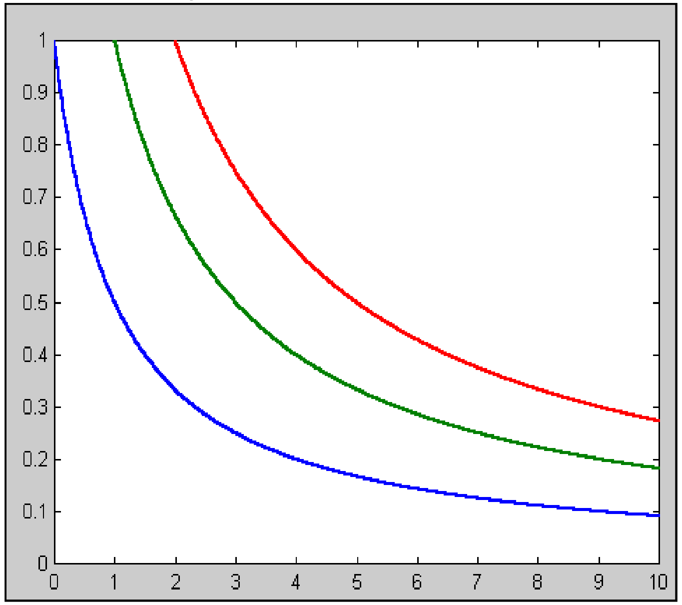
$$\left| x_0 \right| \le \delta \Rightarrow \left| x(t) \right| \le \gamma(t - t_0, x_0) \quad \forall t \ge t_0$$

Příklad

- systém $\dot{x} = -x/(1+t)$ má řešení $x(t) = \dfrac{1+t_0}{1+t}x(t_0)$

```
» dsolve('Dx=x/(1+t)','x(t0)=xt0')
ans = xt0*(t0+1)/(t+1)
```

- řešení konverguje k 0 pro všechna t_0 , ale
- s rostoucím t_0 stále pomaleji
- tedy je asymptoticky stabilní
- ale ne stejnoměrně
- uvažte limitu



Globální asymptotická stabilita

DEFINICE Globální asymptotická stabilita

Ekvilibrium $x = 0$ je globálně asymptoticky stabilní jestliže

- je stejnoměrně Lyapunovsky stabilní a
- $\forall x_0 \in R^n : \lim\limits_{t \to 0} |x(t)| = 0$

DEFINICE Globální stejnoměrná asymptotická stabilita

Ekvilibrium $x = 0$ je globálně stejnoměrně asymptoticky stabilní

- když je globálně asymptoticky stabilní a
- konvergence trajektorií do počátku je stejnoměrná v čase, tj. existuje funkce $\gamma(\tau, x_0): R_+ \times R^n \to R_+$ taková, že

$$|x(t)| \leq \gamma(t - t_0, x_0) \quad \forall t \geq t_0$$

- tyto definice stability nepožadují zvláštní rychlost konvergence
- nemusí konv. exponenciálně (jako lin.), ale třeba jako $\frac{1}{t}, \frac{1}{\sqrt{t}}$

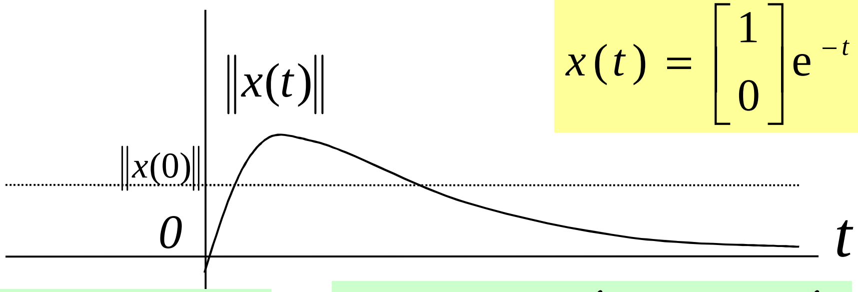
Exponenciální stabilita

DEFINICE Exponenciální stabilita

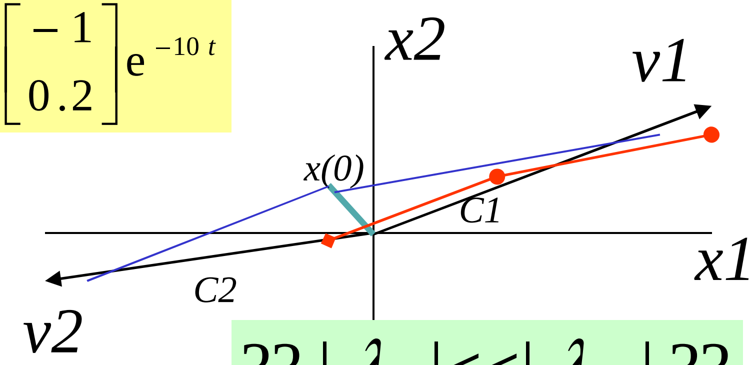
Ekvilibrium $x = 0$ je exponenciálně stabilní jestliže

$$\exists m,\alpha > 0 : |x(t)| \le m e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0|,\ \forall \in B_h, t \ge t_0 \ge 0$$

- konstanta α je rychlost konvergence
- globální exponenciální stabilita = nerovnost platí $\forall x_0 \in R^n$
- exponenciální stabilita je obecně silnější než asymptotická stabilita
- *m* charakterizuje „překývnutí“ - i pro lin. syst. s výhradně reálnými póly!!!



$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.2 \end{bmatrix} e^{-10t}$$



$$\dot{x} = Ax, x \in R^2, \lambda_{1,2} < 0$$
$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2$$

$$x(t) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$C_1 v_1 + C_2 v_2 = x(0)$$

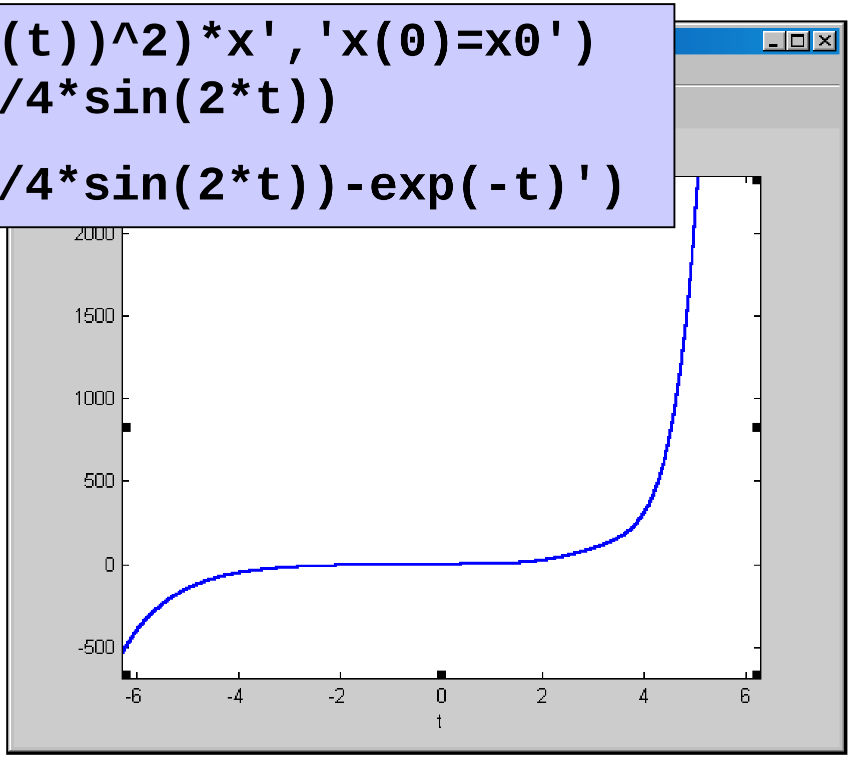
$$?? \ |\lambda_1| << |\lambda_2| \ ??$$

Příklad 1

- systém $\dot{x} = -(1+\sin^2 t)x$ má v 0 exponenciálně stabilní e
- rychlost konvergence je 1

```
» dsolve('Dx=-(1+(sin(t))^2)*x','x(0)=x0')
ans = x0*exp(-3/2*t+1/4*sin(2*t))

» ezplot('exp(3/2*t-1/4*sin(2*t))-exp(-t)')
```



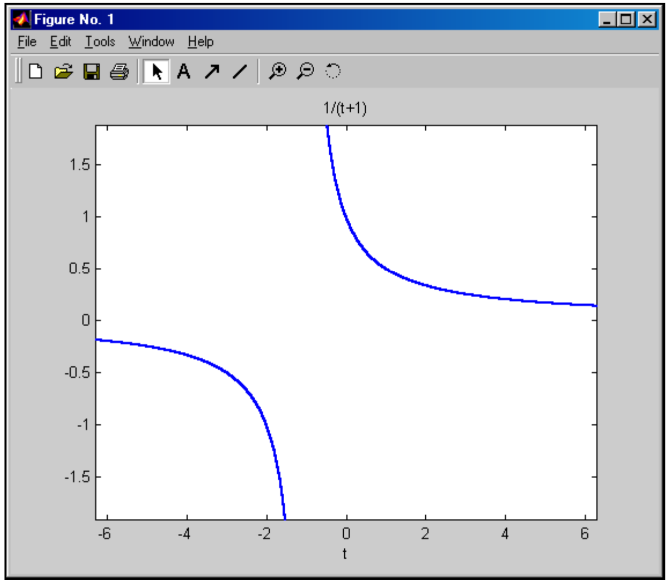
Příklad 2

- řešení systému $\dot{x} = -x^2,\ x(0) \neq 0$ konverguje k 0,
- ale pomaleji než exponenciálně a jen pro *x(0)>0*

```
» sol=dsolve('Dx=-x^2','x(0)=x0')
sol =  1/(t+1/x0)

» sol1=dsolve('Dx=-x^2','x(0)=1')
sol1 =  1/(t+1)

» ezplot(sol1)
```



- e. je stabilní asymptoticky,

  ale ne exponenciálně

- <u>Jiný příklad:</u>

$$\dot{x} = -x^3, x(t_0) = x_0$$

$$\frac{dx}{dt} = -x^3 \Rightarrow \frac{dx}{-x^3} = dt \Rightarrow \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x_0^2} = t - t_0 \Rightarrow x(t) = \sqrt{\frac{x_0^2}{2(t-t_0)x_0^2 + x_0^2}}$$

Metoda separace proměnných

Lineární autonomní systémy – analýza řešení

Lineární autonomní systém $\dot{x} = Ax,\ x(0) = x_0$

- e. v počátku
- izolované e. $(\det A \neq 0)$ nebo podprostor e. $(\mathrm{null}\ A)$
- nemůže mít vícenásobná izolovaná e. (z principu superpozice plyne, že lineární kombinace e. je e.)
- má řešení $x(t) = e^{At} x_0$
- *A* má (komplexní) Jordanův tvar $J = P^{-1}AP = \text{block diag}[J_1, \ldots, J_r]$
- Jordanův blok řádu *m* příslušný vlastnímu č. λ_i
- když λ_i přísluší *m* lineárně nezávislých vlastních vektorů

$$J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{m \times m}$$

Lineární autonomní systémy – pokračování

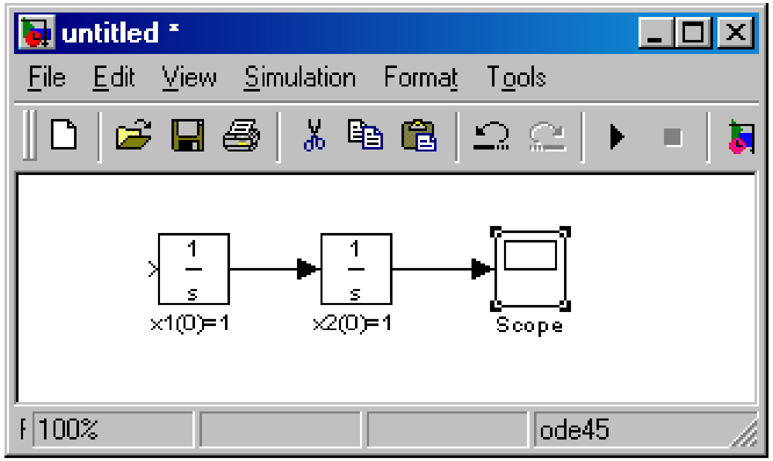
- Pak $e^{At} = Pe^{Jt}P^{-1} = \sum_{i=1}^{r}\sum_{k=1}^{m_i} t^{k-1}e^{\lambda_i t}R_{ik}$
- e. je globálně asymptoticky stabilní právě když

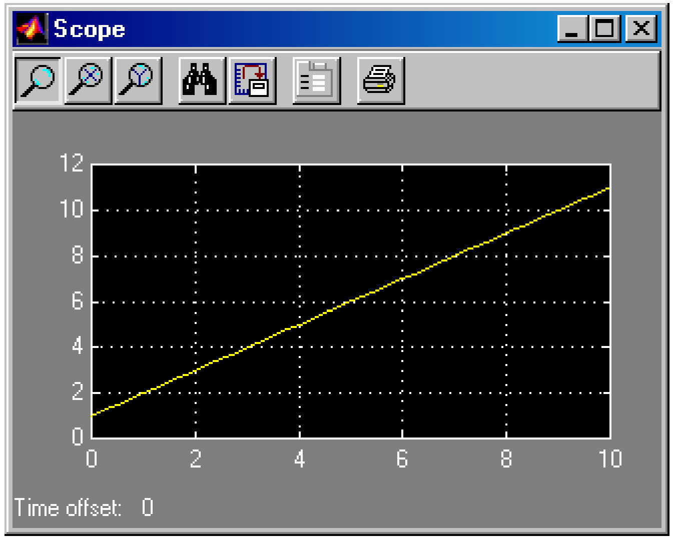
$$\boxed{\forall \lambda_i : \mathrm{Re}\,\lambda_i < 0}$$

- e. Lyapunovovsky stabilní právě když
  - $\boxed{\forall \lambda_i : \mathrm{Re}\,\lambda_i \leq 0}$
  - každému λ_i přísluší Jordanův blok řádu 1,
    tj. každému *k* násobnému vlastnímu číslu přísluší právě *k* bloků řádu jedna a tedy *k* lineárně nezávislých vlastních vektorů

Příklad: Je spojení dvou integrátorů stabilní?

Sériové spojení



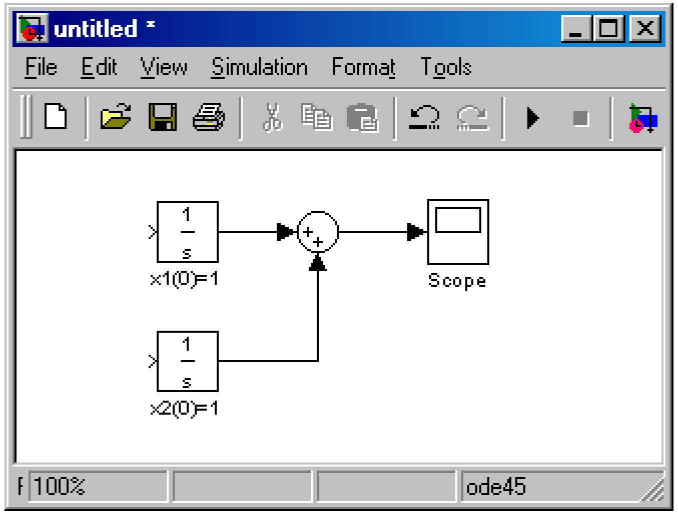


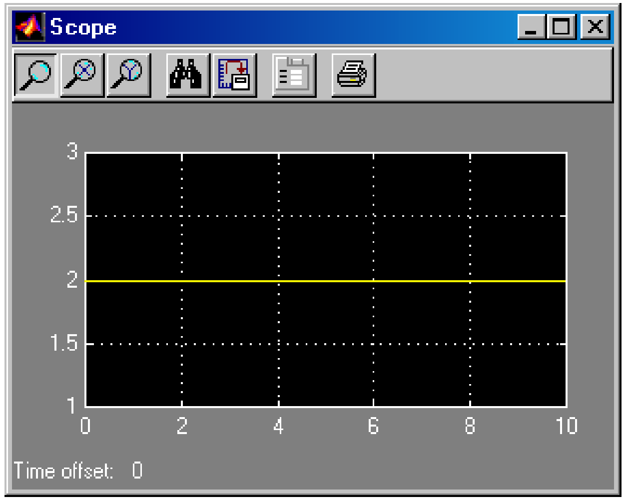
$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 1 \\ 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \boxed{y(t) = t x_{10} + x_{20}}$$

- Není ani asymptoticky ani Laypunovsky stabilní.

Příklad / 2

Paralelní spojení





$$A = \begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 \\ 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \qquad \boxed{y(t) = x_{10} + x_{20}}$$

- Je Lyapunovovsky stabilní! Kde je rozdíl?

První Lyapunovova metoda

- Určuje lokální stabilitu e.
- pomocí linearizace v tomto e.
- Pro autonomní systém $\dot{x} = f(x)$ s e. $\bar{x}$, kde *f* je v tomto bodu spojitě diferencovatelná
- zavedeme odchylku $y = x - \bar{x}$
- a systém nahradíme lineární rovnicí $\dot{y} = Ay$
- kde

$$A = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{\bar{x}}$$

je Jacobiho matice v bodě. Značíme ji také *J* nebo *Df* .

Lokální stabilita z linearizace

Lokální stabilita

- Jestliže mají všechna v.č. matice *A* záporné reálné části, pak je e. lokálně asymptoticky stabilní.
- Jestliže aspoň jedno v.č. matice *A* má kladnou reálnou část, pak e. není Lyapunovsky stabilní.
- Jestliže jedno nebo více v.č. má nulovou reálnou část, a všechna ostatní v.č. mají zápornou r.č., stabilitu nelze z linearizace určit.

Druhá (přímá) Lyapunovova metoda

- Umožňuje určit stabilitu bez integrace rovnice
- Inspirována disipativním systémem (kde e. je stabilní pokud při pohybu po trajektorii se akumulovaná energie snižuje a v e. je minimální)
- pro obecnější systémy se používají zobecnělé energie, tzv. Lyapunovovy funkce
- umožňuje určit i globální stabilitu

Lyapunovova metoda pro autonomní sys.

PŘEDPOKLADY

- Uvažme nejprve autonomní systém $\dot{x} = f(x)$
- kde funkce $f : D \to R^n$ je lokálně Lipschitzovské zobrazení oblasti $D \subset R^n$ na R^n

DEFINICE

Reálná funkce $V(x) : R^n \to R$ spojitá na *D* je na *D*

- pozitivně definitní když: $V(0) = 0$ a $V(x) > 0 \;\; \forall x \in D - \{0\}$
- pozitivně semidefinitní když -"- a $V(x) \geq 0 \;\; \forall x \in D - \{0\}$
- negativně definitní když $-V(x)$ je tam pozitivně definitní
- negativně semidefinitní když $-V(x)$ je tam pozitivně semidefinitní

Kvadratická forma

Kvadratická forma

- příklad skalární funkce u které
- snadno zjistíme znaménko definitnosti
- definice

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i x_j$$

- *P* je symetrická matice
- forma je pozitivně (semi)definitní
- $\Leftrightarrow$ v.č. matice *P* jsou kladná (nezáporná)
- $\Leftrightarrow$ hlavní minory *P* jsou kladné (nezáporné)
- negativitu zjistíme zkoumáním $-V(x)$

Příklad

Uvažme

$$V(x) = ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2$$

$$= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x^T P x$$

- hlavní minory *P* jsou $a, a^2, a(a^2 - 5)$
- forma je pozitivně definitní pro $a > \sqrt{5}$
- pozitivně semidefinitní pro $a \geq \sqrt{5}$
- forma je negativně definitní pro $a < \sqrt{5}$
- negativně semidefinitní pro $a \leq \sqrt{5}$
- je indefinitní pro $a \in (-\sqrt{5}, \sqrt{5})$

Lyapunovova funkce

DEFINICE

Reálná spojitě diferencovatelná funkce $V(x) : D \to R$ je Lyapunovova jestliže

- je pozitivně definitní na *D* obsahující počátek
- její derivace podél trajektorií systému $\dot{V}(x)$ je na *D* negativně semidefinitní

Derivace podél trajektorií systému

- tzv. Lieova derivace *V* podél *f*
- $$\dot{V}(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\dot{x}_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i(x)$$

  $$\boxed{\dot{x}_i = f_i(x) \leftarrow \dot{x} = f(x)}$$

  $$=\left[\frac{\partial V}{\partial x_1},\frac{\partial V}{\partial x_2},\cdots,\frac{\partial V}{\partial x_n}\right]\begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x)\end{bmatrix}=\frac{\partial V}{\partial x}f(x)$$
- tato derivace závisí na rovnicích systému
- platí

  $$\dot{V}(x_0)=\frac{d}{dt}V\left(\Phi(t,t_0,x_0)\right)\Big|_{t=0}$$
- též směrová derivace podél vektorového pole *f(x)*

Lyapunovova věta

VĚTA - Lyapunov

Nechť $x = 0$ je e. systému a $D \subset R^n$ je oblast obsahující $x = 0$.

Nechť $V : D \to R$ je spojitě diferencovatelná funkce, taková že

- $V(0) = 0$ a $V(x) > 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$
- $\dot{V}(x) \leq 0 \quad \forall x \in D$

Pak $x = 0$ je Lyapunovsky stabilní.

Pokud navíc

- $\dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \in D - \{0\}$

pak $x = 0$ je asymptoticky stabilní.

Slovy:

Počátek je (asymptoticky) stabilní jestliže existuje spojitě diferencovatelná pozitivně definitní funkce (Lyapunovova) $V(x)$ taková, že $\dot{V}(x)$ je negativně semidefinitní (definitní).

Jak najít Lyapunovu funkci

- Lyapunova metoda poskytuje postačující podmínku stability
- Pokud máme vhodnou funkci, ověření je snadné, ale
- není známa žádní systematická metoda jak L. funkci najít.
- Někdy můžeme na základě fyzikální analogie najít funkci energie,
- jindy musíme postupovat metodou „pokusu a omylu“
- Pro inspiraci následuje pár příkladů

Oblast atrakce - povodí

- Jak daleko můžeme začít aby trajektorie ještě konvergovala k (asymptoticky) počátku?
- Oblast atrakce, oblast asymptotické stability, povodí je množina všech bodů *x* takových, že z nich řešení konverguje
- najít jí analyticky může být obtížně nebo i nemožné
- pomocí L. funkce můžeme najít její podmnožiny
- ale může to být dost konzervativní.
- Zajímavá otázka: kdy je oblastí atrakce celý prostor R^n, tj.
- kdy je počátek globálně asymptoticky stabilní ?

Jednoduchý postřeh:

- Pokud je e. globálně asymptoticky stabilní, pak už systém nemůže mít další e. (sporem).
- Takže pro systémy s více různými e. nemá smysl globální asymptotickou stabilitu zkoumat. (Např. u normálního kyvadla).

- Podmínka navíc: radiální neohraničenost Ljap. Fce., tj. Ljap. fce. roste do nekonečna ve všech směrech

Exponenciální stabilita - opakování

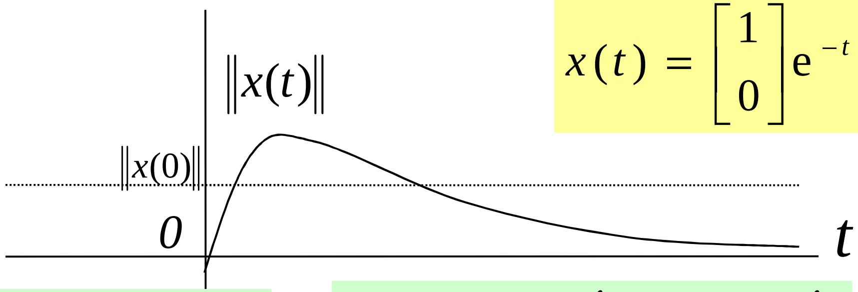
DEFINICE Exponenciální stabilita

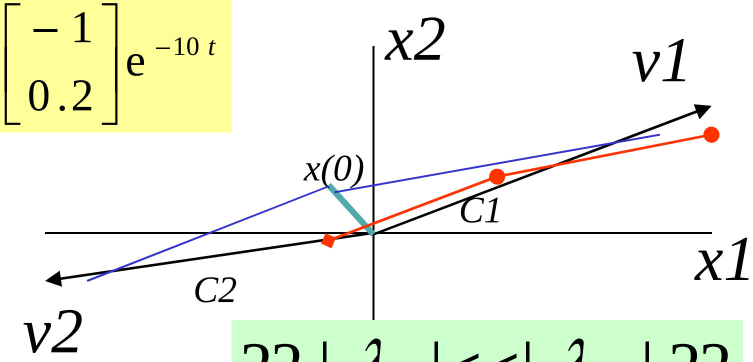
Ekvilibrium $x = 0$ je exponenciálně stabilní jestliže

$$\exists m, \alpha > 0 : |x(t)| \le m e^{-\alpha(t-t_0)} |x_0|, \ \forall \in B_h, t \ge t_0 \ge 0$$

- konstanta α je rychlost konvergence
- globální exponenciální stabilita = nerovnost platí $\forall x_0 \in R^n$
- exponenciální stabilita je obecně silnější než asymptotická stabilita
- *m* charakterizuje „překývnutí" - i pro lin. syst. s výhradně reálnými póly!!!

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-t} + \begin{bmatrix} -1 \\ 0.2 \end{bmatrix} e^{-10t}$$





$$\dot{x} = Ax, x \in R^2, \lambda_{1,2} < 0$$
$$Av_1 = \lambda_1 v_1, Av_2 = \lambda_2 v_2$$

$$x(t) = C_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 v_2 e^{\lambda_2 t}$$
$$C_1 v_1 + C_2 v_2 = x(0)$$

$$?? \ |\lambda_1| << |\lambda_2| \ ??$$

Věta o exponenciální stabilitě – Ljap. fce

Věta. *Systém* $\dot{x} = f(t,x), f(t,0) \equiv 0,$ *je exponenciálně stabilní na oblasti* $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ *tehdy a jen tehdy jestliže existují Ljapunovská fce V(t,x) a kladné konstanty c1, c2, c3, c4 takové, že platí (m je z definice exp. stab. - „překývnutí“):* $\forall (t,x) \in [0,\infty) \times D_0, D_0 = \{x \in R^n \mid \|x\| < r/m\}$

$$c_1\|x\|^2 \le V(t,x) \le c_2\|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -c_3\|x\|^2, \quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \le c_4\|x\|$$

Důkaz: „Jen tehdy“, viz skriptum. „Tehdy“: stačí jen první dvě nerovnice, z nichž plyne, že: $\dot{V} \le \frac{c_3}{c_2} V$ a tedy:

$$V(t,x(t)) \le V(t_0,x_0) - \frac{c_3}{c_2}\int_{t_0}^{t} V(\tau)d\tau$$

na což lze použít Bellman-Gronwall Lemma (BHL), které dává

$$V(t,x(t)) \le V(t_0,x_0)\exp\left(-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)\right)$$

a tedy $c_1\|x\|^2 \le c_2\|x(t_0)\|^2 \exp\left(-\frac{c_3}{c_2}(t-t_0)\right)$

Lineární autonomní systém

- Pro lineární autonomní systém $\dot{x} = Ax$
- Najdeme vždy Lyapunovovu funkci ve tvaru kvadratické formy
- Uvažme $V = x^T P x$, P reálná symetrická matice
- Derivace podle trajektorie

$$\dot{V} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T A^T P x + x^T P A x = x^T \left(A^T P + PA\right) x$$

- Položíme $\boxed{A^T P + PA = -Q}$ Lyapunovova maticová rovnice

  a dostaneme $\boxed{\dot{V} = -x^T Q x}$

<u>**Věta.** Mají-li všechna vlastní čísla matice *A* záporné reálné části, potom pro každou symetrickou p.d. matici *Q* má L.m.r. právě jedno řešení, které je p.d.</u>

- Prakticky: Volíme p.d. *Q* a vypočteme *P* a určíme definitnost
- <u>Je-li *P* p.d.:</u> asymptotická stabilita. <u>Není-li:</u> nestabilita
- Možno využít nejrůznejší software

Exponenciální stabilita a přibližná linearnizace

Věta. *Systém* $\dot{x} = f(t,x), f(t,0) \equiv 0,$ *je exponenciálně stabilní na oblasti* $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ *pro některé r>0* ***tehdy a jen tehdy*** *jestliže jeho přibližná linearizace* $\dot{x} = A(t)x, A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)$ *je exponenciálně stabilní.*

Důkaz: Později, na základě Věty o zanikající poruše. ∎

Věta. *Systém* $\dot{x} = f(x), f(0) = 0,$ *je exponenciálně stabilní na oblasti* $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ *pro některé r>0* ***jestliže*** *jeho přibližná linearizace je exponenciálně stabilní, tj. má všechna vlastní č. v levé koml. polor.*

Důkaz: Díky negativitě reálných částí v.č. existuje řešení Ljap. rce a tím i kvadratická Ljap. fce, takže lze použít přísl. větu charakterizující exp. stab. přes kvadratickou Ljap. fci. ∎

Stabilita perturbovaných systémů

- Uvažujme systém $\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)$
  kde $f, g : [0,\infty) \times D \rightarrow R^n$ jsou po částech spojité v *t* a lokálně Lipsch. v *x* na $[0,\infty) \times D$, kde *D* je oblast obsahující počátek *x=0.*

- nominální systém $\dot{x} = f(t,x)$

  plus perturbace $g(t,x)$

- neurčitý systém $\dot{x} = \tilde{f}(t,x)$ tam spadá s

  $g(t,x) \equiv \tilde{f}(t,x) - f(t,x)$

f je <u>známá nominální</u> pravá strana systému s *f(t,0)=0*

Stabilita perturbovaných systémů 2

Věta. *Nechť je nominální systém* $\dot{x} = f(t,x), f(t,0) \equiv 0,$ *exponenciálně stabilní, tj. existují Ljapunovská fce V(t,x) a kladné konstanty c1, c2, c3, c4 takové, že platí* $\forall (t,x) \in [0,\infty) \times D$

$$c_1 \|x\|^2 \le V(t,x) \le c_2 \|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -c_3 \|x\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \le c_4 \|x\|$$

Nechť $\|g(t,x)\| \le \gamma \|x\|$ *, kde* $\gamma < \frac{c_3}{c_4}$ *, potom je počátek x=0 exponenciálně stabilním ekv. perturbovaného systému* $\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)$ *Navíc, pokud předpoklady platí globálně, pak je počátek globálně exponenciálně stab. ekvilibriem téhož systému.*

Tzv. zanikajíci porucha: lokálně platí např. vždy, když *g(t,0)=0* pro každé *t* a *g* je stejnoměrně lok. Lipsch. a tedy $\|g(t,x) - g(t,0)\| \le L \|x - 0\|$, tj. $\gamma = L$ nebo má stejnoměrně omezený Jakobián:

$$\|g(t,x)\| = \|g(t,x) - g(t,0)\| = \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(t,x^*)[x-0] \right\| \le \max_{t,x^*} \left\| \frac{\partial g}{\partial t}(t,x^*) \right\| \|x\|$$

Stabilita perturbovaných systémů 3

Důkaz Věty o zanikající poruše. *Nechť je nominální systém* $\dot{x} = f(t,x), f(t,0) \equiv 0,$ *exponenciálně stabilní, tj. existují Ljapunovská fce V(t,x) a kladné konstanty c1, c2, c3, c4 takové, že platí*

$$c_1 \|x\|^2 \le V(t,x) \le c_2 \|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -c_3 \|x\|^2, \quad \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \le c_4 \|x\|$$

Pro systém $\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)$ *tedy platí, s využitím* $\|g(t,x)\| \le \gamma \|x\|$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x}[f(t,x) + g(t,x)] \le -c_3 \|x\|^2 + \left\| \frac{\partial V}{\partial x} \right\| \|g(t,x)\| \le$$

$$-c_3 \|x\|^2 + c_4 \|x\| \gamma \|x\| = (-c_3 + \gamma c_4) \|x\|^2$$

a jelikož $\gamma < \dfrac{c_3}{c_4}$ *máme dle věty o exp. stabilitě dokázano.* $\blacksquare$

Exponenciální stabilita a přibližná linearizace

Věta. *Systém* $\dot{x} = f(t,x), f(t,0) \equiv 0,$ *je exponenciálně stabilní na oblasti* $D = \{x \in R^n \mid \|x\| < r\}$ *pro některé r>0 tehdy a jen tehdy jestliže jeho přibližná linearizace* $\dot{x} = A(t)x,\ A(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,0)$ *je exponenciálně stabilní.*

Důkaz: „Jen tehdy“ plyne y předcházející Věty o zanikající poruše:

$\dot{x} = A(t)x = f(t,x) + g(t,x)$ kde $g(t,x) = A(t)x - f(t,x)$

g(t,x) splňuje všechny potřebné podmínky, neboť

$g(t,x) = A(t)x - f(t,x) = o(t, \|x\|^2)$ takže v dostatečně malém okolí ekv. vše potřebné platí.

„Tehdy“ plyne analogickým způsobem (v opačném směru)!!! $\square$

Perturbované systémy – nezanikající porucha

Věta. *Nechť je nominální systém* $\dot{x} = f(t,x), f(t,0) \equiv 0,$ *exponenciálně stabilní, tj. existují Ljapunovská fce V(t,x) a kladné konstanty c1, c2, c3, c4 takové, že platí* $\forall (t, x) \in [0, \infty) \times D$

$$c_1\|x\|^2 \le V(t,x) \le c_2\|x\|^2, \quad \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} f(t,x) \le -c_3\|x\|^2, \quad \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\| \le c_4\|x\|$$

Nechť $\|g(t,x)\| \le \delta$ *, kde* $\delta > 0$ *je vhodné číslo, potom pro systém*

$$\dot{x} = f(t,x) + g(t,x)$$

platí, že existuje určité konečné T>0 , takové že

$$\|x(t)\| \le b, \forall t \ge t_0 + T$$

Kromě toho, $\forall t : t \ge t_0, t < t_0 + T$ *x(t) ubývá exponenciálně.*

Detailní formulace a důkaz viz skriptum.