Matematická ekonomie

Jan Paseka

23. října 2009

Úvod

Matematickou ekonomii bychom mohli definovat jakožto oblast vědy, která *obsahuje různé aplikace matematických pojmů a technik pro ekonomii, zejména pak pro ekonomické teorie.* Alternativní přístup pak je, že provedeme výčet všech součástí matematické ekonomie.

V tomto úvodu je historie matematické ekonomie rozdělena do tří širokých a částečně se překrývajících období: období marginalistů (1837-1947), období množinově-teoretických/lineárních modelů (1948-1960) a současné období integrace (1961-nyní).

1. Období marginalistů: 1838-1947

Počáteční období matematické ekonomie bylo to, ve kterém si ekonomie vypůjčila metodologii přírodních věd a nástroje matematiky, aby vyvinula formální teorii založenou na matematické analýze. Za předpokladu dostatečně hladkých funkcí (např. funkce užitečnosti a výrobní funkce) a maximalizujícího chování účastníků byla vyvinuta dostatečně úplná teorie chování mikroekonomických agentů a teorie obecné rovnováhy.

Základním prostředkem byl kalkulus - tj. diferenciální a integrální počet, zejména použití totální a parciální derivace a metody Lagrangeových multiplikátorů pro charakterizaci maxim. Zároveň byly v tomto období vyvinuty moderní teorie spotřeby, výroby, oligopolu a obecné rovnováhy.

Původní prací, kterou můžeme považovat za počáteční bod matematické ekonomiky, byla Cournotova práce z roku 1883. Cournotův přínos lze rozdělit na dva hlavní směry: teorie podniků - firem a interakce firem a spotřebitelů v jednoduché tržní ekonomice. Cournotova základní hypotéza byla, že firmy si vybírají tak, aby maximalizovaly svůj zisk. Cournot studoval a přesně definoval případy dokonalé soutěže a monopolu. Zároveň zavedl rovnost mezi nabídkou a poptávkou v jednoduché tržní ekonomice a studoval problém oligopolu, kde je omezena soutěživost prodávajících. Cournotovo řešení oligopolu zůstalo standardním přístupem a jeho vhodné zobecnění hraje důležitou roli v teorii her.

Teorie firmy: Cournotova maximalizační hypotéza byla rozšířena v rámci zkoumání výrobní funkce v poslední čtvrtině 19. století tak, že mohla vzniknout úplná teorie poptávky po vstupech a nabídky výstupů. Vývoj byl sdílen mnoha autory jako jsou např. Walras (1874), Wicksteed (1894), Wicksell (1893) a J.B. Clark (1889).

Teorie spotřebitele: Rozvoj teorie spotřebitele závisející na maximalizaci funkce užitečnosti při omezeném rozpočtu spotřeby byl započat v roce 1854 Gossenem a dále studován Jevonsem (1871), Walrasem (1874) a dále dopracován Marshallem (1890). Úplné odvození vlastností funkce užitečnosti bylo provedeno Slutským (1915) a dále studováno Hicksem a Allenem (1934) aj. Základy teorie užitečnosti byly prohloubeny několika způsoby: nahrazení kardinální užitečností ordinální přináleží Fisherovi (1892) a Paretovi (1909); axiomatizace kardinální užitečnosti je dílem Frische (1926, 1932) a Alta (1936); přístup pomocí preferencí byl započat Samuelsonem (1938) a dále rozvíjen Houthakkerem (1950) a Uzawou (1960).

Obecná rovnováha: Základní pojetí, že trhy jsou ve vzájemném vztahu a že proto je rovnovážný stav ekonomie charakterizován současně existující rovností mezi nabídkou a poptávkou na všech trzích, přináleží Walrasovi (1874). Toto pojetí bylo dále rozvinuto a vyloženo Paretem (1896, 1909). To, že rovnovážný stav může být dosažen, bylo dokázáno tím, že počet rovnic byl rovný počtu neznámých (viz Marshall (1890)). Optimalita konkurenční rovnováhy byla diskutována jak Walrasem tak Paretem.

Stabilita rovnováhy: V případě rovnováhy jednoduchého trhu byly podmínky stability diskutovány Cournotem (1838) a Marshallem (1890). Otázky stability obecné rovnováhy byly diskutovány rozsáhle Walrasem (1874). První diskuse z přesného pohledu se objevila v Hicksovi (1939a) a Samuelsonem (1941). Z posledních prací jmenujme práce Arrowa, Hahna, Hurwicze aj.

Optimální alokace zdrojů: První systematický výpočet užitků a nákladů přináleží Dupuitovi (1844). Jasná definice optimality v případě mnoha účastníků byla podána Paretem (1909). Charakterizace optimálních a částečně optimálních stavů je nyní známa jakožto tzv. ekonomie blahobytu, tuto syntézu provedli Hotelling, Bergson a Hicks. Speciální problém optimalizace v čase byl poprvé studován Ramseyem (1928) a následovně Hotellingem (1931).

Zobecněné vyjednávání: Edgeworth (1881) jakožto první studoval výstupy ekonomie, ve které mohly být realizovány všechny druhy dohod o zboží, nikoliv toliko ty možné v cenovém systému. Množina možných výstupů se nazývala *smluvní křivka*. Obecná verze tohoto pojmu, nyní známá jakožto *jádro*, byla dále studována v plné obecnosti v teorii her.

Vyvrcholení školy marginalistů založené na kalkulu, které zkombinovalo mnoho předcházejících výsledků s novějším vývojem, lze najít ve dvou klasických knihách, které jsou stále velmi důležité: Hicks (1946) a Samuelson (1947).

2. Období množinově teoretického/lineárního modelu: 1948-1960

Období množinově teoretického/lineárního modelu bylo období po 2. světové válce, ve kterém byl dřívější kalkul matematické analýzy nahrazen množinově-teoretickými základy a lineárními modely. Použití teorie množin znamená větší obecnost v tom, že klasické předpoklady hladkosti funkcí mohly být nahrazeny podstatně obecnějšími funkcemi. Použití lineárního modelu znamená zacházení s pojmy, které nešlo vyjádřit pomocí hladkých funkcí, tj. např. vrcholy polyedrů.

Tento nový přístup byl ve skutečnosti započat důležitým článkem von Neumanna (1937) v období ekonomického růstu. Přitom v tomto článku je metodologie podstatně důležitější než jeho obsah. Jiná práce, která hrála důležitou roli v rozvoji množinově-teoretického přístupu byla Arrowova kniha o axiomatizaci teorie sociálního výběru a individuálním ohodnocení (1951). Byly v ní použity množinově-teoretické metody, které umožnily vytvoření systému pro studium problémů obecné teorie rovnováhy.

Dva z velmi důležitých článků pro rozvoj teorie obecné rovnováhy byly Wald (1933-34), který provedl první přesnou analýzu obecné rovnováhy, a Arrow s Debreuem (1954), kteří pomocí množinově-teoretických prostředků formulovali problém existence konkurenční rovnováhy a dokázali její existenci za patřičných podmínek. Problém existence byl dále analyzován McKenziem, Galem, Nikaidou a Debreuem. Důležitým nástrojem byla Kakutaniho věta o pevném bodě (1941) – zobecnění Brouwerovy věty o pevném bodě.

V rámci teorie spotřebitele byly pro další axiomatický rozvoj důležité články Debreua a Radera. Aplikace množinově-teoretických pojmů kulminovala pak v klasické Debreuově knize (1959) a jejíž úloha je srovnatelná s pracemi Samuelsona a Hickse pro klasické období.

Lineární model pro meziodvětvové vztahy byl vyvinut Leontievem (1941, 1966). Další příbuzné aktivity na tomto poli patří Koopmansovi, Morgensternovi a Kantorovičovi. Dále byl studován von Neumannův mnohaodvětvový model růstu. Tento model hrál důležitou roli jak v obecné teorii rovnováhy tak v teorii růstu. Zároveň bylo v tomto období vyvinuto lineární programování, vycházející z prací Dantziga. Tento přístup kulminoval v pracích Dorfmana, Samuelsona, Solowa a Galeho. Tyto práce přitom neobsahovaly pouze lineární programování, nýbrž lineární modely obecné rovnováhy a lineární růstové modely. Jedním z nejdůležitějších modelů je pak Malinvaudův model akumulace kapitálu.

Teorie her byla rovněž založena na analýze lineárních modelů. Její počátky se datují k von Neumannovi (1928), ale základní vývoj se objevil v práci von Neumanna s Morgensternem (1947) a Nashe (1950).

3. Současné období integrace: 1961-nyní

Současné období je období integrace, ve kterém moderní matematická ekonomie kombinuje prvky kalkulu, teorie množin a lineárních modelů. Je zároveň obdobím, ve kterém byly matematické idee rozšířeny potencionálně do všech oblastí ekonomie. V současné době jsou mnohé odvětví matematické ekonomie ve vývoji a tento vývoj se ukazuje být nanejvýš přínosným. Zmiňme mj. 11 důležitých témat ve vývoji v této etapě.

(1) Nejistota a informace: Toto téma sestává z teorie averze k riskování (viz práce Pratta a Arrowa); rovnovážný stav při nejistotě (viz práce Diamonda a Radnera); mikroekonomické aplikace (viz práce McCalla); pojištění dle Borche aj.

(2) Globální analýza: Toto téma obsahuje matematické metody, které kombinují kalkulus a topologii, a jsou použity ke studiu vlastností ekonomických rovnovážných stavů a jejich změně v dané ekonomii. Debreu (1970) byl průkopníkem v tomto studiu za podmínek, že máme pouze konečný počet rovnovážných stavů.

(3) Teorie duality: Tato teorie používá a kombinuje množinově-teoretické metody a metody kalkulu, zejména v mikroekonomice. Připomeňme mj. práce Hotellinga, Roye, McKenzieho, Shepharda, Samuelsona a Diewerta.

(4) Agregovaná funkce poptávky: Teorie spotřebitele ukazuje, že funkce poptávky jednotlivců maximalizujích užitek musí splňovat jisté omezující podmínky. Sonnenschein (1973) jako první podal argument, že agregované funkce poptávky nejsou omezeny podmínkou, že individuální funkce poptávky vznikají z maximalizace užitku. Dále zmiňme práce Mantela (1974) a Debreua (1974).

(5) Jádro ekonomie a trhy s kontinuem obchodníků: Intuitivní pojem velkého počtu obchodníků spolu s předpokladem dokonalé soutěže vedl k tomu, že počet obchodníků konverguje k nekonečnu nebo že máme kontinuum obchodníků. Připomeňme práce Shubika (1959), Scarfa a Debreua (1962) aj.

(6) Dočasná rovnováha: Pojem dočasné rovnováhy byl zaveden Hicksem (1939). V takovéto rovnováze se obchod uskutečňuje sekvencionálně tak, že každý účastník předpovídá svůj budoucí zisk na základě současného a minulého stavu ekonomie. Rovnováha může obsahovat všechny ceny pohybující se dostatečně rychle k vyprodání všech trhů, nebo jinak řečeno dovolí přídělový systém.

(7) Výpočet rovnovážných cen: To je speciální případ výpočtu pevných bodů zobrazení, pro která je pevný bod interpretován jako rovnovážný cenový vektor, přičemž získané rozdělení je přijatelné, pokud se vyprodají všechny trhy. Hlavní práce jsou Scarf (1967, 1973).

(8) Teorie sociálního výběru: Teorie sociálního výběru se zabývá agregací preferencí jednotlivců do sociálního výběru. Základy byly položeny Arrowem (1951), v této knize jsou položeny základní kameny teorie a dokázány věty o možnosti resp. nemožnosti takovéhoto výběru.

(9) Optimální zdanění: První práce z této oblasti patří Ramseyovi (1937) a Hotellingovi (1938), nejdůležitější články pak Boiteuxovi (1956), Mirrleesovi (1971) a Diamondovi s Mirrleesem (1971).

(10) Teorie optimálního růstu: Toto téma bylo studováno zejména Samuelsonem se Solowem (1956), Samuelsonem (1965), Koopmansem, Galem a dalšími.

Původně byl tento problém formulován jakožto problém optimálních úspor Ramseyem (1928). Tento problém byl pak zobecněn a zkombinován s meziodvětvovým modelem růstu. Matematické základy jsou založeny na teorii dynamických systémů a teorii řízení.

(11) Teorie organizování: Tato oblast obsahuje teorii týmové práce, decentralizace, plánování a problém stimulace. Z novějších prací připomeňme práce Marschaka a Hurwicze.

Tento učební text si neklade žádné nároky na úplnost či původnost. Případné komentáře či kritické připomínky k textu očekávám nejlépe na e-mailové adrese

`paseka@math.muni.cz`

či jinou formou. Text je průběžně doplňován a měněn a je umístěn k volnému použití na ftp serveru oboru matematika PřF MU. Části textu jsou tvořeny referáty zpracovanými studenty Pavel Janík ml., Monika Ryndová, Libuše Tománková v rámci stejnomenné přednášky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. Veškerá zodpovědnost za styl a obsah je na autorovi.

Kapitola 1

MATEMATICKÉ PROGRAMOVÁNÍ S APLIKACEMI V EKONOMII

1 Úvod a přehled

Matematické programování se vztahuje k základnímu matematickému problému maximalizace funkce *. Podstata tohoto problému a způsoby jeho řešení jsou diskutovány v části 2. Historicky má tento problém kořeny v rozvoji početních metod. Odtud tedy jeho první využití bylo ve zpracování nejednodušího typu matematického programování, a sice hledání nevázaného extrému (maximalizace), což je probrano v části 3. Základní motivací pro další rozvoj početních metod byla snaha vyřešit obecnější úlohu mat. programování. To se často nazývá úloha *klasického programování*, ve které se hledá maximum funkce při omezení množinou rovnic. Některé úlohy matematického programování, které byly ovlivněny studiem ekonomických problémů se však nepodařilo vyřešit ani ve 20. století. Mezi tyto úlohy například patří *úlohy nelinearního matematického programování* kde se hledá maximum funkce při omezení množinou nerovnic, viz část 5. Specialní případ, důležitý sám o sobě, a který měl značný vliv na rozvoj teorie matematického programování, je *úloha linearního programování* tj. maximalizace linearní funkce při omezení množinou linearních nerovnic, viz část 6.

Aplikace matematického programování má širší uplatnění, např. v ekonomii našla řadu uplatnění. Vedla také k různým srovnávacím analýzám stability, které sloužily k porovnávání jeji účinnosti. Matematické programování vedlo zejména k hlubšímu náhledu do oblasti *mikroekonomie* , jak je dále diskutováno v části 7. Aplikace matematickéh programování jsou rozděleny do dvou úseků, na *neoklasickou teorii domácností* v části 8 a *neoklasickou teorii firmy* v části 9.

* Úlohy jsou zde řešeny jako maximalizace funkce. Pokud chceme funkci minimalizovat, stačí pouze změnit znaménko funkce a jinak postupovat stejně.

Kromě použití v základní matematické teorii (část 2 - 6) a aplikacích v ekonomii (část 7 - 8), má také matematické programování využití v jiných oblastech (např. fyzika, chemie, aj.). O těch se zde však nebudeme zmiňovat, odkaz na ně je možné najít v literatuře citované na konci. Také opomineme různá specifika matematického programování, jako je celočíselné programování, vícekriterialní programování, odkaz je opět uveden v literatuře.

2 Úloha matematického programování a způsoby jejího řešení

Obecná forma *úlohy matematického programování* může být zapsaná ve tvaru:

$$\max_{\mathbf{x}\in X} F(\mathbf{x}), \tag{1.1}$$

kde $\mathbf{x}$ je sloupcový vektor n vybraných proměnných,

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)', \tag{1.2}$$

$F(\mathbf{x})$ je funkce reálných proměnných,

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1.3}$$

a X je podmnožina n-rozměrného euklidovského prostoru,

$$X \subseteq E^n. \tag{1.4}$$

Obecně budeme předpokládat, že X je neprázdná, tj., že existuje *přípustný* vektor $\mathbf{x}$, kde $\mathbf{x}$ je přípustný pravě tehdy, když $\mathbf{x} \in X$. V ekonomii se vektor $\mathbf{x}$ často nazývá *vektor nástrojů* , funkce $F(\mathbf{x})$ *účelová funkce* a množina X *množina příležitostí*.

Základní ekonomický problém alokace vzácných zdrojů mezi navzájem si konkurujícími potřebami může být interpretován jako problém matematického programování, kde jednotlivá alokace zdroje je reprezentována příslušným výběrem vektoru nástrojů; vzácnost zdrojů je reprezentována množinou příležitostí, odrážející omezenost nástrojů. Potřeby jsou reprezentovány účelovou funkcí, jejichž výsledky jsou hodnoty příslušné ke každé alternativní alokaci. Funkce 1.1 může být tudiž interpretována v ekonomickém jazyku, jako výběr nástroje v rámci množiny příležitostí, tedy jako maximalizace účelové funkce. Existuje více způsobů řešení problému 1.1. *Globální maximum* funkce F je vektor $\mathbf{x}^*$ takový, že

$$\mathbf{x}^* \in X \quad \text{a} \quad F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x})\; \forall\, \mathbf{x} \in X \tag{1.5}$$

Řešení je tedy vektor nástrojů, získaný jako hodnota účelové funkce, která je větší nebo rovna než hodnota v libovolném jiném vektoru nástrojů. *Ostré globální maximum* je vektor $\mathbf{x}^*$, který splňuje:

$$\mathbf{x}^* \in X \quad \text{a} \quad F(\mathbf{x}^*) > F(\mathbf{x})\ \forall\, \mathbf{x} \in X,\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*. \tag{1.6}$$

2.1 Weierstrassova věta

Věta 2.1 Weierstrassova věta

Je-li funkce $F(\mathbf{x})$ spojitá a množina X je uzavřená a ohraničená tj. kompaktní a navíc neprázdná, pak existuje globální maximum.

Důkaz. Důkaz této věty je založen na faktu, že *obraz* X v zobrazení F je definován jako

$$F(X) = \{F(\mathbf{x}) | \mathbf{x} \in X\}, \tag{1.7}$$

což je uzavřená a ohraničená množina na reálné ose, a tedy musí obsahovat i maximální prvek, což je $F(\mathbf{x}^*)$. Měli by jsme však dát pozor na to, že podmínky věty jsou dostatečné, ale ne nutné pro existenci maxima. Maximum tedy může existovat, aniž jsou tyto podmínky splněny. (Např. maximalizace x^2 na intervalu $0 < x \leq 2$ má řešení). Weirstrassova věta může být zesílena za předpokladu, že $F(\mathbf{x})$ bude shora polospojitá. ■

2.2 Věta o lokálním a globálním maximu

Lokální maximum je vektor $\mathbf{x}^* \in X$ takový, že existuje nějaké $\varepsilon > 0$, přičemž

$$F(\mathbf{x}^*) \geq F(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in X \cap N_\varepsilon(\mathbf{x}^*). \tag{1.8}$$

Zde $N_\varepsilon(\mathbf{x}^*)$ je nějaké ε-okolí bodu $\mathbf{x}^*$. Maximum je lokální, poněvadž vektor nástrojů získaný jako hodnota účelové funkce není menší než hodnota v jakémkoliv jiném bodě náležejícím X a dostatečně blízko (tj. v $N_\varepsilon(x^*)$ pro nějaké $\varepsilon > 0$). Ostré lokální maximum je vektor $\mathbf{x}^* \in X$, který splňuje pro nějaké $\varepsilon > 0$

$$F(\mathbf{x}^*) > F(\mathbf{x}) \quad \forall\, \mathbf{x} \in X \cap N_\varepsilon(\mathbf{x}^*),\ \mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*. \tag{1.9}$$

Zřejmě, globální maximum je zároveň lokální (což však neplatí obráceně). Ostré (globální, resp. lokální) maximum je také (globální resp. lokální) maximum, opět to neplatí obráceně. Ostré lokální maximum je jednoznačně určeno.

Věta 2.2 Věta o lokálním a globálním maximu *Je-li účelová funkce $F(\mathbf{x})$ konkávní funkce a množina příležitostí X konvexní množina, pak každé lokální maximum je i zároveň globální a množina všech takovýchto řešení je konvexní.*

Je-li navíc $F(\mathbf{x})$ ostře konkávní funkce, pak řešení je jediné. Je-li $F(\mathbf{x})$ ostře kvazikonkávní, je lokální maximum jediné a zároveň globální [†].

Věta 2.2 je velice důležitá, neboť prakticky všechny metody řešící úlohu matematického programování spíše identifikují lokální než globální maximum. S použitím této věty je možné usuzovat na základě vlastností konkávnosti a konvexity, že lokální optimum je také globální.

3 Úloha bez omezení

Úloha maximalizace bez omezení je ta, že vybereme hodnoty z n proměnných tak, že maximalizujeme funkci F těchto proměnných:

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) \tag{1.10}$$

V tomto případě je množina příležitostí X (z 1.1) celý prostor E^n (nebo otevřená podmnožina E^n).

3.1 Věta o podmínkách prvního řádu

Věta 3.1 Věta o podmínkách prvního řádu *Je-li $F(\mathbf{x})$ diferencovatelná funkce, pak nutné podmínky prvního řádu proto, aby bod $\mathbf{x}^*$ byl bodem lokálního maxima funkce $F(\mathbf{x})$ jsou, že $\mathbf{x}^*$ je* stacionární bod *funkce $F(\mathbf{x})$, ve kterém jsou všechny první parcialní derivace nulové.*

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*), \frac{\partial F}{\partial x_2}(\mathbf{x}^*), \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*)\right) = \mathbf{0}. \tag{1.11}$$

$(\partial F/\partial \mathbf{x})(\mathbf{x}^*)$ *je* vektor gradientů *tj., $(1 \times n)$ řádkový vektor všech 1. parcialních derivací $F(\mathbf{x})$ a $\mathbf{0}$ je $(1 \times n)$-rozměrný vektor nul. Tedy, je-li $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ lokální maximum, pak*

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*,) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.12}$$

Důkaz. Důkaz této věty může být proveden pomocí Taylorova rozvoje pro hodnotu funkce kolem x^*. ■

[†] Funkce $F(\mathbf{x})$ je *kvazikonkávní funkce* právě tehdy, když pro $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X$, kde $F(\mathbf{x}^1) \geq F(\mathbf{x}^2)$ platí $F(\alpha\mathbf{x}^1 + (1-\alpha)\mathbf{x}^2) \geq F(\mathbf{x}^2)$ pro všechna α, $0 \leq \alpha \leq 1$. Funkce F je *ostře kvazikonkávní* právě tehdy, když pro $\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2 \in X, \mathbf{x}^1 \neq \mathbf{x}^2$, kde $F(\mathbf{x}^1) > F(\mathbf{x}^2)$ platí stejná nerovnost jako pro kvazikonkávní funkci, ale ostrá, pro všechna $\alpha, 0 < \alpha < 1$. Všimněme si, že konkávní funkce je kvazikonkávní, ale kvazikonkávní funkce nemusí být konkávní.

3.2 Věta o podmínkách 2. řádu

Věta 3.2 Věta o podmínkách 2. řádu *Je-li $F(\mathbf{x})$ spojitě diferencovatelná do 2. řádu, pak podmínka nutná proto, aby $\mathbf{x}^*$ byl bodem lokálníha maxima funkce $F(\mathbf{x})$, je, že příslušná Hessova matice typu $(n \times n)$ a tvaru*

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & \frac{\partial^2 F}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \tag{1.13}$$

je v bodě x^* negativně semidefinitní.

Důkaz. Důkaz může být opět proveden pomocí Taylorova rozvoje. ■

3.3 Věta o postačujících podmínkách

Věta 3.3 *Je-li funkce $F(\mathbf{x})$ spojitě diferencovatelná do 2. řádu a podmínky 1. řádu jsou splněny pro vektor gradientů 1.11 a navíc platí zesílené podmínky 2. řádu tj. 1.13 je negativně definitní, pak $\mathbf{x}^*$ je (ostré) lokální maximum pro $F(\mathbf{x}^*)$.*

Důkaz. V důkazu opět využijeme Taylorovu větu. ▌

■

Tyto tři podmínky uvedené pro úlohu bez omezení jsou analogické pro úlohu s omezením, která je diskutována v části 4 a 5.

3.4 Příklad : Kvadratické účelové funkce

Jako příklad úlohy bez omezení si uvedeme maximalizaci *kvadratické účelové funkce*

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j, \tag{1.14}$$

kde $\mathbf{c}$ je n-rozměrný vektor a Q je symetrická matice řádu $(n \times n)$. První část účelové funkce je linearní $\mathbf{c}\mathbf{x}$, druhá část je kvadratická $\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x}$ (vydělená dvěma pro pozdější snadnější úpravy). Z nutné podmínky 2. řádu pro existenci lokálního maxima 1.11 dostaneme

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{c} + \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{Q} = \mathbf{0}, \tag{1.15}$$

Z nutných podmínek 2. řádu 1.13 dostáváme, že $\mathbf{Q}$ je negativně semidefinitní. Z věty o postačujících podmínkách víme, že je-li $\mathbf{Q}$ negativně definitní, pak $\mathbf{x}^*$ je ostré lokální maximum. Tedy $\mathbf{Q}$ je negativně definitní, pak $F(\mathbf{x})$ je ostře konkávní a $\mathbf{x}^*$ je globální maximum. Mimo to, je-li $\mathbf{Q}$ regulární, pak pro x^* dostáváme

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}'. \tag{1.16}$$

Maximum účelové funkce potom je

$$F(\mathbf{x}^*) = -\mathbf{c}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}' + \frac{1}{2}(\mathbf{c}\mathbf{Q}^{-1})\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}') = -\frac{1}{2}\mathbf{c}\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}' > 0, \tag{1.17}$$

protože Q je negativně definitní.

4 Klasické programování: Lagrangeovy multiplikátory

Úloha klasického programování je ta, že vybereme hodnoty z n proměnných tak, že maximalizujeme funkci těchto proměnných na množině stejných omezení.

$$\max_x F(\mathbf{x}) \quad \text{pro} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}. \tag{1.18}$$

Tento vektor nástrojů $\mathbf{x}$ a hlavní (cílová, účelová) funkce $F(\mathbf{x})$ jsou stejné, jako v 1.1, kde $F(\mathbf{x})$ je reálná funkce definována na E^n. Vektor reálných funkcí $g(\mathbf{x})$ je zobrazení z E^n do E^m, znázorňující m-omezené fce a sloupcový vektor $\mathbf{b}$ je $m \times 1$ rozměrný vektor omezujících konstant,

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{pmatrix}, \ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

V termínech primárního (základního) problému 1.1 klasický problém matematického programování koresponduje s případem, ve kterém množina příležitostí může být zapsána jako

$$\begin{aligned} X &= \{\mathbf{x} \in E^n | \mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{b}\} \\ &= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)' |\, g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = b_i, \ i = 1, 2, \ldots, m\}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

4.1 Věta o Lagrangeových multiplikátorech

Popis řešení klasického problému programování, který je analogický s Větou o podmínkách 1. řádu pro neomezené úlohy, je získán pomocí Věty o Lagrangeových multiplikátorech. Pro tuto větu zavedeme řádkový vektor m-dodatečných nových proměnných nazývaných Lagrangeovy multiplikátory,

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_m), \tag{1.21}$$

a to jeden pro každé dané omezení, *Lagrangeova funkce* je pak definována jako následující reálná funkce n-původních a m-přidaných proměnných,

$$\begin{aligned} L(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= F(\mathbf{x}) + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ &= F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} y_i(b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)), \end{aligned} \tag{1.22}$$

kde poslední výraz je skalárním součinem řádkového vektoru Lagrangeových multiplikátorů a sloupcového vektoru složeného z rozdílu omezujících konstant a omezujících funkcí. Potom, v souladu s větou o Lagrangeových multiplikátorech, předpokládáme, že $n > m$ (kde $n - m$ je stupeň volnosti), $F(\mathbf{x})$ a $g(\mathbf{x})$ je $m + 1$ funkcí se spojitými prvními parciálními derivacemi a omezující podmínky jsou lineárně nezávislé v řešení, tj. jestliže $\mathbf{x}^*$ je lokální maximum úlohy,

$$\rho\left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\right) = \rho\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \ldots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}^*) & \ldots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}^*) \end{pmatrix} = m, \tag{1.23}$$

(tj. Jacobiho matice složená z 1. parciálních derivací omezujících funkcí rozměru $m \times n$ má plnou řádkovou hodnost), nutné podmínky 1. řádu tvoří pak $m + n$ nulovacích podmínek prvních parciálních derivací Lagrangeovy funkce $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \quad (\,n \text{ podmínek}\,), \tag{1.24}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0} \qquad (\,m \text{ podmínek}\,), \tag{1.25}$$

kde posledních m podmínek vyžaduje, aby omezení bylo nalezeno právě v $\mathbf{x}^*$.

Věta 4.1 Věta o Lagrangeových multiplikátorech *Je-li $\mathbf{x}^*$ bod lokálního maxima (extrému), pak existuje m-rozměrný vektor Lagrangeových multiplikátorů $\mathbf{y}^*$ takový, že dle 1.24 je gradient $F(\mathbf{x})$ v $\mathbf{x}^*$ je lineární kombinací gradientů funkcí $g_i(\mathbf{x})$ v tomto bodě, přičemž Lagrangeovy multiplikátory budou koeficienty této lineární kombinace, a to*

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}) \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) = \sum_{i=1}^{m} y_i^* \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*),\ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.26}$$

Důkaz. Tato věta je obvykle dokazována užitím věty o implicitní funkci. ▌

■

Těchto n podmínek je analogických s podmínkami 1. řádu 1.11 nulování vektoru gradientu. Ve skutečnosti proto věta redukuje na Větu o podmínkách 1. řádu v případě, že $m = 0$, což je právě neomezený případ.

Druhá část věty o Lagrangeových multiplikátorech nám dává interpretaci těchto m dodatečných proměnných. Nezahrnuje jednu úlohu klasického programování, ale celou množinu takových úloh, které jsou charakterizovány omezujícími konstantami $\mathbf{b}$. Jestliže se některá z těchto konstant změní, změní se i hodnota maximalizující účelové funkce. Maximální hodnotu dostaneme jako

$$F^* = F(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*), \tag{1.27}$$

kde druhá rovnost vychází z faktu, že omezení vyhovují řešení 1.25. Lagrangeovy multiplikátory v jejich optimálních hodnotách $\mathbf{y}^*$ měří stupeň přírůstku maximalizované hodnoty F^*, podle toho, jak se příslušné omezující konstanty mění,

$$\mathbf{y}^* = \partial F^*/\partial b \; i.e. \; y_i^* = \partial F^*/\partial b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.28}$$

Tedy každý Lagrangeův multiplikátor měří citlivost maximalizované hodnoty účelové funkce na změny příslušných omezujících konstant, přičemž celá další část úlohy zůstává stejná. V ekonomických úlohách, ve kterých F má rozměr hodnoty (cena x množství) zisku či důchodu a $\mathbf{b}$ má rozměr množství jako vstup či výstup, Lagrangeovy multiplikátory $\mathbf{b}^*$ interpretujeme jako cena, nazýváme ji *stínová cena*, z toho důvodu, abychom ji odlišili od tržní ceny. Měří přitom přírůstek hodnoty v případě změny omezení.

Geometrickou interpretaci a charakter řešení můžeme pro klasické programování získat přes Lagrangeovy multiplikátory. Rovnost omezení definuje množinu příležitostí X v 1.20, které za předpokladu 1.23 má rozměr $n - m$. Nezávislost předpokladu v 1.23 implikuje, že v řešení $\mathbf{x}^*$, každá směrnice d$\mathbf{x}$ vyhovující

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\, d\mathbf{x} = \mathbf{0} \text{ tj. } \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*)\, d\, x_j = 0, \; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.29}$$

leží v tečném nadrovině k X v bodě $\mathbf{x}^*$. Gradienty vektorů omezujících funkcí $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x^*)$ jsou ortogonální k této tečnému nadrovině v bodě x^*. Podmínky 1. řádu 1.26 znamenají geometricky, že gradient vektoru účelové funkce $(\partial F/\partial x)(x^*)$, pro kterou funkční hodnoty bodů $F(\mathbf{x})$ ve směru gradientu zvětší směrem k x^*, je vážená kombinací gradientů vektorů omezujících funkcí, váhy jsou Lagrangeovy multiplikátory $\mathbf{y}^*$. Tedy $(\partial F/\partial x)(x^*)$ je také ortogonální k tečné nadrovině k X v bodě $\mathbf{x}^*$ a to ve směru d$\mathbf{x}$ v tečné nadrovině,

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\, d\,\mathbf{x} = \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\, d\,\mathbf{x} = 0. \tag{1.30}$$

4.2 Věta o ohraničené Hessově matici

Analogií v případě klasického programování k větě o podmínkách 2.řádu pro neomezené problémy je věta o ohraničené Hessově matici. Podle této věty Hessova matice druhých parciálních derivací Lagrangeovy funkce

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}, \tag{1.31}$$

musí být negativně semidefinitní na množině vektorů d$\mathbf{x}$ určené splněním m podmínek

$$d\mathbf{g} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*)\,\mathrm{d}\,\mathbf{x} = 0, \tag{1.32}$$

kde (x^*, y^*) je bod lokálního maxima.

4.3 Věta o postačujících podmínkách pro klasické programování

Poslední analogií je věta o postačujících podmínkách. Podle věty o postačujících podmínkách pro klasické programování, jestliže je splněno $n+m$ podmínek 1.řádu 1.24 a 1.25 pro bod $\mathbf{x}^*$, potom zesílené podmínky ohraničené Hessovy matice, které zaručí, že Hessova matice v 1.31 je negativně definitní na množině určené 1.32, nám zajistí, že $\mathbf{x}^*$ je bod lokálního maxima pro funkci $F(\mathbf{x})$ s m omezujícími podmínkami.

Ekvivalentně, podmínky vyžadují aby ohraničená Hessova matice, definovaná jako Hessova matice funkce $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ na všech proměnných

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{g}'}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \ldots 0 & \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ 0 \ldots 0 & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_1} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} \cdots \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots \quad \vdots & \vdots \quad \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \cdots \frac{\partial g_m}{\partial x_n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_n \partial x_1} \frac{\partial^2 L}{\partial x_n^2} \cdots \end{pmatrix}, \tag{1.33}$$

kde $\partial g / \partial \mathbf{x}$ je Jacobiho matice z 1.23, splní $n - m$ podmínek tak, že v posledních $n - m$ hlavních minorech se střídají znaménka, přičemž znaménko prvního bude $(-1)^{m+1}$. Poznamenejme, že obě tyto věty, tato i předcházející, se redukují na odpovídající věty pro neomezený případ, kdy $m = 0$.

4.4 Příklad: Kvadraticko-lineární úloha

Příklad klasického programování, který vychází z oddílu 3.4, je kvadraticko-lineární úloha:

$$\max_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Q}\mathbf{x} \quad \text{pro} \quad \mathbf{A}\,\mathbf{x} \,=\, \mathbf{b}. \tag{1.34}$$

Zde je účelová funkce stejná jako v 1.14, a omezení je m linearních rovnic,

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x} = \mathbf{b}\; i.e. \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.35}$$

určených maticí A typu $m \times n$ a sloupcovým vektorem $\mathbf{b}$ typu $m \times 1$. Lagrangeova funkce je pak

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{cx} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Qx} + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}), \tag{1.36}$$

kde $\mathbf{y}$ je vektor Lagrangeových multiplikátorů. Použitím $n + m$ podmínek 1.řádu 1.24, 1.25,

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} + \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{Q} - \mathbf{y}^*\mathbf{A} = \mathbf{0}, \tag{1.37}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{Ax}^* = \mathbf{0}. \tag{1.38}$$

Těchto $n + m$ podmínek vyžaduje, aby platilo

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1}(\mathbf{c}' - \mathbf{A}'\mathbf{y}^{*\prime}). \tag{1.39}$$

Lagrangeův multiplikátor může být získán vynásobením maticí A a užitím omezení

$$\mathbf{A}\,\mathbf{x}^* = -\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}' + (\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')\mathbf{y}^{*\prime} = \mathbf{b}. \tag{1.40}$$

Najděme tedy řešení pro vektor Lagrangeových multiplikátorů

$$\mathbf{y}^* = (\mathbf{b}' + \mathbf{c}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')(\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}, \tag{1.41}$$

a dosazením tohoto řešení do 1.39 obdržíme

$$\mathbf{x}^* = -\mathbf{Q}^{-1}[\mathbf{c}' - \mathbf{A}'(\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{b}' + \mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{c}')]. \tag{1.42}$$

Označíme-li $\overline{\mathbf{x}}^*$ řešení úlohy bez omezení v 1.10 dané 1.16, řešení omezeného problému může být psát jako

$$\mathbf{x}^* = \bar{\mathbf{x}}^* + \mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}'(\mathbf{A}\,\mathbf{Q}^{-1}\mathbf{A}')^{-1}(\mathbf{b}' - \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}}^*). \tag{1.43}$$

Tedy, jestliže $\overline{\mathbf{x}}^*$ odpovídá omezujícím podmínkám, potom to je také řešení úlohy s omezením. Mimo to rozdíl mezi řešením úlohy s omezením a bez omezení, $\mathbf{x}^* - \overline{\mathbf{x}}^*$ je lineární funkcí množství, pro která řešení úlohy bez omezení nevyhovuje omezující podmínce $\mathbf{b} - A\overline{\mathbf{x}}^*$.

5 Nelineární programování - Kuhn-Tuckerovy podmínky

Úloha nelineárního programování spočívá ve volbě nezáporných hodnot n proměnných tak, aby maximalizovaly funkci těchto n proměnných, které splňují m nerovností,

$$\max_x F(\mathbf{x}) \quad \text{pro} \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{1.44}$$

Zde *vektor nástrojů* $\mathbf{x}$ a *účelová funkce* $F(\mathbf{x})$ jsou stejné jako v 1.1, kde $F(\mathbf{x})$ je reálná spojitě diferencovatelná funkce definovaná na E^n. Hodnoty vektorové *omezující funkce* $g(\mathbf{x})$ a *vektor omezení* $\mathbf{b}$ jsou stejné jako v 1.10, kde $g(\mathbf{x})$ je spojité diferencovatelné zobrazení z E^n do E^m. Z hlediska základního problému 1.1, úloha nelineárního programování koresponduje s případem, ve které množina příležitostí může být zapsaná jako:

$$\begin{aligned} X &= \{\mathbf{x} \in E^n \,|\, \mathbf{g}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\} \\ &= \{(x_1, x_2, \dots, x_n)' | g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i,\ i = 1, 2, \dots, m, \\ &\quad\ x_j \geq 0,\ j = 1, 2, \dots, n\}. \end{aligned} \tag{1.45}$$

Tato úloha je zevšeobecnění úlohy klasického programování 1.18, protože rovnosti jsou specialním případem nerovností.

5.1 Věta o Kuhn-Tuckerových podmínkách

Charakteristika řešení úlohy nelineárního programování, která je analogická jak s Větou o podmínkách 1.řádu pro úlohy bez omezení a s Větou o Lagrangeových multiplikátorech pro klasické programování, je zajištěna Větou o Kuhn-Tuckerových podmínách. Stejně jako v případě klasického programování zavedeme řádkový vektor m dodatečných nových proměnných, nazývaných Lagrangeovy multiplikátory,

$$\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m), \tag{1.46}$$

a to pro každé omezení. Lagrangeova funkce může být definována jako následující reálná funkce o n původních a m přidaných proměnných:

$$\begin{aligned} l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= F(\mathbf{x}) + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x})) \\ &= F(x_1, x_2, \dots, x_n) + \textstyle\sum_{i=1}^m y_i(b_i - g_i(x_1, x_2, \dots x_n)), \end{aligned} \tag{1.47}$$

stejně jako v 1.22. *Kuhn-Tuckerovy podmínky* jsou potom definovány v bodech $\mathbf{x}^*$,$\mathbf{y}^*$, jako $2n + 2m$ nerovností a 2 rovnosti:

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq \mathbf{0}, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \geq \mathbf{0} & (n + m \text{ podmínek}), \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*)\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, & \mathbf{y}^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = \mathbf{0} & (2 \text{ podmínky}), \\ \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} & \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0} & (n + m \text{ podmínek}). \end{array} \tag{1.48}$$

Z toho $n+m$ nerovností reprezentuje omezení původního problému:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \mathbf{b} - \mathbf{g}(\mathbf{x}^*) \geq \mathbf{0} \qquad (m \text{ podmínek}), \tag{1.49}$$

$$\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0} \qquad (n \text{ podmínek}), \tag{1.50}$$

zatímco přidaných $n+m$ nerovností vyžaduje

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) \leq \mathbf{0} \qquad (n \text{ podmínek}), \tag{1.51}$$

$$\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0} \qquad (m \text{ podmínek}), \tag{1.52}$$

Přitom n podmínek v 1.51 je napsáno raději jako nerovnosti než rovnosti ve 1.24, kvůli nezáporným omezením na $\mathbf{x}$ v 1.50, nebo, více všeobecně, protože hraniční řešení jsou přípustné. Dalších m podmínek v 1.52 vyžaduje nezápornost Lagrangeova multiplikátoru, je to z toho důvodu, že omezení v 1.49 jsou psaná raději jako nerovnosti než rovnosti: jestliže omezení je rovnost, potom příslušný element $\mathbf{y}^*$ je neomezený stejně jako v klasickém případu programování.

Dvě podmínky rovnosti Kuhna-Tuckera:

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*)\mathbf{x}^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) \right) x_j^* = 0, \tag{1.53}$$

$$\mathbf{y}^* \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = \sum_{i=1}^{m} y_i^*(b_i - g_i(\mathbf{x}^*)) = 0, \tag{1.54}$$

dohromady s ostatními podmínkami, je vyžadováno, aby všechny výrazy v obou těchto sumách byly nulové. Tedy jestliže jedna z nerovností vyhovuje řešení i v případě, že je ostrá, potom je odpovídající (duální) proměnná rovna nule.

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) - \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_j}(\mathbf{x}^*) < 0 \quad \text{implikuje} \quad x_j^* = 0,\ j = 1,2,\ldots,n, \tag{1.55}$$

$$g_i(\mathbf{x}^*) < b_i \quad \text{implikuje} \quad y_i^* = 0,\ i = 1,2,\ldots,m, \tag{1.56}$$

Tyto podmínky jsou známé jako *slabé doplňující podmínky nelineárního programování.* Podmínka 1.54 také implikuje, že pro řešení je hodnota Lagrangiánu zároveň maximalní hodnota účelové funkce.

$$L(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*) = F(\mathbf{x}^*) = F^*. \tag{1.57}$$

Podle podmínek Věty Kuhna-Tuckera platí, že jestliže je splněno vhodné silné omezení, pak Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou nutné podmínky pro úlohy nelineárního programování, takže když $\mathbf{x}^*$ je řešením 1.44, pak zde existuje vektor Lagrangeových multiplikátorů $\mathbf{y}^*$ splňující 1.48.

Stejně jako v případě klasického programování, řešení metodou Lagrangeových multiplikátoru interpretujeme jako citlivosti maximalizované hodnoty účelové funkce na změny omezujících konstant,

$$\mathbf{y}^* = \frac{\partial F^*}{\partial \mathbf{b}} \quad i.e. \quad y_i^* = \frac{\partial F^*}{\partial b_i},\ i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.58}$$

kde F^* je definována jako

$$F^* = F(\mathbf{x}^*) = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*). \tag{1.59}$$

Přesněji, z doplňujících podmínek 1.56 vyplýva, že když v řešení je ostrá nerovnost, pak příslušný Lagrangeův multiplikátor je roven nule a tedy růst omezující konstanty o vhodně malou hodnotu nezmění maximalizovanou hodnotu účelové funkce.

5.2 Věta Kuhn-Tuckera o sedlovém bodě

Věta, která je analogická Větě o postačujících podmínkách pro úlohy bez omezení a Větě o postačujících podmínkách úlohy klasického programování, je reprezentována Kuhn-Tuckerovou větou o sedlovém bodu. Vezmeme-li Lagrangeovu funkci definovanou v 1.47, pak sedlový bod je definován jako:

$$\max_x \min_y L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad pro \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{1.60}$$

Tudíž $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ řeší úlohu o sedlovém bodě právě tehdy, když pro všechna $\mathbf{x} \geq 0$, $\mathbf{y} \geq 0$ platí,

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) \leq L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}) \tag{1.61}$$

Podle Kuhna-Tuckerovy věty o sedlovém bodu, postačující podmínka pro $\mathbf{x}^*$, řešící úlohu nelineárního programování 1.44 je, když existuje $\mathbf{y}^*$ takové, že $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ splňuje podmínku 1.60. Tedy jestliže $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ splňuje podmínky sedlového bodu v 1.61, potom $\mathbf{x}^*$ řeší úlohu nelineárního programování. Zatímco tato část věty nevyžaduje žádnou konvexnost nebo omezující předpoklady, obrácení věty takové předpoklady vyžaduje.

Podle druhé části věty platí, že když $\mathbf{x}^*$ řeší úlohu nelineárního programování a předpokládá se, že podmínka vhodné kvalifikace omezení je splněna a že se jedná o *úlohu konkávního programování*, ve které $F(\mathbf{x})$ je konkávní funkce a každá omezující funkce $g_i(\mathbf{x})$ je konvexní funkce, potom zde existuje nenulový vektor $\mathbf{y}^*$ takový, že $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ je řešením problému nalezení sedlového bodu.

Tudíž za těchto předpokladů jsou obě úlohy shodné. Měli bychom dávat pozor na to, že žádná část věty o sedlovém bodě nevyžaduje předpoklad diferencovatelnosti $F(\mathbf{x})$ nebo $g(\mathbf{x})$.

Bude-li diferencovatelná, pak se jedná o úlohu konkávního programování, Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou dostačujícími podmínkami tak, že když $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ vyhovují 1.48, pak $\mathbf{x}^*$ je řešení 1.44.

Tudíž, pro úlohu konkávního programování, ve kterém vhodná omezující podmínka je splněna, Kuhn-Tuckerovy podmínky jsou nutné a postačující pro $\mathbf{x}^*$ řešící úlohu nelineárního programování.

Například je-li úloha úlohou konkávního programování, potom za předpokladu, že $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ splňuje Kuhn-Tuckerovy podmínky, $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ také řeší úlohu o sedlovém bodě a $\mathbf{x}^*$ řeší úlohu nelineárního programování. Když je navíc splněna vhodná omezující podmínka, potom všechny tři úlohy jsou shodné.

Jako v případě klasického programování, geometrická interpretace může být dána pro úlohu nelineárního programování a jeho řešení pomocí dvou vět Kuhna-Tuckera.

Z podmínek Kuhna-Tuckera 1.51 a 1.52, ve vnitřním řešení, kde všechna $\mathbf{x}^* > 0$ (nebo když nezápornost $\mathbf{x}$ není částí úlohy), podmínky 1.51 a 1.52, když všechna $\mathbf{x}^* > 0$ (nebo když nezápornost $\mathbf{x}$ není část problému).

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{y}^* \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}, \quad \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}. \tag{1.62}$$

Tudíž gradient účelové funkce musí být v řešení nezáporná vážená kombinace gradientů omezující funkce. Vektor gradientu účelové funkce musí proto ležet v kuželu generovaném normálami k množině příležitostí v bodě $\mathbf{x}^*$.

5.3 Příklad: Úloha kvadratického programování

Příkladem úlohy nelineárního programování je úloha kvadratického programování (jako v 1.34, kde omezení jsou ve formě množiny nerovností)

(5.20)

$$\max_x F(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} + \frac{1}{2}\mathbf{x}'\mathbf{Qx} \quad \textit{pro} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{1.63}$$

Zde $\mathbf{c}$ je daný $1 \times n$ řádkový vektor, Q je daná $n \times n$ negativně semidefinitní symetrická matice, A je daná $m \times n$ matice a $\mathbf{b}$ je daný $m \times 1$ sloupcový vektor. Lagrangián (Lagrangeho polynom) je daný v 1.36 a Kuhn - Tuckerovy podmínky jsou

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} + \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{Q} - \mathbf{y}^*\mathbf{A} \leq \mathbf{0}, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{Q}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^* = (\mathbf{c} + \mathbf{x}^{*\prime}\mathbf{Q} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, & \mathbf{y}^*\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{Q}\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}, & \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}. \end{array} \tag{1.64}$$

Tyto podmínky charakterizují řešení úlohy. Protože Q je negativně semidefinitní, účelová funkce $F(\mathbf{x})$ je konkávní a lineární transformace $A\mathbf{x}$ je konvexní. Mimoto jsou splněny omezující kvalifikované podmínky. Úloha je jedna z úloh konkávního programování, ve které Kuhn - Tuckerovy podmínky 1.64 jsou obě nutné a dostačující. Vektor $\mathbf{x}^*$ tak řeší úlohu kvadratického programování 1.63 právě tehdy, když $\mathbf{y}^*$ je takové, že $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ vyhovují Kuhn - Tuckerovým podmínkám 1.64.

6 Lineární programování

Úloha lineárního programování je to, že vybereme nezáporné hodnoty n proměnných tak, že maximalizujeme lineární tvar těchto proměnných, za podmínek omezení m lineárními nerovnicemi.

$$\max_x \mathbf{cx} \quad \text{pro} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{1.65}$$

$\mathbf{x}$ je vektor nástrojů stejně jako v 1.1, 1.10 a 1.18; A je daná $m \times n$ matice (a_{ij}); $\mathbf{b}$ je daný sloupcový vektor s m prvky jako v 1.18 a 1.44; a $\mathbf{c}$ je daný řádkový n-rozměrný vektor. Z pohledu úlohy nelineárního programování 1.44 lineární úloha odpovídá případu, ve kterém je účelová funkce v lineárním tvaru.

$$F(\mathbf{x}) = \mathbf{cx} = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j, \tag{1.66}$$

a každá z omezujících funkcí je rovněž v lineárním tvaru

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{Ax} \quad \text{tj.} \quad g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{1.67}$$

Úloha je tedy speciálním případem úlohy nelineárního programování a je dvojnásobně lineární proto, že je lineární jak v účelové funkci, tak i v omezujících podmínkách. Poněvadž lineární tvar je jak konkávní, tak i konvexní, úloha, uvažovaná jako speciální případ úlohy nelineárního programování, je ekvivalentní s úlohou sedlového bodu

$$\max_x \min_y L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{cx} + \mathbf{y}(\mathbf{b} - \mathbf{Ax}) \quad \text{pro} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{1.68}$$

S každou úlohou lineárního programování souvisí duální úloha. Jestliže primární úloha je daná jako v 1.65, pak duální úloha je

$$\min_y \mathbf{yb} \quad \text{pro} \quad \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{1.69}$$

Tato úloha je rovněž hledáním extrémů lineární formy s omezujícími podmínkami množiny lineárních nerovností omezené výběrem nezáporných hodnot proměnných. Proměnné duální úlohy, y, jsou Lagrangeovými multiplikátory primární úlohy. Duální úloha duální úlohy je primární úloha, duální úlohou minimalizační úlohy je maximalizační úloha, v duální úloze omezující konstanty se stávají koeficienty účelové funkce, zatímco koeficienty účelové funkce se stávají omezujícími konstantami.

Úloha sedlového bodu pro duální úlohu je

$$\min_{y}\max_{x} L(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathbf{yb} + (\mathbf{c} - \mathbf{yA})\mathbf{x} \quad pro \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{1.70}$$

a tedy Lagrangeova funkce je stejná jak pro primární, tak pro duální úlohu

$$L(\mathbf{x},\mathbf{y}) = L(\mathbf{y},\mathbf{x}) = \mathbf{cx} + \mathbf{yb} - \mathbf{yAx}. \tag{1.71}$$

Kuhn - Tuckerovy podmínky, které jsou stejné jak pro primární, tak pro duální úlohu, jsou

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{c} - \mathbf{y}^*\mathbf{A} \leq \mathbf{0}, & \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x}^* = (\mathbf{c} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, & \mathbf{y}^*\frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{x}^* \geq \mathbf{0}, & \mathbf{y}^* \geq \mathbf{0} \end{array} \tag{1.72}$$

Tři hlavní věty lineárního programování - *věta o existenci*, *věta o dualitě* a *slabá doplňující věta* – mohou být dokázány na základě těchto Kuhn-Tuckerových podmínek.

6.1 Věta o existenci

Podle věty o existenci platí, že když přípustné body existují jak pro primární, tak pro duální úlohu, pak optimální řešení existují pro obě úlohy. Tedy jestliže existují $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{y}_0$ takové, že

$$\mathbf{Ax^0} \leq \mathbf{b},\ \mathbf{x^0} \geq \mathbf{0}, \qquad \mathbf{y^0A} \geq \mathbf{c},\ \mathbf{y^0} \geq \mathbf{0}, \tag{1.73}$$

pak existují $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ řešící jak primární, tak i duální úlohu.

6.2 Věta o dualitě

Z věty o dualitě vyplývá že, pro každé přípustné vektory $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$ jak pro primární, tak duální úlohu platí

$$\mathbf{cx^0} \leq \mathbf{y^0b}. \tag{1.74}$$

Mimoto přípustné vektory, které vyhovují těmto nerovnostem a rovnostem, poskytují řešení $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ duální úlohy, kde

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}. \tag{1.75}$$

6.3 Slabá doplňující věta

Podle této věty $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$, které jsou přípustnými vektory duální úlohy, jsou řešením této úlohu tehdy a jen tehdy, když vyhovují dvěma podmínkám rovnosti Kuhn - Tuckerových podmínek 1.72, dané jako

$$(\mathbf{c} - \mathbf{y}^*\mathbf{A})\mathbf{x}^* = \mathbf{0}, \qquad \mathbf{y}^*(\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}. \tag{1.76}$$

Z těchto podmínek optimalizované hodnoty duální účelové funkce jsou si rovny navzájem a rovněž hodnotám obou Lagrangeových funkcí v tomto řešení

$$\mathbf{c}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = L(\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*) = L(\mathbf{y}^*, \mathbf{x}^*). \tag{1.77}$$

Spolu s ostatními Kuhn - Tuckerovými podmínkami podmínky v 1.76 znamenají, že když jedna z omezujících nerovností je vyhovující v řešení jako ostrá nerovnost, pak odpovídající duální proměnné jsou nulové, tj.

$$\begin{array}{lll} (c_j - \sum y_i^* a_{ij}) < 0 & \text{implikuje} & x_j^* = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \\ (b_i - \sum a_{ij} x_j^*) > 0 & \text{implikuje} & y_i^* = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \end{array} \tag{1.78}$$

Tyto podmínky jsou známé jako slabé doplňující podmínky lineárního programování.

Stejně jako v posledních dvou sekcích, můžeme úlohu lineárního programování a její řešení interpretovat i geometricky. Množina příležitostí je polyedr - uzavřená konvexní množina, poněvadž to je průsečík $m + n$ poloprostorů definovaný m nerovnostmi a n nezápornými omezeními. Vrstevnice účelové funkce jsou nadroviny a problém je řešen nejvyšší nadrovinou uvnitř polyedru. Toto řešení nemůže být ve vnitřním bodě. Řešení se musí nacházet ve vrcholu (v tomto případě je jednoznačné) nebo podél hraniční plochy (v tom případě je nejednoznačné).

7 Mikroekonomie: matematické programování a teorie srovnávací stability

Mikroekonomické úlohy jsou typicky formulované pro ekonomické subjekty (jako jsou např. domácnosti, firmy), které se pokoušejí maximalizovat účelovou funkci při jistých omezeních. Proto jsou formulované jako úlohy matematického programování. Teorie matematického programování je pak používána pro analýzu těchto problémů - tj., specificky charakterizovat rovnovážné řešení a určit jak se řešení mění při změně parametrů úlohy. Posledně zmíněné vymezení - tj., jak změny v parametrech ovlivňují řešení - je nazýváno srovnávací stabilita, protože porovnává dvě rovnovážné situace - počáteční rovnováhu a rovnováhu po jedné nebo více změnách v parametrech.

Charakteristika řešení je obyčejně založena na podmínkách 1. řádu úlohy matematického programování a analýza srovnávací statistikyje založena na rozdílu podmínek 1. řádu. Výsledek kvalitativního nebo kvantitativního určení o tom, jak parametry ovlivňují řešení, dává jisté omezení v řešení.

7.1 Věta srovnávací stability

Předpokládaná úloha jistého ekonomického subjektu může být charakterizována jako výběr jistých proměnných $\mathbf{x}$ stejně jako v úloze klasického programování 1.18 s jednoduchým omezením. Účelová funkce a omezení mohou záviset na q-rozměrném sloupcovém vektoru parametrů $\mathbf{a}$, a tedy úloha může být vyjádřena jako

$$\max_x F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) \quad \text{pro} \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = b. \tag{1.79}$$

Řešení této úlohy je charakterizováno podmínkami 1. řádu 1.24 a 1.25, které zde jsou ve tvaru

$$b - g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = 0, \tag{1.80}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) - y\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = \mathbf{0}, \tag{1.81}$$

kde y je jednoduchý Lagrangeův multiplikátor odpovídající jednoduchému omezení. Řešení $\mathbf{x}^*$, y^* závisejí celkově na $q+1$ parametrech úlohy $(\mathbf{a}, b)$

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{a}, b), \tag{1.82}$$

$$y^* = y^*(\mathbf{a}, b). \tag{1.83}$$

Vložením tohoto řešení do podmínek 1. řádu dostáváme $n+1$ identit

$$b - g(\mathbf{x}(\mathbf{a}, b), \mathbf{a}) \equiv 0, \tag{1.84}$$

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(\mathbf{a}, b), \mathbf{a}) - y(\mathbf{a}, b)\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}(\mathbf{a}, b), \mathbf{a}) \equiv 0. \tag{1.85}$$

Předpokládané funkce $F(\mathbf{x})$ a g(x) jsou spojitě diferencovatelné, identity 1.84 a 1.85 můžeme diferencovat do tvaru

$$\mathrm{d}\, b - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\mathrm{d}\, \mathbf{x} - \frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}}\mathrm{d}\, \mathbf{a} = 0, \tag{1.86}$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}^2}\mathrm{d}\,\mathbf{x} + \frac{\partial^2 F}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{a}}\mathrm{d}\,\mathbf{a} - \left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right)'\mathrm{d}\,y - y\frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x}^2}\mathrm{d}\,\mathbf{x} - y\frac{\partial^2 g}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{a}}\mathrm{d}\,\mathbf{a} = \mathbf{0}, \tag{1.87}$$

kde

$$\frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial g}{\partial a_1}, \frac{\partial g}{\partial a_2}, \ldots, \frac{\partial g}{\partial a_q}\right), \tag{1.88}$$

$$\mathrm{d}\,\mathbf{x} = (\mathrm{d}\,x_1, \mathrm{d}\,x_2, \ldots, \mathrm{d}\,x_n)', \tag{1.89}$$

$$\mathrm{d}\,\mathbf{a} = (\mathrm{d}\,a_1, \mathrm{d}\,a_2, \ldots, \mathrm{d}\,a_n)', \tag{1.90}$$

Řešení pro d$\mathbf{x}$ a dy dává, v maticovém zápisu,

$$\begin{pmatrix} \mathrm{d}\,y \\ \mathrm{d}\,x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right) \\ -\left(\frac{\partial g}{\partial \mathbf{x}}\right)' & \frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}^2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} d\,\mathbf{a} - d\,\mathbf{b} \\ -\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \mathbf{x}\partial \mathbf{a}}\right) d\,\mathbf{a} \end{pmatrix}, \tag{1.91}$$

kde předpokládáme, že ohraničená Hessova matice je regulární.

S užitím tohoto výsledku a s předpoklady, že $F(\mathbf{x})$ a g($\mathbf{x}$) jsou spojitě diferencovatelné, je zde přípustný bod a ohraničená Hessova matice je regulární, srovnávací statická věta udává, že existuje téměř vždy zobecněná Slutského rovnice ve formě

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}}\right)_{comp} + \frac{1}{y}\left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b}\right)\left(\frac{\partial L}{\partial \mathbf{a}}\right). \tag{1.92}$$

Zde "comp" značí, že je kompenzována parciální derivace podle a b tak, že F je konstantní. Tuto zobecněnou rovnici lze přepsat do tvaru

$$\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}} + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b}\frac{\partial g}{\partial \mathbf{a}} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{a}}\right)_{comp} + \frac{1}{y}\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial b}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{a}} = S(\mathbf{a}, b). \tag{1.93}$$

Zde jsou výrazy vlevo "pozorovatelné", derivace vybraných proměných podle $q+1$ parametrů, derivace podle b, vážená derivací g dle $\mathbf{a}$. Výrazy vpravo jsou "nepozorovatelné", první je matice kompenzované parciální derivace a druhá je nepozorovatelná, když je účelová funkce jedinečná pouze na monotóní transformaci. Matice $n \times q$ vpravo, $S(a, b)$, je *zobecněná matice substitučního efektu.* Druhá část věty dává, že pokud $q = n$, tedy $S(\mathbf{a}, b)$ je čtvercová, potom je symetrická tehdy a jen tehdy, když obě funkce, účelová funkce $F(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ a omezující funkce $g(\mathbf{x}, \mathbf{a})$ mohou být zapsány jako

$$F(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = A_F \mathbf{a}'\mathbf{x} + \beta_F(\mathbf{x}) + \gamma_F(\mathbf{x}), \tag{1.94}$$

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{a}) = A_g \mathbf{a}'\mathbf{x} + \beta_g(\mathbf{x}) + \gamma_g(\mathbf{x}), \tag{1.95}$$

kde A_F a A_g jsou konstanty. Konečně, kvadratická forma $S(a, b)$ je negativně semidefinitní, pokud platí

$$A_F - yA_g \geq 0 \tag{1.96}$$

8 Neoklasická teorie domácnosti

Domácnost a firma jsou dva velmi důležité mikroekonomické subjekty. Stejně jako u ekonomického subjektu, je u domácnosti předpokládáno chování vedoucí k maximalizaci užitečnosti podřízené rozpočtovému omezení. Předpokládejme n dostupných druhů zboží (a služeb), označme $\mathbf{x}$ sloupcový vektor množství zboží nakupovaného a spotřebovávaného domácností

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)'; \tag{1.97}$$

$U(x)$ označme funkci užitečnosti pro domácnost,

$$U(\mathbf{x}) = U(x_1, x_2, \dots, x_n), \tag{1.98}$$

udávající užitečnost jako funkci spotřebovaného množství; $\mathbf{p}$ buď řádkový vektor (kladných) daných cen zboží,

$$\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n); \tag{1.99}$$

a I buď (kladný) daný dostupný příjem domácnosti. Problém domácnosti pak lze zapsat

$$\max_x U(\mathbf{x}) \quad \mathit{pro} \quad \mathbf{px} \leq I, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \tag{1.100}$$

Domácnost vybírá nezáporná množství zboží $\mathbf{x}$ tak, aby maximalizovala funkci užitečnosti při respektování rozpočtového omezení

$$\mathbf{px} = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j \leq I \tag{1.101}$$

což říká, že celkové výdaje na n druhů zboží nemohou překročit příjem domácnosti. Jde o úlohu nelineárního programování, která vede k zavedení Lagrangeova multiplikátoru y a definuje Lagrangian jako

$$L(\mathbf{x}, y) = U(\mathbf{x}) + y(I - \mathbf{px}). \tag{1.102}$$

Kuhn-Tuckerovy podmínky dávají pro řešení $\mathbf{x}^*$ a y^*

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - y\mathbf{p} \leq \mathbf{0}, & \frac{\partial L}{\partial y} = I - \mathbf{px} \geq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x} = \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} - y\mathbf{p}\right)\mathbf{x} = 0, & y\frac{\partial L}{\partial y} = y(I - \mathbf{px}) = 0 \end{array} \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}. \tag{1.103}$$

Navíc y^* má interpretaci marginální užitečnosti peněz (nebo marginální užitečnosti příjmu), MU_m,

$$y^* = \partial U^* / \partial I = MU_m, \tag{1.104}$$

kde U^* je maximalizovaná hodnota užitečnosti

$$U^* = U(\mathbf{x}^*). \tag{1.105}$$

Jsou-li ceny a příjem kladné a užitečnost je monotóně rostoucí ve všech spotřebních úrovních

$$\partial U / \partial x_j = MU_j > 0, \tag{1.106}$$

kde MU_j je (kladná) marginální užitečnost zboží j, můžeme pak odvodit, že růst příjmu umožní domácnosti nakoupit více zboží a tak zvýšit užitek. Takže y^*, marginální užitečnost zvýšení příjmu, je kladná a, ze slabé doplňující podmínky

$$\mathbf{p}\mathbf{x}^* = I \tag{1.107}$$

plyne, že celý příjem je utracen.

Z Kuhn-Tuckerových podmínek plyne, že produkt marginální užitečnosti příjmu a cena zboží určují horní hranici pro marginální užitečnost každého zboží

$$MU_j \leq y^* p_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.108}$$

Ze slabé doplňující podmínky plyne, že pokud je zboží nakupováno ($x_j^* > 0$), podmínka 1.108 přechází v rovnost. Takže je-li j-té zboží nakupováno

$$MU_j / p_j = y^* = MU_m, \tag{1.109}$$

takže poměr marginální užitečnosti k ceně je tentýž pro všechny druhy zboží, které jsou aktuálně nakupovány, tento poměr nazveme marginální užitečností peněz. Pokud 1.108 dává ostrou nerovnost, pak dle komplementární podmínky není dané zboží nakupováno ($x_j^* = 0$).

8.1 Věta o poptávce

V souladu s větou o poptávce zde existuje řešení pro požadované nakupované zboží $\mathbf{x}^*$ a marginální užitečnost peněz y^*, jež mohou být považovány za funkci $n+1$ parametrů, jmenovitě n cen a příjmů, $\mathbf{p}$ a I,

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I), \tag{1.110}$$

$$y^* = y^*(\mathbf{p}, I), \tag{1.111}$$

předpokládáme $\mathbf{x}^* > 0$, $U(x)$ spojitě diferencovatelná do druhého řádu včetně v nejbližším okolí $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{px}^* = I$ (nenasycení) a Hessova matice

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 U}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}} \right) \tag{1.112}$$

je regulární. Funkce 1.110 je poptávková funkce pro n druhů zboží, její existence plyne z teori implicitní funkce. Omezíme-li pozornost na zboží, které je aktuálně poptáváno, podmínka prvního řádu, užívaje řešení, může být zapsána jako $n+1$ identit

$$\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I)) \equiv y^*(\mathbf{p}, I)\mathbf{p}, \tag{1.113}$$

$$\mathbf{px}^*(\mathbf{p}, I) \equiv I. \tag{1.114}$$

(Omezení pozornosti na zboží, které je aktuálně poptáváno, nepřipouští situaci, ve které při změně parametru zboží, jež není poptáváno, může toto již být poptáváno). V souladu s teorii, podmínky charakterizují rovnovážný stav domácnosti. Pokud poptávková funkce $U(x)$ je ostře konkávní, jsou obě nutnými a dostačujícími podmínkami pro rovnováhu. Dále podle teorie je n poptávkových funkcí v 1.110 pozitivně homogenních stupně nula v cenách a příjmu,

$$\mathbf{x}^*(\lambda \mathbf{p}, \lambda I) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}, I), \quad \forall\, \lambda, \quad \lambda > 0 \tag{1.115}$$

jestliže změna p, I na $\lambda \cdot p$, $\lambda \cdot I$ nezmění úlohu pokud $\lambda > 0$. (Pouze donucení je ovlivněno, a $\lambda \cdot p \cdot x \leq \lambda \cdot I$ je ekvivalentní k $\mathbf{p} \cdot x \leq I$ při $\lambda > 0$.) Zvolíme-li $\lambda = 1/I$, poptávková funkce může být psána

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^* \left(\frac{1}{I} \mathbf{p} \right) = \mathbf{x}^*(\mathbf{p}^*), \tag{1.116}$$

kde $\mathbf{p}^*$ je vektor cen relativně vztažených k důchodu,

$$\mathbf{p}^* = (p_1/I, p_2/I, \ldots, p_n/I) \tag{1.117}$$

Zde poptávka závisí pouze na cenách relativně vztažených k důchodu. Teorie poptávky potom charakterizuje poptávkové funkce, určuje jejich homogenitu a indikuje jejich závislost na relativních cenách.

8.2 Slutského věta

Slutského věta sumarizuje porovnávací statiku domácnosti, obdrženou jako diferenciaci podmínek 1.113 a 1.114 podle cen a důchodu. Dle kapitoly 7 dostáváme *základní maticovou rovnici teorie domácnosti*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y^*}{\partial I} & \frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} & \left(\frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{comp} \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} & \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} & \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{comp} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{p} \\ -\mathbf{p}' & \mathbf{H} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{x}^{*\prime} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & y^*\mathbf{I_n} & y^*\mathbf{I_n} \end{pmatrix}, \tag{1.118}$$

kde výsledky porovnávací stability jsou sumarizovány dle změn v řešení y^*, $\mathbf{x}^*$ jako parametrů změn I a p,

$$\begin{aligned} \frac{\partial y^*}{\partial I} &= \frac{\partial^2 U^*}{\partial I^2}, \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} &= \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial I}, \frac{\partial x_2^*}{\partial I}, \dots, \frac{\partial x_n^*}{\partial I}\right), \\ \frac{\partial y^*}{\partial \mathbf{p}} &= \left(\frac{\partial y^*}{\partial p_1}, \frac{\partial y^*}{\partial p_2}, \dots, \frac{\partial y^*}{\partial p_n}\right), \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial p_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial p_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial p_n} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{1.119}$$

a všechny proměnné a derivace jsou počítány pro hodnoty řešení y^*, $\mathbf{x}^*$. Zde "comp" značí, že je kompenzována parciální derivace podle cen, kde důchod je kompenzován tak, že poptávka je konstantní; H je Hessova matice dle 1.112, u níž je předpokládána negativní definitnost a invertibilita, hraniční Hessova matice je regulární a I_n je identická matice typu $n \times n$. Řešení základní rovnosti, při invertování rozložených matic, dává Slutského rovnost,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}} &= \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I}\right)\mathbf{x}^* \quad \text{tj.} \\ \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} &= \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_k}\right)_{comp} - \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial I}\right) x_k^* \quad \forall\, j,k, \end{aligned} \tag{1.120}$$

vyjadřující, že celkový efekt změny ceny na poptávku je součtem substitučního efektu kompenzované změny na poptávku a důchodového efektu změny důchodu na poptávku, kde důchodový efekt postihuje vážené $-\mathbf{x}^*$. Tato rovnice je první částí Slutského věty. Druhá část teorie uvádí, že matice substitučního efektu je symetrická a negativně semidefinitní,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{comp} \text{ je symetrická} \quad \text{tj.} \quad \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} + \frac{\partial x_j^*}{\partial I} x_k^* = \frac{\partial x_k^*}{\partial p_j} + \frac{\partial x_k^*}{\partial I} x_j^* \quad \forall\, j,k, \tag{1.121}$$

$$\mathbf{z}\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right)_{comp}\mathbf{z}' \leq 0 \quad \text{a} \quad = 0 \text{ pro } \mathbf{z} = \alpha\mathbf{p}. \tag{1.122}$$

Poslední část věty je *Engelova podmínka agregace*

$$\mathbf{p}\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I}\right) = 1 \quad \text{tj.} \quad \sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j^*}{\partial I} = 1; \tag{1.123}$$

Cournotova podmínka agregace

$$\mathbf{p}\left(\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\right) + \mathbf{x}^{*\prime} = \mathbf{0} \quad \text{tj.} \quad \sum_{j=1}^{n} p_j \left(\frac{\partial x_j^*}{\partial p_l}\right) + x_l^* = 0, \quad \forall l; \tag{1.124}$$

a *podmínka homogenity*

$$\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{p}}\mathbf{p}' + \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial I} I = \mathbf{0} \quad \text{tj.} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_j^*}{\partial p_k} p_k + \frac{\partial x_j^*}{\partial I} I = 0, \quad \forall j. \tag{1.125}$$

9 Neoklasická teorie firmy

O firmě jako ekonomickém subjektu předpokládáme, že se chová tak, aby maximalizovala zisk za předpokladu technologických omezení produkční funkce. Za předpokladu, že firma používá n vstupů na produkci jediného výstupu, nechť $\mathbf{x}$ je sloupcový vektor vstupů

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)'; \tag{1.126}$$

q je výstup, $f(\mathbf{x})$ je produkční funkce firmy

$$q = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{1.127}$$

kde výstup je funkcí vstupů. $\mathbf{w}$ je řádkový vektor kladných vah vstupů

$$\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n); \tag{1.128}$$

a p je kladná cena výstupu. Problém konkurenční firmy je pak

$$\max_{q,\, x} \pi = pq - \mathbf{wx} \quad \text{pro} \quad q = f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{1.129}$$

Firma zvolí odpovídající hodnotu vstupů a výstupu tak, aby maximalizovala zisk π, uvedený ve vztahu 1.129 jako rozdíl mezi příjmy pq a náklady, které jsou dané jako celkové výdaje za všechny vstupy

$$\mathbf{wx} = \sum_{j=1}^{n} w_j x_j. \tag{1.130}$$

Produkční funkce může být dosazena přímo do účelové funkce, takže problém může být zapsán

$$\max_x \pi(\mathbf{x}) = pf(\mathbf{x}) - \mathbf{wx} \quad pro \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \tag{1.131}$$

Kuhn - Tuckerovy podmínky pak vyjadřují řešení x^*

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial \pi}{\partial \mathbf{x}} = p\tfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{w} \leq \mathbf{0}, \\ &\tfrac{\partial \pi}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{x} = \left(p\tfrac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \mathbf{w}\right)\mathbf{x} = 0, \\ &\mathbf{x} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{1.132}$$

Pak poměr vstupní hodnoty k výstupní udává horní limit marginální (mezní) produkce každého vstupu

$$MP_j \equiv \partial f / \partial x_j \leq w_j / p, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{1.133}$$

Ze slabé doplňkové podmínky vyplývá, že pokud je vstup j nakoupen (tj. $x_j > 0$), podmínka 1.133 se stává rovností, tedy je-li vstup j nakoupen, platí

$$MP_j = w_j / p, \tag{1.134}$$

a tedy poměr marginální produkce k bohatství (hodnota vstupu) je stejný pro všechny aktuálně nakoupené vstupy, běžný poměr bývá převrácená hodnota výstupní hodnoty (ceny).

9.1 Věta o nabídce

Podle věty o nabídce existuje řešení pro nakoupené vstupy x^*, které mohou obsahovat funkce z $n+1$ parametrů, tedy n vah $\mathbf{w}$ a výstupní cena p

$$\mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(\mathbf{w}, p), \tag{1.135}$$

za předpokladu $\mathbf{x}^* > 0$, $f(\mathbf{x})$ je dvojnásobně spojitě diferencovatelná funkce v okolí $\mathbf{x}^*$ a Hessova matice

$$\mathbf{H} = \frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right) \tag{1.136}$$

je regulární. Funkce v 1.135 jsou vstupní poptávkové funkce, jejichž existence je zaručena. Výstupní nabídková funkce je pak

$$q^* = q^*(\mathbf{w}, p) = f(\mathbf{x}^*). \tag{1.137}$$

Omezeníme-li pozornost na vstupy, které jsou aktuálně nakoupeny, podmínky 1. řádu, použité při řešení, jsou identity

$$p\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(\mathbf{w},p)) \equiv \mathbf{w}, \tag{1.138}$$

$$q^*(\mathbf{w},p) \equiv f(\mathbf{x}^*(\mathbf{w},p)). \tag{1.139}$$

(Je to podobné jako u domácnosti. Omezená pozornost vstupů, které jsou aktuálně nakoupeny, vyloučí případ, ve kterém díky změně parametrů vstup, který nebyl nakoupen, může být nakoupen.)

Podle věty o nabídce tyto podmínky charakterizují rovnováhu firmy. Jestli produkční funkce $f(\mathbf{x})$ je ostře konkávní, jsou obě podmínky nutné a postačující pro rovnováhu. Navíc podle teorie n vstupní poptávková funkce 1.135 a výstupní nabídková funkce 1.137 jsou positivní homogenní stupně 0 pro všechny hodnoty vstupu a výstupní ceny

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^*(\lambda\mathbf{w},\lambda p) &= \mathbf{x}^*(\mathbf{w},p), \\ q^*(\lambda\mathbf{w},\lambda p) &= q^*(\mathbf{w},p), \end{aligned} \qquad \forall \quad \lambda > 0, \tag{1.140}$$

protože změna $\mathbf{w}, p$ na $\lambda\mathbf{w}$, λp změní pouze π ve vztahu 1.129 a maximalizací $\lambda\pi$ dostáváme stejné řešení jako maximalizací π za předpokladu $\lambda > 0$. Výběrem $\lambda = 1/p$ pak vstupní poptávkové funkce a výstupní nabídková funkce mohou být zapsány

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^* &= \mathbf{x}^*\left(\tfrac{1}{p}\mathbf{w}\right) = \mathbf{x}^*(\mathbf{w}^*), \\ q^* &= q^*\left(\tfrac{1}{p}\mathbf{w}\right) = q^*(\mathbf{w}^*), \end{aligned} \tag{1.141}$$

kde $\mathbf{w}^*$ je vektor reálných hodnot vstupu (bohatství), tj. relativní hodnoty k výstupní ceně

$$\mathbf{w}^* = (w_1/p, w_2/p, \ldots, w_n/p). \tag{1.142}$$

Pak vstupní poptávka závisí pouze na n reálných vahách. Věta o nabídce proto charakterizuje jak vstupní poptávkovou tak i výstupní nabídkovou funkci, udává jejich homogenitu a ukazuje jejich závislost na reálných vahách.

9.2 Teorie srovnávací stability firmy

Teorie srovnávací stability firmy je získaná pomocí rozdílů podmínek první nabídky 1.138 a 1.139 s ohledem na vstupní ceny $\mathbf{w}$ a výstupní cenu p. Sledujíce přístup z odstavce 7 obdržíme *základní maticovou rovnici teorie firmy*

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial q^*}{\partial p} & \left(\frac{\partial q^*}{\partial \mathbf{w}}\right)' \\ \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial p} & \frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{w}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \\ \mathbf{0} & p\mathbf{H} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ -\left(\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}\right)' & \mathbf{I_n} \end{pmatrix}, \tag{1.143}$$

kde srovnávací stabilita řešení je shrnuta pomocí změny na řešení q^*, $\mathbf{x}^*$ taktéž s parametry p a $\mathbf{w}$.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial q^*}{\partial p} \\
&\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial p} = \left(\frac{\partial x_1^*}{\partial p}, \frac{\partial x_2^*}{\partial p}, \dots, \frac{\partial x_n^*}{\partial p}\right)', \\
&\frac{\partial q^*}{\partial \mathbf{w}} = \left(\frac{\partial q^*}{\partial w_1}, \frac{\partial q^*}{\partial w_2}, \dots, \frac{\partial q^*}{\partial w_n}\right)', \\
&\frac{\partial \mathbf{x}^*}{\partial \mathbf{w}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_1^*}{\partial w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n^*}{\partial w_1} & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_2} & \cdots & \frac{\partial x_n^*}{\partial w_n} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.144}$$

a všechny proměnné a derivace jsou vypočteny v hodnotách řešení q^*, $\mathbf{x}^*$. Derivací $\partial f/\partial \mathbf{x}$ je zde vektor marginálních produktů, $\mathbf{H}$ je Hessova matice 1.136, o které předpokládáme, že je negativně definitní a $\mathbf{I}_n$ je identická matice typu $n \times n$. Řešení základní rovnice vede na vztah

$$q^*/\partial \mathbf{w} = -\partial \mathbf{x}^*/\partial p \quad \text{tj.} \quad \partial q^*/\partial w_j = -\partial x_j^*/\partial p, \quad \forall j, \tag{1.145}$$

což nám říká, že efekt jakékoliv hodnoty na výstupu je identický, ale s opačným znaménkem než efekt výstupu ceny na stejný vstup. Tato rovnice je první částí věty. Druhá část věty uvádí, že matice efektů vah vstupních poptávek je symetrická a negativně definitní

$$\partial \mathbf{x}^*/\partial \mathbf{w} \quad \text{je symetrická} \quad \text{t.j. } \partial x_j^*/\partial w_k = \partial x_k^*/\partial w_j, \quad \forall j,\, k, \tag{1.146}$$

$$\mathbf{z}(\partial \mathbf{x}^*/\partial \mathbf{w})\mathbf{z}' \leq 0 \quad \text{a} \quad = 0 \ \ \textit{pro} \ \ \mathbf{z} = \alpha \mathbf{w}. \tag{1.147}$$

Poslední část věty tvrdí, že vzrůst výstupní ceny bude zvyšovat nabídku výstupu

$$\partial q^*/\partial p > 0. \tag{1.148}$$

Firma může použít teorii lineárního programování. V takovém případě firma produkuje n výstupů $x_1, \dots, x_n$ s využitím m vstupů $b_1, \dots, b_m$. Produkce jedné jednotky výstupu j požaduje a_{ij} jednotek na vstupu i. Předpokládejme, že krátkodobě všechny vstupy jsou fixní, potom výběr firmy pouze je rozhodnout, jaký mix výstupů produkce je dán těmito vstupy. Úloha je pak úloha klasického lineární programování

$$\max_x \mathbf{cx} \quad \textit{pro} \quad \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \tag{1.149}$$

jako v 1.65. Účelová funkce maximalizace je celkový příjem, daný vztahem

$$\mathbf{cx} = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \tag{1.150}$$

kde c_j je daná cena a x_j je vybraná úroveň výstupu j. Pak m omezení je ve formě

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1.151}$$

což nám říká, že celkové množství vstupu i použité k produkci výstupového vektoru x nemůže přesáhnout úroveň dostupného vstupu i, což je b_i. Úloha je pak vyběr nezáporných výstupů tak, aby maximalizoval zisk, v dané technologií a dostupnými vstupy.

Duální úloha je

$$\min_y \mathbf{yb} \quad \mathit{pro} \quad \mathbf{yA} \geq \mathbf{c}, \quad \mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \tag{1.152}$$

jako v 1.69. Tato úloha může být interpretován jako výběr nezáporných hodnot (*stínové ceny*) pro vstupy $y_1, y_2, \ldots y_m$ tak, aby minimalizoval náklady vstupů

$$\mathbf{yb} = y_1b_1 + y_2b_2 + \cdots + y_mb_m, \tag{1.153}$$

kde y_i je vybraná hodnota a b_i je daná úroveň vstupu i. Pak n omezení je ve tvaru

$$y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \cdots + y_ma_{mj} \geq c_j, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{1.154}$$

který nám říká, že jednotkové náklady na zboží j, získáné sečtením nákladů produkce jedné jednotky ze všech vstupů, není menší než cena tohoto zboží. Duální problém k problému rozdělení, primární úloha 1.149 je proto problém ohodnocení, duální úloha k 1.152. Podle doplňující podmínky 1.78, jestliže pro nějaký výstup j je nerovnost 1.154 ostrou nerovností, tak nákladová jednotka překročí cenu (výstup je produkován se ztrátou), pak tento výstup není produkován ($x_j^* = 0$). Podobně, jestliže pro nějaký vstup i je nerovnost 1.151 ostrá nerovnost, tak není celý vstup využit (přeroste nám nabídka), pak tento vstup je zboží zdarma ($y_i^* = 0$). A navíc z 1.77

$$\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}, \tag{1.155}$$

pak při řešení duální úlohy celkové příjmy z výstupu se rovnají celkovým nákladům vstupů, tj. firma vyrábí s nulovým ziskem.

10 Závěry

Z tohoto shrnutí matematického programování s aplikací na ekonomii nám vyjdou dva závěry.

1. Různé problémy matematického programování, které zde jsou zpracována - úloha bez omezení, klasické programování, nelineární programování a lineární programování - všechny jsou vzájemně uzavřeny, s analogickými teoriemi ve všech případech.

2. Stejné problémy matematického programování jsou důležité při aplikaci v ekonomii, zvláště v mikroekonomické teorii domácností a firem. Řešení matematického programování vede u obou k charakteristice rovnováhy každého z těchto subjektů a analýza jejich srovnávací statistiky odpovídá změně parametrů, jako jsou ceny a důchod.

Kapitola 2

Dualita v mikroekonomii

1 Úvod

Co se myslí tím, když se řekne, že existuje „dualita“ mezi nákladovou a produkční funkcí? Předpokládejme, že je dána *produkční funkce* F a že $u = F(\mathbf{x})$, kde u je maximální množství výroby (produkce), které může být vyrobeno technologií během určitého období, jestliže vektor vloženého (vstupního) množství $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_N)$ je užit během období. Tudíž produkční funkce F popisuje technologii dané firmy. Na druhou stranu *minimální celkové náklady* firemní výroby na nejmenší výstup (produkci) úrovně u dané vstupními cenami $(p_1, p_2, \ldots, p_N) \equiv p$ jsou definovány jako $C(u, \mathbf{p})$) a to je samozřejmě funkce u, p a dané produkční funkce F. To co není tak samozřejmé, je to, že (za určitých podmínek regularity) *nákladová funkce* $C(u, \mathbf{p})$ rovněž zcela popisuje technologii dané firmy, tj. daná firemní nákladová funkce C může být použita k definování firemní produkční funkce F. Tudíž se jedná o *dualitu* mezi nákladovou a produkční funkcí v tom smyslu, že každá z těchto funkcí může popisovat technologii firmy stejně dobře.

V první části této kapitoly rozvineme tuto dualitu mezi nákladovou a produkční funkcí podrobněji. V druhé části odvodíme podmínky regularity, jež nákladová funkce C musí mít (bez ohledu na tvar funkce nebo zvláštních regulárních vlastností produkční funkce F), a ukážeme, jak může být produkční funkce zkonstruována z dané nákladové funkce. Ve třetí části rozvineme tuto dualitu mezi nákladovou a produkční funkcí vícero formálnějším způsobem.

Ve čtvrté části budeme uvažovat o dualitě mezi (přímou) produkční funkcí F a vzájemně si odpovídající nepřímou produkční funkcí G. Daná produkční funkce F, vstupní ceny $p \equiv (p_1, p_2, \ldots, p_N)$ a vstupní rozpočet y dolarů, *nepřímé produkční funkce* $G(y, \mathbf{p})$ je definována jako maximální výstup (produkt) $u = F(\mathbf{x})$, který může být vyroben (vyprodukován) daným rozpočtem vynuceným vstupními náklady $\mathbf{p}^T\mathbf{x} \equiv \sum_{i=1}^{N} p_i\mathbf{x}_i \leq y$. Tudíž nepřímá produkční funkce $G(y, \mathbf{p})$ je funkcí maximálního přípustného rozpočtu y, vstupních cen p, se kterými výrobce počítá a produkční funkci F výrobce. Za určitých regulárních podmínek se ukáže, že G může také zcela popisovat technologii a tudíž je tu dualita mezi přímou a nepřímou produkční funkcí.

Výše uvedené duality mezi náklady, produkcí (výrobou) a nepřímou produkční funkcí se také může interpretovat v kontextu teorie spotřeby: prostě nechat (dovolit) F být *užitkovou funkcí spotřebitele*, $\mathbf{x}$ vektorem nakoupeného zboží (nebo nájemné), u užitkovým stupněm spotřebitele a y „příjmem“ spotřebitele nebo výdaji (náklady) na N komodit. Potom $C(u, \mathbf{p})$ je minimální náklad (výdaj) dosahující užitkový stupeň u daný tak, že spotřebitel počítá s cenami p za zboží a to je dualita mezi užitkovou funkcí F spotřebitele a funkcí C, která je často nazývána *nákladovou (výdajovou) funkcí* v kontextu teorie spotřebitele. Podobně $G(y, \mathbf{p})$ může být nyní definována jako maximální užitek, který spotřebitel může dosáhnout tak, že počítá s cenami p a příjem y vydá na N komodit. V souvislosti se spotřebitelem je G nazývána jako *nepřímá užitková funkce* spotřebitele.

Tudíž každá z našich duálních teorií má dvě interpretace: jednak v souvislosti s výrobou a jednak v souvislosti se spotřebitelem. V části 2 chceme využít výrobní teoretickou terminologii kvůli konkrétnosti. Nicméně v následující části budeme používat více neutrální terminologii, která bude zahrnovat jak produkční tak i spotřební interpretaci. Produkční nebo-li užitkovou funkci F budeme nazývat *agregační funkce*, nákladovou nebo-li výdajovou funkci C *nákladová funkce* a nepřímou produkční nebo-li užitkovou funkci G *nepřímá agregační funkce*.

V páté části je zavedena funkce vzdálenosti $D(u, \mathbf{x})$. Vzdáleností funkce poskytuje ještě další způsob charakteristiky technologie. Hlavní použití vzdálenostní funkce je v konstrukci Malmquistova (1953) množstevního indexu.

V části 6 prodiskutujeme několik dalších teorií duality: tj. prodiskutujeme další metody pro ekvivalentní popis technologie, buď lokálně nebo globálně, v jednovstupém nebo v N-vstupém kontextu. Čtenář, který se zajímá o aplikaci, může přeskočit části 3 – 6.

Matematické teorie prezentované v části 2 – 6 mohou vypadat jen jako čistě teoretické výsledky (pro matematické účely) bez praktického využití. Avšak toto není ten případ. V části 7 – 10 předvedeme některé aplikace dříve rozvinutých teorií. Tyto aplikace spadají do dvou hlavních kategorií: 1)měření technologií nebo preferencí (část 9 a 10) 2)odvození srovnatelných statistických výsledků (část 7 a 8).

V části 10 se zaměříme na firmy, které mohou produkovat mnoho výstupů, zatímco zpracovávají mnoho vstupů (kdežto předtím jsme se zabývali pouze jedním vstupem). Uvedeme některé teorie duality a povšimneme si jejich některých aplikací.

Nakonec v části 11 a 12 se krátce zmíníme o některých dalších oblastech ekonomiky, kde mohou být duální teorie aplikovány.

Důkazy jsou v některých částech vynechány : důkazy mohou být nalezeny v odkazované literatuře nebo v Diewertovi (1982).

2 Dualita mezi nákladovou (výdajovou) a produkční (užitkovou) funkcí: Zjednodušený pohled

Předpokládejme, že máme dánu N-rozměrnou vstupní produkční funkci F: $u = F(\mathbf{x})$, kde u je množství vyprodukovaného výstupu za určitou dobu a $\mathbf{x} \equiv (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) \geq 0_N$ je nezáporný vektor vstupu zpracovaného za tuto dobu. Dále předpokládejme, že výrobce může nakoupit množství zpracovávaných vstupů za pevné kladné ceny $p \equiv (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_N) >> 0_N$ a že se výrobce nepokusí mít monopolní sílu na trhu vstupů.*

Nákladová funkce výrobce C je definována jako výsledek problému minimalizace ceny výroby při zachování výstupní úrovně u, za podmínky, že výrobce počítá se vstupním vektorem cen p:

$$C(u, \mathbf{p}) \equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}. \tag{2.1}$$

V této části je ukázáno, že nákladová funkce C vyhovuje překvapivému počtu podmínek regularity, bez ohledu na funkcionální tvar produkční funkce F, poskytující jen řešení cenového minimalizačního problému 2.1. V následující části je ukázáno, jak tyto podmínky regularity nákladové funkce mohou být pužity v případě důkazu komparativních statistických teorií o odvození poptávkové funkce pro vstupy ([20]).

Dříve než zavedeme vlastnosti nákladové funkce C, je vhodné dát prostor následujícím minimalizačním podmínkám regularity produkční funkce F:

Předpoklad 1 pro F

F je spojitá shora, tj. pro všechna $u \in \mathrm{range} F$ je $L(u) \equiv \mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N, F(\mathbf{x}) \geq u$ uzavřená množina.

Jestliže F je spojitá funkce, pak samozřejmě F bude rovněž spojitá shora. Předpoklad 1 je dostatečný k implikaci toho, že řešení cenového (nákladového) minimalizačního problému 2.1 existuje.

Následujících sedm vlastností pro nákladovou funkci C může být nyní odvozeno jen za předpokladu, že produkční funkce F vyhovuje předpokladu 1.

Vlastnost 1 pro C

Pro každé $u \in$ prostor F a $p \gg 0_N, C(u, \mathbf{p}) \geq 0$, tj. C je nezáporná funkce.

Důkaz.

$$\begin{aligned} C(u, \mathbf{p}) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T \mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N, F(\mathbf{x}) \geq u\} \\ &= \mathbf{p}^T \mathbf{x}^*, \text{ kde } \mathbf{x}^* \geq 0_N \text{ a } F(\mathbf{x}^*) \geq u \\ &\geq 0, \text{ neboť } \mathbf{p} \gg 0_N \text{ a } \mathbf{x}^* \geq 0_N. \end{aligned}$$

*V části 11 je tato podmínka zmírněna.

Vlastnost 2 pro C

Jestliže $p \gg 0_N$ a $k > 0$, potom $C(u, k\mathbf{p}) = kC(u, \mathbf{p})$ pro každé $u \in$ prostor F, tj. nákladová funkce je (jednoznačně) lineárně homogenní ve vstupních cenách pro fi**x**ní výstupní úroveň.

Důkaz. Nechť $p \gg 0_N, k > 0$ a $u \in \text{range}F$. Pak

$$\begin{aligned} C(u, k\mathbf{p}) &\equiv \min_{\mathbf{x}}\{(k\mathbf{p})^T\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} \\ &= k\ \min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^T\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} = k\ C(u, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

Vlastnost 3 pro C

Jestliže nějaká kombinace vstupních cen roste, pak minimální produkční náklady reálného výstupu úrovně u se sníží, tj. jestliže $u \in$ prostor F a $\mathbf{p}^1 > \mathbf{p}^0$, pak $C(u, \mathbf{p}^1) \geq C(u, \mathbf{p}^0)$.

Důkaz.

$$\begin{aligned} C(u, \mathbf{p}^1) &\equiv \min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^{1T}\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} \\ &= \mathbf{p}^{1T}, \text{ kde } \mathbf{x}^1 \geq 0_N \text{ a } F(\mathbf{x}^1) \geq u \\ &\geq \mathbf{p}^{0T}\mathbf{x}^1, \text{ neboť } \mathbf{p}^1 > \mathbf{p}^0 \text{ a } \mathbf{x}^1 \geq 0_N \\ &\geq \min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^{0T}\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}, \text{neboť } \mathbf{x}^1 \text{ je} \\ &\quad\ \text{přípustný pro minimalizaci nákladů,} \\ &\quad\ \text{ale není nutně optimální} \\ &\equiv C(u, \mathbf{p}^0). \end{aligned}$$

Vlastnosti nákladové funkce byly intuitivně zřejmé z ekonomického pohledu. Ale následující důležité vlastnosti nejsou tak intuitivně zřejmé.

Vlastnost 4 pro C

Pro všechna $u \in$ prostor F, $C(u, \mathbf{p})$ je konkávní funkce p.

Důkaz: Nechť $u \in \mathrm{range}F$, $\mathbf{p}^0 \gg 0_N, \mathbf{p}^1 \gg 0_N$ a $0 \leq \lambda \leq 1$. Pak

$$\begin{aligned}
C(u, \mathbf{p}^0) &\equiv \min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^{0T}\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} = \mathbf{p}^{0T}\mathbf{x}^0 \text{ a} \\
C(u, \mathbf{p}^1) &\equiv \min_{\mathbf{x}}\{\mathbf{p}^{1T}\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} = \mathbf{p}^{1T}\mathbf{x}^1. \text{ Nyní} \\
C(u, \lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1) &\equiv \min_{\mathbf{x}}\{(\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\} \\
&= (\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x}^\lambda \\
&= \lambda\mathbf{p}^{0T}\mathbf{x}^\lambda + (1-\lambda)\mathbf{p}^{1T}\mathbf{x}^\lambda \\
&\geq \lambda\mathbf{p}^{0T}\mathbf{x}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^{1T}\mathbf{x}^1, \text{ neboť } \mathbf{x}^\lambda \text{ je přípustné pro} \\
&\quad\ \text{minimalizaci nákladů ve spojitosti s cenovým} \\
&\quad\ \text{vektorem vstupů } \mathbf{p}^0 \text{ a } \mathbf{p}^1, \text{ ale není nutně} \\
&\quad\ \text{optimální pro tyto úlohy} \\
&= \lambda C(u, \mathbf{p}^0) + (1-\lambda)C(u, \mathbf{p}^1).
\end{aligned}$$

Základní idea ve výše uvedeném důkazu je opakovaně použita v duální teorii. Vzhledem k neintuitivní povaze vlastnosti 4 je asi výhodné poskytnout geometrickou interpretaci ve 2–vstupovém případě (tj. $N = 2$).

Předpokládejme, že výrobce produkuje výstup úrovně u. Definujme množinu S^0 jako množinu nezáporných kombinací vstupů, které jsou buď na nebo pod optimální nákladovou čárou (izokvantou), kdy výrobce počítá s cenami $\mathbf{p}^0$; tj. $S^0 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{0T}\mathbf{x} \leq C(u, \mathbf{p}^0), \mathbf{x} \geq 0_N\}$, kde $C^0 \equiv C(u, \mathbf{p}^0) = \mathbf{p}^{0T}\mathbf{x}^0$ je minimum produkčních nákladů výstupu u daných tak, že výrobce počítá s cenami $\mathbf{p}^0 \gg 0_N$. Všimněme si, že vektor vstupů $\mathbf{x}^0$ řeší nákladovou minimalizační úlohu v tomto případě. Nyní předpokládejme, že výrobce počítá se vstupními cenami $\mathbf{p}^1 \gg 0_N$ a definujme S^1, C^1, a $\mathbf{x}^1$ analogicky, tj. $S^1 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{1T}\mathbf{x} \leq C(u, \mathbf{p}^1), \mathbf{x} \geq 0_N\}, C^1 \equiv C(u, \mathbf{p}^1) = P^{1T}\mathbf{x}^1$, kde vektor vstupů $\mathbf{x}^1$ řeší nákladový minimalizační problém, kdy výrobce počítá s cenami $\mathbf{p}^1$.

Nechť $0 < \lambda < 1$ a nyní předpokládejme, že výrobce počítá s průměrnými cenovými vstupy $\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1$. Definujme S^λ, C^λ a $\mathbf{x}^\lambda$ jako předtím:

$$\begin{aligned}
S^\lambda &\equiv \{\mathbf{x} : (\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x} \leq C(u, \lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1), \mathbf{x} \geq 0_N\}, \\
C^\lambda &\equiv C(u, \lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1) = (\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x}^\lambda,
\end{aligned}$$

kde $\mathbf{x}^\lambda$ řeší nákladový minimalizační problém, kdy výrobce počítá s průměrnými cenami $\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1$. Nakonec uvažujme nákladovou izokvantu, která by byla výsledkem, jestliže výrobce spotřebovává průměr ze dvou počátečních nákladů $\lambda C^0 + (1-\lambda)C^1$, odpovídajících průměru cen vstupů $\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1$. Množina nezáporných kombinací vstupů, která je buď na nebo pod nákladovou linií, je definována jako množina $S^* \equiv \{\mathbf{x} : (\lambda\mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T\mathbf{x} \leq \lambda C^0 + (1-\lambda)C^1, \mathbf{x} \geq 0_N\}$. K ukázání konkávnosti C potřebujeme ukázat, že $C^\lambda \geq \lambda C^0 + (1-\lambda)C^1$ nebo (ekvivalentně) potřebujeme ukázat, že S^λ obsahuje množinu S^*. To může být dokázáno tak, že nákladová izokvanta příslušící množině S^*, $L^* \equiv \{\mathbf{x} :$

$(\lambda \mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T \mathbf{x} = \lambda C^0 + (1-\lambda)C^1\}$ protíná průnik nákladových izokvant příslušících množinám S^0 a S^1. Nákladová izokvanta příslušící množině S^λ, $L^\lambda \equiv \{\mathbf{x} : (\lambda \mathbf{p}^0 + (1-\lambda)\mathbf{p}^1)^T \mathbf{x} = C^\lambda\}$ je zřejmě souběžná (paralelní) s L^*. A konečně L^λ musí být buď shodná s L^* nebo ležet nad ní, protože kdyby L^λ byla pod L^*, tak by existoval bod na u izokvantě, který by ležel pod alespoň jednou z nákladových izokvant $L^0 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{0T}\mathbf{x} = C^0\}$ nebo $L^1 \equiv \{\mathbf{x} : \mathbf{p}^{1T}\mathbf{x} = C^1\}$, což by odporovalo minimalizaci nákladů v $\mathbf{x}^0$ nebo $\mathbf{x}^1$.

Vlastnost 5 pro C

Pro všechna $u \in$ prostor $F, C(u, \mathbf{p})$ je spojitá v p pro $p \gg 0_N$. [Důkaz této vlastnosti je založen na výsledcích ve Fenchelovi (1953, str.75) a Rockaellarovi (1970, str. 82).]

Vlastnost 6 pro C

$C(u, \mathbf{p})$ je neklesající v u pro pevné p, tj. jestliže $p \gg 0_N, u^0, u^1 \in$ prostor F, a $u^0 \leq u^1$, pak $C(u^0, \mathbf{p}) \leq C(u^1, \mathbf{p})$.

Důkaz:

Nechť $p \gg 0_N, u^0, u^1 \in$ prostor F a $u^0 \leq u^1$. Pak

$$\begin{aligned} C(u^1, \mathbf{p}) &\equiv \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^1\} \\ &\geq \min_{\mathbf{x}} \{\mathbf{p}^T\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^0\}, \text{ neboť kdyby } u^0 \leq u^1, \text{ pak} \\ &\quad \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^1\} \subset \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u^0\} \text{ a minimum} \\ &\quad \mathbf{p}^T\mathbf{x} \text{ nad větší množinou nemůže růst} \\ &\equiv C(u^0, \mathbf{p}). \end{aligned}$$

V porovnání s předcházejícími vlastnostmi nákladové funkce vyžaduje následující vlastnost silný matematický aparát. Protože tyto matematické závěry jsou užitečné nejenom v této kapitole, ale i v kapitolách následujících, na chvíli odbočíme a uvedeme je.

V následujících definicích nechť S značí podmnožinu R^M, T je podmnožinou R^K, $\{x^n\}$ je posloupnost bodů z množiny S a $\{y^n\}$ posloupnost bodů z množiny T. Pro úplnější diskusi o následujících definicích a teoriích — viz. Chapter 1 of the Handbook, Green a Heller.

Definice:

Φ je *korespondence* (mnohoznačné zobrazení) z S do T, jestliže pro každé $x \in S$ existuje neprázdná množina obrazů $\Phi(x)$, která je podmnožinou T.

Definice:

Korespondence Φ je *shora semispojitá* (nebo jinak *shora hemispojitá*) v bodě $x^0 \in S$, jestliže $\lim_n x^n = x^0$, $y^n \in \Phi(x^n)$ $\lim_n y^n = y^0$, implikuje $y^0 \in \Phi(x^0)$.

Korespondence Φ je *zdola semispojitá v bodě* $x^0 \in S$, jestliže $\lim_n x^n = x^0$, $y^0 \in \Phi(x^0)$ implikuje, že existuje posloupnost $\{y^n\}$, tak že $y^n \in \Phi(x^n)$ a $\lim_n y^n = y^0$. Korespondence Φ je *spojitá v* $x^0 \in S$, jestliže je shora a zdola semispojitá v bodě x^0.

Lemma 2 [Berge (1963, p. 116)]:

Φ je shora semispojitá korespondence na S právě tehdy, když graf $\Phi \equiv \{(x, y) : x \in S, y \in \Phi(x)\}$ je uzavřená množina $S \times T$.

Theorem shora semi–spojitého maxima [Berge (1963, p. 116)]

Nechť f je shora spojitá funkce definovaná na $S \times T$, kde T je kompaktní (uzavřená, ohraničená) podmnožina R^K. Předpokládejme, že Φ je korespondence z S do T a že Φ je shora semi–spojitá na S. Pak funkce g definovaná $g(x) \equiv \max_V\{f(x, y) : y \in \Phi(x)\}$ je jednoznačně definována a je shora semi–spojitá na S.

Theorem maxima [Debreu (1952, pp. 889 – 890); (1959, p. 19); Berge (1963, p. 116)]

Nechť f je spojitá funkce reálných hodnot definovaná na $S \times T$, kde T je kompaktní podmnožina R^K. Nechť Φ je korespondence z S do T a nechť Φ je spojitá na S. Definujme (maximum) funkce g jako $g(x) \equiv \max_y\{f(x, y) : y \in \Phi(x)\}$ a korespondenci ξ jako $\xi(x) \equiv \{y : y \in \Phi(x)$ a $f(x, y) = g(x)\}$. Potom funkce g je spojitá na S a korespondence ξ je shora semi–spojitá na S.

Vlastnost 7 pro C

Pro každé $p \gg 0_N, C(u, p)$ je zdola spojitá v u; tj. jestliže $p^* \gg 0_N, u^* \in$ prosto-
ru $F, u^n \in$ prostoru F pro všechna n, $u^1 \leq u^2 \leq \ldots$ a $\lim u^n = u^*$, pak $\lim_n C(u^n, p^*) = C(u^*, p^*)$.

Důkaz vlastnosti 7 se nachází v Diewert (1982).

Za účelem přiblížení této vlastnosti v C, čtenář může zjistit, že je výhodné zvolit $N = 1$ a nechat produkční funkce $F(x)$ jako následující „krokovací“ funkci (shora spojitá) [Shepard (1970, p. 89)]:

$$F(x) \equiv \{0, \text{ jestliže } 0 \leq x <; 1, \text{ jestliže } 1 \leq x < 2; 2, \text{ jestliže } 2 \leq x < 3; \ldots\}.$$

Pro $p > 0$ je odpovídající nákladová funkce $C(u, p)$ následující (zdola spojitá) „krokovací“ funkce:

$$C(u, p) \equiv \{0, \text{ jestliže } 0 = u; p, \text{ jestliže } 0 < u \leq 1; 2p, \text{ jestliže } 1 < u \ \leq 2; \ldots\}.$$

Výše uvedené vlastnosti nákladové funkce mají empirické důsledky, jak si ukážeme později. Nicméně, jeden důsledek může být uveden na tomto místě.

Předpokládejme, že můžeme sledovat náklady, vstupní ceny a výstup (zisk) pro firmu a předpokládejme dále, že máme ekonometricky odhadnutou následující lineární nákladovou funkci:

$$C(u, p) = \alpha + \beta^T p + \gamma u$$

kde α a γ jsou konstanty a β je vektor konstant. Může být (2.2) skutečnou nákladovou funkcí firmy ? Odpovědí je ne, jestliže firma konkurenčně minimalizuje náklady a jestliže jedna ze dvou konstant α a γ je nenulová, v tomto případě C nevyhovuje Vlastnosti 2 (lineární homogenita cen vstupů).

Nyní předpokládejme, že máme určenou nějakou skutečnou nákladovou funkci C firmy, ale že neznáme produkční funkci F firmy (s výjimkou toho, že F splňuje Předpoklad 1). Jak můžeme použít danou nákladovou funkci $C(u, p)$ (splňující výše uvedené vlastnosti $1 - 7$) k vytvoření příslušné produkční funkce $F(x)$ firmy ?

Odpovídající k produkční funkci $u = F(x)$ je skupina produkčních isoploch $\{x : F(x) = u\}$ nebo skupina rovinných množin $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$. Pro každé $u \in$ prostoru F může být nákladová funkce použita k vytvoření „krajní“ aproximace množiny $L(u)$ následujícím způsobem. Vyberte ceny vstupů $p^1 \gg 0_N$ a nakreslete povrch izokvanty $\{x : p^{1T} x = C(u, p^1)\}$. Množina $L(u)$ musí ležet nad (a protínat) touto množinou, protože $C(u, p^1) \equiv \min_x \{p^{1T} x : x \in L(u)\}$; tj. $L(u) \subset \{x : p^{1T} x \leq C(u, p^1)\}$. Vyberte další dodatečné vstupní cenové vektory $p^2 \gg 0_N, p^3 \gg 0_N, \ldots$ a graf povrchů izokvanty $\{x : p^{1T} x = C(u, p^1)\}$. Je lehce vidět, že $L(u)$ musí být podmnožinou všech množin $\{x : p^{1T} x \leq C(u, p^1)\}$. Tedy:

$$L(u) \subset \bigcap_{p \gg 0_N} \{x : p^T x \leq C(u, p)\} \equiv L^*(u),$$

tj. $L(u)$ množina skutečných produkčních možností musí být obsažena v množině $L^*(u)$ „krajních“ aproximovaných produkčních možností, která je obdržena jako průnik všech opěrných celkových nákladových poloprostorů na skutečné množině technologií $L(u)$.

Na obrázku (2.1) je $L^*(u)$ označena přerušovanou čarou. Povšimněte si, že okraj (hranici) této množiny vytváří aproximace skutečných isokvant u a že tyto aproximované isokvanty se kryjí se skutečnými jen zčásti, nemají zpětné zakřivení a nekonvexní části skutečných isokvant.

Jestliže již byla skutečná skupina množin $L^*(u)$ aproximovaných produkčních možností vytvořena, aproximované produkční funkce může být definována jako

$$F^*(x) \equiv \max\left\{u : x \in L^*(u)\right\} = \max\{u : p^T x \leq C(u, p) \text{ pro každé } p \gg 0_N\right\}$$

pro $x \geq 0_N$. Všimněme si, že maximalizační problém definovaný ve (2.4) má nekonečný počet omezení (jedno omezení pro každé $p \gg 0_N$). Tedy (2.4) může být použito k definování aproximované produkční funkce F^*, máme-li pouze nákladovou funkci C.

Je jasné (viz. obrázek 2.1), že aproximovaná produkční funkce F^* se nebude obecně překrývat se skutečnou funkcí F. Je tedy také jasné, že z hlediska sledovaného tržního chování, jestliže výrobce konkurenčně minimalizuje náklady, potom nezáleží, zda výrobce minimalizující náklady podléhá omezení produkční funkce dané jako F nebo F^*: pozorovaná tržní data nás nikdy nepřivedou ke zjištění, zda výrobce má výrobní funkci F nebo aproximovanou funkci F^*.

Je také jasné, že jestliže chceme, aby se aproximovaná produkční funkce F^* kryla se skutečnou funkcí F, pak je nezbytné, aby F splňovala následující dva předpoklady:

Předpoklad 2 pro F

F je neklesající, tj. jestliže $x^2 \geq x^1 \geq 0_N$, pak $F(x^2) \geq F(x^1)$.

Předpoklad 3 pro F

F je kvazi-konkávní funkce, tj. pro každé $u \in$ prostoru F, $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$ je konvexní množina.

Jestliže F splňuje Předpoklad 2, potom zpětné zakřivení izokvant nemůže nastat, jestliže F splňuje Předpoklad 3, potom nekonvexní izokvanty, znázorněného modelu, na obrázku 2.1, nemohou nastat.

Není příliš obtížné si všimnout, že F splňuje Předpoklady 1–3 a nákladová funkce C se počítá podle (2.1), potom aproximovaná produkční funkce F^* (spočítaná podle (2.4)) se bude krýt se skutečnou produkční funkcí F, tj. je zde *dualita* mezi nákladovými funkcemi splňujícími Vlastnosti 1–7 a produkčními funkcemi splňujícími Předpoklady 1–3. První člověk, který dokázal Theorem formální duality byl Shephard (1953).

V následující části si uvedeme podobný Theorém duality po zavedení některých silnějších podmínek na příslušnou produkční funkci F.

Následující výsledek je podklad pro mnoho teoretických a empirických aplikací teorie duality.

Lemma 3 [Hicks (1946, p. 331); Samuelson (1947, p. 68); Karlin (1959, p 272); a Gorman (1976)]

Předpokládejme, že produkční funkce F splňuje Předpoklad 1 a že nákladová funkce C je definována pomocí (2.1). Nechť $u^* \in$ prostoru F, $p^* \gg 0_N$ a předpokládejme, že x^* je řešení minimalizace nákladů při produkci u^*, když ceny vstupů p^* existují, tj.

$$C(u^*, p^*) \equiv \min_x \{p^{*T} x : F(x) \geq u^*\} = p^{*T} x^*.$$

Jestliže navíc je C derivovatelná podle cen vstup; v bodě (u^*, p^*), pak:

$$x^* = \nabla_p C(u^*, p^*),$$

kde

$$\nabla_p C(u^*, p^*) \equiv [\partial C(u^*, p_1^*, \ldots, p_N^*/\partial p_1, \ldots, \partial C(u^*, p_1^*, \ldots, p_N^*)/\partial p_N]^T$$

je vektor prvních parciálních derivací C podle složek cenového vektoru vstupů p.

Důkaz:

Libovolný vektor vhodných vstupních cen $p \gg 0_N, x^*$ je přípustný pro problém minimalizace nákladů definovaný pomocí $C(u^*, p)$, ale není nutně optimální, tj. pro každý $p \gg 0_N$ máme následující nerovnost:

$$p^T x^* \geq C\,(u^*, p)\,.$$

Pro $p \gg 0_N$ definujme funkci $g(p) \equiv p^T x^* - C(u^*, p)$. Z (2.7) plyne, že $g(p) \geq 0$ pro $p \gg 0_N$ a z (2.5) $g(p^*) = 0$. Tedy, $g(p)$ nabývá globálního minima v $p = p^*$. Protože g je diferencovatelná v p^*, musí být splněna první nezbytná podmínka pro lokální minimum :

$$\nabla_p g(p^*) = x^* - \nabla_p C(u^*, p^*) = 0_N,$$

které implikuje (2.6). Q.E.D.

Tedy derivace nákladové funkce výrobce $C(u, p)$ podle cen vstupů p dává výrobcův systém funkcí poptávky po vstupech, který minimalizuje náklady $x(u, p) = \nabla_p C(u, p)$.

Výše uvedená lemma by měla být pečlivě srovnána s následujícím závěrem.

Lemma 4 [Shephard (1953, p. 11)]

Jestliže nákladová funkce $C(u, p)$ splňuje Vlastnosti 1–7 a navíc je diferencovatelná podle cen vstupů v bodě (u^*, p^*), pak

$$x(u^*, p^*) = \nabla_p C(u^*, p^*),$$

kde $x(u^*, p^*) \equiv [x_1(u^*, p^*), \ldots, x_N(u^*, p^*)]^T$ je vektor množství vstupů minimalizující náklady potřebných k vytvoření u^* jednotek výstupu, máme-li ceny p^*, kde příslušná produkční funkce F^* je definována pomocí (2.4), $u^* \in$ prostoru F^* a $p^* \gg 0_N$.

Rozdíl mezi Lemma 3 a Lemma 4 je, že Lemma 3 předpokládá existenci produkční funkce F a nestanovuje vlastnosti nákladové funkce, kromě derivovatelnosti, zatímco Lemma 4 předpokládá pouze existenci nákladové funkce splňující příslušné podmínky regularity a odpovídající produkční funkce F^* je definována za použití dané nákladové funkce. Tedy, z ekonometrického pohledu, Lemma 4 je užitečnější než Lemma 3: za účelem získání podobného systému vstupních poptávkových funkcí, vše, co musíme udělat je předpokládat funkční tvar C, který splňuje příslušné podmínky regularity a derivovat C podle složek cenového vektoru vstupů p. Není nutné odhadnout odpovídající produkční funkci a také není nutné trvat na někdy obtížné algebře při derivování funkcí poptávky po vstupech prostřednictvím Lagrangeových technik.

Historické poznámky

Tvrzení, že existují dva nebo více ekvivalentní způsoby popisující výkony a technologii, tvoří jádro teorie duality. Matematickým základem pro ekonomickou teorii duality je Minkowski Theorem (1911), uvedený v Fenchel (1953, p. 48-50) a Rockafellar (1970, p. 95-99): každá uzavřená konvexní množina může být reprezentována jako průnik svých opěrných podprostorů. Tedy, za jistých podmínek, uzavřená konvexní množina $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u, x \geq 0_N\}$ může být reprezentována jako průnik podprostorů generovaných nákladovými izoplochami dotýkajícími se množiny produkčních možností $L(u), \cap_p \left\{x : p^T x \geq C(u,p)\right\}$.

Jestliže spotřebitel (výrobce) má rozpočet $y > 0$, který spotřebuje na N komodit, pak maximální užitek (nebo výstup) při cenách $p \gg 0_N$ může obdržet jako řešení rovnosti $y = C(u,p)$ nebo řešením

$$1 = C(u, p/y)$$

(kde upotřebíme lineární homogenitu C v p) pro u jako funkci normalizovaných cen, p/y-. Nazvěme výslednou funkci G, tak že $u = G(p/y)$. Alternativně, G může být definována přímo z produkční funkce F následujícím způsobem pro $p \gg 0_N$, $y > 0$:

$$G^*(p,y) \equiv \max \ \left\{F(x) : p^T x \leq y, x \geq 0_N\right\}$$

nebo

$$G\left(\frac{p}{y}\right) \equiv \ \max \ \left\{F(x) : \left(\frac{p}{y}\right)^T x \leq 1, x \geq 0_N\right\}.$$

Houthakker (1951-52, p. 157) nazval funkci G *nepřímou užitkovou funkcí* a, stejně jako nákladovou funkci C, také může charakterizovat preference nebo technologické zvláštnosti za jistých podmínek (Část 4 dále). Důvod pro uvedení tohoto u této části oddílu je, že historicky to bylo zavedeno do ekonomické literatury před nákladovou funkcí od Antonelliho (1971, p. 349) v 1886 a potom Konüsem (Konyus) (1924). Tedy, první článek, který připustil, že preference mohou být ekvivalentně popsány přímou nebo nepřímou funkcí užitku ukázal Konyus a Byushgens (1926, p. 157), kteří si všimli, že rovnice $u = F(x)$ a $u = G(p/y)$ jsou ekvivalentní pro stejné body, ale v odlišných souřadnicích: první rovnice je v bodových souřadnicích, zatímco druhá v rovinných a tečných souřadnicích. Konyus a Byushgens (1926, p. 159) také zavedli minimalizační problém, který dovoluje odvodit přímou užitkovou funkci z nepřímé užitkové funkce a, konečně, znázornili do grafu různé preference v cenovém prostoru pro případ dvou druhů zboží.

Teorie duality v anglicky psané literatuře pravděpodobně začala dvěma články od Hotellinga (1932, 1935), který asi jako první ekonom užil slovo „dualita“:

> Stejně tak jako máme užitkovou funkci u spotřebních veličin, jejichž derivací jsou ceny, tak máme duálně funkci cen, jejíž derivací jsou spotřební veličiny. [Hotelling (1932,p. 594)].

Hotteling (1932, p. 594) také připustil, že nákladová funkce může být zobrazována křivkami, které jsou konkávně rostoucí, tj. poznal, že nákladová funkce $C(u,p)$ by vyhovovala „doplněné“ podmínce v p.

Hotelling (1932, p. 590; 1935, p. 68) také zavedl *ziskovou funkci* Π, která poskytuje ještě další způsob jak může být popsána technologie klesajících výnosů z rozsahu. S použitím našeho zápisu je funkce Π definována jako

$$\Pi(p) \equiv \max \left\{F(x) - p^T x\right\}$$

Hotelling určil, že poptávkové funkce, maximalizující zisk $[x_1(p), \ldots, x_N(p)]^T \equiv x(p)$, mohou být obdrženy diferencováním ziskové funkce, tj. $x(p) = -\nabla_p \Pi(p)$. Tedy, jestliže je Π třídy C^2, tak lze snadno odvodit Hotellingovy *podmínky symetrie* (1935, p. 69):

$$-\frac{\partial x_i}{\partial p_j}(p) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p_i \partial p_j}(p) = -\frac{\partial x_j}{\partial p_l}(p).$$

Roy (1942, p. 20) definoval nepřímou užitkovou funkci G^* jako v (2.10) výše a potom odvodil analogii Lemma 3, výše uvedené, která je nazvána *Royova identita* (1942, pp. 18-19),

$$x\left(\frac{p}{y}\right) = \frac{-\nabla_p G^*(p,y)}{\nabla_y G^*(p,y)}.$$

kde $x(p/y) \equiv [x_1(p/y), \ldots, x_n(p/y)]^T$ je vektor poptávkových funkcí maximalizujících užitek získaných tak, že spotřebitel (výrobce) má ceny $p \gg 0_N$ a důchod $y > 0$ na spotřebu. Roy (1942, pp. 24-27) ukázal, že G^* se snižuje v ceně p, v důchodu a homogenní stupně 0 v (p,y); tj. $G^*(\lambda p, \lambda y) = G^*(p,y)$ pro $\lambda > 0$. Tedy $G^*(p,y) = G^*(p/y, 1) \equiv G(p/y) = G(v)$, kde $v \equiv p/y$ je vektor normalizovaných cen. V článku z roku 1947 Roy odvodil následující verzi Royovy identity (1947, p. 219), kde nepřímá užitková funkce G je použita místo G^*:

$$x_i(v) = \frac{\partial G(v)}{\partial v_i} \Bigg/ \sum_{j=1}^{N} v_j \frac{\partial G(v)}{\partial v_j}, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

Francouzský matematik Ville (1951, p. 125) také odvodil užitečné vztahy (2.14) v roce 1946. Snad proto by měla (2.14) být nazývána Villeho identita. Ville (1951, p. 126) si všiml, že jestliže přímá užitková funkce $F(x)$ je lineárně homogenní, potom nepřímá funkce $G(v) \equiv \max_x\{F(x) \; v^T x \leq 1, x \geq 0_N\}$ je homogenní stupně -1, tj. $G(\lambda v) = \lambda^{-1} G(v)$ pro $\lambda > 0, v \gg 0_n$ a tedy $-G(v) =$

$= \sum_{j=1}^{N} v_j\,(\partial G(v)/\partial v_j)$. Substituce poslední identity do (2.14) dává jednodušší rovnici (viz. také Samuelson (1972)]:

$$x_i(v) = -\partial \ln G(v)/\partial v_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, N.$$

V tomto oddíle by měl být také uveden Antonelli (1971, p. 349), který získal Royovu verzi identity v 1886 a Konyus a Byushgens (1926, p. 159) téměř odvodili toto v roce 1926 následujícím způsobem: vzali v úvahu problém minimalizovaného nepřímého užitku $G(v)$ s normalizovanou cenou v při omezení $v^T x = 1$. Jak si Houthakker (1951-52, pp. 157-158) později všiml, tento minimalizační problém s omezením generuje přímou užitkovou funkci, tj. pro $x \gg 0_N$ máme:

$$F(x) = \min_v \{G(v) : v^\top x \leq 1, v \geq 0_N\}. \tag{2.2}$$

Konyus a Byushgens získali podmínky prvního řádu pro problém (2.16): $\nabla_v G(v) = \mu x$. Jestliže vyloučíme Lagrangeův multiplikátor μ z tohoto posledního systému rovnic užitím $v^\top x = 1$, získáme vztah $x = \nabla_v G(v)/v^\top \nabla_v G(v)$, který je v (2.14) zapsán ve vektorovém tvaru. Konyus a Byushgens však tento poslední krok přesně neprovedli.

Jiné pozoruhodné pojednání napsal Wold (1943–44). Definoval zde nepřímou užitkovou funkci $G(v)$ (nazval ji ,,funkce cenové preference“) a ukázal, že plochy indiference cenového prostoru jsou konvexní k počátku nebo lineární,tj. ukázal, že $G(v)$ je kvazikonvexní funkce[†] při normalizovaných cenách v. Woldova raná práce je shrnuta v Wold (1953, str. 145–148).

Malmquist (1953, str. 212) také definuje nepřímou užitkovou funkci $G(v)$ a ukazuje, že je to kvazikonvexní funkce ve v.

Jestliže produkční funkce F vyjadřuje konstantní výnosy z rozsahu produkce (tj. $F(\lambda x) = \lambda F(x)$ pro všechna $\lambda \geq 0, x \geq 0_N$) a je spojitá, potom se odpovídající nákladová funkce rozkládá následujícím způsobem:
Nechť $u > 0, p \gg 0_N$; potom

$$\begin{aligned} C(u,p) &\equiv \min_x \{p^\top x : F(x) \geq u\} \\ &= \min_x \{u p^\top (x/u) : F(x/u) \geq 1\} \\ &= u \min_z \{p^\top z : F(z) \geq 1\} \\ &\equiv u\, C(1,p). \end{aligned} \tag{2.3}$$

(Výše uvedený důkaz předpokládá, že existuje alespoň jedno $x^* > 0$ takové, že $F(x^*) > 0_N$, takže množina $\{z : F(z) \geq 1\}$ je neprázdná.) Samuelson (1953–54) předpokládá, že produkční funkce F je lineárně homogenní a podléhá „zobecněnému zákonu klesajících výnosů“, $F(x' + x") \geq F(x') + F(x")$ (který je ekvivalentní konkávnosti F, pokud je F lineárně homogenní). Definuje (str. 15)

[†]Funkce G je kvazikonvexní právě tehdy, když $(-G)$ je kvazikonkávní.

jednotkovou nákladovou funkci $C(1,p)$ a zjišťuje, že $C(1,p)$ má stejné vlastnosti v p jako F v x. Také poznamenává (str. 15), že rovina na ploše odpovídající jednotkovému výstupu (oblast nekonečné substitučnosti) bude odpovídat rohu na jednotkové nákladové ploše. Tuto poznámku učinil již Shephard (1953, str. 27–28).

Shephardova monografie z roku 1953 se zdá být prvním moderním, přesným pojednáním o teorii duality. Shephard (1953, str. 13–14) uvádí, že nákladovou funkci $C(u,p)$ můžeme interpretovat jako opěrnou funkci pro množinu $\{x : F(x) \geq u\}$, a užívá tohoto faktu k určení vlastností $C(u,p)$ vzhledem k p. Shephard (1953, str. 13) také zmiňuje Minkowského větu (1911) o konvexních množinách a Bonnesenovu a Fenchelovu monografii o konvexních množinách. Musíme poznamenat, že Shephard neobjevil přímo dualitu mezi produkčními a nákladovými funkcemi, objevil dualitu mezi produkčními a distančními funkcemi, kterou budeme definovat v další části, a pak mezi distančními a nákladovými funkcemi.

Shephard (1953, str. 4) definuje *homotetickou* produkční funkci. Je to taková funkce, kterou lze napsat ve tvaru

$$F(x) = \phi[f(x)],$$

kde f je homogenní funkce stupně jedna a ϕ je spojitá, rostoucí funkce f. Seznámíme se s následujícími dodatečnými předpoklady o F (nebo f):

Předpoklad 4 o F

F je (nezáporně) lineárně homogenní; tj. jestliže $x \geq 0_N, \lambda \geq 0$, pak $F(\lambda x) = \lambda F(x)$.

Předpoklad 5 o F

F je slabě pozitivní; tj. pro každé $x \geq 0_N, F(x) \geq 0$, ale $F(x^*) > 0$ pro alespoň jedno $x^* > 0_N$.

Nyní můžeme usuzovat, že $\phi(f)$ je spojitá, rostoucí funkce jedné proměnné pro $f \geq 0$ a $\phi(0) = 0$. Za těchto podmínek existuje inverzní funkce ϕ^{-1}, která má stejné vlastnosti jako ϕ. Pro všechna $f \geq 0$ platí $\phi^{-1}[\phi(f)] = f$. Jestliže $f(x)$ splňuje výše uvedené předpoklady 1, 4 a 5, potom se nákladová funkce odpovídající $F(x) \equiv \phi[f(x)]$ rozkládá následovně:

nechť $u > 0, p \gg 0_N$; pak

$$
\begin{aligned}
C(u,p) &\equiv \min_x\{p^\top x : \phi[f(x)] \geq u\} \\
&= \min_x\{p^\top : f(x) \geq \phi^{-1}[u]\} \\
&= \phi^{-1}[u]\min_x\{p^\top(x/\phi^{-1}[u]) : f(x/\phi^{-1}[u]) \geq 1\}, \\
&\quad \text{kde } \phi^{-1}[u] > 0 \text{ pro } u > 0, \\
&= \phi^{-1}[u]c(p), \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

kde $c(p) \equiv \min_z\{p^\top z : f(z) \geq 1\}$ je *funkce jednotkových nákladů*, která odpovídá lineárně homogenní funkci f, nezáporně (kladně) lineárně homogenní, neklesající, konkávní a spojité funkci p (viz výše vlastnosti 1–5). Nebudeme, jako obvykle, schopni odvodit původní produkční funkci $\phi[f(x)]$ z nákladové funkce (2.18), ledaže by f také splňovala výše uvedené předpoklady 2 a 3. Shephard (1953, str.43) obdržel faktorizaci (2.18) pro nákladové funkce odpovídající homotetickým produkčním funkcím.

Shephard (1953, str.28–29) uvádí různá praktická využití teorie duality:

(i) jako pomůcka při agregaci proměnných,

(ii) v ekonometrických studiích produkce v případě, že nejsou dostupná vstupní data, ale náklady, vstupní ceny a výstupní data dostupná jsou,

(iii) jako pomůcka při odvozování srovnávacích neměnných výsledků.

Shephard odvodil, nebo předpověděl mnoho teoretických výsledků a praktických aplikací teorie duality.

Věnujme se nyní určitým výsledkům odvozeným v této kapitole. McFadden (1966) ukázal, že minimum z definice (2.1) existuje, pokud F splňuje předpoklad 1. Vlastnost 1 obdržel Shephard (1953, str. 14), vlastnost 2 Shephard (1953, str. 14) a Samuelson (1953-54, str. 15), vlastnost 3 Shephard (1953, str. 14), vlastnost 4 Shephard (1953, str. 15) [naši metodu důkazu použil McKenzie (1956-57, str. 185)], vlastnosti 5 a 6 Uzawa (1964, str. 217) a konečně vlastnost 7 získal Shephard (1970, str. 83).

Metodu konstrukce množin přibližných produkčních možností $L^*(u)$ pomocí nákladové funkce odvodil Uzawa (1964).

Velmi důležitá je skutečnost, že přibližné izokvanty neobsahují zpětné zahnutí, nebo nekonvexní části pravých izokvant. V souvislosti s teorií spotřebitele na to upozorňuje Hotelling (1935, str. 74), Wold (1943, str. 231; 1953, str. 146) a Samuelson (1950b, str. 359–360) a v souvislosti teorie produkce McFadden (1966, 1978a). Abychom tuto skutečnost zdůraznili, budeme citovat Hotellinga a Samuelsona.

> Jestliže bude mít indiferenční křivka pro nákupy vlnitý charakter, na některých částech bude konvexní k počátku a na ostatních částech konkávní. Musíme učinit závěr, že můžeme považovat za podstatné pouze ty části, které jsou konvexní k počátku. Ostatní jsou vpodstatě nepozorovatelné. Můžeme je objevit pouze v nespojitostech, které mohou nastat v poptávce s nestálými cenovými poměry, které vedou k nečekaným změnám směru tečny ke grafu poptávky v místě nespojitosti, pokud je přímka pootočena. Ale zatímco takovéto nespojitosti mohou odhalit existenci mezery, nemohou nikdy změřit její hloubku. Pokud existují konkávní části indiferenčních křivek a jejich vícerozměrné zobecnění, musejí navždy zůstat v neměřitelné temnotě. [Hotelling(1935, str.74), vlastní překlad]

> Musíme poznamenat, že na konkurenčním trhu nemůžeme pozorovat body, kde jsou indiferenční křivky spíše konvexní než konkávní. Takové body jsou navěky zahaleny v temnotě – pokud neučiníme našeho spotřebitele monopolistou, který si vybírá mezi zbožím ležícím na velmi konvexní „rozpočtové křivce“, (která zohledňuje cenu zboží, které spotřebitel nakupuje). V monopsonním případě můžeme v bodě rovnováhy klidně odvodit sklon spotřebitelovy indiferenční křivky od sklonu pozorovaného omezení. [Samuelson (1950b, str. 359–360), vlastní překlad]

Náš důkaz lemmatu 3 sleduje důkaz připsaný Diamondem a McFaddenem (1974, str. 4) M. W. Gormanovi, nicméně stejná metoda důkazu byla použita také Karlinem (1959, str. 272). Hicksův a Samuelsonův důkaz lemmatu 3 předpokládá diferencovatelnost produkčních funkcí a užívá podmínku prvního řádu pro nákladovou minimalizaci současně s vlastnostmi omezení. V naší citaci uvedené výše Hotelling (1932, str. 594) naznačuje, že také obdržel Hicksovy (1946, str. 331) a Samuelsonovy (1947, str. 68; 1953–54, str. 15–16) výsledky v nepatrně odlišném kontextu.

3 Dualita mezi nákladovými a agregačními (produkčními nebo užitkovými) funkcemi

V této části předpokládejme, že agregační funkce F splňuje následující vlastnosti:

Podmínky I pro F

(i) F je reálná funkce N proměnných definovaná na nezáporném ortantu $\Omega \equiv \{x : x \geq 0_N\}$ a *spojitá* na svém definičním oboru.

(ii) F je *rostoucí*, t.j. $x'' \gg x' \geq 0_N$ implikuje $F(x'') > F(x')$.

(iii) F je *kvazikonkávní* funkce.

Poznamenejme, že uvedené vlastnosti (i) a (ii) jsou silnější než předpoklady 1 a 2 o F učiněné v předchozí části. To znamená, že můžeme odvodit o něco silnější podmínky pro nákladovou funkci $C(u,p)$, která odpovídá $F(x)$ splňující podmínky I.

Nechť U je obor hodnot funkce F. Z (i) a (ii) je vidět, že $U \equiv \{u : \bar{u} \leq u < \bar{\bar{u}}\}$, kde $\bar{u} \equiv F(0_N) < \bar{\bar{u}}$. Poznamenejme, že nejmenší horní závora $\bar{\bar{u}}$ může být konečné číslo nebo $+\infty$. Při aplikaci teorie spotřebitele nemáme důvod předpokládat, že $\bar{u}$ je konečné číslo (tj. $\bar{u}$ může být rovno $-\infty$), ale to jenom mírně ubírá na obecnosti.

Definujme množinu kladných cen $P \equiv \{p : p \gg 0_N\}$.

Věta 1

Jestliže F splňuje podmínky I, pak $C(u,p) \equiv \min_x\{p^\top x : F(x) \geq u\}$ je definovaná pro všechna $u \in U$ a $p \in P$ splňující podmínky II uvedené níže.
Důkaz viz Diewert(1982).

Podmínky II pro C

(i) $C(u,p)$ je reálná funkce $N+1$ proměnných definovaná na $U \times P$ *bodově spojitá v* (u,p) v definičním oboru.

(ii) $C(\bar{u},p) = 0$ pro každé $p \in P$.

(iii) $C(u,p)$ je *rostoucí v u* pro každé $p \in P$; t.j. pokud $p \in P, u', u'' \in U$ při $u' < u''$, potom $C(u',p) < C(u'',p)$.

(iv) $C(\bar{\bar{u}},p) = +\infty$ pro každé $p \in P$; tj. jestliže $p \in P, u^n \in U, \lim_n u^n = \bar{\bar{u}}$, potom $\lim_n C(u^n,p) = +\infty$.

(v) $C(u,p)$ je (pozitivně) *lineárně homogenní v p* pro všechna $u \in U$; tj. $u \in U, \lambda > 0, p \in P$ implikuje $C(u,\lambda p) = \lambda C(u,p)$.

(vi) $C(u,p)$ je *konkávní v p* pro všechna $u \in U$.

(vii) $C(u,p)$ je *rostoucí v p* pro $u > \bar{u}$ a $u \in U$.

(viii) C je taková, že funkce $F^*(x) \equiv \max_u\{u : p^\top x \geq C(u,p)$ pro každé $p \in P, u \in U\}$ je spojitá pro $x \geq 0_N$.

Důsledek 1.1

Jestliže $C(u,p)$ splňuje podmínky II uvedené výše, potom definiční obor C může být rozšířen z $U \times P$ na $U \times \Omega$. Rozšířená funkce C je spojitá v p pro $p \in \Omega \equiv \{p : p \geq 0_N\}$ pro všechna $u \in U$. ‡

Důsledek 1.2

Pro každé $x \geq 0_N, F^*(x) = F(x)$, kde F^* je funkce definovaná nákladovou funkcí C v bodě (viii) podmínek II.

Důsledek 1.2 ukazuje, že nákladová funkce dokáže kompletně popsat produkční funkci, která splňuje podmínky I; tj. užijeme-li McFaddenovu (1966) terminologii, nákladová funkce je *postačující statistika* pro produkční funkci.

Důkaz věty 1 je přímý s výjimkou bodů (i) a (viii), které obsahují vlastnost spojitosti produkční nebo nákladové funkce. Spojitost se jeví jako obtížný pojem teorie duality. Proto se snažíme této vlastnosti v předchozí části vyhnout tak, jak je to jen možné. O problému spojitosti již dříve diskutovali Shephard (1970), Friedman (1972), Diewert (1974a), Blackorby, Primont a Russell (1978) a Blackorby a Diewert (1979).

Abychom dokázali vztah mezi spojitostí $L(u)$ a tím, že $C(u, p)$ je spojitá na $U \times P$, požadujeme, aby byla funkce F rostoucí (vlastnost I(ii)).§ Pokud je vlastnost I(ii) nahrazena předpokladem slabé monotonie (tak, jako náš starý předpoklad 2 o F z předchozí části), pak náhorní rovina na grafu F („tlusté“ indiferenční plochy v jazyce teorie užitku) způsobí nesouvislosti v C vzhledem k u [srov. Friedman (1972, str. 169)].

Poznamenejme, že II(ii) a II(iii) implikují, že $C(u, p) > 0$ pro $u > \bar{u}$ a $p \gg 0_N$ a že II(iv) není nezávislá vlastnost C, protože plyne z II(ii), (iii), (v) a (vi). poznamenejme také, že F není ryze kvazikonkávní, tj. že množina produkčních možností $L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$ je ryze konvexní.

Konečně, je zřejmé, že máme-li danou pouze nákladovou funkci podniku C, můžeme použít funkci F^* definovanou ve smyslu nákladové funkce v II(viii), abychom vytvořili produkční funkci podniku. Tato skutečnost je formálně zapsána v následující větě.

Věta 2

Jestliže C splňuje podmínky II uvedené výše, potom F^* definovaná II(viii) splňuje

‡ $C(u, p)$ nemusí být striktně rostoucí v u, pokud p leží na hranici Ω. Např. uvažme funkci $f(x_1, x_2) \equiv x_1$, která má duální nákladovou funkci $C(u, p_1, p_2) \equiv p_1 u$, která není rostoucí v u, pokud $p_1 = 0$.

§ Friedman (1972) ukazuje, že I(ii) a spojitost shora (předpoklad I o F v předchozí části) postačují k implikaci joint spojitosti C na $U \times P$. Nicméně, pokud nebudeme předpokládat vlastnost aditivity F, ze spojitosti zdola nemůžeme vyvodit, že $C(u, p)$ je rostoucí v u pro $p \in P$ (vlastnost, která plyne z I(i) až I(ii)).

podmínky I. Navíc, pokud $C^*(u,p) \equiv \min_x\{p^\top x : F^*(x) \geq u\}$ je nákladová funkce definovaná F^*, potom $C^* = C$.

Důsledek 2.1

Množina supergradientů C vzhledem k p v bodě $(u^*, p^*) \in U \times P, \partial C(u^*, p^*)$ je množinou řešení problému nákladové minimalizace $\min_x\{p^{*\top} x : F^*(x) \geq u^*\}$, kde F^* je agregační funkce odpovídající dané nákladové funkci, která splňuje podmínky II. [*Supergradienty* splňují $x^* \in \partial C(u^*, p^*)$ právě tehdy, když $C(u^*, p) \leq C(u^*, p^*) + x^{*\top}(p - p^*)$ pro všechna $p \gg 0_N$.]

Důsledek 2.2 [Shephardovo (1953, str. 11) lemma]

Jestliže C splňuje podmínky II a kromě toho je diferencovatelná vzhledem k cenám vstupů v bodě $(u^*, p^*) \in U \times P$, potom řešení x^* problému nákladové minimalizace $\min_x\{p^{*\top} x : F(x) \geq u^*\}$ je jediné a je rovno vektoru parciálních derivací funkce $C(u^*, p^*)$ podle prvků vektoru cen p; tj.

$$x^* = \nabla_p C(u^*, p^*). \tag{2.1}$$

Předchozí dvě věty poskytly verzi Shephardovy (1953, 1970) věty o dualitě mezi nákladovými a agergačními funkcemi. Podmínky pro C, které odpovídají našim podmínkám I pro F, se zdají být zřejmé kromě bodu II(viii), který nezbytně zaručuje spojitost agregační funkce F^* odpovídající dané nákladové funkci C. Podmínku II(viii) můžeme vynechat, jestliže zesílíme podmínku II(iii): $C(u,p)$ je rostoucí v u pro každé p náležející do $S \equiv \{p : p \geq 0_N, 1_N^\top p = 1\}$. Lze ukázat, že výsledné F^* je spojité [srov. Blackorby, Primont a Russell (1978)]. Mnoho užitečných funkcionálních tvarů však nesplňuje zesílení podmínky II(iii).¶ Alternativní metoda, jak se zbavit podmínky II(viii), krerá zachovává spojitost přímé agregační funkce F^* odpovídající dané nákladové funkci C, je objevit lokální věty o dualitě, tj. předpokládejme, že C splňuje podmínky II(i)–II(vii) pro $(u,p) \in U \times P$, kde P je nyní omezeno na *kompaktní*, konvexní podmnožinu kladného ortantu. Lokálně spojitá funkce F^* může být definovaná pomocí C a naopak má C jako svou nákladovou funkci na $U \times P$. Tento přístup provozují Blackorby a Diewert (1979).

Historické poznámky

Věty o dualitě mezi F a C dokázali za různých podmínek Shephard (1953, 1970), McFadden (1962), Chipman (1970), Hanoch (1978), Diewert (1971a, 1974a), Afriat (1973a) a Blackorby, Primont a Russel (1978).

¶Např. uvažme funkci $C(u,p) \equiv b^\top pu$, kde $b > 0_N$, ale b není $\gg 0_N$. Tato funkce odpovídá Leontiefově agregační funkci nebo agregační funkci s pevnými koeficienty.

Věty o dualitě mezi C a úrovňovými množinami $F, L(u) \equiv \{x : F(x) \geq u\}$ dokázali Uzawa (1964), McFadden (1966, 1978a), Shephard (1970), Jacobsen (1970, 1972), Diewert (1971a), Friedman (1972) a Sakai (1973).

4 Dualita mezi přímými a nepřímými agregačními funkcemi

Předpokládejme, že přímé agregační (užitkové nebo produkční) funkce F splňují Podmínky I vypsané v předchozí části. Základní optimalizační problém, o kterém budeme v této části uvažovat, je problém maximalizace užitku (nebo výstupu) $F(x)$, který podléhá rozpočtovému omezení $p^\top x \leq y$, kde $p \gg 0_N$ je vektor cen komodit (nebo vstupů) a $y > 0$ je množství peněz, které může spotřebitel (výrobce) utratit. Protože $y > 0$, můžeme rozpočtové omezení $p^\top x \leq y$ nahradit $v^\top x \leq 1$, kde $v \equiv p/y$ je vektor *normalizovaných* cen. *Nepřímá agregační funkce* $G(v)$ je definovaná pro $v \gg 0_N$ jako

$$G(v) \equiv \max_x \{F(x) : v^\top x \leq 1, x \geq 0_N\}. \tag{2.1}$$

Věta 3

Jestliže přímá agregační funkce F splňuje podmínky I, potom nepřímá agregační funkce G splňuje následující podmínky:

Podmínky III pro G

(i) $G(v)$ je reálná funkce N proměnných definovaná na množině kladných normalizovaných cen $V \equiv \{v : v \gg 0_N\}$ a na tomto definičním oboru je *spojitá*.

(ii) G je *klesající*; tj. jestliže $v'' \gg v' \gg 0_N$, pak $G(v'') < G(v')$.

(iii) G je *kvazikonvexní* na V.

(iv) $G^{\|}$ je taková, že funkce $\hat{F}(x) \equiv \min_v \{G(v) : v^\top x \leq 1, v \geq 0_N\}$ definovaná pro $x \gg 0_N$ je spojitá na tomto definičním oboru a má spojité rozšíření** na nezáporný výsek $\Omega \equiv \{x : x \geq 0_N\}$.

‖G zde je rozšíření G na nezáporný výsek, které je definováno Fenchelovou (1953) uzávěrovou operací; tj. definujme nadgraf původního G jako $\Gamma \equiv \{(u, v) : v \gg 0_N, u \geq G(v)\}$, definujme uzávěr Γ jako $\bar{\Gamma}$ a definujme *rozšířené* G jako $G(v) \equiv \inf_u \{u : (u, v) \in \bar{\Gamma}\}$ pro $v \geq 0_N$. Výsledné rozšířené G je zdola spojité (množiny $\{v : G(v) \leq u, v \geq 0_N\}$ jsou uzavřené pro všechna u). Pokud je oborem hodnot funkce F množina $U \equiv \{u : \bar{u} \leq u < \bar{\bar{u}}\}$, kde $\bar{u} < \bar{\bar{u}}$, potom obor hodnot nerozšířeného G je $\{u : \bar{u} < u < \bar{\bar{u}}\}$ a obor hodnot rozšířeného G je $\{u : \bar{u} < u \leq \bar{\bar{u}}\}$, takže pokud $\bar{\bar{u}} = +\infty$, potom $G(v) = +\infty$ pro $v = 0_N$ a definovaná pro ostatní body v na hranici nezáporného ortantu.

**F je rozšířená na nezáporný výsek Fenchelovou uzávěrovou operací: definujme podgraf původního $\hat{F}$ jako $\Delta \equiv \{(u, x) : x \gg 0_N, u \leq \hat{F}(x)\}$, definujme uzávěr Δ jako $\bar{\Delta}$ a definujme

Důsledek 3.1

Přímá agregační funkce F může být opět získána z nepřímé agregační funkce G; tj. pro $x \gg 0_N, F(x) = \min_v\{G(v) : v^\top x \leq 1, v \geq 0_N\}$.

Důsledek 3.2

Nechť F splňuje podmínky I a nechť $x^* \gg 0_N$. Definujme uzavřenou konvexní množinu normalizovaných opěrných nadrovin v bodě x^* jako uzavřenou konvexní množinu $H(x^*) = \{x : F(x) \geq F(x^*), x \geq 0_N\}$.[††] Pak (i) $H(x^*)$ je množina řešení nepřímého užitkového (nebo produkčního) minimalizačního problému $\min_v\{G(v) : v^\top x^* \leq 1, v \geq 0_N\}$, kde G je nepřímá funkce, která odpovídá F podle definice (7.4) a (ii) pokud $v^* \in H(x^*)$, pak x^* je řešením přímého užitkového (nebo produkčního) maximalizačního problému $\max_x\{F(x) : v^{*\top} x \leq 1, x \geq 0_N\}$.

Důsledek 3.3 [Hotellingova (1935, str. 71); Woldova (1944, str. 69–71; 1953, str. 45) identita]

Jestliže F splňuje podmínky I a navíc je diferencovatelná pro $x^* \gg 0_N$ s nenulovým vektorem gradientu $\nabla F(x^*) > 0_N$, potom x^* je řešením přímého užitkového (nebo produkčního) maximalizačního problému $\max_x\{F(x) : v^{*\top} x \leq 1, x \geq 0_N\}$, kde

$$v^* \equiv \frac{\nabla F(x^*)}{x^{*\top} \nabla F(x^*)}. \tag{2.2}$$

Systém rovnic (4.2) známe pod pojmem systém *inverzních poptávkových funkcí*; i-tá rovnice

$$p_i/y \equiv v_i^* = [\partial F(x^*)/\partial x_i] \Bigg/ \left[\sum_{j=1}^{N} x_j^* \partial F(x^*)/\partial x_j\right]$$

vyjadřuje cenu i-té komodity p_i podělenou výdaji y jako funkci vektoru množství x^*, které si spotřebitel nebo výrobce vybere, pokud bude maximalizovat $F(x)$ při rozpočtovém omezení $v^{*\top} x = 1$.

Nyní budeme předpokládat, že máme dánu dobře se chovající nepřímou agregační funkci G a ukážeme, že pomocí této funkce lze definovat dobře se chovající funkci $\hat{F}$ takovou, že G je její nepřímá funkce.

Věta 4

---

rozšířenou $\hat{F}$ jako $F(x) \equiv \sup_u\{u : (u, x) \in \bar{\Delta}\}$ pro $x \geq 0_N$ Jestliže je nerozšířená funkce $\hat{F}$ spojitá pro $x \gg 0_N$, lze dokázat, že rozšířená funkce $\hat{F}$ je spojitá shora pro $x \geq 0_N$. Podmínka III(iv) implikuje, že rozšířená funkce F je spojitá zdola pro $x \geq 0_N$.

[††]Jestliže $v^* \in H(x^*)$, pak $v^{*\top} x^* = 1, x^* \geq 0_N$ a $F(x) \geq F(x^*)$ implikuje $v^{*\top} x \geq v^{*\top} x^* = 1$. Uzavřenost a konvexnost $H(x^*)$ ukázal Rockafellar (1970, str. 215).

Předpokládejme, že G splňuje podmínky III. Potom $\hat{F}(x)$, která je definovaná pro $x \gg 0_N$

$$\hat{F}(x) = \min_v \{G(v) : v^\top x \le 1, v \ge 0_N\} \tag{2.3}$$

má rozšíření na $x \ge 0_N$, které splňuje podmínky I. Navíc, jestliže definujeme $G^*(x) \equiv \max_x\{\hat{F}(x) : v^\top x \le 1, x \ge 0_N\}$ pro $v \gg 0_N$, potom $G^*(v) = G(v)$ pro všechna $v \gg 0_N$.

Důsledek 4.1

Nechť G splňuje podmínky III a nechť $v^* \gg 0_N$. Definujme uzavřenou konvexní množinu normalizovaných opěrných nadrovin v bodě v^* jako uzavřenou konvexní množinu $H^*(v^*) = \{v : G(v) \le G(v^*), v \ge 0_N\}$. Pak (i) $H^*(v^*)$ je množina řešení přímého užitkového (nebo produkčního) maximalizačního problému $\max_x\{\hat{F}(x) : v^{*\top} x \le 1, x \ge 0_N\}$ kde $\hat{F}$ je přímá funkce, která odpovídá dané nepřímé funkci G podle definice(4.3) a (ii) pokud $x^* \in H(v^*)$, pak v^* je řešením přímého užitkového (nebo produkčního) minimalizačního problému $\min_v\{G(v) : v^\top x^* \le 1, v \ge 0_N\}$.

Důsledek 4.2 [Villeova (1946, str. 35); Royova (1947, str. 222) identita]

Jestliže G splňuje podmínky III a navíc je diferencovatelná pro $v^* \gg 0_N$ s nenulovým vektorem gradientu $\nabla G(v^*) < 0_N$, potom x^* je jediným řešením přímého užitkového (nebo produkčního) maximalizačního problému $\max_x\{F(x) : v^{*\top} x \le 1, x \ge 0_N\}$, kde

$$x^* \equiv \frac{\nabla G(v^*)}{v^{*\top} \nabla G(v^*)}. \tag{2.4}$$

Vidíme, že (4.4) poskytuje protějšek Shephardovu lemmatu v předchozí části. Jak uvidíme později, Shephardovo lemma a Royova identita jsou základem pro mnoho teoretických i empirických aplikací.

Závěrem poznamenejme, že podmínka III(iv) se zdá být také trochu divná. Umožňuje nám odvodit přímou agregační funkci z dané nepřímé funkce splňující podmínky III.[‡‡]

Historické poznámky

Věty o dualitě mezi přímými a nepřímými agregačními funkcemi dokázali Samuelson (1965, 1969, 1972); Newman (1965, str. 138–165); Lau (1969); Shephard

[‡‡]Bez podmínky III(iv) můžeme stále vyvozovat spojitost $\hat{F}(x)$ přes $x \gg 0_N$, ale výsledná F nemusí nutně mít spojité rozšíření na $x \ge 0_N$. (Pokud $\hat{F}$ není nutně konkávní, ale je pouze kvazikonkávní pro $x \gg 0_N$, její rozšíření nemusí být nutně spojité.) Diskuse a příklady k problému spojitosti viz Diewert (1974a, str. 121–123).

(1970, str. 105–113); Hanoch (1978); Weddepohl (1970, kap. 5); Katzner (1970 str. 59–62); Afriat (1972a, 1973c) a Diewert (1974a).

Práce, které uvádějí do souvislostí předpoklady na systém poptávkových funkcí spotřebitele a přímou agregační funkci F (problém integrovatelnosti) napsali Samuelson (1950b); Hurwicz a Uzawa (1971); Hurwicz (1971) a Afriat (1973a, b).

Geometrickou interpretaci Royovy identity najdeme v Darrough a Southey (1977), některá rozšíření viz Weymark (1980).

5 Dualita mezi přímými agregačními a distančními nebo deflačními funkcemi

V této části budeme uvažovat o *čtvrté* alternativní metodě charakterizace preferencí spotřebitelů nebo technologií. Tato metoda je zvláště užitečná pro definici jisté třídy indexních čísel podle Malmquista (1953, str. 232).

Jako obvykle, nechť $F(x)$ je agregační funkce splňující podmínky I uvedené výše v části 3. Pro u náležející do vnitřku oboru hodnot F (tj. $u \in \text{int } U$, kde $U \equiv \{u : \bar{u} \leq u < \bar{\bar{u}}\}$) a $x \gg 0_N$, definujme *distanční* nebo *deflační funkci*[§§] [¶¶] Pojem *deflační* funkce pro D je výstižnější z ekonomického pohledu. D jako

$$D(u, x) \equiv \max_k \left\{ k : F\left(\frac{x}{k}\right) \geq u, k > 0 \right\}. \tag{2.1}$$

Takže $D(u^*, x^*)$ je největší číslo, které bude snižovat (zvyšovat pokud $F(x^*) < u^*$) bod $x^* \gg 0_N$ na hranici množiny užitkových (nebo produkčních) možností $L(u^*) \equiv \{x : F(x) \geq u^*\}$. Pokud $D(u^*, x^*) > 1$, pak $x^* \gg 0_N$ produkuje vyšší stupeň užitku, nebo produkce než stupeň označený u^*.

Ukázalo se, že matematické vlastnosti $D(u, \mathbf{x})$ podle $\mathbf{x}$ jsou ty samé jako vlastnosti $C(u, \mathbf{p})$ podle p, ale vlastnosti D podle u jsou převrácené vlastnostem C podle u, jak ukazuje následující věta.

Věta 5

Pokud F splňuje podmínku I, potom D definované v (5.1) splňuje Podmínku IV níže.

Podmínka IV pro D

(i) $D(u, \mathbf{x})$ je funkce nabývající reálných hodnot s $N+1$ proměnnými definovanými na $intU \times int\Omega = \{u : \overline{u} < u < \overline{\overline{u}}\} \times \{\mathbf{x} : \mathbf{x} \gg 0_N\}$ a je *spojitá* na této

[§§] Shephard (1953, str. 6; 1970, str. 65) zavedl distanční funkci do ekonomické literatury. Užil mírně odlišné, ale ekvivalentní definice $D(u, x) \equiv 1/\min_\lambda\{\lambda : F(\lambda x) \geq u, \lambda > 0\}$.

[¶¶] McFadden (1978a) a Blackorby, Primont a Russell (1978) nazvali D *transformační* funkcí. V matematické literatuře [např. Rockafellar (1970, str. 28)] je D nazýváno jako *měrná (kontrolní)* funkce.

oblasti.
(ii) $D(\overline{u}, \mathbf{x}) = +\infty$ pro každé $\mathbf{x} \in int\Omega$; tj. $u^n \in intU, limu^n = \overline{u}, \mathbf{x} \in int\Omega$ implikuje $lim_n D(u^n, \mathbf{x}) = +\infty$
(iii) $D(u, \mathbf{x})$ je *klesající* v u pro každé $\mathbf{x} \in int\Omega$; tj. jestliže $\mathbf{x} \in int\Omega$, $u', u'' \in intU$ s $u' < u''$, potom $D(u', \mathbf{x}) > D(u'', \mathbf{x})$.
(iv) $D(\overline{\overline{u}}, \mathbf{x}) = 0$ pro každé $\mathbf{x} \in int\Omega$; tj. $u^n \in intU, limu^n = \overline{\overline{u}}, \mathbf{x} \in int\Omega$ implikuje $lim_n D(u^n, \mathbf{x}) = 0$
(v) $D(u, \mathbf{x})$ je (pozitivně) lineárně homogenní v $\mathbf{x}$ pro všechna $u \in intU$; tj. $u \in intU, \lambda > 0, \mathbf{x} \in int\Omega$ implikuje $D(u, \lambda\mathbf{x}) = \lambda D(u, \mathbf{x})$.
(vi) $D(u, \mathbf{x})$ je konkávní v $\mathbf{x}$ pro všechna $u \in intU$
(vii) $D(u, \mathbf{x})$ je rostoucí v $\mathbf{x}$ pro všechna $u \in intU$; tj. $u \in intU$, $\mathbf{x}', \mathbf{x}'' \in int\Omega$ implikuje $D(u, \mathbf{x}' + \mathbf{x}'') > D(u, \mathbf{x}')$.
(viii) D je taková, že funkce

$$\tilde{F}(\mathbf{x}) \equiv \{u : u \in intU, D(u, \mathbf{x}) = 1\} \tag{2.2}$$

definovaná pro $\mathbf{x} \gg 0_N$ má spojité rozšíření na $\mathbf{x} \geq 0_N$.

Důsledek 5.1

$\tilde{F}(\mathbf{x}) \equiv \{u : u \in intU, D(u, \mathbf{x}) = 1\} = F(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \gg 0_N$ a tudíž $\tilde{F} = F$; tj. původní agregační funkce F je získána z distanční funkce D podle definice (5.2) pokud F splňuje Podmínku I.

Stejně tak jako pro nákladovou funkci $C(u, \mathbf{p})$ popisovanou v Sekci 3, D splňující Podmínky IV na $intU \times int\Omega$ může být jednoznačně rozšířena na $intU \times \Omega$ použitím Fenchelovy uzávěrové operace. Může být ověřeno, že rozšířená D splňuje Podmínky IV (v), (vi) a (vii) na $intU \times \Omega$, ale společná Podmínka spojitosti IV(i) a podmínky monotónnosti v u nemusí být splněny. Mělo by být také poznamenáno, že jestliže Podmínka I (iii) (kvazi-konkávnost F) by byla vynechána, platnost Věty 5 by byla zachována s tím rozdílem,že by musela být vynechána Podmínka IV(vi) (konkávnost D v $\mathbf{x}$).

Následující věta ukazuje, že deflační funkce D může být také použita pro definici spojité agregační funkce $\tilde{F}$.

Věta 6

Jestliže D splňuje Podmínky IV, má $\tilde{F}$ definovaná v (5.2) pro $\mathbf{x} \in int\Omega$ rozšíření na Ω, které splňuje Podmínky I. Navíc, jestliže definujeme deflační funkci D^* korespondující s $\tilde{F}$ jako

$$D^*(u, \mathbf{x}) \equiv \{k : \tilde{F}(\frac{\mathbf{x}}{k}) = u, k > 0\}, \tag{2.3}$$

potom $D^*(u, \mathbf{x}) = D(u, \mathbf{x})$ pro $(u, \mathbf{x}) \in intU \times int\Omega$.

Důsledek 6.1

Pokud D splňuje Podmínky IV a navíc je spojitě diferencovatelná v $(u^*, \mathbf{x}^*) \in intU \times int\Omega$ s $D(u^*, \mathbf{x}^*) = 1$ a $\frac{\partial D(u*,\mathbf{x}*)}{\partial u} < 0$, potom $\mathbf{x}^*$ je řešení přímé maximalizační úlohy $ma\mathbf{x}_{\mathbf{x}}\{\tilde{F}(\mathbf{x}) : v^{*\perp}\mathbf{x} \leq 1, \mathbf{x} \geq 0_N\}$, kde $\tilde{F}$ je definováno v (5.2) a $v^* > 0_N$ je definováno jako

$$v^* \equiv \nabla_{\mathbf{x}} D(u^*, \mathbf{x}^*). \tag{2.4}$$

Navíc, $\tilde{F}$ je spojitě diferencovatelná v $\mathbf{x}^*$ s

$$\nabla_{\mathbf{x}} \tilde{F}(\mathbf{x}^*) = \frac{-\nabla_{\mathbf{x}} D(u^*, \mathbf{x}^*)}{\partial D(u^*, \mathbf{x}^*)/\partial u}. \tag{2.5}$$

Tudíž spotřebitelský systém inverzních poptávkových funkcí může být získán diferencováním deflační funkce D splňující Podmínky IV (plus diferencovatelnost) podle složek vektoru $\mathbf{x}$.

Historické poznámky

Věty o dualitě mezi distančními nebo deflačními funkcemi D a agregačními funkcemi $\tilde{F}$ byly dokázány Shephardem (1953,1970), Hanochem (1978), McFaddenem (1978a) a Blackorbyem, Primontem a Russellem (1978).

Je zde řada zajímavých souvislostí (a vět o dualitě) mezi přímou a nepřímou agregační, nákladovou a deflační funkcí. Například Malmquist (1953, str. 214) a Shephard (1953, str. 18) ukazují, že se deflační funkce pro nepřímou agregační funkci, $ma\mathbf{x}_k\{k : G(\frac{v}{k}) \leq u, k > 0\}$, rovná nákladové funkci , $C(u, v)$. Úplný popis těchto vzájemných vazeb a dalších vět o dualitě s různými podmínkami regularity mohou být nalezeny v dílech Hanocha (1980) a Blackorbyho, Primonta a Russella (1978). Některé aplikace jsou v Deatonovi (1979).

Lokální věty o dualitě mezi deflační a agregační funkcí jsou v dílech Blackorbyho a Diewerta (1979).

6 Další věty o dualitě

Konkávní funkce mohou být také popsány pomocí *konjungovaných* funkcí. Navíc se ukázalo, že uzavřené konve**x**ní množiny mohou také být za určitých podmínek (viz Rockafellar (1970, str. 102-105) a Karlin (1959. str. 226-227)) popsány pomocí konjugované funkce. Tudíž přímá agregační funkce F, mající množiny na konve**x**ní úrovni $L(u) \equiv \{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}$, může být také popsána svojí konjugovanou funkcí stejně tak jako svojí nákladovou, deflační či nepřímou agregační funkcí. Tento přístup pomocí konjugovaných funkcí byl započat Hotellingem (1932, str. 36-39; 1960; 1972) a rozšířen Samuelsonem (1947, str. 36-39; 1960; 1972), atd. Nebudeme se zabývat tímto přístupem detailně, i když v další části si zopakujeme těsnou spojitost vět o dualitě mezi užitkovou a transformovanou funkcí.

Další třída vět o dualitě (které také začal Hotelling (1935, str. 75) a Samuelson(1960)) je získána rozdělením komoditního vektoru $\mathbf{x} \geq 0_N$ na dva vektory $\mathbf{x}^1$ a $\mathbf{x}^2$ a potom definováním spotřebitelskou proměnnou agregátní funkcí (alternativně je nazvána podmínkovou nepřímou funkcí užitku) g jako

$$g(\mathbf{x}^1, \mathbf{p}^2, y^2) \equiv max_{\mathbf{x}^2}\{F(\mathbf{x}^1, \mathbf{x}^2) : \mathbf{p}^{2T}\mathbf{x}^2 \leq y^2, \mathbf{x}^2 \geq 0_{N_2}, \tag{2.1}$$

kde $\mathbf{p}^2 \gg 0_N$ je pozitivní spotřebitelský cenový vektor zboží $\mathbf{x}^2$, a $y^2 > 0$ je spotřebitelský rozpočet, který byl určený na utracení za zboží $\mathbf{x}^2$. Množina řešení (6.1), $\mathbf{x}^2(\mathbf{x}^1, \mathbf{p}^2, y^2)$, je spotřebitelská podmíněná (na $\mathbf{x}^1$) poptávková korespondence. Pokud g splňuje náležitosti podmínek regularity, podmíněné poptávkové funkce mohou být generovány aplikováním Royovy identity (4.4) na funkci $G(v^2) \equiv g(\mathbf{x}^1, v^2, 1)$, kde $v^2 \equiv \mathbf{p}^2/y^2$. Pro formální věty o dualitě mezi přímou a variabilně nepřímou agregační funkcí viz. Epstein, Diewert a Blackorby, Primont a Russell. Pro další aplikace této duality viz. Epstein (pro aplikace spotřebitelské volby v nejistotě) a Pollak a Diewert (estimace preferencí pro veřejné zboží použitím tržních poptávkových funkcí). Konečně, variabilně nepřímá funkce užitku může být použita pro důkaz Hicksovy verze věty o složeném zboží - skupina zboží se chová stejně jako jedna komodita, pokud se ceny ve skupině zboží mění ve stejném poměru - pro aplikace při méně striktních podmínkách než u Hickse viz. Pollak, Diewert a Blackorby, Primont a Russell.

Nyní stručně pojednáme o rozsáhlé literatuře, tj. o důsledcích různých speciálních struktur jedné z mnoha ekvivalentních reprezentací technologie (jako třeba přímá či nepřímá agregační funkce nebo nákladová funkce). Například Shephard ukázal, že homoteticita přímé funkce implikuje, že nákladová funkce je faktorovaná do $\phi^{-1}(u)c(\mathbf{p})$(viz rovnice (2.18)). Jiným příkladem speciální struktury je separabilita. Reference, které se zabývají implikacemi separability a/nebo homoteticity zahrnují Shephard, Samuelson, Gorman, Lau, McFadden, Hanoch, Pollak, Diewert, Jorgenson a Lau, Blackorby, Primont a Russell a Blackorby a Russell. Pro implikace separability a/nebo homoteticity na Slutského koeficientech nebo na parciálních elasticitách substituce viz Sono, Pearce, Goldman a Uzawa, Geary a Morishima, Berndt, Blackorby a Russell, Diewert a Blackorby a Russell. Pro implikace Hicksovy Věty o agregovaných elasticitách substituce viz. Diewert.

Pro empirické testy předpokladu separability viz. Berndt a Christensen, Burgess a Jorgenson a Lau; pro teoretické diskuse o těchto testových procedurách viz. Blackorby, Primont a Russell a Jorgenson a Lau, Lau, Woodland a Denny a Fuss.

Pro implikace předpokladu konkávnosti přímé agregační funkce nebo předpokladu konve**x**ity nepřímé agregační funkce viz. Diewert.

Výše zmíněné věty o dualitě jsou v podstatě "globální". "Lokální" přístup uvedl ve své práci Blackorby a Kiewer, kde je předpokládáno, že daná nákladová funkce $C(u, \mathbf{p})$ splňuje Podmínky II na $U \times P$, kde U je konečný interval a P je uzavřená, konve**x**ní a ohraničená podmnožina pozitivních cen. Potom zkonstruovali odpovídající přímou agregační, nepřímou agregační a deflační funkci, které jsou duální k dané "lokálně" platné nákladové funkci C. Důkazy těchto "lokálních" vět o dualitě se ukázaly být mnohem jednodušší než odpovídající "globální" věty o dualitě presentované v tomto článku (a jinde), a to z toho důvodu, protože problém spojitosti se neobjevuje díky předpokladu, že $U \times P$ je kompaktní. Tyto "lokální" věty o dualitě jsou prospěšné v empirických aplikacích, protože ekonometrické estimace nákladových funkcí často nesplňují příslušné podmínky regulariy pro všechny ceny, ale podmínky mohou být splněny na menší podmnožině cen, která je empiricky relevantní množinou cen.

Epstein rozšířil teorii duality tak, aby pokrývala více obecných maximalizačních úloh. V Epsteinovi je uvažována následující úloha maximalizace užitku, která se objevila v kontextu teorii volby v podmínkách nejistoty:

$$ma\mathbf{x}_{\mathbf{x},\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2}\{F(\mathbf{x},\mathbf{x}^1,\mathbf{x}^2) : \mathbf{x} \geq 0_N, \mathbf{x}^1 \geq 0_{N_1}, \mathbf{x}^2 \geq 0_{N_2}, \tag{2.2}$$

$$\mathbf{p}^\top \mathbf{x} + \mathbf{p}^{1\top}\mathbf{x}^1 \leq y^1, \mathbf{p}^\top \mathbf{x} + \mathbf{p}^{2\top}\mathbf{x}^2 \leq y^2\}, \tag{2.3}$$

kde $\mathbf{x}$ představuje současnou spotřebu, $\mathbf{x}^i$ představuje spotřebu ve stavu $i(i = 1,2)$, p je současný cenový vektor, $\mathbf{p}^i$ je diskontní budoucí cenový vektor, který nastane jestliže nastane stav i a $y^i > 0$ je spotřebitelský diskontní příjem jestliže nastane stav i. V Epsteinovi je uvažována následující maximalizační úloha:

$$\max_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \geq 0_N, c(\mathbf{x},\alpha) \leq 0\}, \tag{2.4}$$

kde c je daná omezovací funkce, která závisí na vektoru parametrů α.

Nebudeme se snažit provést detailní analýzu Epsteinových výsledků, ale raději budeme prezentovat více abstraktní verzi jeho základní techniky, která snad zachytí základ teorie duality. Základní maximalizační úloha, kterou jsme studovali je $ma\mathbf{x}_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v)\}$, kde F je funkce N reálných proměnných $\mathbf{x}$ definovaných na nějaké množině S a $B(v)$ je omezující množina , která závisí na vektoru o M parametrech v, které se mění na množině V. Naše předpoklady o množinách S a V a o omezující množině odpovídající B jsou:

(i) S a V jsou neprázdné kompaktní množiny v R^N a R^M.
(ii) Pro každé $v \in V$, je $B(v)$ neprázdná a $B(v) \subset S$.
(iii) Pro každé $\mathbf{x} \in S$, je inverzní korespondence $B^{-1}(\mathbf{x})$ neprázdná a

$$B^{-1}(\mathbf{x}) \subset V. \tag{2.5}$$

(iv) Korespondence B je spojitá na V.
(v) Korespondence B^{-1} je spojitá na S.

Naše předpoklady na základní funkci F jsou:

(i) F je reálná funkce N proměnných definovaná na S a je na S spojitá.

$$\tag{2.6}$$

(ii) Pro každé $\mathbf{x}^* \in S$, existuje $v^* \in V$ takové, že $F(\mathbf{x}^*) = max_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$.

Funkce G duální k F je definovaná pro $v \in V$ takto:

$$G(v) \equiv \max_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v)\}. \tag{2.7}$$

Věta 7

Jestliže S, V a B splňují (6.4) a F splňuje (6.5), potom G definovaná v (6.6) splňuje následující podmínky:
(i) G je reálná funkce M proměnných definovaná na V a je na V spojitá.

(2.8)

(ii) Pro každé $v^* \in V$, existuje $\mathbf{x}^* \in S$ takové, že $G(v^*) = min_v\{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$.

Navíc, defnujeme-li funkci F^* duální k G pro $\mathbf{x} \in S$ takto:

$$F^*(\mathbf{x}) \equiv min_v\{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}), \tag{2.9}$$

potom $F^*(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x})$ pro každé $\mathbf{x} \in S$.

Důsledek 7.1

Nechť $\mathbf{x}^* \in S$ a definujeme $H(\mathbf{x}^*)$ jako množinu $v^* \in V$ takových, že $F(\mathbf{x}^*) = max_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$. Jestliže $v^* \in H(\mathbf{x}^*)$, potom $\mathbf{x}^*$ je řešením $max_{\mathbf{x}}\{F(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$ a v^* je řešením $min_v\{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$.

Důkaz viz. Diewert (1982).

Všimněte si, že předpoklad na F (6.5) (ii) je náhražka našeho starého předpokladu kvazi-konkávnosti v Sekci 4 a množina $H(\mathbf{x}^*)$ definovaná v důsledku 7.1. nahrazuje množinu normalizovaných pomocných nadrovin, které se objevují v důsledku 3.2.

Díky symetrické podstatě našich předpokladů, je zřejmé, že důkaz následující věty je stejný jako důkaz věty 7 až na to, že nerovnosti jsou převrácené.

Věta 8

Jestliže S, V a B splňují (6.4) a G splňuje (6.7), potom F^* definovaná v (6.8) splňuje (6.5). Navíc, definujeme-li funkci G^* jako duální k F^* pro $v \in V$ takto:

$$G^*(v) \equiv max_{\mathbf{x}}\{F^*(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v)\}, \tag{2.10}$$

potom $G^*(v) = G(v)$ pro každé $v \in V$.

Důsledek 8.1

Nechť $v^* \in V$ a definujeme $H^*(v^*)$ jako množinu $\mathbf{x}^* \in S$ takových, že $G(v^*) = min_v\{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$. Jestliže $\mathbf{x}^* \in H^*(v^*)$, potom v^* je řešení $min_v\{G(v) : v \in B^{-1}(\mathbf{x}^*)\}$ a $\mathbf{x}^*$ je řešením $ma\mathbf{x}_\mathbf{x}\{F^*(\mathbf{x}) : \mathbf{x} \in B(v^*)\}$.

Všimněme si, že Podmínka (6.7) (ii) pro G nahrazuje naši starou podmínku kvazi-konvexity pro G v Sekci 4, a množina $H^*(v^*)$ definovaná v důsledku 8.1 nahrazuje množinu normalizovaných pomocných nadrovin, které se objevují v důsledku 4.1.

Nemůžeme stanovit doplněk k důsledku 3.3 (identita Hotelling-Woldova) a důsledku 4.2 (Ville-Royova identita), protože bylo nutné v těchto důsledcích použít diferencovatelnost F a G a příslušnou omezující funkci. Tudíž, abychom odvodili doplňky k důsledkům 3.3 a 4.2 v současném kontextu, museli bychom přidat předpoklady pro F (nebo G) a pro omezující korespondenci B. Přesto výše zmíněné věty ilustrují podstatu struktury teorie duality. Mohou být také interpretovány jako příklady lokálních vět o dualitě.

7 Minimalizace nákladů a derivovaná poptávka po vstupech

Předpokládejme, že technologie firmy může být popsána její produkční funkcí F, kde $u = F(\mathbf{x})$ je maximální výstup, která může být vyprodukován použitím nezáporného vektoru vstupů $\mathbf{x} \geq 0_N$. Předpokládejme, že F splňuje Předpoklad 1 Sekce 2 (tj. produkční funkce je spojitá shora). Jestliže si firma vezme ceny vstupů $p \gg 0_N$ jako dané (tj. firma se nechová jako vstupní monopol), potom v Sekci 2 uvidíme, že funkce celkových nákladů firmy $C(u, \mathbf{p}) \equiv min_\mathbf{x}\{\mathbf{p}^\top \mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq u\}$ byla korektně definovaná pro všechna $p \gg 0_N$ a $u \in R(F)$, kde $R(F)$ je obor hodnot F. Navíc $C(u, \mathbf{p})$ byla lineárně homogenní a konkávní v cenách p pro každé u a byla neklesající v u pro každé pevné p.

Nyní předpokládejme že C má druhou spojitou derivaci podle jeho argumentů v bodě $(u^*, \mathbf{p}^*)$, kde $u^* \in R(F)$ a $\mathbf{p}^* \equiv (p_1^*, \ldots, \mathbf{p}_N^*) \gg 0_N$. Z Lemmatu 3 v Sekci 2 nákladové funkce minimalizující poptávku po vstupech $\mathbf{x}_1(u, \mathbf{p}), ..., \mathbf{x}_N(u, \mathbf{p})$ existují v $(u^*, \mathbf{p}^*)$ a jsou rovny parciálním derivacím nákladové funkce podle N vstupních cen:

$$\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) = \frac{\partial C(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial p_i}, i = 1, \ldots, N. \tag{2.1}$$

Tudíž, předpoklad že C má spojité druhé derivace v $(u^*, \mathbf{p}^*)$ zajišťuje, aby nákladové funkce minimalizující poptávku po vstupech $\mathbf{x}_i(u, \mathbf{p})$ existovaly a měly první spojitou derivaci v $(u^*, \mathbf{p}^*)$

Definujeme $[\partial \mathbf{x}_i / \partial p_j] \equiv [\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) / \partial p_j]$ jako matici typu $N \times N$ derivací

N-vstupních funkcí $\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)$ podle N cen $p_j^*, i, j = 1, 2, ..., N$. Z (7.1) plyne, že

$$[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}] = \nabla^2_{pp} C(u^*, \mathbf{p}^*), \tag{2.2}$$

kde $\nabla^2_{pp} C(u^*, \mathbf{p}^*) \equiv [\partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i \partial p_j]$ je Hessova matice nákladové funkce podle vstupních cen vyčíslených v $(u^*, \mathbf{p}^*)$. Druhá spojitá derivovatelnost C podle p v $(u^*, \mathbf{p}^*)$ implikuje (viz. Youngova věta), že $\nabla^2_{pp} C(u^*, \mathbf{p}^*)$ je symetrická matice taková, že použitím (7.2) dostaneme

$$[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}] = [\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}]^\top = [\frac{\partial \mathbf{x}_j}{\partial p_i}], \tag{2.3}$$

tj. $\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_j = \partial \mathbf{x}_j(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i$ pro všechna i a j.

Protože je C konkávní v p a má druhou spojitou derivaci podle p v okolí bodu $(u^*, \mathbf{p}^*)$, plyne z toho podle Fenchela nebo Rockafellara, že $\nabla^C(u^*, \mathbf{p}^*)$ je negativně semidefinitní matice. Takže podle (7.2),

$$z^\top [\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}] z \leq 0 \text{ pro všechny vektory} z. \tag{2.4}$$

Takže pro $z = e_i$, i-tý jednotkový vektor,(7.4) implikuje

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial p_i} \leq 0, i = 1, 2, ..., N, \tag{2.5}$$

tj. i-tá nákladová funkce minimalizující poptávku po vstupech nemůže mít pozitivní sklon vzhledem k i-té vstupní ceně pro $i = 1, 2, ..., N$.

Protože je C lineárně homogenní v p, máme $C(u^*, \lambda \mathbf{p}^*) = \lambda C(u*, \mathbf{p}*)$ pro všechna $\lambda > 0$. Budeme-li derivovat tuto poslední rovnici podle p_i pro λ blízké 1, získáme rovnici $C_i(u^*, \lambda \mathbf{p}^*)\lambda = \lambda C_i(u^*, \mathbf{p}^*)$, kde $C_i(u^*, \mathbf{p}^*) \equiv C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i$. Tudíž $C_i(u^*, \lambda \mathbf{p}^*) = C_i(u^*, \mathbf{p}^*)$ a derivováním této poslední rovnice podle λ dostaneme (pokud se $\lambda = 1$)

$$\sum_{i=1}^N p_j^* \partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_i \partial p_j = 0,$$

pro $i = 1, 2, \ldots, N$. Takže, použitím (7.2) najdeme vstupní poptávkové funkce $\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)$ splňující následujících N omezení:

$$[\frac{\partial \mathbf{x}_i}{\partial p_j}] \mathbf{p}^* = \nabla^2_{pp} C(u^*, \mathbf{p}^*) \mathbf{p}^* = 0_N, \tag{2.6}$$

kde $\mathbf{p}^* = [p_1^*, \mathbf{p}^*, ..., \mathbf{p}_N^*]^\top$.

Závěrečné obecné omezení pro derivování vstupní poptávkové funkce můžeme získat následovně: pro λ blízké 1, derivujme obě strany $C(u^*, \lambda \mathbf{p}^*) = \lambda C(u^*, \mathbf{p}^*)$

podle u a potom výslednou rovnici derivujme podle λ. Pro $\lambda = 1$ dostaneme poslední rovnici ve tvaru:

$$\sum_{i=1}^{N} p_j^* \partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \partial p_j = \partial C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u.$$

Všimněme si, že druhá parciální diferencovanost C a (7.1) implikují, že

$$\partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \partial p_j = \partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_j \partial u =$$

$$= \partial[\partial C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial p_j]/\partial u = \partial \mathbf{x}_j(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u.$$

Takže

$$\sum_{j=1}^{N} p_j^* \frac{\partial^2 C(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u \partial p_j} = \sum_{j=1}^{N} p_j^* \frac{\partial \mathbf{x}_j(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u} =$$

$$= \frac{\partial C(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u} \geq 0. \tag{2.7}$$

Nerovnost $\partial C(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \geq 0$ plyne z vlastnosti, že C neklesá v u. Nerovnost (7.7) nám říká, že změny v nákladové funkci minimalizující poptávku po vstupech indukované rozšířením výstupu nemůžou být všechny záporné, tj. ne všechny vstupy mohou být nevýznamné. S dodatečným předpokladem, že F je lineárně homogenní (a tedy existuje $\mathbf{x} > 0_N$ takové, že $F(\mathbf{x}) > 0$), můžeme vyvodit (Sekce 2), že $C(u, \mathbf{p}) = uc(\mathbf{p})$, kde $c(\mathbf{p}) \equiv C(1, \mathbf{p})$. Tedy, když je F lineárně homogenní,

$$\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) = u^* \frac{\partial c(\mathbf{p}^*)}{\partial p_i}, i = 1, ..., N, \tag{2.8}$$

a $\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u = \partial c(\mathbf{p}^*)/\partial p_i$. Tedy jestliže $\mathbf{x}_i^* \equiv \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*) > 0$ pro $i = 1, 2, \ldots, N$, užitím (7.8) dostaneme dodatečné omezení

$$\frac{\partial \mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)}{\partial u} \frac{u^*}{\mathbf{x}_i^*} = \frac{u^*[\partial c(\mathbf{p}^*)/\partial p_i]}{\mathbf{x}_i^*} = 1, \tag{2.9}$$

jestliže je F lineárně homogenní, tj. večechny elasticity vstupu k výstupu jsou jednotkové.

Pro obecný případ dvou vstupů nám obecné omezení (7.3)-(7.7) umožní dostat se k následujícím omezením šesti parciálních derivací poptávkové funkce pro dva vstupy $\mathbf{x}_1(u^*, \mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$ a $\mathbf{x}_2(u^*, \mathbf{p}_1^*, \mathbf{p}_2^*)$: $\partial \mathbf{x}_1/\partial p_1 \leq 0, \partial \mathbf{x}_2/\partial p_2 \leq 0, \partial \mathbf{x}_1/\partial p_2 \geq 0, \partial \mathbf{x}_2/\partial p_1 \geq 0$ (a jestliže je jedna z nerovností ostrá, potom jsou ostré všechny, protože

$p_1^* \partial \mathbf{x}_1/\partial p_1 = -p_2^* \partial \mathbf{x}_1/\partial p_2 = -p_2^* \partial \mathbf{x}_2/\partial p_1 = (p_2^*)^2 (p_1^*)^{-1} \partial \mathbf{x}_2/\partial p_2)$ a
$p_1^* \partial \mathbf{x}_1/\partial u + p_2^* \partial \mathbf{x}_2/\partial u \geq 0.$

Tedy, znaménka u $\partial\mathbf{x}_1/\partial u$ a u $\partial\mathbf{x}_2/\partial u$ jsou neznámé, ale pokud je jedno záporné, druhé musí být kladné. Pro konstatní výnosy z rozsahu výroby nejasnost ohledně znamének vymizí: máme $\partial\mathbf{x}_i(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \geq 0, \partial\mathbf{x}_2(u^*, \mathbf{p}^*)/\partial u \geq 0$ a alespoň jedna nerovnost musí být ostrá pokud je $u^* > F(0_2)$.

Výhoda derivování těchto dobře známých komparativních statických výsledků používáním teorie duality je ta, že omezení (7.2)-(7.7) jsou platná i v případech, kdy přímá produkční funkce F není diferencovatelná. Například Leontiefova produkční funkce má lineární nákladovou funkci $C(u, \mathbf{p}) = ua^\top p$, kde $(a_1, a_2, ..., a_N) \equiv a^\top > 0_N^\top$ je konstantní vektor. Může být ověřeno, že omezení (7.2) jsou platná pro tuto nediferencovatelnou produkční funkci.

Historické poznámky

Analogie k (7.3) a (7.4) v konte**x**tu ziskových funkcí byly získány Hotellingem. Hicks a Samuelson dostali vztahy (7.2)-(7.6) a Samuelson získal také (7.7). Všichni tito autoři předpokládali, že primární funkce F byla diferencovatelná a jejich důkazy používaly podmínku prvního řádu pro úlohu minimalizace nákladů (nebo ma**x**imalizace užitku) a vlastnosti determinantů pro důkaz svých výsledků.

8 Funkce zisku

Doposud jsme se zabývali problémem firmy, která používá mnoho různých vstupů na výrobu jednoho výrobku. Avšak ve skutečném světě chrlí převážná většina firem mnoho druhů různých výrobků. Proto bude nezbytné zamyslet se nad problémem modelování firmy s mnoha vstupy a výstupy.

Pro ekonomické aplikace bude užitečné zavést tzv. *variabilní funkci zisku* $\Pi(p, \mathbf{x})$, která označuje ma**x**imum tržeb mínus variabilní platby za vstupy, které může být dosaženo při daných cenách $p \gg 0_I$ variabilních vstupů a výstupů a při daném vektoru pevně daných vstupů $\mathbf{x} \gg 0_J$. Označme variabilní vstupy a výstupy I-rozměrným vektorem $u \equiv (u_1, u_2, ..., u_I)$, fi**x**ní vstupy nechť jsou označeny J-rozměrným vektorem $-\mathbf{x} \equiv (-\mathbf{x}_1, -\mathbf{x}_2, ..., -\mathbf{x}_J)$. Dále označme T množinu všech možných kombinací vstupů a výstupů, které říkáme *množina produkčních možností.* Výstupy jsou zachyceny kladnými čísly, vstupy zápornými, takže je-li $u_i > 0$, pak i-té variabilní zboží jest výstup produkovaný naší firmou. Formálně se definuje Π pro $p \gg 0_I$ a $-\mathbf{x} \ll 0_J$ jako:

$$\Pi(p, \mathbf{x}) \equiv \max_u \{\mathbf{p}^\top u : (u, -\mathbf{x}) \in T\}. \tag{2.1}$$

Je-li T uzavřený, neprázdný konve**x**ní kužel v Euklidovském $I + J$ rozměrném prostoru s následujícími vlastnostmi: (i) pokud $(u, -\mathbf{x}) \in T$, potom $\mathbf{x} \geq 0_J$ (posledních J zboží jsou vždy vstupy); (ii) pokud $(u', -\mathbf{x}') \in T, u' \leq u''$ a $-\mathbf{x}' \leq -\mathbf{x}''$, potom $(u'', -\mathbf{x}'') \in T$ (volná dispozice); (iii) pokud $(u, -\mathbf{x}) \in T$, potom jsou komponenty vektoru u ohraničené shora (hranice možností při pevných vstupech). Potom má Π následující vlastnosti: (i) $\Pi(p, \mathbf{x})$ je nezáporná reálná funkce definovaná pro každé $p \gg 0_I$ a $\mathbf{x} \geq 0_J$ taková, že: $\Pi(p, \mathbf{x}) \leq \mathbf{p}^\top b(\mathbf{x})$ pro každé $p \gg 0_J$. (ii) pro každé $\mathbf{x} \geq 0_J$ je $\Pi(p, \mathbf{x})$ (pozitivnř) lineárně homogenní, konvexní a spojitá v p a (iii) pro každé $p \gg 0_I$ je $\Pi(p, \mathbf{x})$ (pozitivně) lineárně homogenní, konkávní spojitá a neklesající v $\mathbf{x}$. Navíc, Gorman (1968), McFadden (1966) a Diewert (1973a) ukázali, že množina T může být zkonstruována pomocí Π následujícím způsobem:

$$T = \{(u, -\mathbf{x}) : \mathbf{p}^\top u \leq \Pi(p, \mathbf{x}), \forall \mathbf{p} \gg 0_I; \mathbf{x} \geq 0_J\}. \tag{2.2}$$

Tudíž, existuje dualita mezi množinami produkčních možností T a funkcemi variabilního zisku Π, pokud jsou splněny výše uvedené podmínky regularity. Pomocí Shephardova lematu (3.1) a Royovy identity (4.4) můžeme dokázat následující tvrzení:

Holellingovo lemma (1932, str. 594) Splňuje-li funkce variabilního zisku Π podmínky regularity (10.1) a navíc je diferencovatelná vzhledem k cenám variabilního množství v bodě $\mathbf{p}^* \gg 0_I$ a $\mathbf{x}^* \geq 0_J$, potom $\partial\Pi(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)/\partial p_i = u_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ pro $i = 1, 2, ..., I$, kde $u_i(\mathbf{p}^*, \mathbf{x}^*)$ je takové množství čistého výstupu i, které maximalizuje zisk přičemž je dán vektor variabilních cen $\mathbf{p}^*$ a vektor fixních vstupů $\mathbf{x}^*$, které jsou k dispozici.

Hotellingovo lema lze použít k odvození funkce nabídky variabilního výstupu a poptávky po variabilních vstupech. Potřebujeme pouze, aby byl zaručen funkcionální tvar $\Pi(p, \mathbf{x})$ konzistentní s podmínkami regularity pro Π a diferencovatelnost vzhledem ke komponentám vektoru p. Například uvažme funkci translogaritmického variabilního zisku Π definovanou:

$$ln\Pi(p, \mathbf{x}) \equiv \alpha_0 + \sum_{i=1}^{I} \alpha_i lnp_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{I}\sum_{h=1}^{I} \gamma_{ih} lnp_i lnp_h +$$

$$+ \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} \delta_{ij} lnp_i ln\mathbf{x}_j + \sum_{j=1}^{J} \beta_j ln\mathbf{x}_j + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{J} \phi_{jk} ln\mathbf{x}_j ln\mathbf{x}_k, \tag{2.3}$$

kde $\gamma_{ih} = \gamma_{hi}$ a $\phi_{jk} = \phi kj$. Lehce nahlédneme, že Π definovaná vztahem (2.3) je homogenní stupně jedna v p tehdy a jen tehdy, pokud:

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 1; \ \sum_{i=1}^{I} \delta_{ij} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, J; \sum_{h=1}^{I} \gamma_{ih} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, I. \tag{2.4}$$

Podobně, $\Pi(p, \mathbf{x})$ je homogenní stupně jedna v $\mathbf{x}$ tehdy a jen tehdy, když:

$$\sum_{j=1}^{J} \beta_j = 1; \ \sum_{j=1}^{J} \delta_{ij} = 0, \ i = 1, 2, \ldots, I; \sum_{k=1}^{J} \phi_{jk} = 0, \ j = 1, 2, \ldots, J. \tag{2.5}$$

Je-li $\Pi(p, \mathbf{x}) > 0$, definujeme podíl nabídky i-té proměnné jako: $p_i u_i(p, \mathbf{x})/\Pi(p, \mathbf{x}) \equiv s_i(p, \mathbf{x})$. Hotellingovo lemma použité na translogaritmickou funkci definovanou v (2.3) dává následující systém funkcí podílu čisté nabídky:

$$s_i(p, \mathbf{x}) = \alpha_i + \sum_{h=1}^{I} \gamma_{ih} ln p_h + \sum_{j=1}^{J} \delta_{ij} ln \mathbf{x}_j; \ i = 1, 2, \ldots, I. \tag{2.6}$$

Neboť je suma všech podílů jednička, jenom $I-1$ rovnic v (2.6) je nezávislých. Rovnice (2.3) a $I-1$ rovnic z (2.6) lze použít k odhadu parametrů funkce translogaritmického variabilního zisku. Povšimněme si přitom, že tyto rovnice jsou lineární v neznámých parametrech stejně jako omezení (2.4) a že můžeme použít modifikace lineárních regresních technik.

Alternativní funkcionální tvary funkcí variabilního zisku jsou navržené v McFadden (1978b), Diewert (1973a) a Lau (1974a). Empirické poznatky vypracoval Kohli (1978), Woodland (1977c), Harris(Appelbaum (1977) a Epstein (1977).

Velice příbuzný je přístup tzv. *sdružené nákladové funkce* $C(u, w) \equiv \min_{\mathbf{x}}\{w^{\perp}\mathbf{x} : (u, -\mathbf{x}) \in T\}$, kde T je množina produkčních možností stejně jako dříve, $w \gg 0_J$ je kladný vektor cen vstupů. Jako obyčejně, pokud je $C(u, w)$ diferencovatelná vzhledem k cenám vstupů w (a splňující příslušné podmínky regularity), potom můžeme z Shephardova lemmatu odvodit systém poptávkových funkcí $\mathbf{x}(u, w)$, které minimalizují náklady. Dostáváme pak:

$$\mathbf{x}(u, v) = \nabla_w C(u, w). \tag{2.7}$$

Sdružené nákladové funkce empiricky odhadoval Burgess (1976a) (který využíval funkcionální tvar Halla (1973)), Brown, Caves, Christensen (1975) a Christensen, Greene (1976) (který využíval translogaritmický funkcionální tvar pro C(u,w), což je analogicky jako u transabilního zisku definované v (2.3).

Historické poznámky Samuelson (1953-54, str.20) nás obeznámil s funkcí národní produkce, což je přístup zmíněné funkce variabilního zisku. Zároveň upozornil na některé vlastnosti. Gorman (1968) a McFadden (1966, 1978a) vynesl na světlo světa tvrzení o dualitě mezi množinou produkčních možností (splňující různé podmínky regularity) a korespondující funkcí variabilního zisku. Alternativní tvrzení o dualitě jsou v Shephard (1970), Diewert (1973a, 1974b), Sakai (1974) a Lau (1976). Pro speciální případ jediného fixního vstupu se lze poučit z Shephard (1970, str.248-250) nebo Diewert (1974b).

McFadden (1966, 1978a) zavedl funkci sdružené nákladové funkce, sepsal její vlastnosti a dokázal tvrzení o formální dualitě mezi sdruženou nákladovou funkcí a množinou produkčních možností T, stejně jako je to i v Shephard (1970) a Sakai (1974).

Existují také mnohem jednodušší tvrzení o množině produkčních možností a transformačních funkcí, které dávají maximální množství jednoho výstupu, jenž daná firma může vyrobit (nebo optimální množství požadovaného vstupu) při pevně daných množstvích ostatních vstupů a výstupů. To nalezneme například v Diewert (1973), Jorgenson; Lau (1974a, 1974b) a Lau (1976).

Hotellingovo lemma lze zobecnit tak, abychom postihli i případ nediferencovatelné funkce variabilního zisku: gradient funkce Π vzhledem k p je nahrazen množinou subgradientů. Toto zobecnění bylo poprvé uveřejněno v Gorman (1968, str.150-151) a McFadden (1966, str.11) a opakováno v Diewert (1973a, str.313) a Lau (1976, str.142).

Je-li $\Pi(p, \mathbf{x})$ diferencovatelná vzhledem ke komponentám vektoru fi**x**ních vstupů, potom $w_j = \partial\Pi(p, \mathbf{x})/\partial\mathbf{x}_j$ lze interpretovat jako hodnotu, kterou firma přisuzuje jedné dodatečné jednotce j-tého fi**x**ního výrobního faktoru. Neboli je to "stínová cena" j-tého vstupu (Lau (1976, str.142)). Pokud je navíc firma vystavena vektoru cen $w \gg 0_J$ výrobních faktorů pro "fi**x**ní" vstupy a během určitého období lze měnit množství těchto "fi**x**ních" faktorů, pak pokud firma minimalizuje náklady na dosažení daného množství variabilního zisku, dostaneme (Diewert (1974a, str. 140))

$$w = \nabla_{\mathbf{x}}\Pi(p, \mathbf{x}), \tag{2.8}$$

A tyto vztahy mohou být rovněž využity v ekonometrických aplikacích.

Translogaritmický varibalní zisk byl nezávisle navržen v Russel(Boyce (1974) a Diewert (1974a, str.139). Jde zjevně o přímou modifikaci translogaritmického funkcionálního tvaru podle Christen, Jorgenson(Lau (1971) a Saragan (1971).

Vlastnosti porovnávacích statistik $\Pi(p, \mathbf{x})$ nebo $C(u, w)$ byly popsány v Samuelson (1953-54), McFadden (1966, 1978a), Diewert (1974, str. 142-146) a Sakai (1974).

V teorii mezinárodního obchodu se všeobecně předpokládá e**x**istence sektorových produkčních funkcí, fi**x**ní domácí zdroje $\mathbf{x}$ a pevné ceny p mezinárodně obchodovatelného zboŘí. Pokoušíme-li se v takovém případě ma**x**imalizovat čistou hodnotu mezinárodně obchodovatelného zboží vyráběného ekonomikou, dostáváme variabilní funkci zisku ekonomiky, $\Pi(p, \mathbf{x})$ nebo Samuelsonovu *funkci národního produktu.* Pokud jsou sektorové produkční funkce "vystaveny" konstantním výnosům z rozsahu, bude mít $\Pi(p, \mathbf{x})$ obvyklé vlastnosti zmíněné výše. Avšak e**x**istence sektorových technologií implikuje dodatečná omezení na porovnávací statistiky národní produkční funkce Π: viz. Chipman (1966,1972, 1974b), Samuelson (1966), Ethier (1974), Woodland (1977a, 1977b), Diewert and Woodland (1977), Jones, Schienkman (1977) a další v odkazech těchto prací. Závěrem poznamenejme, že vlastnosti $\Pi(p, \mathbf{x})$ vzhledem k $\mathbf{x}$ jsou přesně ty vlastnosti, které má neoklasická produkční funkce. Když je $\mathbf{x}$ vektor primárních vstupů, potom můžeme $\Pi(p, \mathbf{x})$ interpretovat jako funkci přidané hodnoty. Pokud se mění ceny p (průměrně) proporcionálně v čase, může být $\Pi(p, \mathbf{x})$ očištěna od inflace trendem všeobecných cen, čímž dostáváme funkci reálné přidané hodnoty, která má vlastnosti neoklasické produkční funkce; viz. Khang (1971), Bruno (1971) a Diewert (1978c, 1980).

9 Dualita a nesoutěživé přístupy k mikroekonomické teorii

Doposud jsme předpokládali, že výrobci a spotřebitelé berou ceny jako dané a optimalizují množství proměnných, které mají pod kontrolou. V této kapitole naznačíme, jak může být teorie duality využito v případě monopsonického či monopolistického chování na straně spotřebitelů nebo výrobců. Nebudeme se to pokoušet přesně vysvětlovat, toliko ilustrujeme používané techniky na 4 příkladech.

9.1 První přístup: Problém monopolu

Předpokládejme, že monopolista produkuje výstup $\mathbf{x}_0$ při produkční funkci $F(\mathbf{x})$, kde $\mathbf{x} \gg 0_N$ je vektor variabilních vstupů Nechť je dále monopolista vystaven (inverzní) poptávkové funkci $p_0 = wD(\mathbf{x}_0)$, tzn. $p_0 \geq 0$ je cena, při které se prodá $\mathbf{x}_0$ jednotek výstupu, D je spojitá, kladná funkce v $\mathbf{x}_0$, proměnná $w > 0$ reprezentuje vliv "dalších proměnných" na poptávku. Dlužno dodat, že pokud prodává monopolista spotřebitelům, w může vyrovnat disponibilní důchod uvažovaného časového období. Pokud monopolista prodává výrobcům, w může být lineárně homogenní funkce cen, kterým jsou vystaveni ostatní výrobci. A konečně, předpokládejme, že monopolista chová "soutěžně" na trhu vstupů, když cenový vektor cen vstupů je dán pevně. Potom lze problém maximalizace monopolistova zisku zapsat takto:

$$\max_{p_0,\mathbf{x}_0,\mathbf{x}} \{p_0\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}^\top\mathbf{x} : \mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x}), p_0 = wD(\mathbf{x}_0), \mathbf{x} \geq 0_N\} =$$

$$= \max_{\mathbf{x}}\{wD[F(\mathbf{x})]F(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^\top\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N\} =$$

$$= \max_{\mathbf{x}}\{wF^*(\mathbf{x}) - \mathbf{p}^\top\mathbf{x} : \mathbf{x} \geq 0_N\} \equiv \Pi^*(w, \mathbf{p}), \tag{2.1}$$

kde $F^*(\mathbf{x}) \equiv D = [F(\mathbf{x})]F(\mathbf{x}) = p_0\mathbf{x}_0/w$ je funkce tržeb očištěná od inflace w nebo pseudoprodukční funkce a Π^* je příslušná funkce pseudozisku (vzpomeňme kapitolu 10), která korespondující s F^*. Povšimněme si, že w hraje roli ceny pro $F^*(\mathbf{x})$. Pokud je F^* konkávní funkce, potom bude $\Pi^*(l, p/w)$ funkce konjugovaná k F^* [vzpomeňme na: Samuelson (1960), Lau (1969, 1978) a Jorgenson, Lau (1974a, 1974b) konjugované přístupy k teorii duality] a Π^* bude duální k F^* (tzn. F^* může být dopočtena z Π^*). I když není F^* konkávní, existuje-li maximum v (11.1) v relevantním okolí cen $(w, \mathbf{p})$, potom může být Π^* využito k reprezentaci relevantní části F^* (tzn. "volný dostupný" obal F^* dostaneme z Π^*). Pokud je navíc Π^* diferencovatelná v $(w^*, \mathbf{p}^*)$ a $\mathbf{x}_0^*, p_0^*, \mathbf{x}^*$ řešť (11.1), pak Hotellingovo lemma dává:

$$u_0^* \equiv \frac{p_0^*\mathbf{x}_0^*}{w^*} = \nabla_w\Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*)\mathrm{a} - \mathbf{x}^* = \nabla_{\mathrm{p}}\Pi^*(\mathrm{w}^*, \mathbf{p}^*). \tag{2.2}$$

Pokud je k tomu Π^* spojitě diferencovatelná druhého řádu v $(w^*, \mathbf{p}^*)$, pak můžeme odvodit obvyklé výsledky pro porovnávací statistiky funkcí prodeje očištěných od inflace, $u_0(w^*, \mathbf{p}^*) \equiv \nabla_w \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*)$ a funkce poptávky $-\mathbf{x}(w^*, \mathbf{p}^*) \equiv \nabla_p \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*)$; zejména $\nabla^2 \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*)$ je pozitivně semidefinitní symetrická matice a $[w^*, \mathbf{p}^{*\top}] \nabla^2 \Pi^*(w^*, \mathbf{p}^*) = 0_{N+1}^\top$.

Vztah (2.2) lze využít k odhadu ekonometrických parametrů Π^* a tudíž nepřímo k odhadu F^*: jednoduše řečeno, postulujeme funkcionální tvar Π^*, diferencujeme Π^*, což "napasujeme" na (2.2) pro danou časovou ředu pozorovaných hodnot $p_0, p, w, \mathbf{x}_0$ a $\mathbf{x}$. Nevýhodou metody jsou: (i) nelze vyjádřit D z F; (ii) nelze testovat, zda-li se vlastně výrobce chová "tržně" na trhu výrobků; (iii) nemůžeme použít naše odhadnuté rovnice k predikci výroby $\mathbf{x}_0$ nebo prodejní ceny p_0 odděleně.

9.2 Druhý přístup: Problém monopsonu

Uvažme problém spotřebitele, který maximalizuje funkci užitku $F(\mathbf{x})$, která splňuje "Podmínky I", ale odtud již dále pro spotřebitele nepředpokládáme fixní ceny nakupovaných komodit. Takže je spotřebitel schopen monopsonicky využít jednoho či více svých dodavatelů. Pak v období r nechť je vystaven nelineárnímu rozpočtovému omezení ve tvaru: $h_r(\mathbf{x}) = 0$, kde $\mathbf{x} \geq 0_N$ je vektor jeho nákupu (nebo rent). Nechť $\mathbf{x}^r \geq 0_N$ je řešení pro období r problému maximalizace "omezeného" užitku, tzn.:

$$\max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : h_r(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \geq 0_N\} = F(\mathbf{x}^r);\ r = 1, \ldots, T. \tag{2.3}$$

Dále nechť r-tá funkce rozpočtového omezení h_r je diferencovatelná v $\mathbf{x}^r$ s $\nabla_{\mathbf{x}} h(\mathbf{x}^r) \gg 0_N$ pro každé r. Pak můžeme linearizovat r-té rozpočtové omezení okolo $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$ tak, že vezmeme rozvoj Taylorovy řady prvního řádu. Linearizované rozpočtové omezení je $h_r(\mathbf{x}^r) + [\nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)]^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = 0$ nebo $[\nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)]^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = 0$, neboť $h_r(\mathbf{x}^r) = 0$ použitím (2.3). Lehce se nahlédne, že povrch užitku: $\{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x}^r), \mathbf{x} \geq 0_N\}$ je tečná nejenom k původnímu nelineárnímu rozpočtovému povrchu $\{\mathbf{x} : h_r(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \geq 0_N\}$ v $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$, ale také k povrchu linearizovaného rozpočtového omezení $\{\mathbf{x} : [\nabla h_r(\mathbf{x}^r)]^\top (\mathbf{x} - \mathbf{x}^r) = 0, \mathbf{x} \geq 0_N\}$ v $\mathbf{x} = \mathbf{x}^r$. Neboť se předpokládá F kvazikonkávní, je množina $\{\mathbf{x} : F(\mathbf{x}) \geq F(\mathbf{x}^r), \mathbf{x} \geq 0_N\}$ konvexní a linearizované rozpočtové omezení je opěrnou nadrovinou k této množině, tzn.:

$$\max_{\mathbf{x}} \{F(\mathbf{x}) : \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x} \leq \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x}^r, \mathbf{x} \geq 0_N\} = F(\mathbf{x}^r),\ r = 1, \ldots, T, \tag{2.4}$$

kde $\mathbf{p}^r \equiv \nabla h_r(\mathbf{x}^r)$ pro $r = 1, 2, ..., T$. Nyní je (2.4) pouhou řadou "agregátorových" maximalizačních úloh typu, který jsme studovali v kapitole 4 (r-tý vektor normalizovaných cen se definuje jako $v^r \equiv \mathbf{p}^r / \mathbf{p}^{r\top} \mathbf{x}^r$) a odhadovací techniky nastíněné v kapitole 9 (vzpomeňme například vztah (9.9)) mohou být použity k odhadu parametrů přímých užitkových funkcí duálních k F.

Kapitola 4 se zabývá lineárními rozpočtovými omezeními a proto je irelevantní, jestli je F kvazikonkávní nebo ne (vzpomeňme naši diskusi a diagram v kapitole 2). Avšak nyní požadujeme dodatečné předpoklady, že F je kvazikonkávní, aby se rigorózně ospravedlnila záměna (2.3) za (2.4). Povšimněte si také, že abychom mohli použít tuto proceduru, je nezbytné znát vektor derivací $\nabla_{\mathbf{x}} h_r(\mathbf{x}^r)$ pro každé r; tzn. musíme znát derivace nabídkových funkcí, které spotřebitel využívá v každém období - informace, kterou první přístup nepožaduje.

Model monopsonu zde prezentovaný je ve skutečnosti mnohem širší než klasický model monopsonistického využívání: ceny, kterým je spotřebitel vystaven se mohou měnit s nakupovaným množstvím kvůli nepřebernému množství důvodů, zahrnujíce v to i náklady transakce, množstevní slevy a existenci progresivního zdanění. Většina daňových systémů vede k rozpočtovým omezením se skoky nebo nediferencovatelnými body. To nezpůsobuje žádné problémy s výše uvedenou procedurou, jestliže pózorovaná spotřebitelova volba mezi spotřebou a volným časem nepadne přesně do bodu skoku v tomto rozpočtovém omezení.

9.3 Třetí přístup: Problém monopolu jinak

Znovu se věnujme problému monopolu vyloženému výše. Nechť $\mathbf{x}_0^r > 0, \mathbf{x}^r > 0_N$ je řešením problému maximalizace zisku monopolu pro r-té období, což lze zapsat:

$$\max_{\mathbf{x}}\{w^r D(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 - \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x} : \mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \geq 0_N\} =$$

$$= w^r D(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r - \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x}^r, r = 1, 2, ..., T, \tag{2.5}$$

kde $p_0^r \equiv w^r D(\mathbf{x}_0^r) > 0$ je pozorovaná prodejní cena výstupu během r-tého období, $w^r D(\mathbf{x}_0)$ je inverzní poptávková funkce pro období r, $p \gg 0_N$ je vektor cen vstupů pro období r. Pokud je funkce F spojitá a konkávní (tak, že množina produkčních možností $\{(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}) : \mathbf{x}_0 \leq F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \geq 0_N\}$ je uzavřená a konvexní) a když inverzní poptávková funkce D je diferencovatelná v $\mathbf{x}_0^r$ pro $r = 1, 2, ..., T$, pak je cílová funkce r-tého maximalizačního problému v (2.5) může být linearizován v okolí $(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{x}^r)$ a tato linearizovaná cílová funkce bude tečná k povrchu produkce $\mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x})$ v $(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{x}^r)$. Tudíž:

$$\max_{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}}\{\tilde{p}_0^r \mathbf{x}_0 - \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x} : \mathbf{x}_0 = F(\mathbf{x}), \mathbf{x} \geq 0_N\} \equiv \Pi(\tilde{p}_0^r, \mathbf{p}^r) =$$

$$= \tilde{p}_0^r \mathbf{x}_0^r - \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x}^r, r = 1, \ldots, T, \tag{2.6}$$

kde $\tilde{p}_0^r \equiv w^r D(\mathbf{x}_0^r) + w^r D'(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r = p_0^r + w^r D'(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r > 0$ je *stínová* neboli *mezní* cena výstupu r-tého období ($\tilde{p}_0^r < p_0^r$ jestliže $w^r > 0$ a $D'(\mathbf{x}_0^r) < 0$ a Π je "pravdivá" funkce firemního zisku, která je duální k produkční funkci F (vzpomeňme Π^* definovanou v prvním přístupu, která je duální ke konvexnímu obalu $D[F(\mathbf{x})]F(\mathbf{x}) \equiv F^*(\mathbf{x})$). Takže problém maximalizace pravdivé nelineární funkce monopolistického zisku (2.6), který má obvyklou strukturu jakmile mezní ceny výstupu $\tilde{p}_0^r$ byly vypočteny tak, aby mohly být použity obvyklé ekonometrické techniky [vzpomeňme vztah (10.5) v Kapitole 10].

Porovnáním třetího přístupu s prvním zjistíme, že třetí přístup vyžaduje e**x**tra předpoklad o konkávnosti produkční funkce (konve**x**ní technologie) a dodatečné informace, jako například znalost sklonu poptávkové funkce, kterou monopolista využívá, se požaduje pro každé období.

Lehce se nahlédne, že tento přístup lze zobecnit na firmu vyrábějící víc výrobků, která současně využívá trh se vstupy i výstupy: všechno co potřebujeme je předpoklad konve**x**nosti technologií a (lokální) znalosti poptávkových a nabídkových funkcí, které firma využívá, aby mohly být spočítány příslušné stínové ceny.

Výše uvedené techniky mohou nýt zřejmě použity v situacích, kdy se firma nechová monopolisticky ani monopsonisticky ve smyslu využívání trhů, ale je vystavena cenám jejích vstupů a výstupů, které závisí na pořízeném nebo prodaném množství, zahrnujíce náklady na transakce a množstevní slevy.

9.4 Čtvrtý přístup: Problém monopolu ještě jednou

Předpokládejme nyní, že produkční funkce splňuje, jako obyčejně, "Podmínky I" a nechť $\mathbf{x}_0^r > 0, \mathbf{x}^r > 0_N$ je řešení ma**x**imalizační úlohy monopolistického zisku pro období r (2.5), které lze přepsat jako

$$\max_{\mathbf{x}_0}\{w^r D(\mathbf{x}_0)\mathbf{x}_0 - C(\mathbf{x}_0,\mathbf{p}^r) : \mathbf{x}_0 \geq 0\} = w^r D(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r - \mathbf{p}^{r\top}\mathbf{x}^r,\ r = 1,\ldots,T, \quad (2.7)$$

kde C značí nákladovou funkci duální k F. Pokud je inverzní poptávková funkce D diferencovatelná v $\mathbf{x}_0^r > 0$ a $\partial C(\mathbf{x}_0^r,\mathbf{p}^r)/\partial\mathbf{x}_0$ e**x**istují, pak podmínky prvního řádu pro r-tý ma**x**imalizační problém v (2.7 dávají podmínku $w^r D(\mathbf{x}_0^r) + w^r D'(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r - \partial C(\mathbf{x}_0^r,\mathbf{p}^r)/\partial\mathbf{x}_0 = 0$ nebo, s použitím pozorované prodejní ceny výstupu v r-tém období $p_0^r \equiv w^r D(\mathbf{x}_0^r)$,

$$p_0^r = -w^r D'(\mathbf{x}_0^r)\mathbf{x}_0^r + \frac{\partial C(\mathbf{x}_0^r,\mathbf{p}^r)}{\partial\mathbf{x}_0}, r = 1,\ldots,T. \quad (2.8)$$

Jestliže je nákladová funkce C diferencovatelná v cenách vstupů v bodě $(\mathbf{x}_0^r,\mathbf{p}^r)$ pro každé období r, pak dává Shephardovo lemma dodatečné rovnice

$$\mathbf{x}^r = \nabla_p C(\mathbf{x}_0^r,\mathbf{p}^r), r = 1,\ldots,T. \quad (2.9)$$

Předpokládejme, že část inverzní poptávkové funkce, která záleží na $\mathbf{x}_0$, lze $D(\mathbf{x}_0)$ adekvátně apro**x**imovat v relevantním okolí $\mathbf{x}_0$ následující funkcí:

$$D(\mathbf{x}_0) = \alpha - \beta ln\mathbf{x}_0, label11.10 \quad (2.10)$$

kde $\alpha > 0, \beta \geq 0$ jsou konstanty. Substituce (**??**) do (2.8) dává rovnice

$$p_0^r = w^r\beta + \frac{\partial C(\mathbf{x}_0^r,\mathbf{p}^r)}{\partial\mathbf{x}_0}, r = 1,\ldots,T. \quad (2.11)$$

Při daných pozorovaných rozhodováních dané firmy o cenách a množstvích $p_0^r, \mathbf{p}^r, \mathbf{x}_0^r, \mathbf{x}$ a při informaci o w (většinou lze předpokládat, že $w \equiv 1$) může být systém rovnic (2.9) a (2.11) naráz ekonometricky odhadnut jakmile známe diferenciální funkcionální tvar nákladové funkce $C(\mathbf{x}_0, \mathbf{p})$. Pokud je $\beta = 0$ v (2.11), pak se producent chová tržně, prodává-li výstup za cenu p rovnou mezním nákladům, $\partial C(\mathbf{x}_0^r, \mathbf{p}^r)/\partial \mathbf{x}_0$. Rovnice (2.11) je zároveň konzistentní s chováním producenta jako monopolisty, který tvoří cenu "naivní přirážkou", neboli "naivní markup", (záleží na hodnotě w). Máme tak základ pro statistické testování tržní struktury: (i) když $\beta = 0$, pak je chování producenta v souladu s tržní situací známou jako "price taking"; (ii) kdyŘ je $\beta > 0$ a $\beta w^r/p_0^r < 1$ pro všecna $r = 1, 2, ..., T$, pak dostáváme chování klasického monopolisty; (iii) pokud je $\beta > 0$, ale $\beta w^r/p_0^r \geq 1$ pro nějaké r, potom máme chování "markup" monopolisty; (iv) když $\beta < 0$, pak nebude chování firmy v souladu s žádným ze tří popsaných způsobů.

Tento přístup nabízí oproti předchozím přístupům několik výhod: (i) můžeme nyní statisticky testovat soutěžní chování; (ii) požadavky na informace jsou nízké - nepotřebujeme e**x**ogenní informaci o poptávkové elasticitě; (iii) nemusíme předpokládat, že produkční funkce F je je konkávní, takže model je konsistentní s rostoucími výnosy z rozsahu produkce; a nakonec (iv) postup je velmi jednoduchý - jen vložíme podmínku βw^r do rovnice soutěže, cena se rovná mezním nákladům.

9.5 Historické poznámky

Základ prvního přístupu je v Lau (1974a, str. 193-4; 1978), ale své kořeny má už v Hotelling (1932, str. 609). Druhý přístup je v Diewert (1971b), ale kořeny jsou v práci Fisch (1936, str. 14). Třetí přístup (izomorfní ke druhému přístupu) je popsán v Diewert (1974a, str. 155). Čtvrtý přístup je od Appelbaum (1975), který požaduje trochu jiné předpoklady pro funkcionální tvar inverzní popávkové funkce. Appelbaum(1975, 1979) také naznačuje, jak by bylo možné jeho přístup rozšířit na několik monopolistických nabídkových výstupů nebo monopsonistických poptávkových vstupů a ukazuje příklad empirického testování založeného na datech o amerického odvětví zpracovávající naftu a zemní plyn. Další empirický příklad této techniky je založen na obchodu mezi USA a Kanadou v Appelbaum(1979). Čtvrtý přístup byl použit v Schworm (1980) v konte**x**tu investiční teorie, kde se ceny investičního zboží odvíjí od nakupovaného množství.

10 Závěr

Věnovali jsme velkou pozornost duálnímu přístupu k mikroekonomické teorii v Sekcích 2-6 této kapitoly. V Sekcích 7 a 8 jsme ukázali, jak může být teorie duality využito k odvození obvyklých porovnávacích statistických tvrzení pro teorii výrobců a spotřebitelů.

Bohužel, počet děl, využívajících teorii duality je tak veliký, že nejsme schopni je všechny uvést.

Obsah

Literatura

[1] R.G.D. Allen : *Mathematical economics.* Macmillan, London 1963.

[2] K.J. Arrow: *Social choice and individual values.* Wiley, New York 1951, 2nd edition 1963.

[3] K.J. Arrow, M.D. Intriligator: *Handbook of mathematical economics.* Elsevier Science, Amsterdam 1994.

[4] C. Berge: *Topological spaces*, Macmillan, New York 1963.

[5] L. Bican : *Lineární algebra.* SNTL, Praha 1979.

[6] G. Debreu: *Theory of value*, Wiley, New York 1959.

[7] G. Debreu: *Smooth preferences*, Econometrica, 38:387-616, 1972.

[8] W.E. Diewert: *Duality theory in economics*, North Holland, Amsterdam 1982.

[9] J. Dupačová, J. Plesník, M Vlach: *Lineárne programovanie.* ALFA, Bratislava 1990.

[10] W. Fenchel: *Convex cones, sets and functions*, Lecture Notes, Department of mathematics, Princeton University, Princeton 1953.

[11] J. Green, W.P. Heller: **Mathematical analysis and convexity with application to economics** in *Handbook of mathematical economics,* editors K.J. Arrow, M.D. Intriligator, Elsevier Science, Amsterdam 1994, p. 15-53.

[12] J.R. Hicks: *Value and capital*, Oxford University Press, New York 1946.

[13] H. Hotelling: *Demand functions with limited budgets*, Econometrica, 3, 1925, p. 66-78.

[14] S. Karlin: *Mathematical methods and theory in games, programming and economics, vol. I*, Addison-Wesley, Palo Alto, California 1959.

[15] I. Kolář: *Úvod do Thomovy teorie katastrof*, Academia, Praha 1988.

[16] H. Minkowski: *Theorie der konvexen Körper*, Gesammelte Abhandlungen II, B.G. Teubner, Leipzig und Berlin 1911.

[17] H. Nikaido: *Convex structures and economic theory*, Academic Press, New York 1968.

[18] A. Pultr: *Podprostory euklidovských prostorů*, SNTL, Praha 1986.

[19] R.T. Rockafellar: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1970.

[20] P.A. Samuelson: *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge 1963.

[21] R.W. Shephard: *Cost and production functions*, Princeton University Press, Princeton 1953.

[22] R.W. Shephard: *Theory of cost and production functions*, Princeton University Press, Princeton 1970.

[23] R. Sikorski: *Diferenciální a integrální počet funkce více proměnných*, Academia, Praha 1973.

[24] J. von Neumann: *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 8:73-83, 1937.

[25] M.S. Vošvrda: *Teoretická ekonomie*, Univerzita Karlova, Praha 1994.