Jan Paseka

# Matematická ekonomie

*Učební texty*

# Úvod

Matematickou ekonomii bychom mohli definovat jakožto oblast vědy, která *obsahuje různé aplikace matematických pojmů a technik pro ekonomii, zejména pak pro ekonomické teorie.* Alternativní přístup pak je, že provedeme výčet všech součástí matematické ekonomie.

V tomto úvodu je historie matematické ekonomie rozdělena do tří širokých a částečně se překrývajících období: období marginalistů (1837-1947), období množinově-teoretických/lineárních modelů (1948-1960) a současné období integrace (1961-nyní).

### 1. Období marginalistů: 1838-1947

Počáteční období matematické ekonomie bylo to, ve kterém si ekonomie vypůjčila metodologii přírodních věd a nástroje matematiky, aby vyvinula formální teorii založenou na matematické analýze. Za předpokladu dostatečně hladkých funkcí (např. funkce užitečnosti a výrobní funkce) a maximalizujícího chování účastníků byla vyvinuta dostatečně úplná teorie chování mikroekonomických agentů a teorie obecné rovnováhy.

Základním prostředkem byl kalkulus - tj. diferenciální a integrální počet, zejména použití totální a parciální derivace a metody Lagrangeových multiplikátorů pro charakterizaci maxim. Zároveň byly v tomto období vyvinuty moderní teorie spotřeby, výroby, oligopolu a obecné rovnováhy.

Původní prací, kterou můžeme považovat za počáteční bod matematické ekonomiky, byla Cournotova práce z roku 1883. Cournotův přínos lze rozdělit na dva hlavní směry: teorie podniků - firem a interakce firem a spotřebitelů v jednoduché tržní ekonomice. Cournotova základní hypotéza byla, že firmy si vybírají tak, aby maximalizovaly svůj zisk. Cournot studoval a přesně definoval případy dokonalé soutěže a monopolu. Zároveň zavedl rovnost mezi nabídkou a poptávkou v jednoduché tržní ekonomice a studoval problém oligopolu, kde je omezena soutěživost prodávajících. Cournotovo řešení oligopolu zůstalo standardním přístupem a jeho vhodné zobecnění hraje důležitou roli v teorii her.

*Teorie firmy:* Cournotova maximalizační hypotéza byla rozšířena v rámci zkoumání výrobní funkce v poslední čtvrtině 19. století tak, že mohla vzniknout úplná teorie poptávky po vstupech a nabídky výstupů. Vývoj byl sdílen mnoha autory jako jsou např. Walras (1874), Wicksteed (1894), Wicksell (1893) a J.B. Clark (1889).

*Teorie spotřebitele:* Rozvoj teorie spotřebitele závisející na maximalizaci funkce užitečnosti při omezeném rozpočtu spotřeby byl započat v roce 1854 Gossenem a dále studován Jevonsem (1871), Walrasem (1874) a dále dopracován Marshallem (1890). Úplné odvození vlastností funkce užitečnosti bylo provedeno Slutským (1915) a dále studováno Hicksem a Allenem (1934) aj. Základy teorie užitečnosti byly prohloubeny několika způsoby: nahrazení kardinální užitečností ordinální přináleží Fisherovi (1892) a Paretovi (1909); axiomatizace kardinální užitečnosti je dílem Frische (1926, 1932) a Alta (1936); přístup pomocí preferencí byl započat Samuelsonem (1938) a dále rozvíjen Houthakkerem (1950) a Uzawou (1960).

*Obecná rovnováha:* Základní pojetí, že trhy jsou ve vzájemném vztahu a že proto je rovnovážný stav ekonomie charakterizován současně existující rovností mezi nabídkou a poptávkou na všech trzích, přináleží Walrasovi (1874). Toto pojetí bylo dále rozvinuto a vyloženo Paretem (1896, 1909). To, že rovnovážný stav může být dosažen, bylo dokázáno tím, že počet rovnic byl rovný počtu neznámých (viz Marshall (1890)). Optimalita konkurenční rovnováhy byla diskutována jak Walrasem tak Paretem.

*Stabilita rovnováhy:* V případě rovnováhy jednoduchého trhu byly podmínky stability diskutovány Cournotem (1838) a Marshallem (1890). Otázky stability obecné rovnováhy byly diskutovány rozsáhle Walrasem (1874). První diskuse z přesného pohledu se objevila v Hicksovi (1939a) a Samuelsonem (1941). Z posledních prací jmenujme práce Arrowa, Hahna, Hurwicze aj.

*Optimální alokace zdrojů:* První systematický výpočet užitků a nákladů přináleží Dupuitovi (1844). Jasná definice optimality v případě mnoha účastníků byla podána Paretem (1909). Charakterizace optimálních a částečně optimálních stavů je nyní známa jakožto tzv. ekonomie blahobytu, tuto syntézu provedli Hotelling, Bergson a Hicks. Speciální problém optimalizace v čase byl poprvé studován Ramseyem (1928) a následovně Hotellingem (1931).

*Zobecněné vyjednávání:* Edgeworth (1881) jakožto první studoval výstupy ekonomie, ve které mohly být realizovány všechny druhy dohod o zboží, nikoliv toliko ty možné v cenovém systému. Množina možných výstupů se nazývala *smluvní křivka*. Obecná verze tohoto pojmu, nyní známá jakožto *jádro*, byla dále studována v plné obecnosti v teorii her.

Vyvrcholení školy marginalistů založené na kalkulu, které zkombinovalo mnoho předcházejících výsledků s novějším vývojem, lze najít ve dvou klasických knihách, které jsou stále velmi důležité: Hicks (1946) a Samuelson (1947).

## 2. Období množinově teoretického/lineárního modelu: 1948-1960

Období množinově teoretického/lineárního modelu bylo období po 2. světové válce, ve kterém byl dřívější kalkul matematické analýzy nahrazen množinově-teoretickými základy a lineárními modely. Použití teorie množin znamená větší obecnost v tom, že klasické předpoklady hladkosti funkcí mohly být nahrazeny podstatně obecnějšími funkcemi. Použití lineárního modelu znamená zacházení s pojmy, které nešlo vyjádřit pomocí hladkých funkcí, tj. např. vrcholy polyedrů.

Tento nový přístup byl ve skutečnosti započat důležitým článkem von Neumanna (1937) v období ekonomického růstu. Přitom v tomto článku je metodologie podstatně důležitější než jeho obsah. Jiná práce, která hrála důležitou roli v rozvoji množinově-teoretického přístupu byla Arrowova kniha o axiomatizaci teorie sociálního výběru a individuálním ohodnocení (1951). Byly v ní použity množinově-teoretické metody, které umožnily vytvoření systému pro studium problémů obecné teorie rovnováhy.

Dva z velmi důležitých článků pro rozvoj teorie obecné rovnováhy byly Wald (1933-34), který provedl první přesnou analýzu obecné rovnováhy, a Arrow s Debreuem (1954), kteří pomocí množinově-teoretických prostředků formulovali problém existence konkurenční rovnováhy a dokázali její existenci za patřičných podmínek. Problém existence byl dále analyzován McKenziem, Galem, Nikaidou a Debreuem. Důležitým nástrojem byla Kakutaniho věta o pevném bodě (1941) – zobecnění Brouwerovy věty o pevném bodě.

V rámci teorie spotřebitele byly pro další axiomatický rozvoj důležité články Debreua a Radera. Aplikace množinově-teoretických pojmů kulminovala pak v klasické Debreuově knize (1959) a jejíž úloha je srovnatelná s pracemi Samuelsona a Hickse pro klasické období.

Lineární model pro meziodvětvové vztahy byl vyvinut Leontievem (1941, 1966). Další příbuzné aktivity na tomto poli patří Koopmansovi, Morgensternovi a Kantorovičovi. Dále byl studován von Neumannův mnohaodvětvový model růstu. Tento model hrál důležitou roli jak v obecné teorii rovnováhy tak v teorii růstu. Zároveň bylo v tomto období vyvinuto lineární programování, vycházející z prací Dantziga. Tento přístup kulminoval v pracích Dorfmana, Samuelsona, Solowa a Galeho. Tyto práce přitom neobsahovaly pouze lineární programování, nýbrž lineární modely obecné rovnováhy a lineární růstové modely. Jedním z nejdůležitějších modelů je pak Malinvaudův model akumulace kapitálu.

Teorie her byla rovněž založena na analýze lineárních modelů. Její počátky se datují k von Neumannovi (1928), ale základní vývoj se objevil v práci von Neumanna s Morgensternem (1947) a Nashe (1950).

## 3. Současné období integrace: 1961-nyní

Současné období je období integrace, ve kterém moderní matematická ekonomie kombinuje prvky kalkulu, teorie množin a lineárních modelů. Je zároveň obdobím, ve kterém byly matematické idee rozšířeny potencionálně do všech oblastí ekonomie. V současné době jsou mnohé odvětví matematické ekonomie ve vývoji a tento vývoj se ukazuje být nanejvýš přínosným. Zmiňme mj. 11 důležitých témat ve vývoji v této etapě.

*(1) Nejistota a informace:* Toto téma sestává z teorie averze k riskování (viz práce Pratta a Arrowa); rovnovážný stav při nejistotě (viz práce Diamonda a Radnera); mikroekonomické aplikace (viz práce McCalla); pojištění dle Borche aj.

*(2) Globální analýza:* Toto téma obsahuje matematické metody, které kombinují kalkulus a topologii, a jsou použity ke studiu vlastností ekonomických rovnovážných stavů a jejich změně v dané ekonomii. Debreu (1970) byl průkopníkem v tomto studiu za podmínek, že máme pouze konečný počet rovnovážných stavů.

*(3) Teorie duality:* Tato teorie používá a kombinuje množinově-teoretické metody a metody kalkulu, zejména v mikroekonomice. Připomeňme mj. práce Hotellinga, Roye, McKenzieho, Shepharda, Samuelsona a Dieweria.

*(4) Agregovaná funkce poptávky:* Teorie spotřebitele ukazuje, že funkce poptávky jednotlivců maximalizujích užitek musí splňovat jisté omezující podmínky. Sonnenschein (1973) jako první podal argument, že agregované funkce poptávky nejsou omezeny podmínkou, že individuální funkce poptávky vznikají z maximalizace užitku. Dále zmiňme práce Mantela (1974) a Debreua (1974).

*(5) Jádro ekonomie a trhy s kontinuem obchodníků:* Intuitivní pojem velkého počtu obchodníků spolu s předpokladem dokonalé soutěže vedl k tomu, že počet obchodníků konverguje k nekonečnu nebo že máme kontinuum obchodníků. Připomeňme práce Shubika (1959), Scarfa a Debreua (1962) aj.

*(6) Dočasná rovnováha:* Pojem dočasné rovnováhy byl zaveden Hicksem (1939). V takovéto rovnováze se obchod uskutečňuje sekvencionálně tak, že každý účastník předpovídá svůj budoucí zisk na základě současného a minulého stavu ekonomie. Rovnováha může obsahovat všechny ceny pohybující se dostatečně rychle k vyprodání všech trhů, nebo jinak řečeno dovolí přídělový systém.

*(7) Výpočet rovnovážných cen:* To je speciální případ výpočtu pevných bodů zobrazení, pro která je pevný bod interpretován jako rovnovážný cenový vektor, přičemž získané rozdělení je přijatelné, pokud se vyprodají všechny trhy. Hlavní práce jsou Scarf (1967, 1973).

*(8) Teorie sociálního výběru:* Teorie sociálního výběru se zabývá agregací preferencí jednotlivců do sociálního výběru. Základy byly položeny Arrowem (1951), v této knize jsou položeny základní kameny teorie a dokázány věty o možnosti resp. nemožnosti takovéhoto výběru.

*(9) Optimální zdanění:* První práce z této oblasti patří Ramseyovi (1937) a Hotellingovi (1938), nejdůležitější články pak Boiteuxovi (1956), Mirrleesovi (1971) a Diamondovi s Mirrleesem (1971).

*(10) Teorie optimálního růstu:* Toto téma bylo studováno zejména Samuelsonem se Solowem (1956), Samuelsonem (1965), Koopmansem, Galem a dalšími. Původně byl tento problém formulován jakožto problém optimálních úspor Ramseyem (1928). Tento problém byl pak zobecněn a zkombinován s meziodvětvovým modelem růstu. Matematické základy jsou založeny na teorii dynamických systémů a teorii řízení.

*(11) Teorie organizování:* Tato oblast obsahuje teorii týmové práce, decentralizace, plánování a problém stimulace. Z novějších prací připomeňme práce Marschaka a Hurwicze.

Tento učební text si neklade žádné nároky na úplnost či původnost. Případné komentáře či kritické připomínky k textu očekávám nejlépe na e-mailové adrese

`paseka@math.muni.cz`

či jinou formou. Text je průběžně doplňován a měněn a je umístěn k volnému použití na ftp serveru oboru matematika PřF MU. Části textu jsou tvořeny referáty zpracovanými studenty Pavel Janík ml., Monika Ryndová, Libuše Tománková v rámci stejnomenné přednášky na Přírodovědecké fakultě Masarykovy univerzity. Veškerá zodpovědnost za styl a obsah je na autorovi.

# Obsah

# Kapitola 1

# Teorie ekonomické rovnováhy

Tato kapitola je podstatným způsobem založena na článku S. Smalea [28] a monografii G. Debreua [7] ve zpracování v rámci diplomové práce Jiřího Novotného [21].

## 1 Základní pojmy

### 1.1 Prostor komodit

Prostor komodit je základním pojmem, na kterém stojí i celý matematický aparát. Jeho podstatou je, že v ekonomice je daný počet komodit (komoditou nerozumíme jen zboží či služby, ale cokoliv, co lze použít ke směně, včetně práce, komodita je určena svými fyzickými vlastnostmi, datem a místem, kdy a kde je dostupná). Nechť je těchto komodit $l$, $l \in N$. Akci jednotlivého ekonomického subjektu (v našem případě $i$-tého spotřebitele nebo výrobce) můžeme zapsat jako komoditní vektor v komoditním prostoru $R^l$.

$$x_i = (x^1, ..., x^l), \quad x^h \in R \quad h = 1, \ldots, l$$

Pomocí tohoto vyjádření akce jednoho subjektu nyní můžeme popsat celou ekonomiku. Pokud je účastníků daný počet, např. $m$, pak budou všechny akce v ekonomice popsány vektorem komoditních vektorů z prostoru, $z \in R^{lm}$. Tedy

$$z = (x_1, ..., x_m), \quad x_i \in R^l \quad i = 1, ..., m.$$

## 1.2 Cenový prostor

Cenový prostor lze považovat za duální koncept ke konceptu prostoru komoditního. Jako nejlepší k ohodnocení komodit se hodí právě ceny. Tzn. že ke komoditnímu prostoru přiřadíme cenový vektor, přičemž jednotlivé složky si odpovídají ($i$-tá složka cenového vektoru značí cenu $i$-té komodity). Aby cenový prostor odpovídal nejlépe reálné situaci budeme uvažovat pouze nezáporné ceny - tuto množinu budeme značit $R_+ = [0, \infty)$. * Tedy

$$p = (p^1, ..., p^l), \quad p^h \in R_+ \quad h = 1, ..., l$$

je cenový vektor. Další podmínkou je, že cenový vektor je pro všechny účastníky stejný, takže vlastně reprezentuje cenový systém. Hodnotu komoditního vektoru v daném cenovém systému vyjádříme jako skalární součin obou vektorů.

$$w = p \cdot x = \sum_{h=1}^{l} p^h x^h$$

## 1.3 Agenti

Místo dřívějších, poněkud kostrbatých pojmů "účastník trhu, účastník ekonomiky", nyní zavedeme pojem "agent". Z ekonomického hlediska agentem rozumíme jak spotřebitele, tak výrobce. Pro odlišení těchto pojmů v matematickém konceptu zavedeme následující znaménkovou konvenci pro rozlišení vstupů a výstupů: pro spotřebitele budou vstupy kladné, výstupy záporné, pro výrobce naopak vstupy záporné a výstupy

*Komodity s nulovou cenou se v ekonomické teorii nazývají *volné*.

kladné. Díky této konvenci v matematickém vyjádření nemusíme rozlišovat mezi pojmy spotřebitel a výrobce vystačíme pouze s pojmem agent. Je zároveň ošetřena možnost, že agent je současně výrobcem i spotřebitelem.

## 1.4 Existence rovnováhy

Celková nabídka $S(p)$ a celková poptávka $D(p)$ jsou zobrazení z cenového do komoditního prostoru, tedy

$$S, D : R^l_+ - \{0\} \to R^l.$$

Předpokládáme, že poptávka i nabídka jsou homogenní, tj. platí

$$D(p) = D(\lambda p), \quad S(p) = S(\lambda p) \ \text{ pro } \lambda \in (0, \infty).$$

Ekonomika je v rovnováze právě tehdy, když žádný z agentů nechce změnit její stav. Veškeré vyrobené zboží je také poptáváno a spotřebitelé plně uspokojují své potřeby.

$$D(p) = S(p),$$

poptávka se rovná nabídce. Hledáme tedy vektor $p^* \in R^l_+ - \{0\}$, který splňuje

$$D(p^*) = S(p^*).$$

Označíme-li $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l, \ Z(p) = D(p) - S(p)$ jako *převis poptávky*, pak hledáme takový vektor $p^*$, pro který

$$Z(p^*) = 0.$$

Zobrazení $Z$ je spojité a homogenní, neboli

$$Z(\lambda p) = Z(p), \quad \text{pro všechna } \lambda > 0.$$

## 1.5 Walrasův zákon

Walrasův zákon říká, že celková hodnota poptávky je rovna celkové hodnotě nabídky. Hodnotu nabídky lze interpretovat jako rozpočtové omezení celé ekonomiky a hodnota převisu poptávky je nulová:

$$p \cdot Z(p) = 0 \quad \text{čili} \quad \sum_{h=1}^{l} p^h Z^h(p) = 0$$

Nechť je $S_+^{l-1} = \{p \in R_+^l; \|p\|^2 = \sum_{i=1}^{l} (p^i)^2 = 1\}$ prostor normalizovaných cenových systémů. Homogenita $Z$ nám dovoluje zúžit definiční obor $Z$ na $S_+^{l-1} \in R$. Podle Walrasova zákona je $Z(p)$ tečna $S_+^{l-1}$ v bodě $p$, neboť vektor $Z(p)$ je kolmý k $p$.
Slabý Walrasův zákon říká, že pro každý cenový vektor $p \in R_+^l$ platí:

$$p \cdot Z(p) \leq 0.$$

**Definice 1.1**
Nechť $a \in R$ a $v \in R^l$, pak zápis $v < a$ znamená, že

$$v^h < a, \quad \text{pro } h = 1, ..., l.$$

Nechť $b \in R^l$ a $v \in R^l$, pak zápis $v < b$ znamená, že

$$v^h < b^h, \quad \text{pro } h = 1, ..., l.$$

Podobně i pro $=, \leq, >, \geq$.

**Věta 1.1 (Debreu-Gale-Nikaidô)**
Nechť je $Z : R_+^l - \{0\} \to R^l$ spojité a splňuje slabý Walrasův zákon. Pak existuje $p^* \in R_+^l - \{0\}$ takové, že

$Z(p^*) \leq 0$.
Důkaz viz [28, strana 338-339].

**Poznámka 1.1**
Pokud $Z : R^l_+ - \{0\} \to R_+$ splňuje Walrasův zákon a pro nějaké $p^*$ platí $Z(p^*) \leq 0$, pak buď $Z^h(p^*) = 0$ nebo $p^{*h} = 0$.

## 1.6 Aproximace vícehodnotových zobrazení

$S(T)$ značí množinu konvexních podmnožin množiny $T \subseteq R^l$.

**Definice 1.2**
Nechť je $K \subseteq R^l$ kompaktní, $T \subseteq R^l$ kompaktní a konvexní. Pak zobrazení $\varphi : K \to S(T)$ nazýváme *korespondence* z $K$ do $T$.
Graf korespondence $\varphi$ je množina

$$\Gamma_\varphi = \{[x, y] \in K \times T;\ y \in \varphi(x)\}.$$

$\varepsilon$-okolí grafu $\Gamma_\varphi$ definujeme takto:

$$B_\varepsilon(\Gamma_\varphi) = \{y \in K \times T;\ \mathrm{dist}(y, \Gamma_\varphi) \leq \varepsilon\}.$$

**Věta 1.2**
Jestliže je $\varphi$ korespondence z $K$ do $T$ s kompaktním grafem $\Gamma_\varphi$, potom pro dané $\varepsilon > 0$ existuje spojité zobrazení $f : K \to T$ takové, že $\Gamma_f \subset B_\varepsilon(\Gamma_\varphi)$.
Důkaz viz [6].

## 1.7 Vlastnosti konvexních množin a obalů

**Lemma 1.3**
Součet dvou konvexních množin $R^l$ je konvexní množina.

**Důkaz:**
Nechť $a_1, a_2 \in A$ a $b_1, b_2 \in B$, kde $A$ a $B$ jsou konvexní množiny. Pak platí

$$t(a_1 + b_1) + (1-t)(a_2 + b_2) = (ta_1 + (1-t)a_2) + (tb_1 + (1-t)b_2) \in A + B.$$

$\blacksquare$

**Lemma 1.4**
Nechť $\widetilde{Y_j}$ značí konvexní obal množiny $Y_j$ v $R^l$, pak

$$\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y_j} = \widetilde{\sum_{j=1}^{m} Y_j}.$$

**Důkaz:**
Stačí dokázat, že $\widetilde{A} + \widetilde{B} = \widetilde{A+B}$. Tvrzení pro více množin se pak již jednoduše dokáže pomocí indukce.
Podle lemmatu 1.3 je $\widetilde{A} + \widetilde{B}$ konvexní množina. Protože $\widetilde{A+B}$ je nejmenší konvexní množina obsahující $A + B$, platí

$$\widetilde{A} + \widetilde{B} \supseteq \widetilde{A+B}.$$

Důkaz opačné inkluze je složitější.
Pro množinu $X \subseteq R^l$ definujeme

$$X_n = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i;\ x_i \in X,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\},$$

tedy množina $X_n$ je množinou všech konvexních kombinací $n$ prvků z množiny $X$. Nechť $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ a $t, s \in R$ takové, že $t, s \in (0,1)$.
Platí

$$\begin{multline} ta_1 + (1-t)a_2 + sb_1 + (1-s)b_2 = \\ ta_1 + tb_1 + (s-t)b_1 + (1-s)b_2 + (1-s)a_2 + (s-t)a_2 = \\ t(a_1+b_1) + (s-t)(a_2+b_1) + (1-s)(a_2+b_2). \quad (1.1) \end{multline}$$

Dále dostáváme

$$\widetilde{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_{2^r}.$$

Z platnosti vztahu (1.1) vyplývá, že

$$A_2 + B_2 \quad \subseteq \quad (A+B)_3 \subseteq \widetilde{A+B}. \qquad (1.2)$$

Dále platí

$$X_{2^{k+1}} = (X_{2^k})_2 \qquad (1.3)$$

Inkluze $X_{2^{k+1}} \supseteq (X_{2^k})$ je zřejmá. Obráceně:
Nechť $x \in X_{2^{k+1}}$. Pak

$$x = \sum_{i=1}^{2^{k+1}} t_i x_i; \text{ kde } \sum_{i=1}^{2^{k+1}} t_i = 1, \ t_i \geq 0.$$

Pokud $0 < \sum\limits_{i=1}^{2^k} t_i < 1$, pak

$$x = \left( \sum_{i=1}^{2^k} t_i \right) \left( \sum_{i=1}^{2^k} \frac{t_i}{\sum\limits_{i=1}^{2^k} t_i} x_i \right) + \left( \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} t_i \right) \left( \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{t_i}{\sum\limits_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} t_i} x_i \right) \in (X_{2^k})_2 \,.$$

Pokud $\sum_{i=1}^{2^k} t_i = 0$, pak

$$x = 0 \cdot \left( \sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k} x_i \right) + 1 \cdot \left( \sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} t_i x_i \right) \in (X_{2^k})_2 \, .$$

Analogicky pro $\sum_{i=1}^{2^k} t_i = 1$.
Nyní indukcí dokážeme, že

$$A_{2^k} + B_{2^k} \subseteq \widetilde{A+B}.$$

Pro $k = 1$ to plyne z (1.2).
Dále pokračujeme indukcí. Předpokládáme, že inkluze platí pro $k$. Pro $k+1$ pomocí vztahů (1.2) a (1.3) dostaneme

$$\begin{aligned} A_{2^{k+1}} + B_{2^{k+1}} &= (A_{2^k})_2 + (B_{2^k})_2 \subseteq (A_{2^k} + B_{2^k})_3 \subseteq \\ &\subseteq (\widetilde{A+B})_3 = \widetilde{A+B} \end{aligned}$$

Tedy platí

$$\begin{aligned} \widetilde{A} + \widetilde{B} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2^k} + \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2^k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{2^k} + B_{2^k}) \subseteq \\ &\subseteq \widetilde{A+B}. \end{aligned}$$

Rovnost $\widetilde{A} + \widetilde{B} = \widetilde{A+B}$ tedy platí a lemma 1.4 je dokázáno.

■

**Lemma 1.5**
Nechť $\overline{A}$ značí uzávěr množiny A. Pak platí

$$\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A+B}.$$

**Důkaz:**
Nechť $a \in \overline{A}$ a $b \in \overline{B}$ a pro $a_n \in A$, resp. $b_n \in B$ platí $a_n \to a$, resp. $b_n \to b$. Pak platí, že

$$a_n + b_n \in A + B$$

a zároveň

$$a_n + b_n \to a + b,$$

z čehož vyplývá

$$a + b \in \overline{A + B}.$$

■

# 2 Výrobce

## 2.1 Úvod

Nyní se budeme zabývat výrobní stranou ekonomiky. Hlavní rolí výrobce je sestavit a uskutečnit svůj výrobní plán. Pro každého z $n, j = 1, \ldots, n$ výrobců to znamená určit množství všech svých vstupů a výstupů. Bod $y_j \in R^l$ se nazývá *produkce* a označuje všechny dosažitelné i nedosažitelné produkce daného výrobce, množina dosažitelných produkcí se značí $Y_j$ a nazývá se *produkční množina*. *Celková produkční množina* a *celková dosažitelná produkční množina* vzniknou sečtením dílčích množin, tedy:

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j \quad \text{a} \quad Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

Jelikož tímto sečtením dojde k odstranění přesunů komodit mezi výrobci, představuje $y$ čistý výstup ekonomiky.

## 2.2 Vlastnosti produkčních množin

O produkčních množinách předpokládáme (na některých místech výkladu) následující:

(a) $Y_j$ je uzavřená.
Nechť je $y_j^q$ posloupnost produkcí dostupných $j$-tému výrobci a pokud $y_j^q \to y_j^0$, pak je i $y_j^0$ dostupná $j$-tému výrobci.

(a') $Y$ je uzavřená.

(b) $0 \in Y_j$ (možnost žádné produkce)
Výrobce má možnost nedělat nic.

(b') $0 \in Y$.

(c) $Y \cap (-Y) = \{0\}$ (podmínka nenávratnosti)
Tato podmínka říká, že výroba je "jednosměrný proces", kdy výstup již nelze znovu "rozložit"zpět na původní vstupy.

(d) $Y_j$ je konvexní.
Pokud jsou $y_j^1$ a $y_j^2$ dosažitelné produkce, je dosažitelný i jejich vážený průměr $ty_j^1 + (1-t)y_j^2$ pro libovolné $t \in (0, 1)$.

(d') $Y$ je konvexní.

(e) $Y \supset (-R_+^l)$ (podmínka volného použití)
Celková produkce s nulovými výstupy je dosažitelná. Tzn. že výrobci používají všechny vyprodukované komodity jako vstupy.

(f) $Y - R_+^l \subset Y$
Tato vlastnost je důsledkem vlastností (a'), (d') a (e) pro $Y$, viz [7], strana 42.

Z těchto uvedených podmínek vychází Arrowova-Debreuova věta uvedená v následující kapitole. Produkční množiny mají několik dalších vlastností.

(g) Nejprve nechť $R^l_+ = \{x \in R^l; x \geq 0\}$ a $Y \subset R^l$, pak platí:
$Y \cap R^l_+ \subset \{0\}$ (nemožnost volné produkce)
Výstupy dosažitelné celkové produkce s nulovými vstupy jsou nulové.

(h) $(Y_j + Y_j) \subset Y_j$ (aditivita)
Pokud jsou dva výrobní plány dosažitelné samostatně, pak jsou dosažitelné i společně.

(i) $Y_j$ je kužel s vrcholem v bodě 0. (konstantní výnosy z rozsahu)
Tzn. $y_j \in Y_j \Rightarrow ty_j \in Y_j, t > 0$. Poměry vstupů a výstupů ve výrobě jsou stejné, ale rozsah může být libovolně měněn.

## 2.3 Maximalizace zisku

Každý racionálně uvažující a jednající výrobce (dále budeme uvažovat pouze tyto) se snaží maximalizovat zisk z prodeje svých výstupů. V daném cenovém systému $p$ a při produkci $y_j$ se tedy snaží maximalizovat *ziskovou funkci* $\pi_j(p, y_j) : Y_j \to R$ definovanou

$$\pi_j(p, y_j) = p \cdot y_j.$$

Pro tuto funkci platí

$$\pi_j(tp, y_j) = t\pi_j(p, y_j).$$

Celkový zisk všech výrobců je $p \cdot y$. Výrobce si vybírá takovou produkci z produkční množiny $Y_j$, která maximalizuje jeho zisk, tato se pak nazývá *rovnovážná produkce*. Pokud $p \neq 0$ a $y_j$ je produkce maximalizující zisk, pak množina $Y_j$ leží v uzavřeném poloprostoru pod nadrovinou $H = \{y \in R^l, p \cdot y = p \cdot y_j\}$ určenou normálovým vektorem $p$. Množina maxim je dána průnikem $Y_j$ a $H$.

*Nabídkou* $j$-tého výrobce rozumíme korespondenci $S_j : R^l - \{0\} \to Y_j$. Výsledkem je množina všech dosažitelných produkcí, které maximalizují výrobcův zisk, tedy

$$S_j(p) = \{\overline{y} \in Y_j;\; p \cdot \overline{y} = \max_{y \in Y_j} p \cdot y\}.$$

*Celková nabídka* je korespondence $S : R^l - \{0\} \to Y$ definována takto:

$$S(p) = \sum_{j=1}^{n} S_j(p).$$

Celková produkce $y$ maximalizuje zisk na $Y$ tehdy a jen tehdy maximalizuje--li zisk každé $y_j$ na $Y_j$.

# 3 Spotřebitel

## 3.1 Úvod

Spotřebitel je v ekonomice charakterizován svými preferencemi a svým rozpočtovým omezením. Jeho hlavní charakteristiky nám podávají *spotřební množina* $X_i$ a jeho preference. Spotřební množina $X_i$ je množina všech dosažitelných spotřeb, spotřebu určuje bod $x_i$ komoditního prostoru. Spotřebitelovou rolí v ekonomice je vybrat si a uskutečnit spotřební plán pro budoucnost, tzn. určit množství vstupů a výstupů.

## 3.2 Vlastnosti spotřebních množin

Uvažujme $m$ spotřebitelů. Spotřební množinu $i$-tého spotřebitele ($i = 1, 2, ...,$ $m$) označme $X_i$. Platí pro ni následující podmínky:

(a) $X_i$ je uzavřená množina.

(b) $X_i$ je zdola ohraničená.
To znamená, že existuje takové $d_i \in R^l$, že $X_i \subset \{x \in R^l \mid x \geq d_i\}$, což zapisujeme také $X_i \geq d_i$.

(c) $X_i$ je konvexní.
Tzn., pokud $x_i^1$ a $x_i^2$ jsou dvě možné spotřeby $i$-tého spotřebitele, je jeho možnou spotřebou i jejich vážený průměr $tx_i^1 + (1-t)x_i^2,\ t \in (0,1)$.

## 3.3 Preference spotřebitele

Základem zkoumání chování spotřebitele při výběru optimálního spotřebního koše jsou spotřebitelovy preference. Na jejich základě spotřebitel rozhoduje, která ze spotřeb je pro něj "lepší"nebo "horší". Preference zahrnují faktory biologické, psychologické, kulturní, společenské a další. Tyto preference popisuje úplná preferenční relace "$\preceq$". Výraz $x_i^1 \preceq x_i^2$ znamená, že spotřeba $x_i^1$ je pro spotřebitele "nejvýše tak dobrá"jako spotřeba $x_i^2$. Tato relace je reflexivní a tranzitivní.
Pro každé $\overline{x_i} \in X_i$ jsou množiny $\{x_i \in X_i; x_i \preceq_i \overline{x_i}\}$ a $\{x_i \in X_i; x_i \succeq_i \overline{x_i}\}$ uzavřené v $X_i$ (podmínka spojitosti). Výraz $x_i^1 \sim x_i^2$ znamená, že spotřebitel je k oběma výběrům indiferentní, tedy že nemůže říci, který je "lepší"a který "horší". Tato relace je navíc i symetrická. Pro spotřebitelovy koše $x_i^1$ a $x_i^2$ platí $x_i^1 \sim x_i^2$ právě tehdy, když

$$x_i^1 \preceq x_i^2 \ \text{ a } \ x_i^1 \succeq x_i^2.$$

Bod $x_i \in X_i$ se nazývá *nasycení*, pokud neexistuje lepší dostupná spotřeba.

## 3.4 Užitková funkce

Spotřebitelovy preference reprezentuje *užitková funkce*[†] $u_i : X_i \to R$. Tato funkce je rostoucí a platí pro ni následující podmínka:

$$(x \preceq y) \Leftrightarrow (u(x) \leq u(y))$$

Užitková funkce má následující vlastnosti:

(a) $u_i$ nemá maximum (podmínka nenasycenosti). $\forall x_i \in X_i, \exists \overline{x_i} \in X_i : x_i \prec_i \overline{x_i}$.

(b) $u_i$ splňuje podmínku konvexity: pokud $x, x' \in X_i$ a $u_i(x) > u_i(x')$, potom $u_i(tx + (1-t)x') > u_i(x')$ pro každé $t \in (0,1)$.

**Poznámka 2.1**
Funkce $u_i$ je konkávní a přitom splňuje podmínku konvexity (platí zákon klesájícího mezního užitku), naopak konvexní funkce podmínku konvexity splňovat nemusí.

Důležitým pojmem pro studium chování spotřebitele je *indiferenční plocha*, kterou definujeme jako vrstevnici funkce $u_i$, $\{x \in R^l, u_i(x) = c\}$. V dvourozměrném případě mluvíme o indiferenční křivce, ta vyjadřuje všechny kombinace daných dvou komodit, které mají pro daného spotřebitele stejný užitek.

## 3.5 Rozpočtové omezení

Spotřebitel samozřejmě nemůže spotřebovávat do nekonečna, je ohraničen svým *rozpočtovým omezením*. Hodnota $w_i$ těchto prostředků spotřebitele omezuje při výběru kombinací komodit z komoditního prostoru, a to tak, že nemůže tuto hodnotu překročit. Spotřebiteli jsou tedy dostupné pouze ty komoditní vektory,

[†]Nutnou a postačující podmínkou existence spojité funkce užitku je, aby množina $A = \{(x,y) \in R^l \times R^l; x \preceq y\}$ byla vzhledem k $R^l \times R^l$ uzavřená.

jejichž hodnota je menší nebo rovna hodnotě jeho prostředků $w_i$. V daném cenovém systému pak rozpočtové omezení definujeme jako skalární součin

$$p \cdot x = \sum_{h=1}^{l} p^h \cdot x_i^h = w_i; \quad p^h, x_i^h \in R, \quad w_i \in R,$$

přičemž $p^h$ jsou složky cenového vektoru a $x_i^h$ složky komoditního vektoru.

Nadrovina $\{a \in R^l; \sum_{h=1}^{l} p^h \cdot a^h = w_i\}$ se nazývá *rozpočtová nadrovina*. Nerovnost $p \cdot x_i \leq w_i$ říká, že $x_i$ leží v poloprostoru pod rozpočtovou nadrovinou.

Každý spotřebitel disponuje majetkem $e_i \in X_i$, přičemž existuje takové $x_i \in X_i$, že platí $e_i > x_i$. Pokud uvažujeme ekonomiku se soukromými vlastníky, potom $\theta_{ij}$ značí podíl $i$-tého agenta v $j$-té firmě s výrobou $y_j \in R^l$. Je zřejmé, že $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$ a $\sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} = 1$. Pro daný cenový systém $p$ je bohatství $i$-tého agenta

$$w_i = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} p \cdot y_j.$$

Vektor $w \in R^m$ se nazývá *rozložení bohatství* a jeho složkami jsou hodnoty bohatství jednotlivých spotřebitelů $(w_i)$.

## 3.6 Rovnováha spotřebitele

Spotřebitel dosahuje optima, pokud si vybere takový spotřební koš $x_i$, který mu v preferenčním uspořádání "$\preceq$"přináší největší užitek, a zároveň platí, že výdaje $p \cdot x_i$ na tento spotřební koš jsou nejvýše rovny jeho bohatství $w_i$. Námi uvažovaný racionálně jednající spotřebitel si samozřejmě takový koš vybere a bude jej na trhu poptávat.

Spotřebitelovou *poptávkou* rozumíme korespondenci $D_i(p) : R^l - \{0\} \to X_i$ definovanou jako množinu všech dosažitelných spotřeb $x_i \in X_i$, v nichž užitková funkce $u_i(x_i)$ nabývá svého maxima na rozpočtové množině $B_i = \{\overline{x} \in X_i;\ p \cdot \overline{x} \leq w_i\}$, tedy

$$D_i(p) = \{\overline{x} \in B_i;\ u_i(\overline{x}) = \max_{x \in B_i} u_i(x)\}.$$

Všechny body z množiny $D_i(p)$ jsou navzájem indiferentní a pro všechny $x'_i \in D_i(p)$ a $x_i \in B_i$ platí nerovnost $x_i \preceq_i x'_i$. Pro poptávku samozřejmě platí:

$$D_i(tp) = D_i(p),\ \text{pro libovolné } t > 0.$$

*Celková poptávka* je korespondence $D(p) : R^l - \{0\} \to \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ definovaná takto:

$$D(p) = \sum_{i=1}^{n} D_i(p).$$

# 4 Rovnováha ekonomiky

## 4.1 Definice rovnováhy

*Rovnováha* ekonomiky je její stav $(x, y, p)$, kde $x \in \prod_{i=1}^{m} X_i,\ y \in \prod_{j=1}^{n} Y_j,\ p \in S_+^{l-1} = \{p \in R_+^l; \|p\|^2 = \sum_{i=1}^{l} (p_i)^2 = 1\}$, který splňuje následující podmínky:

(A) Dosažitelnost, neboli $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} e_i$.

(B) Každý spotřebitel se snaží maximalizovat svůj užitek, neboli $x_i$ je spotřeba, při níž $u_i$ dosahuje maxima na rozpočtové množině $B_i = \{\overline{x} \in X_i; p \cdot \overline{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p \cdot y_j\}$.

(C) Každý výrobce se snaží maximalizovat svůj zisk, neboli $y_j$ je výroba, při níž je $\pi_j(p, y_j) = p \cdot y_j$ maximální na $Y_j$.

## 4.2 Arrowova-Debreuova věta

**Arrowova-Debreuova věta:**
Pro ekonomiku splňující podmínky 2.2 (a'), (b'), (c), (d'), (e), (f) a 3.2 (a), (b), (c), 3.4 (a), (b) vždy existuje rovnovážný stav.
Než dokážeme Arrowovu-Debreuovu větu, uvedeme a dokážeme větu 4.1 a větu 4.6, které splňují silnější předpoklady.

**Definice 4.1:**
Konvexní množina $K$ se nazývá *striktně konvexní*, jestliže pro všechna $x, y \in K$, $x \neq y$ a $t \in (0, 1)$ je $tx + (1 - t)y \in K^\circ$, kde $K^\circ$ je vnitřek $K$.

**Věta 4.1:**
Předpokládejme nyní, že ekonomika popsaná výše splňuje kromě předpokladů Arrowovy-Debreuovy věty tyto dodatečné podmínky:

(1) Každá $Y_j$ je uzavřená a striktně konvexní.

(2) Každá $u_i$ splňuje podmínku *ostré konvexity* tj., pokud $u_i(x) \geq c$, $u_i(x') \geq c$, $x \neq x'$ a $0 < t < 1$, potom $u(tx + (1 - t)x') > c$.

Potom existuje rovnovážný stav.

**Poznámka 4.1**
Podmínka (2) z věty 4.1 neznamená, že $u_i$ je striktně konvexní. Dále si uvědomme, že podmínka ostré kon-

vexity je ekvivalentní s tím, že funkce je ostře kvazikonkávní (viz str. **??**).

K důkazu věty 4.1 budeme potřebovat několik lemmat.

**Lemma 4.2:** (základní odhad)
Nechť je $Y$ uzavřená konvexní podmnožina $R^l$ s vlastnostmi $Y \cap (-Y) = \{0\}$ a $Y \supset -R^l_+$. Pak pro dané $b \in R_l$ a $n$ přirozené existuje konstanta $c$ taková, že pokud $y_1, ..., y_n \in Y$ a $\sum_{j=1}^{n} y_j \geq b$, potom $\| y_j \| < c$ pro všechna $j$.

K důkazu tohoto lemmatu použijeme následující tři tvrzení. V nich označme $K = \{y \in Y; \|y\| = 1\}$.

**Tvrzení 4.1:**
Počátek 0 prostoru $R^l$ neleží v konvexním obalu množiny K.

**Důkaz:**
Předpokládejme, že $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r = 0$ pro $x_i \in K, 0 < \alpha_i < 1,$ $\sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$. Pak

$$-\alpha_1 x_1 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r$$

Protože $0, x_2, \ldots, x_r \in Y$ a $Y$ je konvexní, leží výraz na pravé straně v $Y$. Výraz $-\alpha_1 x_1$ lze rozepsat takto:

$$-\alpha_1 x_1 = -(\alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1) \cdot 0)$$

Tedy $-\alpha_1 x_1$ leží rovněž v $-Y$. Z toho vyplývá, že $\alpha_1 x_1 \in Y \cap (-Y) = \{0\}$. Zároveň $\|x_1\| = 1$, tedy $\alpha_1 = 0$, což je spor s předpoklady. 0 tedy nepatří do konvexního obalu množiny $K$.

■

**Tvrzení 4.2:**
Existuje $q = (q^1, q^2, \ldots, q^l) \in R^l,\ q^h > 0$ pro všechna $h$, takové, že pro všechna $x \in K$ platí $q \cdot x < 0$.

**Důkaz:**
Jestliže $A \subseteq R^l$ je kompaktní konvexní množina a bod $b \in R^l$ neleží v $A$, pak lze $A$ od $b$ oddělit nadrovinou $q_1 x_1 + q_2 x_2 + \ldots + q_l x_l = c$. Nechť je nyní konkretně $A$ konvexním obalem množiny $K$, pak dle tvrzení 1 platí $0 \notin A$. Existuje tedy nadrovina, která odděluje $A$ a 0. Tato nadrovina má rovnici $q \cdot x = c$. Pro všechna $x \in A$ platí následující nerovnosti:

$$\begin{aligned} q \cdot x &< c \\ 0 = q \cdot 0 &> c \end{aligned}$$

Tedy pro všechna $x \in K \subseteq A$ platí $q \cdot x < 0$.
Navíc pro všechny vektory $v^h$ standardní báze v $R^l$ platí

$$-v^h \in K \quad \text{a} \quad -q^h = q \cdot (-v^h) < 0.$$

Tedy $q^h > 0$, pro všechna $h$.

■

**Tvrzení 4.3:**
Existují konstanty $\varepsilon > 0$ a $\beta > 0$ tak, že pro všechna $x \in Y$, platí

$$q \cdot x \leq \beta + \varepsilon - \varepsilon \|x\|.$$

**Důkaz:**
Nechť $q \in R^l$ je vektor z tvrzení 4.2. Nejprve definujme:

$$\begin{aligned} \beta &= \max\{q \cdot x; \|x\| \leq 1\} \\ -\varepsilon &= \max\{q \cdot x; x \in K\} \end{aligned}$$

Nyní rozlišíme dvě možnosti:
(1) Nechť $\|x\| \leq 1$. Potom

$$q \cdot x \leq \beta \leq \beta + \varepsilon - \varepsilon\|x\|,$$

neboť $\varepsilon - \varepsilon\|x\| \geq 0$.
(2) Nechť $\|x\| > 1$, pak $\frac{x}{\|x\|} \in K$ a platí:

$$-\varepsilon \geq q \cdot \frac{x}{\|x\|}.$$

Tedy

$$-\varepsilon\|x\| \geq q \cdot x$$

a odtud

$$q \cdot x \leq -\varepsilon\|x\| < -\varepsilon\|x\| + \beta + \varepsilon,$$

neboť

$$\beta + \varepsilon > 0.$$

Uvedená nerovnost tedy platí.

$\blacksquare$

**Důkaz lemmatu 4.2:**
Nechť $q \in R^l$ je vektor z tvrzení 4.2.
Předpokládejme, že $\sum_{j=1}^{n} y_j \geq b$ pro $y_j \in Y$ Potom platí:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^h \geq b^h.$$

Nerovnost vynásobíme číslem $q^h > 0$ a dostaneme

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^h q^h \geq b^h q^h.$$

Nyní vše sečteme podle $h$ a výsledkem je nerovnost

$$\sum_{j=1}^{n} y_j q \geq b \cdot q.$$

Odtud dostáváme:

$$b \cdot q \leq \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot q \leq \sum_{j=1}^{n} ((\beta + \varepsilon) - \varepsilon \|y_j\|) = n(\beta + \varepsilon) - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \|y_j\|$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \|y_j\| + b \cdot q &\leq n(\beta + \varepsilon) \\ \sum_{j=1}^{n} \|y_j\| &\leq \tfrac{n(\beta+\varepsilon) - q \cdot b}{\varepsilon} \\ \|y_j\| &\leq \tfrac{n(\beta+\varepsilon) - q \cdot b}{\varepsilon} = c \end{aligned}$$

■

**Lemma 4.3:**
Nechť $i = 1, ..., m$ a nechť $X_i \geq d_i$. Pro dané $c_1 \in R^l$ existuje $a > 0$ tak, že pro všechna $x_i \in X_i$ taková, že

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq c_1,$$

platí $\| x_i \| < a$, pro všechna $i$.

**Důkaz:**
Platí následující nerovnost:

$$\begin{aligned}(d_i)^h &\leq (x_i)^h = (x_1 + \ldots + x_m)^h - (x_1)^h - \ldots - (x_{i-1})^h - (x_{i+1})^h - \ldots \\ &\ldots - (x_m)^h \leq (c_1)^h - (d_1)^h - \ldots - (d_{i-1})^h - (d_{i+1})^h - \ldots - (d_m)^h\end{aligned}$$

Tedy pro $|(x_i)^h|$ platí následující:

$$\begin{aligned}|(x_i)^h| &\leq \max(|(d_1)^h|, \ldots, |(d_{i-1})^h|, |(d_{i+1})^h|, \ldots, |(d_m)^h|, \\ &|(c_1)^h - \sum_{k=1}^{m}(d_k)^h + (d_1)^h|, |(c_1)^h - \sum_{k=1}^{m}(d_k)^h + (d_2)^h|, \ldots, \\ &|(c_1)^h - \sum_{k=1}^{m}(d_k)^h + (d_m)^h|) = a^h\end{aligned}$$

Tedy $|(x_i)^h| \leq a^h$. Definujme $a = \sqrt{\sum_{k=1}^{l}(a^h)^2 + 1}$. Z toho dostáváme

$$\|x_i\|^2 \leq \sum_{h=1}^{l}(x_i^h)^2 = \sum_{h=1}^{l}(a^h)^2 < \sum_{h=1}^{l}(a^h)^2 + 1 = a^2.$$

■

Nabídka firmy $j$ je definována jako $S_j(p) = \{\overline{y} \in Y_j;\ p \cdot \overline{y} = \max_{y \in Y_j} p \cdot y\}$. Nyní nechť $b = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$ a zvolme $c$ stejně jako v Lemmatu 4.2 tak, že když $\sum_{j=1}^{m} y_j \geq b$, potom $\| y_j \| < c$, pro všechna $j$. Nechť $\widehat{Y}_j = Y_j \cap D_c$, kde $D_c = \{y \in D^l; \| y \| \leq c\}$. Pro $p \in R^l_+ - \{0\}$, je $\widehat{S}_j(p) = \overline{y} \in \widehat{Y}_j$ takové, že funkce

$\pi(p,y) = p \cdot y$, má na $\widehat{Y}_j$ maximum v $\overline{y}$. Potom se $\widehat{S}_j$ nazývá *falešná nabídka* firmy $j$.

**Lemma 4.4:**
Funkce $\pi(p,y) = p \cdot y$ nabývá na $\widehat{Y}_j$ svého maxima právě v jednom bodě. Tedy funkce $\widehat{S}_j : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{Y}_j$ je dobře definována. Dále je spojitá a platí pro ni:

(1) $\widehat{S}_j(\lambda p) = \widehat{S}_j(p)$ pro $\lambda > 0$.

(2) Jestliže $\|\widehat{S}_j(p)\| < c$, pak $\pi(p,y) = p \cdot y$ nabývá svého maxima na $Y_j$ rovněž v bodě $\widehat{S}_j(p)$.

**Důkaz lemmatu 4.4:**
Sporem dokážeme, že funkce $\pi(p,y) = p \cdot y$ nabývá na $\widehat{Y}_j$ svého maxima právě v jednom bodě.
Nechť $\pi(p,y) = p \cdot y$ nabývá svého maxima v bodech $\overline{y}$ a $\widetilde{y}$. Musíme dokázat, že $\overline{y}$ a $\widetilde{y}$ leží na hranici. Kdyby $\overline{y} \in \widehat{Y}_j^\circ$, pak by pro všechna $t > 0$ bylo

$$(\overline{y} + tp) \cdot p = \overline{y}p + t\|p\|^2 > \overline{y}p$$

$\overline{y}$ a $\widetilde{y}$ musí tedy ležet na hranici a platí

$$p\overline{y} = p\widetilde{y} = q.$$

Předpokládejme, že $\overline{y} \neq \widetilde{y}$. Potom funkce $p \cdot y$ nabývá svého maxima ve všech bodech úsečky $\overline{y}\widetilde{y}$.
Platí tedy

$$p(t\overline{y} + (1-t)\widetilde{y}) = tp\overline{y} + (1-t)p\widetilde{y} = tq + (1-t)q = q.$$

Body $t\overline{y} + (1-t)\widetilde{y}$ musí tedy ležet na hranici, což je ovšem spor se striktní konvexitou množiny $Y_j \cap D_c$.
Důkaz spojitosti funkce $\widehat{S}_j : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{Y}_j$ vynecháme.
(1) Funkce $\pi(p,y) = py$ a $\pi(\lambda p, y) = \lambda py$ nabývají svého maxima ve stejných bodech množiny $\widehat{Y}_j$. Tedy $\widehat{S}_j(\lambda p) = \widehat{S}_j(p)$.
(2) Předpokládejme, že existuje $\overline{y} \in Y_j \setminus \widehat{Y}_j$ takové, že $p\overline{y} > p\widehat{S}_j(p)$.

Uvažujme úsečku $\overline{y}\ \ \widehat{S}_j(p)$. Tato úsečka leží celá v $Y_j$, neboť $Y_j$ je konvexní. Navíc existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro $t \in (0, \varepsilon)$ je

$$\overline{\overline{y}} = (1-t)\widehat{S}_j(p) + t\overline{y} \in \widehat{Y}_j,$$

neboť $\|\widehat{S}_j(p)\| < c$.
Potom

$$\pi(p, \overline{\overline{y}}) = p\overline{\overline{y}} = (1-t)p \cdot \widehat{S}_j(p) + tp\overline{y} > (1-t)p \cdot \widehat{S}_j(p) + tp \cdot \widehat{S}_j(p) = p \cdot \widehat{S}_j(p),$$

což je spor s tím, že $\widehat{S}_j(p)$ je maximum $\pi(p, y)$ na $\widehat{Y}_j$.

■

*Poptávkou i-tého spotřebitele* rozumíme $D_i(p) = \{\overline{x} \in X_i;\ u_i(\overline{x}) = \max_{x \in X_i} u_i(x)$ a zároveň $p \cdot \overline{x} \leq w_i\}$. Definujme $\widehat{w}_i : R^l_+ - \{0\} \to R$ jako *falešný příjem* spotřebitele $i$ rovností $\widehat{w}_i(p) = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p \cdot \widehat{S}_j(p)$. Funkce $\widehat{w}_i$ je spojitá. Nechť jsou $b = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$, $c$ jako v lemmatu 4.2 a $e$ *počáteční obdaření agenta*, vyberme $c_1 \in R^l$ tak, že $\sum_{j=1}^{n} y_j + e \leq c_1$, pokud $\|y_j\| < c$ pro všechna $j$. Vyberme $a$ podle Lemmatu 4.3 a nechť $\widehat{X}_i = X_i \cap D_a$.

*Falešná poptávka* $\widehat{D}_i : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{X}_i$ je takové $\overline{x}$, že $u_i(\overline{x}) = \max\{u(x); x \in \widehat{X}_i, p \cdot x \leq \widehat{w}_i(p)\}$ a $\widehat{B}_p = \{x \in X_i; p \cdot x \leq \widehat{w}_i(p)\}$.

**Lemma 4.5:**
(1) Funkce $u_i$ nabývá na $\widehat{B}_p$ svého maxima právě v jednom bodě, tedy funkce
$\widehat{D}_i(p) : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{X}_i$ je dobře definovaná.
(2) $\widehat{D}_i(p)$ je spojitá.

(3) $\widehat{D}_i(\lambda p) = \widehat{D}_i(p)$.
(4) Je-li $\|\widehat{D}_i(p)\| < a$, pak $\widehat{D}_i(p)$ je bodem, kde $u_i$ nabývá svého maxima na množině

$$B_p = \{x \in X_i; p \cdot x \leq \widehat{w}_i(p)\}$$

a $p \cdot D_i(p) = \widehat{w}_i(p)$.

**Důkaz:**
(1) $\widehat{B}_p$ je kompaktní, proto $u_i$ nabývá na $\widehat{B}_p$ svého maxima. Předpokládejme, že $u_i$ nabývá svého maxima v bodech $\overline{x}$ a $\widehat{x}$, $u_i(\overline{x}) = u_i(\widehat{x})$. Jelikož je $\widehat{B}_p$ konvexní, pak úsečka $t\overline{x} + (1-t)\widehat{x},\ t \in (0,1)$ leží v $\widehat{B}_p$. Z podmínky striktní konvexity pro $u_i$ plyne

$$u(t\overline{x} + (1-t)\widehat{x}) > u(\overline{x}) = u(\widehat{x}),\ \text{pro } t \in (0,1),$$

což je spor s tím, že $u_i$ nabývá v bodech $\overline{x}$ a $\widehat{x}$ svého maxima.
(2) Důkaz vynecháme.
(3) $\widehat{D}_i(\lambda p)$ nabývá maxima na množině $\widehat{B}_{\lambda p}$, pro niž platí

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{\lambda p} &= \{x \in \widehat{X}_i; \lambda px \leq \widehat{w}_i(\lambda p) = \lambda pe_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \lambda p \widehat{S}_j(p)\} \\ &= \{x \in \widehat{X}_i; px \leq \widehat{w}_i(p) = pe_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} p \widehat{S}_j(p)\} = \widehat{B}_p \end{aligned}$$

Hledáme tedy bod maxima stejné funkce na stejné množině.
(4) Nechť $\overline{x} \in X_i \cap D_a \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$ s normou $\|\overline{x}\| < a$, navíc je to bod, kde $u_i$ nabývá maxima na $\widehat{B}_p$. Dále mějme bod $\widehat{x} \in X_i \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$. Předpokládejme, že $u_i(\widehat{x}) > u_i(\overline{x})$. Pak úsečka $\overline{x}\ \widehat{x}$ leží celá v $\{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$, celá v $X_i$ a její část v $D_a$. Tedy existuje $t > 0,\ t \in (0,1)$ takové, že

$$(1-t)\overline{x} + t\widehat{x} \in X_i \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\} \cap D_a = \widehat{B}_p$$

Z podmínky striktní konvexity na $u_i$ vyplývá, že

$$u_i((1-t)\overline{x} + t\widehat{x}) > u(\overline{x}),$$

což je spor.

$\blacksquare$

**Důkaz věty 4.1:**
Nejprve si zvolíme konstanty.

$$b = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$$

a $c$ zvolme podle Lemmatu 4.2. Dále nechť

$$c_1 = (mc + e^1, mc + e^2, \ldots, mc + e^l),$$

kde $(e^1, e^2, \ldots, e^l) = \sum_{i=1}^{n} e_i$. Podle Lemmatu 4.3 zvolme $a$. Pro tato $c$ a $a$ dostaneme $\widehat{Y}_j$ a $\widehat{X}_i$ a z nich falešnou nabídku a falešnou poptávku.
Dále definujme funkce $\widehat{S}, \widehat{D}, \widehat{Z} : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ takto:

$$\widehat{S} = \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_j + \sum_{i=1}^{n} e_i,\ \ \widehat{D} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_i,\ \ \widehat{Z} = \widehat{D} - \widehat{S}.$$

$\widehat{Z}$ má následující vlastnosti :
(1) Je homogenní, neboť:

$$\begin{aligned}
\widehat{Z}(\lambda p) &= \widehat{D}(\lambda p) - \widehat{S}(\lambda p) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_i(\lambda p) - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_j(\lambda p) - \sum_{i=1}^{n} e_i = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_i(p) - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_j(p) - \sum_{i=1}^{n} e_i = \widehat{D}(p) - \widehat{S}(p) = \widehat{Z}(p)
\end{aligned}$$

(2) $\widehat{Z}$ je spojitá.
(3) Splňuje slabý Walrasův zákon: Pro všechna $p$ je

$$p \cdot \widehat{Z}(p) \leq 0.$$

Platí totiž

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{Z}(p) &= p \cdot \widehat{D}(p) - p \cdot \widehat{S}(p) = \sum_{i=1}^{n} p \cdot \widehat{D}_i(p) - \sum_{j=1}^{m} p \cdot \widehat{S}_j(p) - \sum_{i=1}^{n} p \cdot e_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p \cdot \widehat{D}_i(p) - \sum_{i=1}^{n} \widehat{w}_i(p) = \sum_{i=1}^{n} [p \cdot \widehat{D}_i(p) - \widehat{w}(p)] \leq 0, \end{aligned}$$

neboť

$$\widehat{D}_i(p) \in \widehat{B}^i(p).$$

Podle věty 1.1 existuje $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $\widehat{Z}(p^*) \leq 0$.
Definujme $y_j^* = \widehat{S}_j(p^*)$, $x_j^* = \widehat{D}_j(p^*)$. Protože $\widehat{Z}(p^*) \leq 0$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* - \sum_{i=1}^{n} e_i \leq 0 \;\text{ a tedy }\; \sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

Dále platí

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^* - \sum_{i=1}^{n} e_i \geq \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i = b$$

a tedy podle Lemmatu 4.2 $\|y_j^*\| < c$. Podle Lemmatu 4.4 je $y_j^*$ bodem maxima funkce $\pi(p^*, y)$ na $Y_j$. Takže je splněna podmínka (C) z definice rovnováhy.
Platí následující nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i \leq m(c, c, \ldots, c) + \sum_{i=1}^{n} e_i = (mc + e^1, mc + e^2, \ldots, mc + e^l) = c_1.$$

Podle Lemmatu 4.3
$$\|x_i^*\| < a.$$
Dle Lemmatu 4.5 je $x_i^*$ bodem, kde $u_i$ nabývá svého maxima na $B_p^i$. Tedy platí podmínka (B), podle níž spotřebitel maximalizuje svůj užitek na své rozpočtové množině.
Nyní dokážeme zbývající podmínku (A). Nechť
$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z, \ z \in R_+^l.$$
Skalárně vynásobíme s $p^*$ a dostaneme
$$0 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^* p^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* p^* - \sum_{i=1}^{n} e_i p^* = z p^*,$$
přičemž všechny složky $z$ a $p^*$ jsou větší nebo rovny nule.

Zřejmě pro každé $i$ je $x_i^*$ v dosažitelné spotřebě $\hat{X}_i$. Za předpokladu lokální nenasycenosti existuje $x_i'$ v $X_i$ takové, že $x^* \prec_i x_i$. To vylučuje možnost, že $p^* \cdot x_i^* < w_i(p^*)$ a tedy $p^* \cdot x_i^* \geq w_i(p^*)$. Z tohoto důvodu můžeme nalézt bod na přímce $[x_i^*, x_i']$ různý od $x_i^*$, který je preferován před $x_i^*$, ale je dost blízko $x_i^*$, aby vyhověl celkové nerovnosti. Ale to by odporovalo skutečnosti, že $x_i^*$ maximalizuje funkci $u_i$ na množině $B_{p^*}^i = \{x \in X_i \mid p^* \cdot x \leq \widehat{w}_i(p^*)\}$, kde $\widehat{w}_i(p^*) = p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*$.

Tedy pro každé $i$ platí:
$$p^* \cdot x_i^* = p^* \cdot e_i + \sum_{j=1}^{n} \Theta_{ij} p^* \cdot y_j^*.$$

Sumováním přes $i$ získáme $p^* \cdot z = 0$.

Odtud plyne
$$z \cdot p^* = 0.$$

Podle vlastnosti 2.2(e) produkčních množin,

$$Y - R^l_+ \subset Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j,$$

platí, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z \in Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{j=1}^{m} y_j^* - z.$$

Potom

$$p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*) - p^* z = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*),$$

protože $p^* \cdot z = 0$ a tedy $\sum_{j=1}^{m} p^* y_j = \sum_{j=1}^{m} p^* y_j^*$.
$y_j^*$ je maximum $\pi_j$ na $Y_j$, tedy

$$\pi_j(p, y_j) = p y_j \leq p y_j^* = \pi_j(p, y_j^*)$$

Jelikož $\sum_{j=1}^{m} p y_j = \sum_{j=1}^{m} p y_j^*$ musí být

$$p y_j = p y_j^*.$$

Tedy pro $(p^*, x^*, y)$ platí (C). Navíc

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z = \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

tedy $(p^*, x^*, y)$ splňuje podmínku (A) dosažitelnosti stavu ekonomiky.
Protože platí podmínky (A), (B) a (C), je stav $(p^*, x^*, y)$ rovnovážným stavem ekonomiky a Věta 4.1 je tím dokázána.

■

Zobecněním věty 4.1 a dalším krokem k důkazu Arrowovy-Debreuovy věty je následující věta 4.6.

**Věta 4.6**
Nechť jsou splněny předpoklady Arrow-Debreuovy věty a nechť navíc každá $Y_j$ je uzavřená a konvexní. Potom existuje rovnovážný stav.

K jejímu důkazu budeme potřebovat definice falešné nabídky $\widehat{S}_j$ a falešné poptávky $\widehat{D}_i$ jako korespondence.
Definujme korespondenci $\widehat{S}_j(p) : S_+^{l-1} \to \widehat{Y}_j$ takto:

$$\widehat{S}_j(p) = \{\overline{y} \in \widehat{Y}_j = Y_j \cap D_c;\ p \cdot \overline{y} = \max_{y \in \widehat{Y}_j} p \cdot y\}.$$

**Lemma 4.7** (vlastnosti $\widehat{S}_j$)
Korespondence $\widehat{S}_j$ má tyto vlastnosti:
(1) $\widehat{S}_j(p)$ je konvexní uzavřená množina.
(2) Graf $\Gamma_{\widehat{S}_j} = \{(p, y) \in S_+^{l+1} \times \widehat{Y}_j,\ y \in \widehat{S}_j(p)\}$ je kompaktní.
(3) Jestliže $y_j \in \widehat{S}_j(p)$ a $\|y_j\| < c$, pak $y_j \in S_j(p)$.

**Důkaz:**
(1) Nechť $y_1, y_2 \in \widehat{S}_j(p)$ jsou různé a libovolné. Potom $\pi(y_1) = \pi(y_2)$. Nechť $y_3 = ty_1 + (1-t)y_2$ pro nějaké $t \in (0, 1)$.
Platí

$$\begin{aligned}\pi(y_3) &= py_3 = pty_1 + p(1-t)y_2 = tpy_1 + (1-t)py_2 = \\ &= t\pi(y_1) + (1-t)\pi(y_2) = \pi(y_1).\end{aligned}$$

Tedy $y_3$ je prvkem množiny $\widehat{S}_j(p)$.
(2) Důkaz vynecháme.
(3) Důkaz se provádí stejně jako v Lemmatu 4.4 (2).

$\blacksquare$

Funkce $\widehat{w}_i : S_+^{l-1} \to R$ definovaná takto:

$$\widehat{w}_i(p) = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \cdot p \cdot \widehat{S}_j(p)$$

je dobře definovaná a spojitá.
Falešnou poptávku definujeme jako korespondenci $\widehat{D}_i : S_+^{l+1} \to \widehat{X}_i$ určenou vztahem

$$\begin{aligned} \widehat{D}_i(p) &= \{\overline{x} \in X_i \cap D_c; \text{funkce } u_i(x) \text{ nabývá maxima v } \overline{x} \\ &\quad \text{na } \widehat{B}_p = \{x \in X_i; p \cdot x \leq \widehat{w}_i\}\}. \end{aligned}$$

**Lemma 4.8** (Vlastnosti $\widehat{D}_i$)
Pro korespondenci $\widehat{D}_i$ platí:
(1) $\widehat{D}_i(p)$ je konvexní a uzavřená množina.
(2) Graf $\Gamma_{\widehat{D}_i} = \{(p, x) \in S_+^{l+1} \times \widehat{X}_i,\ x \in \widehat{D}_i(p)\}$ je kompaktní.
(3) $\widehat{D}_i(\lambda p) = \widehat{D}_i(p)$ pro $\lambda > 0$.
(4) Jestliže $x_i \in \widehat{D}_i(p)$ a $\|x_i\| < a$, pak $x_i \in D_i(p)$.

**Důkaz:**

(1) Nejprve ukážeme, že $\widehat{D}_i(p)$ je uzavřená. Pro $\overline{x}_n \in \widehat{D}_i(p)$ platí, že $u_i(\overline{x}_n)$ je bodem maxima funkce $u_i(x)$ na množině $\widehat{B}(p)$. Nechť $\overline{x}_n \to x' \in \widehat{B}_p$, jelikož je $u_i(x)$ spojitá, platí

$$u_i(x') = \lim u_i(\overline{x}_n) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x),$$

tedy $x \in \widehat{D}_i(p)$ a $\widehat{D}_i(p)$ je uzavřená.
Nyní ukáži, že $\widehat{D}_i(p)$ je konvexní. Pro body $z, y \in \widehat{X}_i$ splňující $u_i(z) = u_i(y) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x)$ platí

$$\begin{aligned} p(tz + (1-t)y) &= tpz + (1-t)py \leq \\ &\leq t \cdot \widehat{w}_i(p) + (1-t) \cdot \widehat{w}_i(p) = \widehat{w}_i(p). \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že $tz + (1-t)y \in \widehat{B}_p$.
Podle vlastnosti (2.4b)

$$u_i(tz + (1-t)y) \geq u_i(x) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x).$$

Tudíž $u_i(tz + (1-t)y) = \max\limits_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x)$ a z toho vyplývá, že $tz + (1-t)y \in \widehat{D}_i(p)$. $\widehat{D}_i(p)$ je tedy konvexní.
(2) Důkaz vynecháme.
(3) $\widehat{D}_i(\lambda p)$ nabývá maxima na množině $\widehat{B}_{\lambda p}$, pro niž platí

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{\lambda p} &= \{x \in \widehat{X}_i; \lambda p x \leq \widehat{w}_i(\lambda p) = \lambda p e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \lambda p \widehat{S}_j(p)\} \\ &= \{x \in \widehat{X}_i; p x \leq \widehat{w}_i(p) = p e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} p \widehat{S}_j(p)\} = \widehat{B}_p \end{aligned}$$

Hledáme tedy bod maxima stejné funkce na stejné množině.
(4) Důkaz se provádí stejně jako v Lemmatu 4.5 (4).

■

**Důkaz věty 4.6**
Nejprve si opět zvolíme konstanty.

$$b = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$$

a $c$ zvolme podle Lemmatu 4.2. Dále nechť

$$c_1 = (mc + e^1, mc + e^2, \ldots, mc + e^l).$$

Podle Lemmatu 4.3 zvolme $a$. Pro tato $c$ a $a$ dostaneme $\widehat{Y}_j$ a $\widehat{X}_i$ a z nich falešnou nabídku $\widehat{S}_j(p)$ s vlastnostmi v Lemmatu 4.7 a falešnou poptávku $\widehat{D}_j(p)$ s vlastnostmi v Lemmatu 4.8.
Vezmeme $\varepsilon > 0$. Podle věty 1.2 existuje spojitá funkce $\widehat{S}_{j\varepsilon} : S_+^{l-1} \to \widehat{Y}_j$ tak, že

$$\Gamma_{\widehat{S}_{j\varepsilon}} \subset B_\varepsilon(\Gamma_{\widehat{S}_j}).$$

Stejně pro $\widehat{D}_i$ dostaneme spojité zobrazení $\widehat{D}_{i\varepsilon} : S_+^{l-1} \to \widehat{X}_i$ s vlastností

$$\Gamma_{\widehat{D}_{i\varepsilon}} \subset B_\varepsilon(\Gamma_{\widehat{D}_i}),$$

pro které navíc na $S_+^{l-1}$ platí

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) - \widehat{w}_i(p) &< \varepsilon \\ p \cdot \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) &< \widehat{w}_i(p) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Definujme $Z_\varepsilon : S_+^{l-1} \to R^l$ a $\widehat{Z}_\varepsilon : S_+^{l-1} \to R^l$ takto

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(p) &= \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) - \sum_{i=1}^{n} e_i \\ \widehat{Z}_\varepsilon(p) &= Z_\varepsilon(p) - (p \cdot Z_\varepsilon(p)) \cdot p. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{Z}_\varepsilon(p) &= p \cdot Z_\varepsilon(p) - (p \cdot Z_\varepsilon(p))(p \cdot p) = \\ &= p \cdot Z_\varepsilon(p) - p \cdot Z_\varepsilon(p) = 0. \end{aligned}$$

Dále platí

$$\begin{aligned} p \cdot Z_\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^n \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{i=1}^n e_i \cdot p = \\ = \sum_{i=1}^n \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{i=1}^n e_i \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_j(p) \cdot p + \sum_{j=1}^m \widehat{S}_j(p) \cdot p \\ = \sum_{i=1}^n \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_j(p) \cdot p - \sum_{i=1}^n e_i \cdot p + \sum_{j=1}^m \widehat{S}_j(p) \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p \\ \leq \sum_{i=1}^n \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \widehat{w}_i(p) + \sum_{j=1}^m \widehat{S}_j(p) \cdot p - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p < 2\varepsilon \end{aligned}$$

$\widehat{Z}_\varepsilon$ splňuje Walrasův zákon. Podle věty 1.1 existuje $p_\varepsilon \in S_+^{l-1}$ tak, že

$$\widehat{Z}_\varepsilon(p_\varepsilon) \leq 0.$$

Podle poznámky 1.1 je buď

$$\widehat{Z}_\varepsilon^h(p_\varepsilon) = 0 \quad \text{nebo} \quad p_\varepsilon^h = 0. \tag{4.1}$$

Z (4.1) a z nerovnosti pro $p \cdot Z_\varepsilon(p)$ plyne

$$Z_\varepsilon^h(p_\varepsilon) = (p_\varepsilon \cdot Z_\varepsilon(p_\varepsilon))p_\varepsilon^h < 2\varepsilon \cdot p_\varepsilon^h \leq 2\varepsilon,$$

pokud $p_\varepsilon^h \neq 0$ nebo

$$Z_\varepsilon^h(p_\varepsilon) \leq 0,$$

pokud $p_\varepsilon^h = 0$. Tedy

$$Z_\varepsilon^h(p_\varepsilon) \le 2\varepsilon \quad \text{pro všechna } h.$$

Nechť jsou $y_{j\varepsilon} = \widehat{S}_{j\varepsilon}(p_\varepsilon)$ a $x_{i\varepsilon} = \widehat{D}_{i\varepsilon}(p_\varepsilon)$. Dále máme posloupnost $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^\infty$ konvergující k 0. Z ní lze vybrat podposloupnost tak, že

$$p_{\varepsilon_k} \to p^* \in S_+^{l-1}, \quad y_{j\varepsilon_k} \to y_j^* \in \widehat{S}_j(p), \quad x_{i\varepsilon_k} \to x_i^* \in \widehat{D}_i(p).$$

Stejně jako v důkazu věty 4.1 se ukáže, že když

$$y_j^* \in \widehat{S}_j(p^*) \ \text{ a } \ \|y_j^*\| < c,$$

potom $y_j^* \in S_j(p^*)$, což je podmínka (C) z definice rovnováhy, a že když

$$x_i^* \in \widehat{D}_i(p^*) \ \text{ a } \ \|x_i^*\| < a,$$

potom $x_i^* \in D_i(p^*)$, což je podmínka (B) z definice rovnováhy.
Nyní již zbývá pouze dokázat podmínku A z definice rovnováhy.
Z definice $Z_\varepsilon^h$ plyne, že

$$\sum_{i=1}^n x_{i\varepsilon}^h - \sum_{j=1}^m y_{j\varepsilon}^h - \sum_{i=1}^n e_i^h \le 2\varepsilon.$$

Limitním přechodem dostaneme nerovnost

$$\sum_{i=1}^n x_i^{*h} - \sum_{j=1}^m y_j^{*h} - \sum_{i=1}^n e_i^h \le 0.$$

Tudíž platí

$$\sum_{i=1}^n x_i^* - \sum_{j=1}^m y_j^* - \sum_{i=1}^n e_i \le 0.$$

Nyní budeme postupovat stejně jako v důkazu věty 4.1.
Položme

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z, \; z \in R_+^l.$$

Skalárně vynásobíme s $p^*$ a dostaneme

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^* p^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* p^* - \sum_{i=1}^{n} e_i p^* = z p^*,$$

přičemž všechny složky $z$ a $p^*$ jsou větší nebo rovny nule. Odtud plyne

$$z \cdot p^* = 0.$$

Podle vlastnosti 2.2(e) produkčních množin,

$$Y - R_+^l \subset Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j,$$

platí, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z \in Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{j=1}^{m} y_j^* - z.$$

Potom

$$p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*) - p^* z = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*),$$

protože $p^* \cdot z = 0$ a tedy $\sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j = \sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j^*$.
$y_j^*$ je maximum $\pi_j$ na $Y_j$, tedy

$$\pi_j(p, y_j) = py_j \leq py_j^* = \pi_j(p, y_j^*)$$

Jelikož $\sum\limits_{j=1}^{m} py_j = \sum\limits_{j=1}^{m} py_j^*$ musí být $py_j = py_j^*$.
Tedy pro $(p^*, x^*, y)$ platí (C). Navíc

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z = \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

tedy $(p^*, x^*, y)$ splňuje podmínku (A) dosažitelnosti stavu ekonomiky.
Protože platí podmínky (A), (B) a (C), je stav $(p^*, x^*, y)$ rovnovážným stavem ekonomiky a Věta 4.8 je tím dokázána.

■

Než začnu dokazovat vlastní Arrowovu-Debreuovu větu musím ještě ukázat lemma o vlastnostech množin $Y_j$ a $Y$.

**Lemma 4.9**
Nechť $Y_j^*$ značí uzávěr konvexního obalu množiny $Y_j$, neboli $Y_j^* = \overline{\widetilde{Y}_j}$. Za předpokladu, že $\sum\limits_{j=1}^{m} Y_j = Y$ je konvexní a uzavřená, platí

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j^* = Y.$$

**Důkaz:**
"$\supseteq$"

Podle lemmatu 1.4 je

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j^* \supseteq \sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y_j} = \widetilde{\sum_{j=1}^{m} Y_j} = \widetilde{Y} = Y.$$

"$\subseteq$"
Podle lemmatu 1.5 platí, že

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j^* = \sum_{j=1}^{m} \overline{\widetilde{Y_j}} \subseteq \overline{\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y_j}}.$$

Pro výraz $\overline{\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y_j}}$ platí

$$\overline{\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y_j}} = \overline{\widetilde{\sum_{j=1}^{m} Y_j}} = \overline{\widetilde{Y}} = \overline{Y} = Y$$

a lemma 4.9 je tedy dokázáno.

■

**Důkaz Arrowovy-Debreuovy věty**
Rozdíl mezi Arrowovou-Debreuovou větou a větou 4.6 spočívá v podmínkách kladených na množiny $Y_j$. $Y_j$ obecně nejsou ani konvexní ani uzavřené, pouze o $\sum_{j=1}^{m} Y_j$ se předpokládá, že je uzavřená a konvexní.

Nyní místo $Y_j$ uvažujme $Y_j^* = \overline{\widetilde{Y_j}}$. Platí

$$Y_j \subset Y_j^* \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m} Y_j = Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j^*.$$

Aplikujeme-li větu 4.6 na množiny $Y_j^*$, obdržíme rovnovážný stav $(x_i^*, y_j^*, p)$. Podle lemmatu 4.9 pro $y_j^* \in Y_j^*$ platí, že

$$\sum_{j=1}^m y_j^* \in \sum_{j=1}^m Y_j^* = Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ takové, že

$$\sum_{j=1}^m y_j^* = \sum_{j=1}^m y_j \qquad (*)$$

Dokážeme, že platí rovněž

$$p \cdot y_j = p \cdot y_j^*. \qquad (**)$$

Vynásobením výrazu $(*)$ cenovým vektorem $p$ dostaneme

$$p \cdot (\sum_{j=1}^m y_j^*) = p \cdot (\sum_{j=1}^m y_j). \qquad (+)$$

$p \cdot y_j^*$ je maximum funkce $p \cdot y_j$ na množině $Y_j^* \supseteq Y_j$, pro všechna $j$. Platí tedy

$$p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j.$$

Aby platila rovnost $(+)$, musí být splněna i rovnost $(**)$.
Nyní ověříme, že stav $(x_i^*, y_j, p)$ splňuje podmínky rovnováhy, víme-li, že $(x_i^*, y_j^*, p)$ je rovnovážný stav a že $p \cdot y_j^* = p \cdot y_j$ a $\sum_{j=1}^m y_j^* = \sum_{j=1}^m y_j$.

(A) $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} e_i.$

(B) $x_i^*$ maximalizuje $u_i$ na množině

$$\begin{aligned} B_i &= \{\overline{x} \in X_i;\ p \cdot \overline{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j^*\} = \\ &= \{\overline{x} \in X_i;\ p \cdot \overline{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j\}. \end{aligned}$$

(C) $y_j$ maximalizuje funkci $p \cdot y$ na $Y_j$, neboť $y_j^*$ maximalizuje $p \cdot y$ na $Y_j^*$
a platí $p \cdot y_j = p \cdot y_j^*$ a $Y_j^* \supseteq Y_j$.

Arrowova-Debreuova věta je tedy dokázána.

$\blacksquare$

# Kapitola 2

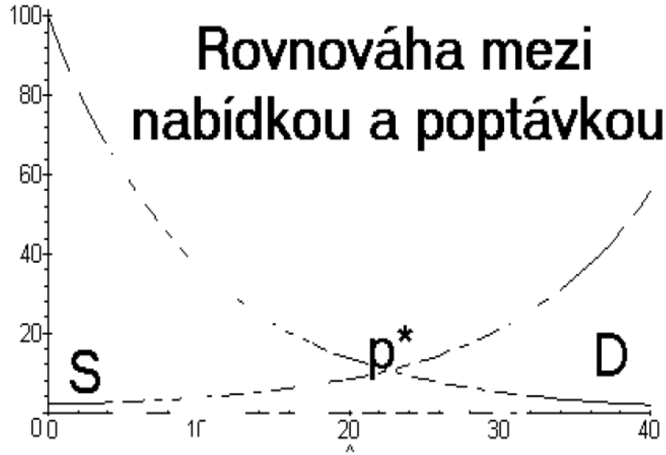
# Globální analýza a ekonomie

V této části ukážeme, že existence rovnovážných stavů může být dokázána pomocí Sardovy věty. Přitom důkaz bude v jistém smyslu konstruktivní. Zároveň jsou dokázány optimizační věty pro ekonomii blahobytu.

## 1 Existence rovnovážného stavu

Základní idea rovnovážného stavu je studium řešení rovnosti mezi poptávkou a nabídkou: $S(p) = D(p)$. Pro jednoduchý případ jednoho trhu, kde jsou ceny hodnoceny v termínech nějakého tržního standardu, podává následující graf 2.1 oprávnění pro existenci rovnovážné ceny $p^*$.

Teorie obecné rovnováhy se tímto problémem zabývá pro vícero trhů. Přesněji: předpokládejme ekonomiku s $l$ druhy zboží. Pak poloprostor $R^l_+ = \{(x^1, \dots, x^l) : (\forall i)(x^i \geq 0)\}$ bude pro nás hrát dvojí roli: nejprve jakožto tzv. *komoditní prostor*, přičemž komodita je produkt nebo služba určená k výměně; prvek $x \in R^l_+$ se nazývá *komoditní svazek*. Tedy $x$ je $l$-tice $(x^1, \dots, x^l)$ tak, že první souřadnice měří množství komodity číslo jedna, atd. Ale zároveň je $R^l_+$ bez počátku prostor *cenových systémů*; reprezentuje-li tedy $p \in R^l_+ - \{0\}, p = (p^1, \dots, p^l)$ množinu *cen* $l$ komodit, je $p^1$ cena jednotky první komodity, atd.




Obrázek 2.1: Rovnovážný stav

Předpokládejme, že studovaná ekonomika má (axiomaticky) zavedené *funkce poptávky a nabídky* $D, S : R^l_+ - \{0\} \to R^l_+$ z množiny cenových systémů do prostoru komodit. Pak $D(p)$ je komoditní svazek požadovaný ekonomikou (nebo jejími účastníky celkově) za ceny $p$. Jinak řečeno, za ceny $p = (p^1, \ldots, p^l)$ lze koupit komodity v množství $D(p)$. Problém nalezení *rovnovážného stavu* je nalezení a studium (za vhodných podmínek na $D, S$) cenového systému $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $D(p^*) = S(p^*)$.

Položme $Z(p) = D(p) - S(p)$. Pak $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ se nazývá *nadbytek poptávky* a budeme tedy hledat řešení $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že

$$Z(p^*) = 0. \tag{1.1}$$

V této části vložíme na $Z$ podmínky, které jsou přiměřené z hlediska ekonomie a pak ukážeme existenci řešení rovnice 1.1 pomocí konstruktivního postupu aparátem diferenciálního počtu. To vše provedeme, aniž bychom přešli k mikroekonomickým základům nadbytku poptávky. V další části podáme klasický mikroekonomický přístup k nadbytku poptávky pomocí agregace poptávkových funkcí individuálních účastníků ekonomiky pro případ ekonomiky úplné směny.

Podmínky na funkci nadbytku poptávky jsou

$$Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l \text{ je spojitá funkce,} \tag{1.2}$$

$$Z(\lambda p) = Z(p) \text{ pro všechna } \lambda > 0. \tag{1.3}$$

Tedy $Z$ je homogenní funkce; jestliže se ceny každé komodity úměrně zvětšují či zmenšují, funkce nadbytku poptávky se nemění. To ovšem předpokládá, že se pohybujeme uvnitř úplné nebo uzavřené ekonomiky tak, že ceny komodit nejsou závislé na komoditě ležící mimo systém.

$$p \cdot Z(p) = 0 \text{ tj. } \sum_{i=1}^{l} p^i Z^i(p) = 0. \tag{1.4}$$

Výše uvedená rovnost tvrdí, že hodnota funkce nadbytku poptávky je nula a rovnost 1.4 se nazývá *Walrasův zákon*. Tuto rovnost můžeme chápat tak, že poptávka v naší ekonomice je v souladu se zdroji ekonomiky. Jedná se o omezený rozpočet spotřeby. Celková hodnota poptávky je rovna celkové hodnotě nabídky účastníky ekonomiky. Bezpochyby je Walrasův zákon nejpropracovanější ze všech podmínek, které jsme vložili na funkci $Z$. Mikroekonomické opodstatnění podáme později.

Než zavedeme naší poslední podmínku na funkci nadbytku poptávky, podáme geometrickou interpretaci předchozích podmínek. Buď $S^{l-1}_+ = \{p \in R^l_+ : ||p||^2 = \sum_{i=1}^{l} (p^i)^2 = 1\}$ prostor normalizovaných cenových systémů. Na základě homogenity funkce $Z$ se stačí omezit na její restrikci na množinu $S^{l-1}_+$. Podle Walrasova zákona je funkce $Z$ *kolmá* k prostoru $S^{l-1}_+$ v každém bodě; jinak řečeno $p \cdot Z(p) = 0$ neříká nic jiného, než že vektor $p$ je kolmý k vektoru $Z(p)$. Můžeme tedy považovat $Z$ za pole tečných vektorů na množině $S^{l-1}_+$. Dále definujeme $S^{l-1} = \{p \in R^l : ||p||^2 = \sum_{i=1}^{l} (p^i)^2 = 1\}$

Poslední podmínka na funkci nadbytku poptávky je hraniční podmínka:

$$Z^i \geq 0, \text{ jestliže } p^i = 0. \tag{1.5}$$

Připomeňme, že $Z(p) = (Z^1(p), \ldots, Z^l(p))$ a $p = (p^1, \ldots, p^l)$. Podmínka 1.5 můžeme být jednoduše interpretována následovně: je-li $i$-tá komodita volná (je volně k dispozici, protože její cena je nulová), pak zaručeně pro ni bude funkce nadbytku poptávky nezáporná. V našem modelu mají komodity pozitivní hodnotu.

**Věta 1.1** *Jestliže je funkce nadbytku poptávky $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ spojitá, homogenní, splňuje Walrasův zákon a hraniční podmínku tj. podmínky 1.2, 1.3, 1.4 a 1.5, pak existuje cenový systém $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $Z(p^*) = 0$. Nalezení cenového systému $p^*$ bude provedeno konstruktivně.*

Důkaz věty 1.1 bude proveden pomocí vět 1.2 a 1.7.

**Věta 1.2** *Buď $f : D^l \to R^l$ spojité zobrazení splňující následující hraniční podmínku*

$(B_D)$ *Pokud je $x \in \delta D^l$, pak $f(x)$ není ve tvaru $\mu x$ pro žádné $\mu > 0$.*

*Pak existuje prvek $x^* \in D^l$ tak, že platí $f(x^*) = 0$. Přitom $D^l = \{x \in R^l : ||x||^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 \leq 1\}$ a $\delta D^l = S^{l-1} = \{x \in R^l : ||x||^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 = 1\}$.*

Obecně pak $D^l_r = \{x \in R^l : ||x||^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 \leq r^2\}$ a $\delta D^l_r = \{x \in R^l : ||x||^2 = \sum_{i=1}^l (x^i)^2 = r^2\}$ pro všechna $r$ kladná. Přitom speciálně máme hladké zobrazení $j_{l-1} : S^{l-1} \to D^{l-1} \subseteq R^{l-1}$ definované předpisem $j_{l-1}(x_1, \ldots, x_l) = (x_1, \ldots, x_{l-1})$.

Pro důkaz věty 1.2 použijeme dva hlavní výsledky globální analýzy a jejich aplikace pro ekonomii – tj. Sardovu věta a věta o implicitní funkci (věta o inverzním zobrazení). Abychom mohli vyslovit tyto věty, je nutno využít ideu singulárního bodu (kritického bodu) diferenciovatelného zobrazení $f : U \to R^n$, kde $U$ je otevřená podmnožina kartézského prostoru $R^k$. Řekneme, že $f$ je třídy $C^r$, jestliže všechny derivace do řádu

$r$ včetně existují a jsou spojité. Pro prvek $x \in U$ je derivace $\mathrm{D}f(x)$ v bodě $x$ lineární zobrazení z $R^k$ do $R^n$ (tj. matice parciálních derivací). Pak říkáme, že $x$ se nazývá *singulární (kritický) bod zobrazení $f$*, , pokud tato derivace není surjektivní zobrazení. Poznamenejme, že pokud $k < n$, jsou všechny prvky z $U$ singulární. *Singulární hodnoty* jsou jednoduše obrazy vzhledem k $f$ všech singulárních bodů; prvek $y \in R^n$ se nazývá *regulární hodnota*, pokud není singulární hodnota.

**Věta 1.3 Věta o implicitní funkci.** *Je-li $y \in R^n$ regulární hodnota zobrazení $f : U \to R^n$, které je třídy $C^1$, $U$ otevřená v $R^k$, pak buď $f^{-1}(y)$ je prázdná množina nebo $f^{-1}(y) = V$, $V$ je podvarieta $U$ dimenze $k - n$.*

Přitom $V$ je podvarieta $U$ dimenze $k-n$, pokud pro každé $x \in V$ můžeme najít diferencovatelné zobrazení $h : N(x) \to O$ s následujícími vlastnostmi:

1. $h$ má diferencovatelnou inverzi,
2. $N(x)$ je otevřené okolí bodu $x \in U$,
3. $O$ je otevřená množina obsahující bod $0 \in R^k$,
4. $h(N(x) \cap V) = O \cap C$, kde $C$ je systém souřadnic v $R^k$ dimenze $m$.

**Věta 1.4 Věta o inverzní funkci.** *Nechť $G_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k)$, $i = 1, \dots, k$ jsou funkce třídy $C^r$, $r \geq 1$, definované na okolí $W$ bodu $(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k) \in R^{n+k}$, které splňují $G_i(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k) = 0$ a*

$$\det \left( \frac{\delta G_i}{\delta y_j}(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_k) \right)_{1 \leq i,j \leq k} \neq 0. \tag{1.6}$$

*Pak existují okolí $U$ bodu $(a_1, \dots, a_n) \in R^n$ a okolí $V$ bodu $(b_1, \dots, b_k) \in R^k$ tak, že $U \times V \subseteq W$ a ke každému bodu $(x_1, \dots, x_n) \in U$ existuje právě jeden bod $(y_1, \dots, y_k) \in V$, pro nějž platí $G_i(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k) = 0$. Takto určené funkce $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$ jsou rovněž třídy $C^r$. Občas o nich mluvíme jakožto o řešeních soustavy rovnic $G_i = 0$.*

**Věta 1.5 Sardova věta.** *Je-li zobrazení $f : U \to R^n$, $U$ otevřená v $R^k$, dostatečně diferencovatelné (třídy $C^r$, $r > 0$ a $r > k - n$), pak množina singulárních hodnot má míru nula.*

Připomínáme, že množina $S \subseteq R^n$ má (Lebesgueovu) míru nula, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ existuje taková posloupnost krychlí $Z_i$, $i = 1, 2, \ldots$, že $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} Z_i$ a pro objemy vol$Z_i$ těchto krychlí platí $\sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{vol} Z_i \leq \varepsilon$. Sjednocení spočetně mnoha množin míry nula má opět míru nula.

Poznamenejme, že Sardova věta má sice jednotnou formulaci, ale z obsahového hlediska se dělí na tři významově odlišné případy. Při $k < n$ celá množina $f(U)$ sestává z kritických hodnot – zde vkládáme prostor menší dimenze do prostoru větší dimenze a pak má elementárně $f(U)$ míru nula. I pro $k = n$ jde o jednoduché tvrzení, které lze snadno dokázat přímo. Teprve případ $n < k$ představuje obtížnou část Sardovy věty. Přitom o množině kritických hodnot hladkého zobrazení nelze tvrdit více, než že má míru nula. Tato množina může být například hustá v $R^n$. Důkaz Sardovy věty lze najít například v monografii [18]. Má-li množina singulárních hodnot míru nula, řekneme, že množina regulárních bodů *má plnou míru*. Obě z výše uvedených vět lze přímo aplikovat na případ $f : U \to C$, kde $U$ je podvarieta dimenze $k$ prostoru $R^m$ a $V$ je podvarieta dimenze $n$ prostoru $R^q$. V tomto případě je derivace $\mathrm{D}f(x) : T_x(U) \to T_{f(x)}(V)$ lineární zobrazení na tečném prostoru.

Pro důkaz věty 1.2 uvažme funkci $h : D^l \to R^l$ třídy $C^2$, která splňuje následující hraniční podmínku:

$(SB)$ $f(x) = -x$ pro všechna $x \in \delta D^l$.

Problém je pak najít $x^* \in D^l$ tak, že platí $h(x^*) = 0$. Abychom jej vyřešili, definujme pomocné zobrazení $g : D^l - E \to S^{l-1}$ předpisem $g(x) = \frac{h(x)}{||h(x)||}$, kde $E = \{x \in D^l : h(x) = 0\}$ je množina řešení naší rovnosti. Evidentně, $g$ je třídy $C^2$ a tedy dle Sardovy věty dostáváme, že množina regulárních hodnot má plnou míru v $S^{l-1}$. Buď nyní $y \in S^{l-1} = \delta D^l$ taková regulární hodnota tak, že $g^{-1}(y)$ je neprázdná množina (jinak by totiž měla množina $g(D^l - E) = S^{l-1}$ míru nula, což je nemožné). Pak dle věty o implicitní funkci dostáváme, že $g^{-1}(y)$ je 1-dimenzionální podvarieta, která musí obsahovat $-y$ podle hraniční podmínky $(SB)$. Buď nyní $V$ komponenta $g^{-1}(y)$ obsahující prvek $-y$ (totiž $y \in \delta D^l$ implikuje $-y \in \delta D^l$, $g(-y) = \frac{h(-y)}{||h(-y)||} = \frac{y}{||y||} = y$). Zejména tedy musí $V$ být regulární křivka začínající v bodě $-y$ a otevřenou v opačném konci. Připomeňme, že křivka $e$ se nazývá regulární křivka třídy $C^s$, jestliže ke každému bodu této křivky existuje na této křivce okolí, které je obloukem třídy $C^s$.

Zároveň je průnik $V \cap \delta D^l = \{-y\}$ z hraniční podmínky $(SB)$ a nutně je bod $-y$ obsažen ve $V$ pouze jednou jakožto počáteční bod, protože je $V$ regulární v bodě $-y$. Speciálně je $V$ uzavřená podmnožina $D^l - E$ a tedy všechny její limitní body leží v $E$. Zejména tedy je množina $E$ neprázdná a pokud začneme z bodu $-y$, musíme jednou dokonvergovat k $E$. Tím jsme podali geometrický konstruktivní důkaz existence bodu $x^* \in D^l$ tak, že platí $h(x^*) = 0$.

Poznamenejme, že pro přiblížení si konstruktivní povahy výše uvedeného řešení můžeme ukázat, že $V$ je řešící křivka *globální Newtonovy* obyčejné rovnice $\mathrm{D}h(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\lambda h(x)$, kde $\lambda = \pm 1$ je vybráno tak, že má stejné znaménko jako $\mathrm{D}h(x)$ a závisí na $x$. Je-li totiž derivace $\mathrm{D}h(x)$ regulární, pak Eulerova metoda diskrétní aproximace nám dává

$$x_n = x_{n-1} \mp (\mathrm{D}h(x_{n-1}))^{-1} h(x_{n-1}),$$

což není nic jiného, než Newtonova metoda pro řešení rovnice $h(x) = 0$.

Nyní předpokládejme, že funkce $h : D^l \to R^l$ je pouze spojitá a stále splňuje $h(x) = -x$ pro všechna $x \in \delta D^l$. Definujme nové spojité zobrazení $h_0 : D_2^l \to R^l$ předpisem

$$\begin{array}{rcll} h_0(x) & = & h(x) & \text{pro} \quad ||x|| \leq 1, \\ h_0(x) & = & -x & \text{pro} \quad ||x|| \geq 1. \end{array}$$

Buď dále $\varepsilon_i, i = 1, 2, \ldots, \infty$ posloupnost reálných čísel konvergující k nule. Pro každé $i$ přirozené zkonstruujeme hladkou tj. $C^\infty$ aproximaci $h_i$ funkce $h_0$ tak, že $||h_i(x) - h_0(x)|| < \varepsilon_i$. Buď dále $\varphi_r$ hladká funkce na $R^l$ tak, že $\int \varphi_r = 1$ a nosič funkce $\varphi_r$ je obsažen v disku $D_r^l$ o poloměru $r > 0$. Ukažme konkrétní konstrukci funkce $\varphi_r$. Zaveďme nejprve pomocnou funkci

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{pro} \quad x > 0. \end{cases}$$

Tato funkce je hladká. Pak fukce $\varphi(x+r)\varphi(r-x)$ je třídy $C^\infty$, je kladná v intervalu $(-r, r)$ a rovná nule mimo tento interval. Funkce

$$\psi(x_1, \ldots, x_l) = \prod_{i=1}^{l} \varphi(x_i + r)\varphi(r - x_i)$$

je třídy $C^\infty$, je kladná v intervalu $(-r, r)^l$ a rovná nule mimo tento interval. Funkce $\varphi_r = \frac{\psi}{\int_{-\infty}^{\infty} \psi}$ má tedy všechny požadované vlastnosti. Navíc platí, že

$$\varphi_r(x_1, \ldots, x_l) = \varphi_r(-x_1, \ldots, x_l) = \cdots = \varphi_r(x_1, \ldots, -x_l).$$

Speciálně lze tedy spočítat, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\varphi_r(x) = 0.$$

Připomeňme, že nosičem funkce $\varphi : U \to R$ rozumíme uzávěr množiny bodů, v nichž má $\varphi$ nenulovou hodnotu.

Definujme pak funkci $h_i(y) = \int h_0(y-x)\varphi_{r_i}(x)\mathrm{d}x = \int h_0(x)\varphi_{r_i}(y-x)\mathrm{d}x$ tak, aby bylo $r_i$ dostatečně malé vzhledem k $\varepsilon_i$ a vždy bylo $r_i < \frac{1}{2}$.

Pak $h_i$ aproximuje stejnoměrně $h_0$ (viz [27], VIII, 7, 2.) v každém intervalu a $h_i(x) = -x$ pro $x \in \delta D_2^l$ (totiž $h_i(x) = \int h_0(x-z)\varphi_{r_i}(z)\mathrm{d}z = \int (z-x)\varphi_{r_i}(z)\mathrm{d}z = \int -x\varphi_{r_i}(z)\mathrm{d}z + \int z\varphi_{r_i}(z)\mathrm{d}z = -x\int \varphi_{r_i}(z)\mathrm{d}z = -x$). Připomeňme, že posloupnost $h_i$ konverguje stejnoměrně k $h_0$ v intervalu $A$, existuje-li pro každé číslo $\varepsilon > 0$ takové přirozené číslo $i_0$, že $||h_i(x) - h_0(x)|| < \varepsilon$ pro každé $x \in A$ a pro každé číslo $i > i_0$.

Můžeme pak aplikovat výše uvedený výsledek na $h_i$ a pak tedy existuje $x_i \in \delta D_2^l$ tak, že $h_i(x_i) = 0$. Evidentně, $x_i \in \delta D^l$ a zároveň $x_i \to \{x \in D^l : h_0(x) = 0\}$ (lze se omezit na vybranou podposloupnost) tj. existuje $x \in \delta D^l$ tak, že $h(x) = 0$. Totiž, pro všechna $\delta > 0$ existuje $i_\delta$ tak, že $||h_0(x_i) - 0|| = ||(h_0(x_i) - h_i(x_i)) + (h_i(x_i) - 0)|| < \delta$ pro všechna $i > i_\delta$ tj. $||h_0(x)|| = 0$.

Dokažme nyní větu 1.2 v plné obecnosti. Buď tedy funkce $f : D^l \to R^l$ pouze spojitá a nechť splňuje podmínku $(B_D)$. Definujme nové spojité zobrazení $\widehat{f_0} : D_2^l \to R^l$ takové, že $\widehat{f}(x) = -x$ pro $x \in \delta D_2^l$

předpisem

$$\begin{array}{rcll} \widehat{f}(x) & = & f(x) & \text{pro} \quad \|x\| \le 1, \\ \widehat{f}(x) & = & (2-\|x\|)f(x/\|x\|)+(\|x\|-1)(-x) & \text{pro} \quad \|x\| \ge 1. \end{array}$$

Z předcházejících výsledků pak víme, že existuje $x^* \in \delta D_2^l$ tak , že $\widehat{f}(x) = 0$. Nutně pak $||x^*|| \le 1$. Jinak by totiž nastal spor s hraniční podmínkou $(B_D)$. Tedy existuje $x^* \in \delta D^l$ tak , že $f(x) = 0$, čímž je důkaz věty 1.2 ukončen.

Abychom mohli získat hlavní výsledek – větu 1.1, bude nutno modifikovat větu 1.2 z koulí na simplexy. Definujme

$$\begin{array}{rcllcl} \Delta_1 & = & \{p \in R_+^l : \sum_{i=1}^l p^i = 1\} & \qquad \delta\Delta_1 & = & \{p \in \Delta_1 : (\exists i)(p^i = 0)\} \\ \Delta_0 & = & \{z \in R^l : \sum_{i=1}^l p^i = 0\} & & & \end{array}$$

a

$$p_c = (1/l, \ldots, 1/l) \in \Delta_1, \qquad p_c \text{ je střed simplexu } \Delta_1.$$

V dalším budeme pracovat se spojitými zobrazeními $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_0$, která budou splňovat následující hraniční podmínku:

$(B)$ Pokud je $p \in \delta\Delta_1$, pak $\varphi(p)$ není ve tvaru $\mu(p - p_c)$ pro žádné $\mu > 0$.

To neříká nic jiného, než že pro hraniční bod $p$ neleží $\varphi(p)$ na polopřímce se směrnicí $p - p_c$.

**Lemma 1.6** *Nechť $D = D^l \cap \Delta_0$. Pak mezi množinami $D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}}$ a $\eta_D(D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}}) = D \cap D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}} \times R$ existuje vzájemně jednoznačná korespondence pomocí zobrazení projekce $\pi_D : D \to D^{l-1}_{\sqrt{l}}$ a zobrazení $\eta_D : D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}} \to D$; přitom $\eta_D(x_1, \ldots, x_{l-1}) = (x_1, \ldots, x_{l-1}, \sum_{i=1}^{l-1} x_i)$.*

**Důkaz.** Nejprve ukážeme, že obě zobrazení jsou korektně definovaná tj. že platí $\pi_D(x_1,\dots,x_l) \in D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}}$ pro $(x_1,\dots,x_l) \in \eta_D(D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}})$ a $\eta_D(x_1,\dots,x_{l-1}) \in \eta_D(D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}})$ pro $(x_1,\dots,x_{l-1}) \in D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}}$. K tomu stačí ověřit, že $||\pi_D(x_1,\dots,x_l)|| \leq \frac{1}{\sqrt{l}}$ a $||\eta_D(x_1,\dots,x_{l-1})|| \leq 1$. To ale vede na maximalizační úlohy

$$\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 \\ \text{za podmínek} \\ \sum_{i=1}^{l} x_i^2 \leq 1 \\ \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 \leq \frac{1}{l} \\ \sum_{i=1}^{l} x_i = 0 \end{array} \qquad (\mathrm{P}_\pi)$$

a

$$\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 + (\sum_{i=1}^{l-1} x_i)^2 \\ \text{za podmínky} \\ \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 \leq \frac{1}{l}. \end{array} \qquad (\mathrm{P}_\eta)$$

První je pak triviálně splněna a druhá je ekvivalentní s maximalizačními úlohou

$$\begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 + (\sum_{i=1}^{l-1} x_i)^2 \\ \text{za podmínky} \\ \sum_{i=1}^{l-1} x_i^2 = \frac{1}{l}. \end{array} \qquad (\mathrm{P'}_\eta)$$

Pomocí variačního počtu pak snadno ověříme, že maximum úlohy $(\mathrm{P'}_\eta)$ nastává např. v bodu $x_1 = x_2 = \dots = x_{l-1} = \frac{1}{\sqrt{l(l-1)}}$ a má hodnotu 1.

Přitom je vidět, že složení obou těchto zobrazení nám dává identitu jak na $D^{l-1}_{\sqrt{l}}$ tak na $\eta_D(D^{l-1}_{\frac{1}{\sqrt{l}}})$. Navíc jsou tato dvě zobrazení lineární izomorfizmy mezi $\Sigma_0$ a $R^{l-1}$.$\blacksquare$

**Věta 1.7** *Buď $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_0$ spojité zobrazení splňující následující hraniční podmínku $(B)$. Pak existuje prvek $p^* \in \Delta_1$ tak, že platí $\varphi(p^*) = 0$.*

Abychom dokázali větu 1.7 pomocí věty 1.2, budeme konstruovat homeomorfismus zachovávající *paprsky*. Definujme tedy zobrazení $h : \Delta_1 \to \Delta_0$ předpisem $h(p) = p - p_c$; dále buď $\lambda : \Delta_0 - \{0\} \to R^+$ zobrazení definované předpisem $\lambda(p) = -\frac{1}{l} \cdot \frac{1}{\min_i p_i}$. Položme pak $\psi : D \to h(\Delta_1)$ jakožto $\psi(p) = \lambda(\frac{p}{||p||})p$. Evidentně, $\psi$ je zobrazení zachovávající paprsky.

Uvažujme nyní kompozici $\alpha : D \to \Delta_0$,

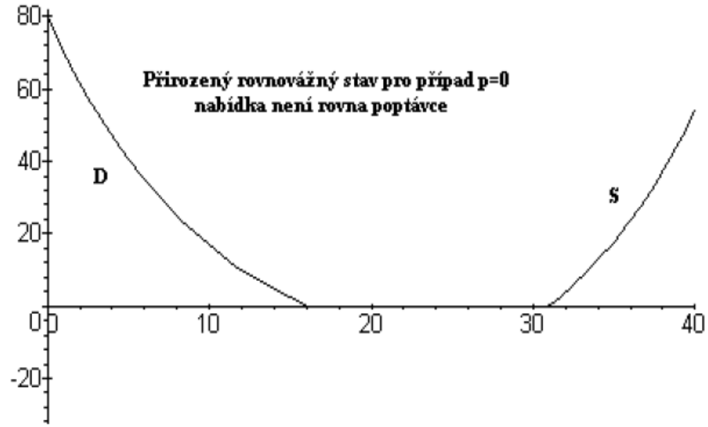
$$D \xrightarrow{\psi} h(\Delta_1) \xrightarrow{h^{-1}} \Delta_1 \xrightarrow{\varphi} \Delta_0.$$

Tvrdíme pak, že $\alpha$ splňuje hraniční podmínku $(B_D)$ věty 1.2. Buď tedy $q \in \delta D$ a nechť $p = \psi(q) + p_c = h^{-1}(\psi(q))$. Ale dle podmínky $(B)$ neexistuje žádné kladné $\mu$ tak, že $\varphi(p) = \mu(p - p_c)$ neboli ekvivalentně $\alpha(q) = \mu(p - p_c)$. To je rovnocenné s tím, že neexistuje žádné kladné $\mu$ tak, že $\alpha(q) = \mu\psi(q)$ a protože $\psi$ zachovává paprsky, máme, že neexistuje žádné kladné $\mu$ tak, že $\alpha(q) = \mu(q)$, což je přesně naše tvrzení. Okamžitě pak z věty 1.2 dostáváme, že existuje prvek $q^* \in D$ tak, že platí $\alpha(q^*) = 0$. Položíme-li pak $p^* = \psi(q^*) + p_c$, obdržíme $\varphi(p^*) = 0$ a věta 1.7 je dokázána.

Abychom dokázali 1.1, definujme pomocí funkce nadbytku poptávky $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ novou funkci $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_0$ předpisem $\varphi(p) = Z(p) - \left(\sum_{i=1}^l Z^i(p)\right) p$. Poznamenejme, že $\sum_{i=1}^l \varphi^i(p) = \sum_{i=1}^l Z^i(p) - \sum_{i=1}^l Z^i(p) \sum_{i=1}^l p^i = 0$. Je tedy $\varphi$ korektně definované a je zřejmě spojité, jakožto složení spojitých funkcí. Zároveň pokud $p \in \delta\Delta_1$, je nutně $p^i = 0$ pro jistý index $i$ a tedy $\varphi^i(p) = Z^i(p) \geq 0$ dle podmínky 1.5. Je tedy podmínka $(B)$ věty 1.7 splněna pro zobrazení $\varphi$. Existuje tedy $p^* \in \Delta_1$ tak, že $\varphi(p^*) = 0$. Tedy $Z(p^*) = \sum_{i=1}^l Z^i(p^*)p^*$. Uvažme nyní skalární součin obou stran rovnosti s vektorem $Z(p^*)$. Pak $||Z(p^*)||^2 = Z(p^*) \cdot Z(p^*) = \sum_{i=1}^l Z^i(p^*)\,(p^* \cdot Z(p^*)) = 0$ dle 1.4. Tedy i $Z(p^*) = 0$ tj. věta 1.1 platí.

Je však vhodné připomenout, že přirozený rovnovážný stav může nastat i v případě, že $D(p^*) \neq S(p^*)$. Uveďme následující graf 2.2 jednoho trhu pro cenu $p = 0$.

Tedy pro přebytek poptávky je někdy cenový vektor $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ s vlastností $Z(p^*) \leq 0$ nazýván




Obrázek 2.2: Přirozený rovnovážný stav

rovnovážným stavem. Jinak můžeme o takovémto $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ uvažovat jakožto o *rovnováze k volnému použití*, pro pozdější se zbavení přebytku nabídky pak máme rovnovážný stav $Z(p) = 0$.

**Tvrzení 1.8** *Pokud funkce* $Z : R^l_+ - \{0\} \rightarrow R^l$ *splňuje Walrasův zákon 1.4 a zároveň* $Z(p^*) \leq 0$, *pak pro všechna i buď* $Z^i(p^*) = 0$ *nebo* $p^{*i} = 0$.

Totiž jinak by existoval index $i$ tak , že $Z^i(p^*) < 0$ a $p^{*i} > 0$. Zároveň pro všechna $i$ máme $Z^i(p^*)p^{*i} \leq 0$ a tedy $\sum_{i=1}^l Z^i(p^*)p^{*i} < 0$, což je spor s Walrasovým zákonem.

**Věta 1.9** ( Debreu-Gale-Nikaidô) *Buď funkce $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ spojitá funkce splňující slabý tvar Walrasova zákona*

$$p \cdot Z(p) \leq 0. \tag{1.7}$$

*Pak existuje cenový systém $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$.*

Poznamenejme, že věta 1.9 implikuje větu 1.1. Totiž, splňuje-li funkce $Z$ předpoklady věty 1.1, pak dle věty 1.9 existuje cenový systém $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$. Podle tvrzení 1.8 pro všechna $i$ buď $Z^i(p^*) = 0$ nebo $p^{*i} = 0$. Ale dle hraniční podmínky 1.5 je pro $p^{*i} = 0$ nutně $Z^i(p^*) \geq 0$ tj. $Z^i(p^*) = 0$ a tedy celkem $Z(p^*) = 0$.

Abychom mohli dokázat větu 1.9, zavedeme funkci $\beta : R \to R$ předpisem $\beta(t) = 0$ pro $t \leq 0$ a $\beta(t) = t$ pro $t \geq 0$. Definujme dále funkci $\overline{Z} : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ následovně: $\overline{Z}^i(p) = \beta(Z^i(p))$ pro všechny indexy $i$ a cenové vektory $p$. Podobně jako v důkazu věty 1.1 definujme zobrazení $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_0$ předpisem $\varphi(p) = \overline{Z}(p) - \left(\sum_{i=1}^l \overline{Z}^i(p)\right) p$. Pak $\varphi$ splňuje předpoklady věty 1.7. Existuje tedy vektor $p^* \in \Delta_1$ tak, že $\varphi(p^*) = 0$. Tedy $\overline{Z}(p^*) = \sum_{i=1}^l \overline{Z}^i(p^*) p^*$. Uvažme nyní skalární součin obou stran rovnosti s vektorem $Z(p^*)$. Pak $\overline{Z}(p^*) \cdot Z(p^*) = \sum_{i=1}^l \overline{Z}^i(p^*) \left(p^* \cdot Z(p^*)\right) \leq 0$ dle 1.7. Tedy $\sum_{i=1}^l \beta(Z^i(p^*)) \cdot Z^i(p^*) \leq 0$. Ale zřejmě $\beta(t)t > 0$ pro $t > 0$ a $\beta(t)t = 0$ pro $t \leq 0$ . Nutně tedy $Z^i(p^*) \leq 0$ pro všechna $i$ tj. $Z(p^*) \leq 0$ tj. věta 1.9 platí.

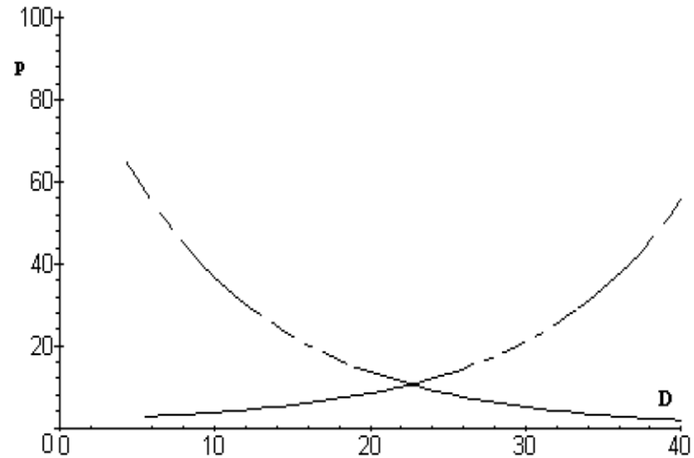
Jiné přirozené zobecnění vět 1.1 a 1.9 bude pro případ, že $p^i \to 0$ implikuje $Z^i(p) \to \infty$ (viz 2.3). Tato věta 1.10 je přirozeným zobecněním Arrow-Hahnovy věty.

Předpokládejme nyní, že funkce přebytku poptávky $Z$ je definována pouze na jisté podmnožině $\mathcal{D}$ množiny $R^l_+ - \{0\}$ tak, že $\mathcal{D}$ obsahuje množinu $\mathrm{int}(R^l_+ - \{0\})$ a pokud $p \in \mathcal{D}$, pak $\lambda p \in \mathcal{D}$ pro všechna $\lambda$ kladná. Uvažme funkci $Z$ s následujícími vlastnostmi:

$$Z : \mathcal{D} \to R^l \text{ je spojitá funkce,} \tag{1.8}$$

$$Z(\lambda p) = Z(p) \text{ pro všechna } \lambda > 0 \text{ a pro všechna } p \in \mathcal{D}, \tag{1.9}$$

$$p \cdot Z(p) \leq 0 \text{ pro všechna } p \in \mathcal{D}, \tag{1.10}$$




Obrázek 2.3: Přirozený rovnovážný stav

$$p_k \to \overline{p} \notin \mathcal{D} \text{ implikuje} \sum_{i=1}^{l} Z^i(p_k) \to \infty. \tag{1.11}$$

**Věta 1.10** *Buď funkce* $Z : \mathcal{D} \to R^l$ *funkce splňující 1.8, 1.9, 1.10 a 1.11. Pak existuje cenový systém* $p^* \in \mathcal{D}$ *tak, že* $Z(p^*) \leq 0$.

Uvažme funkci $\beta : R \to R$ stejně jako v důkazu věty 1.9. Definujme pak novou funkci $\alpha : R \to R$ v závislosti na pevně zvoleném kladném číslu $c$ předpisem

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{pro } t \leq 0, \\ 1 & \text{pro } t \geq c, \\ \frac{t}{c} & \text{jinak.} \end{cases}$$

Definujme pomocnou funkci $\overline{Z} : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ následovně:

$$\overline{Z}^i(p) = \begin{cases} 1 & \text{pokud } p \notin \mathcal{D}, \\ \left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p)\right)\right) \beta(Z^i(p)) + \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p)\right) & \text{jinak} \end{cases}$$

pro všechny indexy $i$ a cenové vektory $p$.

Podobně jako v důkazu věty 1.1 a 1.9 definujme zobrazení $\varphi : \Delta_1 \to \Delta_0$ předpisem $\varphi(p) = \overline{Z}(p) - \left(\sum_{i=1}^l \overline{Z}^i(p)\right) p$. Pak $\varphi$ splňuje předpoklady věty 1.7. Existuje tedy vektor $p^* \in \Delta_1$ tak, že $\varphi(p^*) = 0$. Tedy $\overline{Z}(p^*) = \sum_{i=1}^l \overline{Z}^i(p^*)p^*$. Nejdříve předpokládejme, že $p^* \in \mathcal{D}$. Uvažme nyní skalární součin obou stran rovnosti s vektorem $Z(p^*)$. Pak stejně jako v důkazu 1.9 dle 1.10 dostaneme $\overline{Z}(p^*) \cdot Z(p^*) \leq 0$. Tedy

$$\sum_{i=1}^l \left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right)\right) \beta(Z^i(p^*))Z^i(p^*) + \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right) \sum_{i=1}^l Z^i(p^*) \leq 0.$$

Protože pro všechna reálná $t$ platí $t\alpha(t) \geq 0$, nutně pak

$$\sum_{i=1}^l \left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right)\right) \beta(Z^i(p^*))Z^i(p^*) \leq 0.$$

Tedy

$$\left(1 - \alpha\left(\sum_{j=1}^l Z^j(p^*)\right)\right) \sum_{i=1}^l \beta(Z^i(p^*))Z^i(p^*) \leq 0.$$

Zároveň pro všechna reálná $t$ platí $(1-\alpha(t)) \geq 0$ tj. $\sum_{i=1}^{l} \beta(Z^i(p^*)) \cdot Z^i(p^*) \leq 0$.

Ale zřejmě $\beta(t)t > 0$ pro $t > 0$ a $\beta(t)t = 0$ pro $t \leq 0$ . Nutně tedy $Z^i(p^*) \leq 0$ pro všechna $i$ tj. $Z(p^*) \leq 0$.

Nechť $p^* \notin \mathcal{D}$. Pak $\overline{Z}(p^*) = (1, \ldots, 1)$ tj. $lp^* = \overline{Z}(p^*) = (1, \ldots, 1)$ tj. $p^* = p_c \in \mathcal{D}$, spor. Tedy věta 1.9 platí.

# 2 Ekonomika úplné směny: existence rovnovážného stavu

Tento odstavec se skládá ze dvou částí; v první z nich budeme uvažovat silnější předpoklady s důrazem na diferenciovatelnost, přičemž v druhém budeme pracovat v obecnějším rámci. Existenční tvrzení jsou speciálními případy Arrow-Debreuovy věty.

Uvažme nejprve jednoho účastníka s prostorem komodit $P = \{x \in R^l : x = (x^1, \ldots, x^l), (\forall i)(x^i > 0)\} \subseteq R^l_+$. Tedy prvek $x \in P$ bude reprezentovat svazek komodit spojených s tímto ekonomickým agentem. Budeme předpokládat, že preferenční relace na $P$ je reprezentována funkcí užitečnosti $u : P \to R$ tak, že účastník preferuje prvek $x \in P$ před prvkem $y \in P$ přesně tehdy, když $u(x) > u(y)$. Podmnožiny $u^{-1}(c)$ pro $c \in R$ (vrstevnice funkce $u$) nazýváme indiferentními křivkami (pro preferenční relaci). V dalším budeme předpokládat silný předpoklad klasického typu:

$$\text{Funkce } u : P \to R \text{ je třídy } C^2. \tag{2.1}$$

Buď nyní $g(x)$ orientovaný jednotkový normálový vektor k indiferentní křivce $u^{-1}(c)$ pro $c \in R$ tak, že $c = u(x)$. Můžeme pak vyjádřit $g(x)$ jakožto $\frac{\text{grad}u(x)}{||\text{grad}u(x)||}$, kde grad$u = \left(\frac{\delta u}{\delta x^1}, \ldots, \frac{\delta u}{\delta x^l}\right)$. Pak je $g : P \to S^{l-1}$ zobrazení třídy $C^1$. Toto zobrazení hraje základní roli v analýze preferencí spotřebitele a teorie poptávky.

Náš další předpoklad je monotonie neboli *více je lépe* tj.

$$g(x) \in P \cap S^{l-1} = \text{int}(S^{l-1}_+) \text{ pro všechna } x \in P. \tag{2.2}$$

Tedy 2.2 znamená, že všechny parciální derivace $\frac{\delta u}{\delta x^i}$ jsou kladné.

Naše třetí hypotéza je konvexnost a to opět v silném a diferencovatelném tvaru. Pro $x \in P$ je derivace $\mathrm{D}g(x)$ lineární zobrazení z $R^l$ do kolmé nadroviny $g(x)^\perp$ k vektoru $g(x)$. Můžeme pak uvažovat o $g(x)^\perp$ jakožto o tečném prostoru $T_{g(x)}(S^{l-1})$ nebo o tečné rovině k indiferentní křivce. Pak restrikce $\mathrm{D}g(x)$ z nadroviny $g(x)^\perp$ do sebe je symetrické lineární zobrazení.

$$\text{Restrikce } \mathrm{D}g(x) \text{ z nadroviny } g(x)^\perp \text{ do sebe má záporné vlastní hodnoty.} \tag{2.3}$$

Ekvivalentní podmínka k 2.3 je

$$\begin{array}{l}\text{Druhá derivace } \mathrm{D}^2u(x) \text{ jakožto symetrická bilineární forma ome-}\\ \text{zená na tečnou nadrovinu } g(x)^\perp \text{ k indiferentní křivce v bodě } x \text{ je}\\ \text{negativně definitní.}\end{array} \tag{2.4}$$

Ekvivalenci mezi 2.3 a 2.4 lze ukázat následovně: buď $\mathrm{D}u(x) : R^l \to R$ buď první derivace funkce $u$ v bodě $x$ s jádrem označeným $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{D}u(x))$. Pak máme $v \cdot g(x) = \frac{\mathrm{D}u(x)(v)}{||\mathrm{grad}u(x)||}$. Dále $v \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D}u(x))$ právě tehdy, když $v \cdot \mathrm{grad}u(x) = 0$ tj. $v \cdot g(x) = 0$ tj. $v \in g(x)^\perp$. Nechť $v_1, v_2 \in \mathrm{Ker}\,(\mathrm{D}u(x))$. Pak $v_1 \cdot g(x) = \frac{\mathrm{D}u(x)(v_1)}{||\mathrm{grad}u(x)||}$. Derivujeme-li obě strany podle $x$, máme

$$v_1 \cdot \mathrm{D}g(x) = \frac{\mathrm{D}^2u(x)(v_1)||\mathrm{grad}u(x)|| - \overbrace{\mathrm{D}u(x)(v_1)\mathrm{D}\left(||\mathrm{grad}u(x)||\right)}^{=0}}{||\mathrm{grad}u(x)||^2}.$$

Tedy $v_1 \cdot \mathrm{D}g(x) = \frac{\mathrm{D}^2u(x)(v_1)}{||\mathrm{grad}u(x)||}$.

Připomeňme následující dvě tvrzení z lineární algebry ([5]).

**Tvrzení 2.1** *Buď $A$ matice nad tělesem $T$, majících $n$ vlastních hodnot (ne nutně navzájem různých). Pak matice $A$ je podobná Jordanově matici.*

**Tvrzení 2.2** *Buď $f_2$ regulární kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru $V_n$ a buď $A$ její matice vzhledem k bázi $M$ prostoru $V_n$. Označme $D_i, i = 1, \ldots, n$ determinant dílčí submatice matice $A$, která vznikne z matice $A$ vynecháním posledních $n - i$ řádků a posledních $n - i$ sloupců. Pak $f_2$ je pozitivně definitní, právě když $D_i > 0, i = 1, \ldots, n$.*

Dále je vhodné si uvědomit, že forma $f_2$ je pozitivně definitní, právě když $-f_2$ je negativně definitní.

Nyní můžeme dokončit důkaz ekvivalence podmínek 2.3 a 2.4. Totiž, má-li matice $\mathrm{D}g(x)$ všechny vlastní hodnoty záporné, má v odpovídající bázi Jordanův (trojúhelníkový) tvar $B$ tak, že na diagonále jsou záporná čísla. Položme $A := -B$. Pak $A$ má na diagonále pouze kladná čísla a dle 2.2 je odpovídající forma k $A$ pozitivně definitní, tj. odpovídající forma k $\mathrm{D}g(x)$ negativně definitní. Obráceně, buď forma $\frac{\mathrm{D}^2 u(x)}{||\mathrm{grad} u(x)||}$ negativně definitní, $\lambda$ vlastní číslo matice $\mathrm{D}g(x)$ a $v$ příslušný nenulový vlastní vektor. Pak

$$\lambda(v \cdot v) = v \cdot (\lambda v) = v \cdot (\mathrm{D}g(x)v) = \frac{\mathrm{D}^2 u(x)(v, v)}{||\mathrm{grad} u(x)||} < 0.$$

Tedy $\lambda < 0$, což se mělo dokázat. Ukažme následující tvrzení.

**Tvrzení 2.3** *Pokud funkce užitečnosti $u : P \to R$ splňuje 2.3, je nutně $u^{-1}([c, \infty))$* ostře *konvexní pro všechna $c \in R$.*

Ukážeme, že minimum funkce $u$ na každém intervalu nemůže nastat ve vnitřku tohoto intervalu. Přesněji, nechť $x, x' \in P$ tak, že $u(x) \geq c$, $u(x') \geq c$. Nechť dále $S = \{y : y = \lambda x + (1 - \lambda)x', 0 < \lambda < 1\}$ je odpovídající interval s krajními body $x, x' \in P$. Nechť dále $x^* = \lambda^* x + (1 - \lambda^*)x', 0 < \lambda^* < 1$ je bod minima pro funkci $u$ na $S$. Pak $x^* = x' - \lambda^*(x' - x)$. Navíc $\mathrm{D}u(x^*)(v) = 0$ pro $v = x' - x$. Protože $x^*$ je bod minima, nutně $\mathrm{D}^2 u(x^*)(v, v) \geq 0$. To je však spor 2.4, že $\mathrm{D}^2 u(x^*) < 0$ na $\mathrm{Ker}\,(\mathrm{D}u(x^*))$. Je proto $u$ větší než $c$ na $S$.

Závěrečná podmínka na funkci $u$ je hraniční podmínka a jejím důsledkem je zbavení se případných problémů spojených s hranicí podprostoru $R^l_+$:

$$\text{Indiferentní křivka } u^{-1}(c) \text{ je uzavřená v } R^l \text{ pro všechna } c. \tag{2.5}$$

To lze interpretovat jakožto podmínku, že účastník si přeje vlastnit od každé komodity alespoň něco. Je například použita v práci [7] (1959).

Odvoďme si nyní funkci *poptávky* od *funkce užitečnosti* účastníka. Předpokládejme proto, že máme dán *cenový systém* $p \in \mathrm{int}R^l_+ = P$ a vektor *bohatství* $w \in R_+$. Tato definice $R_+$ je vhodná ačkoliv ne zcela důsledná. Uvažujme dále *rozpočtovou množinu* $B_{p,w} = \{x \in P : p \cdot x = w\}$. Můžeme pak za $B_{p,w}$ považovat za množinu komodit, které získáme za ceny $p$ pro bohatství $w$. Poptávka $f(p,w)$ je komoditní svazek maximalizující užitečnost na množině $B_{p,w}$. Poznamenejme, že $B_{p,w}$ je ohraničená a neprázdná a tedy funkce $u$ omezená na $B_{p,w}$ má kompaktní indiferentní křivky. Zejména tedy má funkce $u$ na $B_{p,w}$ maximum, které je jediné dle předpokladu konvexity 2.3 a dle 2.3.

Je tedy $x = f(p,w)$ *poptávka* našeho účastníka při cenách $p$ a bohatství $w$. Přitom je vidět, že poptávka je spojité zobrazení $f : \mathrm{int}R^l_+ \to R^+ \to P$. Tedy $x = f(p,w)$ je maximum funkce $u$ na $B_{p,w}$, derivace $\mathrm{D}u(x)$ omezená na $B_{p,w}$ je nulová neboli platí $g(x) = \frac{p}{||p||}$. Z definice $p \cdot f(p,w) = w$ a $f(\lambda p, \lambda w) = f(p,w)$ pro všechna $\lambda > 0$. Celkem pak:

**Tvrzení 2.4** *Individuální poptávka je spojité zobrazení $f : intR^l_+ \to R^+ \to P$ a splňuje*

1. $g(f(p,w)) = \frac{p}{||p||}$,
2. $p \cdot f(p,w) = w$,
3. $f(\lambda p, \lambda w) = f(p,w)$ *pro všechna* $\lambda > 0$.

Dále ukážeme následující známou skutečnost [8].

**Tvrzení 2.5** *Funkce poptávky je třídy $C^1$. Obecně, funkce poptávky je stejné třídy $C^r$ jakožto funkce $g$.*

Poznamenejme nejprve, že z tvrzení 2.4 máme zobrazení

$$\varphi : P \to (\mathrm{int}S^{l-1}_+) \times R_+, \quad \varphi(x) = (g(x), x \cdot g(x)),$$

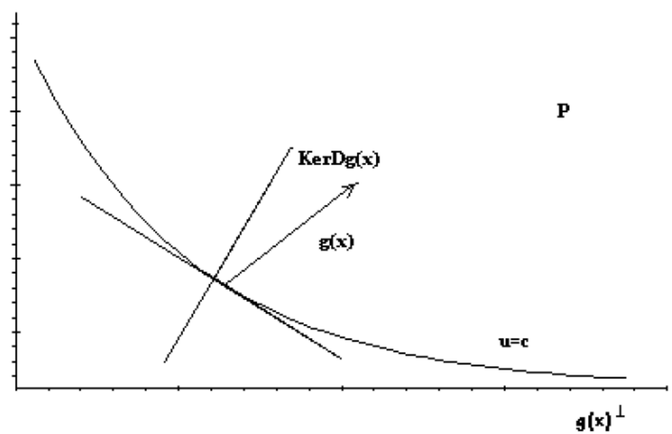
což je inverzní zobrazení k restrikci $f$ na množinu $(\mathrm{int}S_+^{l-1}) \times R_+$. Protože $\varphi$ je třídy $C^1$, bude $f$ třídy $C^1$ dle věty o implicitní funkci 1.4, pokud derivace $\mathrm{D}\varphi(x)$ je regulární pro všechna $x \in P$.

Abychom ukázali, že $\mathrm{D}\varphi(x)$ je regulární, stačí ověřit, že $\mathrm{D}\varphi(x)(\eta) = 0$ implikuje $\eta = 0$. Nechť tedy $\eta \in R^l$. Pak

$$\mathrm{D}\varphi(x)(\eta) = (\mathrm{D}g(x)(\eta), \eta \cdot g(x) + x \cdot \mathrm{D}g(x)(\eta))\,.$$

Je-li tedy $\mathrm{D}\varphi(x)(\eta) = 0$ , pak $\mathrm{D}g(x)(\eta) = 0$ tj. $\eta \in \mathrm{Ker}\mathrm{D}g(x)$. Ale i $\eta \cdot g(x) = 0$ tj. $\eta \in g(x)^\perp$. Zároveň víme z 2.3 že restrikce $\mathrm{D}g(x)$ z nadroviny $g(x)^\perp$ je regulární tj. $\mathrm{Ker}\mathrm{D}g(x) \cap g(x)^\perp = \{0\}$. Tedy $\eta = 0$.

Z výše uvedeného okamžitě plyne, že můžeme psát $R^l = \mathrm{Ker}\mathrm{D}g(x) \oplus g(x)^\perp$ tj. každý vektor z $R^l$ lze jednoznačně zapsat jakožto $\eta = \eta_1 + \eta_2$, $\eta_1 \cdot g(x) = 0$, $\mathrm{D}g(x)(\eta_2) = 0$.




Obrázek 2.4: Funkce užitku a poptávka

Můžeme pak orientovat přímku Ker$Dg(x)$ tak, že řekneme, že vektor $\eta \in \mathrm{Ker}Dg(x)$ je pozitivní, pokud $\eta \cdot g(x) > 0$. Zároveň máme: protože $Dg(x)$ je vždy regulární, je i křivka $g^{-1}(p)$ s $p = g(x)$, $p \in S_+^{l-1}$ pevné, regulární. Mluvíme pak o *křivce rozvoje příjmů*. V bodě $x \in P$ je tečná přímka k $g^{-1}(p)$ právě přímka Ker$Dg(x)$ (z definice). Tuto křivku lze pak interpretovat jakožto křivku poptávky rostoucí s bohatstvím při pevných cenách. Můžeme pak uvažovat bohatství jakožto funkci $w : P \to R$ definovanou jako $w(x) = x \cdot g(x)$. Pak $w$ je *ostře* rostoucí podél každé křivky rozvoje příjmů. Skutečně, křivka $g^{-1}(p)$ je diferencovatelně parametrizovatelná podle $w$.

Předpokládejme nyní, že bohatství účastníka pochází z obdaření $e$ z $P$ a je funkcí $w = p \cdot e$ ceny $p$. Poslední vlastnost poptávky je dána tvrzením:

**Tvrzení 2.6** *Buď $p_i$ posloupnost cenových vektorů ležící v* $\mathrm{int}R_+^l$ *konvergující k $p^* \in \delta R_+^l$ pro $i \to \infty$. Pak $||f(p_i, p_i \cdot e)|| \to \infty$ pro $i \to \infty$.*

*Důkaz.* Nechť neplatí, že $||f(p_i, p_i \cdot e)|| \to \infty$ pro $i \to \infty$. Pak pro nějaké $x^* \in R_+^l$ existuje vhodná podposloupnost $i_j$, $j = 1, 2, \ldots, \infty$ tak, že $f(p_{i_j}, p_{i_j} \cdot e) \to x^*$. Totiž pak všechny prvky $f(p_{i_j}, p_{i_j} \cdot e)$ leží v nějaké kompaktní kouli tj. z této posloupnosti lze vybrat konvergentní podposloupnost. Můžeme tedy v dalším bez újmy na obecnosti předpokládat, že posloupnost $f(p_i, p_i \cdot e) \to x^*$. Pro každé $i$ položme $w_i = p_i \cdot e$. Pak $e \in B_{p_i, w}$; tj. $u(f(p_i, p_i \cdot e)) \geq u(e)$. Speciálně $f(p_i, p_i \cdot e) \in u^{-1}([u(e), \infty))$. Z uzavřenosti množiny $u^{-1}([u(e), \infty))$ pak nutně $x^* \in u^{-1}([u(e), \infty))$. Dle 2.5 máme, že $x^* \in P$. Proto je $g(x^*)$ definováno a rovno $p^*$. Ale protože $p^* \in \delta R_+^l$ dostáváme spor s naším předpokladem monotonie 2.2.

*Ekonomika úplné směny* sestává z: $m$ účastníků se stejným prostorem komodit $P$. Účastník $i$ pro $i = 1, \ldots, m$ má preference reprezentovány funkcí užitečnosti $u_i : P \to R$ splňující podmínky 2.1, 2.2, 2.3 a 2.5. Zároveň předpokládejme, že každý účastník $i$ má k dispozici obdaření $e_i \in P$. Tedy pro cenový systém $p_i \in R_+^l - \{0\}$ je bohatství účastníka $i$ rovno $p \cdot e_i$.

Můžeme pak interpretovat tento model jakožto ekonomii směny, ve které se každý účastník pokouší směnit své obdařené komodity za svazek komodit, který by zvýšil jeho uspokojení při omezení daným rozpočtem. Pojem ekonomiky lze představit následovně:

*Stav ekonomiky* se skládá z *alokace* $x \in P^m$, $x = (x_1, \ldots, x_m)$ a *cenového systému* $p_i \in S_+^{l-1}$. Alokace se nazývá *přípustná*, pokud $\sum x_i = \sum e_i$. Tedy celkové zásoby ekonomiky ukládají omezení na alokace; neexistuje produkce. Stav $(x, p) \in P^m \times S_+^{l-1}$ se nazývá *konkurenční* (*Walrasovův*) *rovnovážný stav*, pokud splňuje podmínky (A) a (B):

(A) $\sum x_i = \sum e_i$.

což není nic jiného, než podmínka přípustnosti.

(B) Pro všechna $i$, $x_i$ maximalizuje $u_i$ na množině zásob $\{y \in P : p \cdot y = p \cdot e_i\}$ tj. $x_i = f(p, p \cdot e_i)$.

Poznamenejme, že podmínka (B) se nezmění (díky monotonii funkce $u_i$), jestliže množinu zásob nahradíme množinou $\{y \in P : p \cdot y \leq p \cdot e_i\}$. Dále připomeňme, že podmínku (B) lze nahradit podmínkami (B1) a (B2):

(B1) $p \cdot x_i = p \cdot e_i$ pro všechna $i$.

(B2) Pro všechna $i$, $g_i(x_i) = p_i$.

**Věta 2.7** *Buď dána ekonomika úplné směny tj. $m$ obchodníků s obdařeními $e_i$, $1 \leq i \leq m$ a preferencemi reprezentovanými funkcemi užitečnosti $u_i : P \to R$ splňujícími podmínky 2.1, 2.2, 2.3 a 2.5. Pak existuje rovnovážný stav ekonomiky tj. můžeme najít $x_i \in P$, $1 \leq i \leq m$ a cenový vektor $p \in S_+^{l-1}$ splňující* (A) *a* (B).

Převeďme podmínky (A) a (B) do problému poptávky a nabídky. Buď tedy $S : R_+^l - \{0\} \to R_+^l$ konstantní zobrazení, $S(p) = \sum e_i$. Podobně klademe $D : \mathrm{int} R_+^l - \{0\} \to R_+^l$ $D(p) = \sum f_i(p, p \cdot e_i)$, kde $f_i(p, p \cdot e_i)$ je poptávka určená funkcí $u_i$. Definujme nadbytek poptávky $Z : \mathrm{int} R_+^l - \{0\} \to R^l$ předpisem $Z(p) = D(p) - S(p)$. Poznamenejme, že rovnovážné podmínky (A) a (B) jsou splněny pro vektor $(x, p)$ právě tehdy, když $Z(p) = 0$ a $x_i = f_i(p, p \cdot e_i)$. Budeme aplikovat větu 1.10. Ověřme, že jsou splněny podmínky 1.8, 1.9, 1.10 a 1.11. Evidentně, $Z$ je spojitá funkce, $Z$ je homogenní, protože jak $S$ tak $D$ jsou homogenní funkce, $Z$ splňuje slabý Walrasův zákon. Totiž zejména pro $p \in \mathrm{int} R_+^l$ máme

$$p \cdot Z(p) = p \cdot D(p) - p \cdot S(p) = \sum p \cdot f_i(p, p \cdot e_i) - \sum p \cdot e_i = \sum (p \cdot x_i - p \cdot e_i) = 0.$$

Ověřme podmínku 1.11. Máme ukázat, že $p_k \to \overline{p} \notin \mathrm{int} R^l_+$ implikuje $\sum_{j=1}^l Z^j(p_k) \to \infty$. Ale to je právě tehdy, když $\sum_j \sum_i f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j \to \infty$. Z tvrzení 2.6 máme, že pro každé $i$ platí $||f_i(p_k, p_k \cdot e_i)|| \to \infty$ pro $k \to \infty$ tj. $\sum_{j=1}^l \left(f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j\right)^2 \to \infty$. Z nezápornosti $f_i$ pak nutně i $\sum_{j=1}^l f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j \to \infty$. Celkem pak $\sum_j \sum_i f_i(p_k, p_k \cdot e_i)^j \to \infty$. Tedy existuje cenový vektor $p^* \in \mathrm{int} R^l_+$ tak, že $Z(p^*) \leq 0$. Z věty 1.8 pak nutně $Z(p^*) = 0$.

Věnujme se nyní ekonomice úplné směny takové, že budeme předpokládat pouze spojité preference. Uvažme nyní preference na celém prostoru komodit $R^l_+$ reprezentované spojitými funkcemi $u : R^l_+ \to R$. Nahraďme podmínky 1.8, 1.9, 1.10 a 1.11 následujícím podmínkami:

$$\text{Funkce } u : R^l_+ \to R \text{ je spojitá.} \tag{2.6}$$

$$u(\lambda x + (1-\lambda)x') > c, \text{ pokud } u(x), u(x') \geq c \text{ a } 0 < \lambda < 1. \tag{2.7}$$

Předpokládejme dále, že každý obchodník má k dispozici, kromě preferenční funkce $u_i$, obdaření $e_i \in P$. Zejména tedy má k dispozici kladné množství každé komodity.

**Věta 2.8** *Jsou-li dány preferenční funkce užitku $u_i : R^l_+ \to R$, $1 \leq i \leq m$ splňující 2.6, 2.7 a obdaření $e_i \in P$, $1 \leq i \leq m$, existuje pak rovnovážný stav* volného použití $(x^*, p^*)$. *Tedy*

1. $\sum_i x^*_i \leq \sum_i e_i$, *a*
2. *Pro všechna $i$, $x^*_i$ maximalizuje $u_i$ na množině zásob $\{x_i \in R^l_+ : p^* \cdot x_i \leq p^* \cdot e_i\}$.*

**Důkaz.** Než budeme konstruovat funkci poptávky, zbavíme se části komoditního prostoru blízké nekonečnu. Přesněji, vyberme reálné číslo $c > ||\sum_i e_i||$ a položme $X_c = D_c \cap R^l_+$. Definujme dále přidruženou funkci *falešné poptávky* $\hat{f}_i : (R^l_+ - \{0\} \times R^l_+ \to X_c)$ následovně:

$$\hat{f}_i(p, w) := x_0,\ u(x_0) = \max\{u_i(x) : x \in \hat{B}_{p,w}\},$$

kde $\hat{B}_{p,w} = \{x \in X_c : p \cdot x \leq w\}$. Protože je množina $\hat{B}_{p,w}$ kompaktní, konvexní a neprázdná, okamžitě plyne z *ostré* konvexity $u_i$, že je funkce $\hat{f}_i(p,w)$ dobře definovaná.

**Věta 2.9** *Funkce falešné poptávky $\hat{f}_i : (R^l_+ - \{0\} \times R^l_+ \to X_c)$ je spojitá, je homogenní tj. $\hat{f}_i(\lambda p, \lambda w) = \hat{f}_i(p,w)$ pro všechna $\lambda > 0$ a $p \cdot \hat{f}_i(p,w) \leq w$. Zároveň, pokud $||\hat{f}_i(p,w)|| < c$, pak maximum $f_i(p,w)$ funkce $u_i$ existuje na množině $B_{p,w} = \{x \in R^l_+ : p \cdot x \leq w\}$ ( pravdivá poptávka) a navíc platí $f_i(p,w) = \hat{f}_i(p,w)$.*

**Důkaz.** Je evidentní, že funkce falešné poptávky $\hat{f}_i$ je spojitá, je homogenní a $p \cdot \hat{f}_i(p,w) \leq w$.

Ukážeme zbývající část věty. Nechť $\hat{x}_i = \hat{f}_i(p,w)$ tak, že $||\hat{f}_i(p,w)|| < c$. Uvažme $x_i \in B_{p,w}$ tak, že $u_i(x_i) \geq u_i(\hat{x}_i)$. Nechť $S = \{y : y = \lambda x_i + (1-\lambda)\hat{x}_i, 0 < \lambda < 1\}$ je odpovídající interval s krajními body $x_i, \hat{x}_i$. Pro všechna $x'_i \neq \hat{x}_i$ na množině $S \cap X_c$ máme $u_i(x'_i) > u_i(\hat{x}_i)$ z *ostré* konvexity, což je spor s výběrem $\hat{x}_i$ jakožto bodu maxima funkce falešné poptávky. ▌

Nyní definujme funkce $\hat{D}(p) = \sum_i \hat{f}_i(p, p \cdot e_i)$, $S(p) = \sum_i e_i$ a $\hat{Z} : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ jakožto $\hat{Z}(p) := \hat{D}(p) - S(p)$. Pak evidentně $\hat{Z}$ splňuje slabý Walrasův zákon a tedy dle věty 1.9 existuje cenový vektor $p$ tak, že $\hat{Z}(p) = 0$. Položíme-li tedy $\hat{x}_i = \hat{f}_i(p,w)$, máme $\sum_i \hat{x}_i = \sum_i e_i$ a $||\hat{f}_i(p,w)|| < c$. Tedy dle 2.9 je nutně $\hat{x}_i = \hat{f}_i(p,w) = f_i(p,w) = x_i$. Zejména je tedy vektor $(x_1, \ldots, x_m, p)$ rovnovážným stavem *volného použití* ekonomiky úplné směny. ▌

Předpokládejme nyní, že funkce užitku $u_i : R^l_+ \to R$ splňuje následující

*Podmínka nenasycenosti*: Funkce $u_i : R^l_+ \to R$ nemá maximum.

Pak můžeme bez újmy na obecnosti tvrdit, že vektor komodit $f_i(p,w) = x_i$ splňuje dokonce rovnost $p \cdot f_i(p,w) = w$. Jinak bychom totiž mohli vybrat komoditní vektor $x^*_i \in R^l_+$ mimo $B_{p,w}$ tak, že $u_i(x^*_i) > u_i(\hat{x}_i)$, což je opět spor podmínky *ostré* konvexity a výběrem $x_i$ jakožto bodu maxima na $B_{p,w}$. Celkem tedy dostaneme, že pro obvyklou funkci nadbytku poptávky $Z(p)$ platí Walrasův zákon v rovnovážném stavu.

# 3 Paretova optimalita

Budeme nyní pracovat na nějaké otevřené množině $W \subseteq R^n$ a funkcemi třídy $C^2$ $u_i : W \to R$, $1 \leq i \leq m$. Můžeme pak $W$ považovat za prostor stavů nějakého sdružení, přičemž členové tohoto sdružení mají preference reprezentované funkcemi užitku $u_i$. Bod $x \in W$ se nazývá *Paretovým optimem*, pokud neexistuje žádný prvek $y \in W$ tak, že $u_i(y) \geq u_i(x)$ pro všechna $i$ a pro nějaké $i_0$ $u_{i_0}(y) > u_{i_0}(x)$. O takovém $y$ říkáme, že *dominuje* stav $x$. Je-li $m = 1$, je Paretovo optimum právě obyčejné maximum. Bod $x \in W$ je *lokální Paretovo optimum*, jestliže existuje okolí $N$ bodu $x$ a $x$ je Paretovo optimum pro funkce užitku $u_i : W \to R$, $1 \leq i \leq m$ omezené na okolí $N$. Bod $x \in W$ se nazývá *silné Paretovo optimum*, jestliže $y \in W$ splňuje $u_i(y) \geq u_i(x)$ pro všechna $i$, pak nutně $x = y$. Podobně, bod $x \in W$ se nazývá *lokální silné Paretovo optimum*, jestliže existuje okolí $N$ bodu $x$ a $x$ je silné Paretovo optimum pro funkce užitku $u_i : W \to R$, $1 \leq i \leq m$ omezené na okolí $N$. Poznamenejme, že tyto definice lze zavést obecně, např. pro libovolnou podmnožinu $W \subseteq R^n$.

**Věta 3.1** *Buď $u_i : W \to R$, $1 \leq i \leq m$, funkce třídy $C^2$, kde $W$ je otevřená podmnožina $R^n$. Je-li $x \in W$ lokální Paretovo optimum, existují nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

$$\sum_i \lambda_i Du_i(x) = 0. \tag{3.1}$$

*Pokud navíc platí, že*

$$\sum_i \lambda_i D^2 u_i(x) \text{ je negativně definitní na } \langle \lambda_1 Du_1(x), \ldots, \lambda_m Du_m(x) \rangle^{\perp}, \tag{3.2}$$

*je $x$ bod lokálního silného Paretova optima.*

Poznamenejme, že položíme-li $m = 1$, $n = 1$, je věta 3.1 standardní věta matematické analýzy funkcí jedné proměnné pro maximum. Je-li $m = 1$ a $n$ libovolné, jedná se o případ maxima funkce více proměnných.

**Věta 3.2 Stiemkeho věta** *Proto, aby systém lineárních rovnic* $Ax = 0$ *měl kladné řešení* $x > 0, x \in R^m$ *je nutné a dostatečné, aby byl průnik množin* $\{A^T p : p \in R^n\}$ *a* $R^m_+ - \{0\}$ *prázdný.*

**Věta 3.3 Tuckerova věta** *Systém lineárních rovnic* $Ax = 0, x \geq 0$ *a systém lineárních nerovnic* $A^T p \geq 0$ *mají vždy dvojici řešení* $(x, p)$ *takovou, že* $A^T p + x > 0$.

**Důkaz věty 3.1.** Nechť $Pos = \{v \in R^m : v = (v_1, \ldots, v_m), v_i \geq 0\}$, $\overline{Pos}$ příslušný uzávěr. Přitom $u = (u_1, \ldots, u_m) : W \to R^m$. Buď $x$ lokální Paretovo optimum a předpokládejme, že $\mathrm{Im}\mathrm{D}u(x) \cap Pos \neq \emptyset$. Pak existuje $v \in R^n$ tak, že $\mathrm{D}u(x)(v) \in Pos$. Dále buď $\alpha(t)$ křivka začínající v $x$, obsažená ve $W$ taková, že $\alpha'(0) = v$. Pak, z Taylorova rozvoje funkcí $u_i$, dostáváme, že existuje $t_0$ tak, že pro všechna $i$ a $t \leq t_0$ je $u_i(\alpha(t)) = u_i(\alpha(0)) + t\mathrm{D}u(x)(v)_i + R_1(t)_i$, kde $\frac{R_1(t)}{t} \to 0$ pro $t \to 0$, $\mathrm{D}u(x)(v)_i > R_1(t)_i$ tj. $u_i(\alpha(t)) > u_i(\alpha(0)) = u_i(x)$ tj. $x$ není Paretovo lokální optimum. Nutně tedy $\mathrm{Im}\mathrm{D}u(x) \cap Pos = \emptyset$.

Předpokládejme nyní, že rovnice $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ má pouze triviální nezáporné řešení. Pak dle 3.3 platí, že existuje vektor $v \in R^n$ tak, že $\mathrm{D}u(x)(v) \in Pos$, což není možné. Tedy rovnice $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ má netriviální nezáporné řešení, čímž je dokázána první část věty.

Ukažme výše uvedené přímo pomocí aparátu lineárního programování:
Primární úloha

$$
\begin{array}{l}
\max \sum_{i=1}^m \lambda_i \\
\text{za podmínek} \\
(\mathrm{D}u_1(x), \ldots, \mathrm{D}u_m(x)) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0 \\
\lambda_i \geq 0
\end{array}
\qquad \text{(PU)}
$$

a duální úloha

$$\begin{array}{ll} \min \sum_{j=1}^n 0 \cdot v_j & \\ \text{za podmínky} & \qquad\qquad (\mathrm{DU}) \\ (v_1, \ldots, v_n) \cdot (\mathrm{D}u_1(x), \ldots, \mathrm{D}u_m(x)) \geq \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. & \end{array}$$

Protože však primární úloha je neomezená právě tehdy, když existuje netriviální nezáporný vektor $\lambda$ splňující $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ a duální úloha nemá přípustné řešení právě tehdy, když $\mathrm{ImD}u(x) \cap Pos = \emptyset$, máme z věty o dualitě první část naší věty.

Předpokládejme nyní, že druhá část naší věty platí pro případ $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq m$ a uvažme obecný případ. Přečíslujme indexy tak, že $\lambda_i > 0$, $1 \leq i \leq k$, $\lambda_i = 0$, $k+1 \leq i \leq m$. Pak podmínky 3.1 a 3.2 jsou tytéž pro optimalizaci $u_1, \ldots, u_m$ v bodě $x$ a optimalizaci $u_1, \ldots, u_k$ v bodě $x$. Protože ale dle předpokladu je věta platná v tomto případě, je $x$ lokální silné Paretovo optimum v bodě $x$ pro funkce $u_1, \ldots, u_k$. Je tedy $x$ lokální silné Paretovo optimum v bodě $x$ pro funkce $u_1, \ldots, u_m$.

Stačí se tedy omezit na důkaz případu, kdy jsou všechna $\lambda_i$ kladná. Předpokládejme pro jednoduchost, že bod $x$ je počátek $R^n$ a že $u(x) = 0 \in R^m$. Můžeme tedy v dalším volně používat označení $x$ pro libovolný bod z $W$. Zejména tedy podmínka, že $0 \in W$ je bod lokálního silného Paretova optima, je ekvivalentní podmínce, že existuje okolí $N$ počátku 0 ve $W$ tak, že $(u(N) - \{0\}) \cap \overline{Pos} = \emptyset$. Ukážeme tedy, že existuje takovéto okolí $N$.

Označme $K = \mathrm{KerD}u(0)$ jádro lineárního zobrazení $\mathrm{D}u(0)$ a $K^\perp$ jeho ortogonální doplněk.

**Lemma 3.4** *Existují reálná čísla $r, \delta > 0$ tak, že pokud $||x|| < r$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$ a $||x_2|| \leq \delta ||x_1||$, pak platí pro nenulové $x$ nerovnost $\lambda \cdot u(x) < 0$.*

**Důkaz.**Nechť $H = \sum_i \lambda_i D^2 u_i(0)$. Protože $H$ je negativně definitní na $K$, je $H(x,x) \leq -\sigma||x||^2$ pro nějaké vhodné kladné číslo $\sigma$ a pro všechny vektory $x \in K$ (totiž stačí se omezit na jednotkovou kouli v $K$, tam má funkce $H$ maximum, které je nutně záporné a rovno $-\sigma$).

Nechť nyní $x \in R^n$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$. Pak můžeme psát $H(x,x) = H(x_1,x_1) + 2H(x_1,x_2) + H(x_2,x_2)$. Ale víme, že $|H(x_1,x_2)| \leq C||x_1|| \cdot ||x_2||$ a $|H(x_2,x_2)| \leq C_1||x_2|| \cdot ||x_2||$ pro vhodné nezáporné konstanty $C$ a $C_1$.

Můžeme tedy vybrat vhodná dostatečně malá kladná čísla $\eta, \delta$ tak, že pokud $||x_2|| \leq \delta||x_1||$, pak $H(x,x) \leq -\eta||x||^2$. Aplikujeme-li Taylorovu větu o rozvoji pro $||x|| < r$, $u(x) = \mathrm{D}u(0)(x) + \mathrm{D}^2u(0)(x,x) + R_3(x)$, kde $|\lambda \cdot R_3(x)| < \frac{\eta}{2}||x||^2$. Pak $\lambda \cdot u(x) = \lambda \cdot \mathrm{D}u(0)(x) + \lambda \cdot \mathrm{D}^2u(0)(x,x) + \lambda \cdot R_3(x) \leq -\eta||x||^2 + \lambda \cdot R_3(x) < 0$.
∎

Označme nyní $J = \mathrm{Im}\mathrm{D}u(0)$ a pišme pro $u \in R^m$ jako $u = (u_a, u_b)$, $u_a \in J$, $u_b \in J^\perp$.

**Lemma 3.5** *Jsou-li dána reálná čísla $\alpha > 0$ a $\delta > 0$, existuje reálné číslo $s > 0$ tak, že pokud $||x|| < r$, $x = (x_1, x_2)$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$ a $||x_2|| \geq \delta||x_1||$, pak nerovnost $||u_b(x)|| \leq \alpha||u_a(x)||$.*

**Důkaz.** Restrikce $\mathrm{D}u(0)_{K^\perp} : K^\perp \to \mathrm{Im}\mathrm{D}u(0)$ zobrazení $\mathrm{D}u(0) : R^n \to \mathrm{Im}\mathrm{D}u(0)$ je lineární izomorfismus. Totiž, je-li $\mathrm{D}u(0)(x) = \mathrm{D}u(0)(y)$ je nutně $\mathrm{D}u(0)(x-y) = 0$ t.j. $x - y \in K \cap K^\perp = \{0\}$ tj. $x = y$. Nechť $z \in \mathrm{Im}\mathrm{D}u(0)$. Pak existuje $x \in R^n$ tak, že $\mathrm{D}u(0)(x) = z$. Ale $x = x_1 + x_2$, $x_1 \in K$, $x_2 \in K^\perp$. Tedy $z = \mathrm{D}u(0)(x) = \mathrm{D}u(0)(x_1) + \mathrm{D}u(0)(x_2) = 0 + \mathrm{D}u(0)(x_2)$.

Zároveň poznamenejme, že pro každý lineární izomorfismus v euklidovském prostoru existují kladné konstanty $k_1, k_2 > 0$ tak, že

$$k_1||x|| \leq ||F(x)|| \leq k_2||x||$$

pro všechna $x$. Speciálně tedy existují kladné konstanty $c_1, c_2 > 0$ tak, že

$$\begin{aligned} ||\mathrm{D}u(0)(x)|| = ||\mathrm{D}u(0)(x_2)|| &\geq c_1||x_2|| && \text{pro všechna } x = x_1 + x_2 \\ &\geq c||x|| && \text{pokud } ||x_2|| \geq \delta||x_1||. \end{aligned}$$

Rozviňme $u(x)$ do Taylorovy řady. Pak

$$u_a(x) + u_b(x) = u(x) = \mathrm{D}u(0)(x) + R(x).$$

Přitom pro $\beta > 0$ můžeme předpokládat, že $||R(x)|| \leq \beta||x||$ pro $||x|| < s$, $s > 0$ vhodné reálné číslo. Přitom $R(x) = R_a(x) + R_b(x)$, $R_a(x) \in J$, $R_b(x) \in J^\perp$. Tedy

$$||u_a(x)|| = ||\mathrm{D}u(0)(x) + R_a(x)|| \geq ||\mathrm{D}u(0)(x)|| - || - R_a(x)|| \geq (c - \beta)||x||$$

a

$$||u_b(x)|| = ||R_b(x)|| \leq \beta||x||.$$

Zvolme $\beta$ tak, že $\frac{\beta}{c-\beta} < \alpha$. Pak $||u_b(x)|| \leq \alpha||u_a(x)||$. ▮

Dokončeme nyní důkaz věty 3.1. Vyberme $\alpha$ z lemma 3.5 tak, že pokud $||u_b(x)|| \leq \alpha||u_a(x)||$, pak $u(x) \notin \overline{Pos} - \{0\}$.

Ukážeme nyní, že rovnice $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ má kladné řešení právě tehdy, když $\mathrm{Im}\mathrm{D}u(0) \cap \overline{Pos} = \emptyset$.

Ukažme výše uvedené pomocí aparátu lineárního programování:

Primární úloha

$$\begin{aligned}
&\max \lambda_j \\
&\text{za podmínek} \\
&(\mathrm{D}u_1(x), \ldots, \mathrm{D}u_m(x)) \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix} = 0 \\
&\lambda_i \geq 0
\end{aligned} \tag{PU$_j$}$$

a duální úloha

$$\begin{array}{ll} \max \sum_{j=1}^{n} 0 \cdot v_j & \\ \text{za podmínky} & \qquad\qquad (\mathrm{DU}_j) \\ (v_1, \ldots, v_n) \cdot (\mathrm{D}u_1(x), \ldots, \mathrm{D}u_m(x)) \geq (0 \ldots \overbrace{\ 1\ }^{j}\ 0). & \end{array}$$

Protože však všechny primární úlohy $(\mathrm{PU}_j)$ jsou neomezené právě tehdy, když existuje netriviální kladný vektor $\lambda$ splňující $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ a všechny duální úlohy $(\mathrm{DU}_j)$ nemají přípustná řešení právě tehdy, když $\mathrm{ImD}u(0) \cap \overline{Pos} = \{0\}$, máme z věty o dualitě naše tvrzení o průniku $\mathrm{ImD}u(0) \cap \overline{Pos}$.

Vyberme tedy kruh se středem 0 a poloměrem $r_0 < \min(r, s)$, $r$ z lemmatu 3.4 a $s$ z lemmatu 3.5, $\delta$ z lemmatu 3.5 dle lemmatu 3.4. Nutně pak $u(x) \notin \overline{Pos} - \{0\}$ pokud $||x|| < r_0$ tj. 0 je bod lokálního silného Paretova optima. ▌

Přejděme nyní k rozšíření věty 3.1 o podmínky omezení. Jsou tedy funkce třídy $C^2$ $u_1, \ldots, u_m$ definovány na nějaké otevřené množině $W \subseteq R^l$ spolu s omezeními danými podmínkami tvaru $g_\beta(x) \geq 0$, $\beta = 1, \ldots, k$, kde $g_\beta : W \to R$ je funkce třídy $C^2$. Můžeme vyjádřit tento problém jakožto hledání optima restrikcí funkcí $u_1, \ldots, u_m$ na množině $W_0 \subseteq R^l$, $W_0 = \{x \in W : g_\beta(x) \geq 0, \beta = 1, \ldots, k\}$.

**Věta 3.6** *Buď $u_i : W_0 \to R$, $1 \leq i \leq m$, funkce jako výše uvedeno, $x \in W_0$ lokální Paretovo optimum. Pak existují nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

$$\sum_i \lambda_i Du_i(x) + \sum_\beta \mu_\beta Dg_\beta(x) = 0, \tag{3.3}$$

*přičemž $\mu_\beta = 0$ pro $g_\beta(x) \neq 0$.*

*Pokud navíc platí, že $\sum_i \lambda_i D^2 u_i(x) + \sum_\beta \mu_\beta D^2 g_\beta(x)$ je negativně definitní na*

$$\langle \lambda_1 Du_1(x), \ldots, \lambda_m Du_m(x), \mu_1 Dg_1(x), \ldots, \mu_k Dg_k(x) \rangle^\perp, \tag{3.4}$$

*je $x$ bod lokálního silného Paretova optima.*

**Důkaz.** Abychom dokázali první část věty, předpokládejme (bez újmy na obecnosti), že $g_\beta(x) = 0$ právě pro všechna $\beta = 1, \ldots, k$ a definujme zobrazení $\varphi : W \to R^{m+k}$ předpisem $\varphi = (u_1, \ldots, u_m, g_1, \ldots, g_k)$. Tvrdíme pak, že $\mathrm{ImD}\varphi(x) \cap Pos = \emptyset$. Jinak by, analogicky jako v 3.1, existoval vektor $v \in R^l$ tak, že $\mathrm{D}\varphi(x)(v) \in Pos$ a nechť $\alpha(t)$ buď křivka ve $W$ splňující $\alpha(0) = x$, $\alpha'(0) = v$. Pro dostatečně malá $\epsilon$ je $\alpha(\epsilon) \in W_0$ a dominuje $\alpha(0) = x$. Tedy $x$ není lokální Paretovo optimum. Nutně tedy $\mathrm{ImD}\varphi(x) \cap Pos = \emptyset$. Existuje pak vektor $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \mu_1, \ldots, \mu_k) \in \overline{Pos} - \{0\}$ normální k podprostoru $\mathrm{ImD}\varphi(x)$, stejně jako ve větě 3.1. Tím jsme dokázali první část věty 3.6.

K důkazu druhé části nejprve poznamenejme, že z definice lokálního silného Paretova optima plyne pro bod $x \in W_0$, že pokud bod $x$ je bodem lokálního silného Paretova optima pro funkci $\varphi$ na $W$, pak je i bodem lokálního silného Paretova optima pro funkce $u_1$, …, $u_m$ na $W_0$. Ale z 3.1 víme, že $x$ je bodem lokálního silného Paretova optima pro funkci $\varphi$ na $W$. ▌

Zakončeme tento odstavec s několika poznámkami:

1. Věta 3.1 je speciální případ věty 3.6 pro $k = 0$.

2. Předpokládejme, že $g_\alpha$ splňují *podmínku nedegenerovanosti* v bodě $x \in W_0$. Pak je množina vektorů $\mathrm{D}g_\beta$ pro $\beta$ takové, že $g_\beta(x) = 0$, lineárně nezávislá tedy speciálně alespoň jedno $\lambda_i$ je kladné.

3. Pokud je ve větě 3.6 $m = 1$, není první část nic jiného než Kuhn-Tuckerova věta. Je-li navíc splněna podmínka nedegenerovanosti, lze volit $\lambda_1 = 1$.

# 4 Základní věta ekonomiky blahobytu

Vraťme se nyní k ekonomice úplné směny z odstavce 2. Přitom funkce užitečnosti $u_i : P \to R$ $i-$tého obchodníka, $i = 1, \ldots, m$ splňují podmínku 2.1 tj. že funkce $u_i : P \to R$ je třídy $C^2$, podmínku monotonie 2.2 tj., že $g_i(x) \in P \cap S^{l-1} = \mathrm{int}(S_+^{l-1})$ pro všechna $x \in P$, zde $g_i(x) = \frac{\mathrm{grad} u_i(x)}{||\mathrm{grad} u_(x)||}$, kde $\mathrm{grad} u_i = \left(\frac{\delta u_i}{\delta x^1}, \ldots, \frac{\delta u_i}{\delta x^l}\right)$, podmínku konvexnosti 2.3, že restrikce $\mathrm{D}g_i(x)$ z nadroviny $g_i(x)^\perp$ do sebe má záporné vlastní hodnoty a nakonec je hraniční podmínku 2.5, že Indiferentní křivka $u_i^{-1}(c)$ je uzavřená v $R^l$ pro všechna $c$.

Nebudeme však předpokládat, že bohatství účastníka pochází z obdaření $e_i$ z $P$ a je funkcí $w_i = p \cdot e_i$ ceny $p$. Budeme ale předpokládat, že úplné zdroje naší ekonomiky jsou dány pevným vektorem $r \in P$.

Pak množina $W$ dosažitelných alokací neboli stavů má tvar

$$W = \{x \in P^m : x = (x_1, \dots, x_m), x_i \in P, \sum_i x_i = r\}.$$

Funkce individuálního užitku $u_i : P \to R$ $i$-tého účastníka nám indukuje zobrazení $v_i : W \to R$ tak, že $v_i(x) = u_i(x_i)$. Je přirozené si klást otázku, jak vypadají Paretově optimální stavy pro funkce $v_i$, $i = 1, \dots, m$. Platí:

**Věta 4.1** *Následující tři podmínky na alokaci $x \in W$ vzhledem k indukovaným funkcím užitku $v_i : W \to R$ jsou ekvivalentní:*

1. *$x$ je lokální Paretovo optimum.*
2. *$x$ je lokální silné Paretovo optimum.*
3. *$g_i(x_i) = p \in S_+^{l-1}$ pro všechna $i$.*

*Přitom množinu všech takovýchto $x$ označíme $\theta$.*

**Důkaz.** Poznamenejme, že evidentně podmínka (2) implikuje podmínku (1). Ukažme, že (1) implikuje (3). Abychom to dokázali, stačí nám pouze předpokládat o funkcích $u_i : P \to R$, že jsou třídy $C^1$.

Předpokládejme tedy, že $x \in W$ je lokální Paretovo optimum. Z první části věty 3.1 máme, že existují nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že $\sum_i \lambda_i \mathrm{D}v_i(x) = 0$ tj. $\sum_i \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i) = 0$. Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že například $\lambda_1$ je kladné. Uvažme nyní vektor $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m) \in$

$(R^l)^m$ tak, že $\sum_i \overline{x}_i = 0$, tj. jedná se o tečný vektor k $W$. Je-li navíc speciálně $\overline{x} = (\overline{x}_1, 0, \ldots, 0, \overbrace{-\overline{x}_1}^{k}, 0, \ldots, 0)$, máme pak $\sum_i \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i)(\overline{x}_i) = \lambda_1 \mathrm{D}u_1(x_1)(\overline{x}_1) - \lambda_k \mathrm{D}u_k(x_k)(\overline{x}_1) = 0$ pro všechna $\overline{x}_1 \in R^l$. Nutně tedy, protože $\mathrm{D}u_j(x_j) \in P$ pro všechna $j$, $\lambda_1$ je kladné, je i $\lambda_k$ kladné a $\lambda_1 \mathrm{D}u_1(x_1) = \lambda_k \mathrm{D}u_k(x_k)$. Po podělení normou pak $g_1(x_1) = g_k(x_k)$. Je tedy podmínka (3) splněna.

Abychom dokázali ekvivalenci těchto tří podmínek, zbývá ukázat, že pokud $x$ splňuje podmínku (3), pak platí (2) tj. $x$ je lokální silné Paretovo optimum.

**Lemma 4.2** *Buď $u : P \to R$ funkce splňující 2.3. Pokud $y \in P$, $u(y) \geq u(x)$ a $x \neq y$, pak $Du(x)(y-x) > 0$. Pak i $y \cdot g(x) > x \cdot g(x)$.*

**Důkaz.** Pro $0 \leq t \leq 1$ dle 2.3 je nutně $u(x) \leq u(x+t(y-x))$. Nutně tedy je její derivace v bodě $x$ nezáporná tj. platí $(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)u(x+t(y-x))|_{t=0} \geq 0$ tj. $\mathrm{D}u(x)(y-x) \geq 0$. Předpokládejme, že $\mathrm{D}u(x)(y-x) = 0$. Rozvojem v bodě $x$ dostáváme $u(x+t(y-x)) = u(x) + 0 + \underbrace{\mathrm{D}^2u(x)(t(y-x), t(y-x))}_{<0} + R_3(t)$. Tedy pro dostatečně malá $t$ je $u(x) > u(x+t(y-x))$, což je spor s výše uvedeným.

Chceme nyní ukázat, že $x$ je bod lokálního silného Paretova optima. Nechť nyní $y$ je takový bod, že $v_i(x) \leq v_i(y)$ pro všechna $i$. Chceme ukázat, že $x = y$. Předpokládejme opak. Pak pro nějaké $i_0$ víme, že platí $y_{i_0} \cdot g_{i_0}(x_{i_0}) > x_{i_0} \cdot g_{i_0}(x_{i_0})$. Položme $p = g_{i_0}(x_{i_0})$. Pak $p = g_i(x_i)$ pro všechna $i$. Tedy $\sum_i y_i \cdot p > \sum_i x_i \cdot p$. Ale protože $y \in W$, nutně $\sum_i y_i = r = \sum_i x_i$ tedy i $\sum_i y_i \cdot p = r = \sum_i x_i \cdot p$. Nutně pak pro všechna $i$ máme $x_i = y_i$ tj. $x = y$ tj. $x$ je silné Paretovo optimum.

Zaveďme nyní pojem *rovnovážného stavu ekonomiky blahobytu*. Řekneme, že stav $(x,p) \in W \times S_+^{l-1}$ je rovnovážným stavem ekonomiky blahobytu, jestliže $i$-tá projekce $x_i$ je bodem maxima funkce $u_i$ na rozpočtové množině $B_{p,p\cdot x_i} = \{x \in P : p \cdot x = p \cdot x_i\}$. Množinu všech rovnovážných stavů ekonomiky blahobytu budeme označovat $\Lambda$. Z této definice plyne, že bod $(x,p)$, $x = (x_1, \ldots, x_m), x_i \in P, p \in S_+^{l-1}$ leží v $\Lambda$, pokud platí:

$(1_E)$ $\sum_i x_i = r$,
$(2_E)$ $g_i(x_i) = p$ pro všechna $i = 1, \ldots, m$.

Máme-li navíc k dispozici údaje o individuálních obdařeních $e_i \in P, i = 1, \ldots, m$ tak, že $\sum_i e_i = r$, dostáváme Walrasův rovnovážný stav

$(3_E)$ $p \cdot e_i = p \cdot x_i$, $i = 1, \ldots, m$.

**Věta 4.3** *Mezi množinami $\theta$ a $\Lambda$ existuje vzájemně jednoznačná korespondence $\beta : \Lambda \to \theta$ definovaná předpisem $\beta((x,p)) = x$ a $\alpha : \theta \to \Lambda$ definována následovně: $\alpha(x) = (x, g_1(x_1))$.*

**Důkaz.** Evidentně, $\beta$ je korektně definovaná surjekce. Totiž, vzorem prvku $x$ je prvek $(x, g_1(x_1))$. Ukažme, že je i injekce. Nechť $\beta(x,p) = \beta(x,q)$. Pak nutně $p = g_1(x_1) = q$. ▮

V dalším budeme o funkcích užitku $u_i$ předpokládat pouze, že jsou třídy $C^2$. Označme $\theta_s$ podmnožinu množiny $W$, která sestává z lokálních silných Paretových optim.

**Tvrzení 4.4** *Je-li bod $x \in W$ bod lokálního optima pro indukované funkce užitku na $W$, pak*

1. *existují nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

$$\sum_i \lambda_i D u_i(x) = 0,$$

   *což implikuje, že $g_i(x_i)$ jsou nezávislé na $i$.*

   *Pokud navíc platí, že*

2. $$\sum_i \lambda_i D^2 u_i(x)(\overline{x}_i) \text{ je záporná na množině takových } \overline{x}, \text{ že}$$

   *$\sum_i \overline{x}_i = 0$, $\overline{x}_i \cdot g_i(x_i) = 0$ pro všechna $i$ a pro jisté $i_0$ je $\overline{x}_{i_0} \neq 0$, je $x$ bod lokálního silného Paretova optima tj. $x \in \theta_s$.*

**Důkaz.** Stejně jako ve větě 3.1 víme, že $\mathrm{ImD}u(x) \cap Pos = \emptyset$, tj. existuje vektor $\lambda$ tak, že rovnice $\lambda \cdot \mathrm{D}u(x) = 0$ má netriviální nezáporné řešení $\lambda$, čímž je pomocí 4.1 dokázána první část věty. Položme $K = \{\overline{x} : \sum_j \overline{x}_j = 0, \overline{x}_i \cdot g_i(x_i) = 0$ pro všechna $i\}$. Pak $K$ je vektorový podprostor a forma $H = \sum_i \lambda_i \mathrm{D}^2 u_i(x)$ je negativně definitní na množině $K$. Platí pak zejména obdoba lemmat 3.4 a 3.5. Tedy pak nutně máme $x \in \theta_s$. ▮

Studujme nyní situaci z věty 4.1 pro prostory komodit s hranicí. Předpokládejme, že každá funkce užitku $u_i : R^l_+ \to R$ je restrikce funkce třídy $C^2$ na nějaké otevřené množině obsahující množinu $R^l_+$. Speciálně pak máme definovány derivace $\mathrm{D}u_i(x)$ a $\mathrm{D}^2 u_i(x)$ na hranici $\delta R^l_+$ a podmínky 2.2 a 2.3 mají smysl i pro hraniční body.

Buď $r \in \mathrm{int} R^l_+$ vektor celkových zásob. Položme dále $W_0 = \{x : x \in R^{lm}_+, \sum_j x_j = r\}$. Pak $W_0$ je prostor přípustných stavů naší ekonomiky úplné směny. Buď dále $W$ relativní okolí množiny $W_0$ vzhledem k množině $W_r = \{x : x \in R^{lm}, \sum_j x_j = r\}$ tak, že funkce $v_i : W \to R$ jsou zde definovány jakožto $v_i(x) = u_i(x_i)$, $i = 1, \dots, m$. Nechť jsou dále funkce omezení $g_i^k : W \to R$ určeny předpisem $g_i^k(x) = x_i^k$. Pak nalezení optima ve $W_0$ je ekvivalentní nalezení optima pro funkce $v_i : W \to R$ s omezeními $g_i^k(x) \geq 0$.

**Věta 4.5** *Nechť funkce $u_i : R^l_+ \to R$ splňují*

$$g_i(x_i) = \frac{{}_{\mathrm{grad}} u_i(x_i)}{||{}_{\mathrm{grad}} u_i(x_i)||} \in S^{l-1}_+, \tag{4.1}$$

*pro všechna $i$ a*

$$D^2 u_i(x) \text{ je negativně definitní na } g_i(x_i)^{\perp}. \tag{4.2}$$

*Je-li bod $x \in W_0$ bod lokálního optima pro indukované funkce užitku na $W_0$, pak*

1. *existují normovaný nezáporný vektor $p \in S^{l-1}_+$ a nezáporná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že*

$$p \geq \lambda_i D u_i(x_i) \text{ pro všechna } i,$$

*přičemž rovnost nastává v $k$-té souřadnici, jestliže $x_i^k \neq 0$.*

*Pokud navíc platí, že*

*2.*

$$p \cdot x_i \neq 0 \text{ pro všechna } i,$$

*je $x$ bod lokálního silného Paretova optima.*

**Důkaz.** Pro omezení $g_i^k(x) = x_i^k$ víme, že $\mathrm{D}g_i^j(x)(\overline{x}) = \overline{x}_i^j$ pro všechny vektory $\overline{x} \in (R^l)^m$ takové, že $\sum_i \overline{x}_i = 0$. Dle věty 3.6 víme, že existují nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$, $\mu_1, \ldots, \mu_k \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že

$$\sum_i \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i)(\overline{x}_i) + \sum_{i,j} \mu_i^j \overline{x}_i^j = 0,$$

přičemž $\mu_\beta = 0$ pro $x_i^j \neq 0$.

Proveďme nyní konkrétní volbu $\overline{x}_i^j = 1$, $\overline{x}_k^j = -1$ a nechť všechny ostatní souřadnice jsou nulové. pak nutně

$$\lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i)(\overline{x}_i)^j + \mu_i^j = \lambda_k \mathrm{D}u_k(x_k)(\overline{x}_k)^j + \mu_k^j,$$

přičemž $\mathrm{D}u_k(x_k)(\overline{x}_k)^j$ značí $j$-tou souřadnici vektoru $\mathrm{D}u_k(x_k)(\overline{x}_k)$. Celkem tedy je vektor $q = \lambda_k \mathrm{D}u_k(x_k) + \mu_k$ nezávislý na indexu $k$. Přitom $\mu_k = (\mu_k^1, \ldots, \mu_k^l) \geq 0$ a nutně $\mu_k \cdot x_k = 0$. Poznamenejme, že $q$ je nenulový vektor (jinak by nutně všechna $\lambda_i$ a $\mu_i^j$ byla nulová). Položme $p = \frac{p}{||p||}$. Položíme-li $\lambda_i' = \frac{\lambda_i}{||p||}$, $\mu_i'^j = \frac{\mu_i^j}{||p||}$, máme pak

$$p = \lambda_k' \mathrm{D}u_k(x_k) + \mu_k',$$

přičemž $\lambda_k' \geq 0$, $\mu_k' \geq 0$, $\mu_k' \cdot x_k = 0$. To ale není nic jiného, než první část naší věty.

Abychom dokázali zbývající část věty, uvažme prvek $y \in W_0$ tak, že $u_i(y_i) \geq u_i(x_i)$ pro všechna $i$. Dle lemmatu 4.2 platí $\mathrm{D}u_i(x_i)(y_i - x_i) \geq 0$, přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $y_i = x_i$. Platí ale zároveň, že

$$p \cdot x_i = \lambda_i' \mathrm{D}u_i(x_i) \cdot x_i + \mu_i' \cdot x_i = \lambda_i' \mathrm{D}u_i(x_i) \cdot x_i.$$

Nutně tedy je $\lambda_i' \neq 0$, protože $p \cdot x_i \neq 0$. Zopakujeme-li tuto úvahu ještě jednou, obdržíme nerovnost

$$p(y_i - x_i) \geq \mu_i \cdot y_i \text{ tj. } p \cdot y_i \geq p \cdot x_i,$$

přičemž rovnost nastává právě tehdy, když $y_i = x_i$. Z druhé strany nutně $\sum_i y_i = r = \sum_i x_i$ tj. $\sum_i p \cdot y_i = p \cdot r = \sum_i p \cdot x_i$ a pro všechna $i$ skutečně nastává rovnost. ▌

Zaveďme nyní pojem *rovnovážného stavu ekonomiky blahobytu* pro $W_0$. Řekneme, že stav $(x, p) \in W_0 \times S_+^{l-1}$ je rovnovážným stavem ekonomiky blahobytu, jestliže $i$-tá projekce $x_i$ je bodem maxima funkce $u_i$ na rozpočtové množině $B_{p,p\cdot x_i} = \{x \in P : p \cdot x \leq p \cdot x_i\}$. Množinu všech takovýchto rovnovážných stavů ekonomiky blahobytu budeme označovat $\Lambda_0$. Pokud bod $(x, p)$ leží v $\Lambda_0$, pak $\sum_i x_i = r$.

**Věta 4.6** *Pokud $(x, p) \in \Lambda_0$, existují nezáporná čísla $\lambda_i \geq 0$, $i = 1, \dots, m$ a nezáporné vektory $\mu_i \in R_+^l$, $i = 1, \dots, m$ tak, že $x_i \cdot \mu_i = 0$ a $p = \lambda_i D u_i(x_i) + \mu_i$. Obráceně, pokud $(x, p) \in W_0 \times S_+^{l-1}$ tak, že $p \cdot x_i \neq 0$ pro všechna i a navíc $\lambda_i \geq 0$, $\mu_i \in R_+^l$, $i = 1, \dots, m$ splňují výše uvedené, pak $(x, p) \in \Lambda_0$.*

**Důkaz.** Protože $x_i$ je maximum funkce $u_i$ na $B_{p,p\cdot x_i}$ pro všechna $i$, existují $\lambda_i, \sigma_i \geq 0$ a nezáporné vektory $\mu_i \in R_+^l$, $i = 1, \dots, m$ ne všechny nulové tak, že

$$\lambda_i \mathrm{D} u_i(x_i)(\overline{x}_i) + \sum \mu_i^j \mathrm{D} g_i^j(x_i)(\overline{x}_i) - \sigma_i p \cdot \overline{x}_i = 0$$

pro všechna $\overline{x}_i \in R^l$.

To je ekvivalentní s tím, že

$$\lambda_i \mathrm{D} u_i(x_i) + \mu_i = \sigma_i p, \quad \mu_i \cdot x_i = 0.$$

Pokud by $\sigma_i = 0$, nutně i $\lambda_i = 0$, $\mu_i = 0$. Můžeme tedy dělit obě strany rovnosti $\sigma_i$ a po přeznačení máme

$$\lambda_i \mathrm{D} u_i(x_i) + \mu_i = p, \quad \mu_i \cdot x_i = 0.$$

Tím jsme dokázali první část. Pro důkaz druhé části předpokládejme, že existuje $y_i \in B_{p,p\cdot x_i}$ tak, že $u_i(x_i) < u_i(y_i)$. Pak dle 4.2 platí $\mathrm{D} u_i(x_i)(y_i - x_i) > 0$ a pro $p \cdot y_i \geq y_i \cdot \lambda_i \mathrm{D} u_i(x_i) > p \cdot x_i$, $\lambda_i \neq 0$. Tedy $y_i \notin B_{p,p\cdot x_i}$, spor. Celkem $(x, p) \in \Lambda_0$. ▌

Ve zbývající části tohoto odstavce budeme předpokládat, že $\mathrm{D}u_i(x_i) \in \mathrm{int}S_+^{l-1}$ a $\mathrm{D}^2u_i(x_i) < 0$ na $\mathrm{Ker}\mathrm{D}u_i(x_i)$. Řekneme, že pro bod $x \in W_0$ existuje *izolovaná komunita* $\emptyset \subset S \subset \{1, \ldots, m\}$, jestliže pro každý prvek $i \in S$ a každý nenulový prvek $x_i^j \neq 0$ dostáváme, že $x_k^j = 0$ platí pro všechna $k \notin S$.

**Lemma 4.7** *Předpokládejme, že $x \in W_0$ je bez izolovaných komunit a že $i, q \in \{1, \ldots, m\}$ jsou dva účastníci naší ekonomiky. Pak existuje posloupnost $i_1, \ldots, i_n$ agentů tak, že $i_1 = i, i_n = q$ a posloupnost zboží $j_1, \ldots, j_n$ tak, že $x_{i_k}^{j_k} \neq 0$ a pro všechna $k$ nutně buď $j_{k+1} = j_k$ nebo $i_{k+1} = i_k$.*

**Důkaz.** Sporem. Bez újmy na obecnosti lze říci, že $i = i_1 = 1$ a uvažme všechny posloupnosti $(i_1, \ldots, i_n)$, $(j_1, \ldots, j_n)$ výše uvedeného tvaru tak, že $i_1 = 1$. Označme $S$ jakožto podmnožinu všech možných $i_n$ dosažitelných tímto způsobem. Je-li $S \neq \emptyset$ vlastní, pak má $x$ izolovanou komunitu. ∎

**Důsledek 4.8** *Nechť bod $x \in W_0$ nemá izolované komunity. Pak existuje jediný odpovídající cenový vektor $p \in S_+^{l-1}$.*

**Důkaz.** Stejně jako ve větě 4.5 a dle věty 3.6 víme, že existují nezáporná čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0, \mu_1, \ldots, \mu_k \geq 0$, alespoň jedno z nich nenulové tak, že

$$p = \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i) + \mu_i,$$

přičemž $\mu_i \cdot x_i = 0$. Bez újmy na obecnosti můžeme přečíslovat zboží a účastníky tak, že účastník 1 má nějakou část zboží 1 tj. $x_1^1 \neq 0$. Normujme vektor $p$ následovně: $p^1 = 1$. Pak $p^1 = 1 = \lambda_1 \mathrm{D}u_1(x_1)^1 + \mu_1^1 = \lambda_1 \mathrm{D}u_1(x_1)^1$, protože $\mu_1^1 = 0$. Je tedy $\lambda_1$ jednoznačně určeno. Buď $q$ nějaký jiný účastník. Uvažme posloupnost $i_1, \ldots, i_n$ agentů tak, že $i_1 = 1, i_n = q$ a posloupnost zboží $j_1, \ldots, j_n$ tak, že $x_{i_k}^{j_k} \neq 0$ a pro všechna $k$ nutně buď $j_{k+1} = j_k$ nebo $i_{k+1} = i_k$. Předpokládejme indukcí, že $\lambda_{i_l}$ je určeno pro všechna $l < k$ a chceme určit $\lambda_{i_k}$. Jsou dvě možnosti: buď $i_{k-1} = i_k$ a pak $\lambda_{i_k} = \lambda_{i_{k-1}}$ nebo $i_{k-1} \neq i_k$ a potom $j_{k-1} = j_k$ a oba účastníci $i_{k-1}, i_k$ mají nenulové množství zboží $j_k$. Máme tedy rovnosti $p^{j_k} = \lambda_{i_{k-1}} \mathrm{D}u_{i_{k-1}}(x_{i_{k-1}})^{j_k}$ a $p^{j_k} = \lambda_{i_k} \mathrm{D}u_{i_k}(x_{i_k})^{j_k}$. Známe tedy $p^{j_k}$ a následně $\lambda_{i_k}$. Opět jsme zde použili tu skutečnost, že odpovídající $\mu_i^j$ byla nulová. Zejména tedy máme tedy až na násobek jednoznačně určené všechny koeficienty $\lambda_i$. Buď dále $k$ nějaké zboží. Vyberme index $i$ tak, že $x_i^k \neq 0$. Pak $p^k = \lambda_i \mathrm{D}u_i(x_i)^k$ jednoznačně určuje $p^k$, což dokazuje naše tvrzení. ∎

Následující vztah mezi Paretovými optimy a rovnovážnými stavy vyplývá bezprostředně z 4.8.

**Věta 4.9** *Jestliže ekonomika splňuje předpoklad neexistence izolovaných komunit pro všechna Paretova optima, pak mezi množinou* $\theta_0$ *Paretových optim a množinou* $\Lambda_0$ *rovnovážných stavů existuje vzájemně jednoznačná korespondence* $\beta_0 : \Lambda_0 \to \theta_0$ *definovaná předpisem* $\beta_0((x,p)) = x$ *a* $\alpha_0 : \theta_0 \to \Lambda_0$ *definována následovně:* $\alpha_0(x) = (x, g_1(x_1))$.

# Literatura


[1] R.G.D. Allen : *Mathematical economics.* Macmillan, London 1963.

[2] K.J. Arrow: *Social choice and individual values.* Wiley, New York 1951, 2nd edition 1963.

[3] K.J. Arrow, M.D. Intriligator: *Handbook of mathematical economics.* Elsevier Science, Amsterdam 1994.

[4] C. Berge: *Topological spaces*, Macmillan, New York 1963.

[5] L. Bican : *Lineární algebra.* SNTL, Praha 1979.

[6] A. Cellina: *A Theorem on the Approximation of Compact Multi-valued Mappings.* Rendiconti Academia Nazionale Lincei, (8) 47 (1969), 429–433

[7] G. Debreu: *Theory of value*, An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. John Wiley & Sons, Inc.,New York, 1959.

[8] G. Debreu: *Smooth preferences*, Econometrica, 38:387-616, 1972.

[9] Debreu, G.: *Ekonomická teorie v matematické formulaci* (přednáška při příležitosti udělení Nobelovy ceny), Nobelova cena za ekonomii, Academia, Praha, 1993

[10] G. Debreu: *Existence of Competitive Equilibrium*, Handbook of Mathematical Economics. 15.kap. Elsevier Science, Amsterdam, 1994, 697–743.

[11] W.E. Diewert: *Duality theory in economics*, North Holland, Amsterdam 1982.

[12] J. Dupačová, J. Plesník, M Vlach: *Lineárne programovanie.* ALFA, Bratislava 1990.

[13] W. Fenchel: *Convex cones, sets and functions*, Lecture Notes, Department of mathematics, Princeton University, Princeton 1953.

[14] J. Green, W.P. Heller: *Mathematical analysis and convexity with application to economics* in Handbook of mathematical economics, editors K.J. Arrow, M.D. Intriligator, Elsevier Science, Amsterdam 1994, p. 15-53.

[15] J.R. Hicks: *Value and capital*, Oxford University Press, New York 1946.

[16] H. Hotelling: *Demand functions with limited budgets*, Econometrica, 3, 1925, p. 66-78.

[17] S. Karlin: *Mathematical methods and theory in games, programming and economics, vol. I*, Addison-Wesley, Palo Alto, California 1959.

[18] I. Kolář: *Úvod do Thomovy teorie katastrof*, Academia, Praha 1988.

[19] H. Minkowski: *Theorie der konvexen Körper*, Gesammelte Abhandlungen II, B.G. Teubner, Leipzig und Berlin 1911.

[20] H. Nikaido: *Convex structures and economic theory*, Academic Press, New York 1968.

[21] J. Novotný: *Existence rovnovážného stavu v ekonomice s produkcí*, Brno, 2002.

[22] A. Pultr: *Podprostory euklidovských prostorů*, SNTL, Praha 1986.

[23] R.T. Rockafellar: *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton 1970.

[24] P.A. Samuelson: *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge 1963.

[25] R.W. Shephard: *Cost and production functions*, Princeton University Press, Princeton 1953.

[26] R.W. Shephard: *Theory of cost and production functions*, Princeton University Press, Princeton 1970.

[27] R. Sikorski: *Diferenciální a integrální počet funkce více proměnných*, Academia, Praha 1973.

[28] S. Smale: *Global Analysis and Economics*, Handbook of Mathematical Economics. 8.kap. Elsevier Science, Amsterdam, 1994, 331–369.

[29] J. Soukupová a kol.: *Mikroekonomie*. 2.vyd. Management Press, Praha, 1999.

[30] H. R. Varian: *Dynamical Systems with Appplications to Economics*, Handbook of Mathematical Economics. 3.kap. Elsevier Science, Amsterdam, 1994, 93–110.

[31] J. von Neumann: *Über ein ökonomisches Gleichungssystem und eine Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes*, Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums, 8:73-83, 1937.

[32] M.S. Vošvrda: *Teoretická ekonomie*, Univerzita Karlova, Praha 1994.

[33] J. Žalská: *Teorie všeobecné rovnováhy*, vybrané problémy, Brno, 2000.

# Rejstřík