1.2

Masarykova univerzita v Brně
Přírodovědecká fakulta

Existence rovnovážného stavu v ekonomice s produkcí

JIŘÍ NOVOTNÝ

Vedoucí diplomové práce: RNDr. Martin Čadek, CSc.
Brno 2002

Poděkování

Rád bych poděkoval RNDr. Martinu Čadkovi, CSc. za vedení diplomové práce, cenné rady a čas strávený při konzultacích.

Prohlášení

Prohlašuji, že jsem tuto diplomovou práci vypracoval samostatně, pouze za odborného vedení RNDr. Martina Čadka, CSc. Dále prohlašuji, že veškeré podklady, ze kterých jsem čerpal, jsou uvedeny v seznamu literatury.

V Tišnově dne 20. dubna 2002

Obsah

Úvod

Cílem této práce je matematické vyjádření rovnováhy ekonomiky, ve které se střetávají dva druhy agentů. Těmito agenty jsou na straně jedné spotřebitelé uspokojující potřeby na základě svých preferencí, na straně druhé výrobci, kteří se snaží maximalizovat svůj zisk. V tomto konceptu budu pracovat s ekonomikou plně vlastněnou spotřebiteli formou podílů ve firmách.V těchto podmínkách se snažím ukázat chování spotřebitelů a výrobců, které se pak ve složitějších modelech uvádí jako předpoklad a nemusí se nijak vysvětlovat či odvozovat.
Tématicky i obsahově navazuji na diplomovou práci J.Žalské [7], která rozpracovala otázky existence rovnováhy ekonomiky čisté směny. Dále jsem využíval skripta J. Paseky [4], ale hlavní část jsem zpracoval podle článku S. Smalea [5]. Zde je uvedena a dokázána Arrowova-Debreuova věta, která je nejdůležitějším prvkem mé práce. Její důkaz spolu s některými důkazy pomocných vět a lemmat je v mé práci proveden důkladně a podrobně.
V první kapitole zavádím základní pojmy potřebné ke studiu ekonomické rovnováhy v tomto konceptu. Uvádím zde Walrasův zákon, některé vlastnosti vícehodnotových zobrazení a lemmata o konvexních množinách a konvexních obalech množin.
Druhá kapitola je věnována výrobci, popisuji vlastnosti jeho produkčních množin. Je zde uvedeno za jakých podmínek maximalizuje svůj zisk.
Třetí kapitola pojednává o spotřebiteli. Zavádím zde koncept preferenčních relací a z nich vycházející užitkovou funkci, rozvádím také vlastnosti spotřebních množin a podmínky, za jakých spotřebitel dosahuje

největšího užitku. Kapitoly věnované výrobci a spotřebiteli jsou zpracovány s využitím knihy G. Debreua [2], držitele Nobelovy ceny za ekonomii, konkrétně za výzkumy v oblasti matematické ekonomie. Použil jsem také knihu J. Soukupové [6], která je hojně využívanou učebnicí mikroekonomie.
Ve čtvrté kapitole se zabývám Arrowovou-Debreuovou větou o existenci rovnováhy ekonomiky a podávám i její důkaz. Jedná se o stěžejní část mé práce, vycházel jsem zde z výše zmíněného článku S. Smalea [5].

Kapitola 1

Základní pojmy

1.1 Prostor komodit

Prostor komodit je základním pojmem, na kterém stojí i celý matematický aparát. Jeho podstatou je, že v ekonomice je daný počet komodit (komoditou nerozumíme jen zboží či služby, ale cokoliv, co lze použít ke směně, včetně práce, komodita je určena svými fyzickými vlastnostmi, datem a místem, kdy a kde je dostupná). Nechť je těchto komodit l, $l \in N$. Akci jednotlivého ekonomického subjektu (v našem případě i-tého spotřebitele nebo výrobce) můžeme zapsat jako komoditní vektor v komoditním prostoru R^l.

$$x_i = (x^1, ..., x^l), \quad x^h \in R \quad h = 1, ..., l$$

Pomocí tohoto vyjádření akce jednoho subjektu nyní můžeme popsat celou ekonomiku. Pokud je účastníků daný počet, např. m, pak budou všechny akce v ekonomice popsány vektorem komoditních vektorů z prostoru, $z \in R^{lm}$. Tedy

$$z = (x_1, ..., x_m), \quad x_i \in R^l \quad i = 1, ..., m.$$

1.2 Cenový prostor

Cenový prostor lze považovat za duální koncept ke konceptu prostoru komoditního. Jako nejlepší k ohodnocení komodit se hodí právě ceny. Tzn. že ke komoditnímu prostoru přiřadíme cenový vektor, přičemž jednotlivé složky si odpovídají (i-tá složka cenového vektoru značí cenu i-té komodity). Aby cenový prostor odpovídal nejlépe reálné situaci budeme uvažovat pouze nezáporné ceny - tuto množinu budeme značit $R_+ = [0, \infty)$. [1] Tedy

$$p = (p^1, ..., p^l), \quad p^h \in R_+ \quad h = 1, ..., l$$

je cenový vektor. Další podmínkou je, že cenový vektor je pro všechny účastníky stejný, takže vlastně reprezentuje cenový systém. Hodnotu komoditního vektoru v daném cenovém systému vyjádříme jako skalární součin obou vektorů.

$$w = p \cdot x = \sum_{h=1}^{l} p^h x^h$$

1.3 Agenti

Místo dřívějších, poněkud kostrbatých pojmů "účastník trhu, účastník ekonomiky", nyní zavedeme pojem "agent". Z ekonomického hlediska agentem rozumíme jak spotřebitele, tak výrobce. Pro odlišení těchto pojmů v matematickém konceptu zavedeme následující znaménkovou konvenci pro rozlišení vstupů a výstupů: pro spotřebitele budou vstupy kladné, výstupy záporné, pro výrobce naopak vstupy záporné a výstupy kladné. Díky této konvenci v matematickém vyjádření nemusíme rozlišovat mezi pojmy spotřebitel a výrobce vystačíme pouze s pojmem agent. Je zároveň ošetřena možnost, že agent je současně výrobcem i spotřebitelem.

[1] Komodity s nulovou cenou se v ekonomické teorii nazývají *volné*.

1.4 Existence rovnováhy

Celková nabídka $S(p)$ a celková poptávka $D(p)$ jsou zobrazení z cenového do komoditního prostoru, tedy

$$S, D : R^l_+ - \{0\} \to R^l.$$

Předpokládáme, že poptávka i nabídka jsou homogenní, tj. platí

$$D(p) = D(\lambda p), \quad S(p) = S(\lambda p) \text{ pro } \lambda \in (0, \infty).$$

Ekonomika je v rovnováze právě tehdy, když žádný z agentů nechce změnit její stav. Veškeré vyrobené zboží je také poptáváno a spotřebitelé plně uspokojují své potřeby.

$$D(p) = S(p),$$

poptávka se rovná nabídce. Hledáme tedy vektor $p^* \in R^l_+ - \{0\}$, který splňuje

$$D(p^*) = S(p^*).$$

Označíme-li $Z : R^l_+ - \{0\} \to R^l,\ Z(p) = D(p) - S(p)$ jako *převis poptávky*, pak hledáme takový vektor p^*, pro který

$$Z(p^*) = 0.$$

Zobrazení Z je spojité a homogenní, neboli

$$Z(\lambda p) = Z(p), \quad \text{pro všechna } \lambda > 0.$$

1.5 Walrasův zákon

Walrasův zákon říká, že celková hodnota poptávky je rovna celkové hodnotě nabídky. Hodnotu nabídky lze interpretovat jako rozpočtové omezení celé ekonomiky a hodnota převisu poptávky je nulová:

$$p \cdot Z(p) = 0 \quad \text{čili} \quad \sum_{h=1}^{l} p^h Z^h(p) = 0$$

Nechť je $S_+^{l-1} = \{p \in R_+^l; \|p\|^2 = \sum_{i=1}^{l}(p^i)^2 = 1\}$ prostor normalizovaných cenových systémů. Homogenita Z nám dovoluje zúžit definiční obor Z na $S_+^{l-1} \in R$. Podle Walrasova zákona je $Z(p)$ tečna S_+^{l-1} v bodě p, neboť vektor $Z(p)$ je kolmý k p.
Slabý Walrasův zákon říká, že pro každý cenový vektor $p \in R_+^l$ platí:

$$p \cdot Z(p) \leq 0.$$

Definice 1.1
Nechť $a \in R$ a $v \in R^l$, pak zápis $v < a$ znamená, že

$$v^h < a, \quad \text{pro } h = 1, ..., l.$$

Nechť $b \in R^l$ a $v \in R^l$, pak zápis $v < b$ znamená, že

$$v^h < b^h, \quad \text{pro } h = 1, ..., l.$$

Podobně i pro $=, \leq, >, \geq$.

Věta 1.1 (Debreu-Gale-Nikaidô)
Nechť je $Z : R_+^l - \{0\} \to R^l$ spojité a splňuje slabý Walrasův zákon. Pak existuje $p^* \in R_+^l - \{0\}$ takové, že $Z(p^*) \leq 0$.
Důkaz viz [5, strana 338-339].

Poznámka 1.1
Pokud $Z : R_+^l - \{0\} \to R_+$ splňuje Walrasův zákon a pro nějaké p^* platí $Z(p^*) \leq 0$, pak buď $Z^h(p^*) = 0$ nebo $p^{*h} = 0$.

1.6 Aproximace vícehodnotových zobrazení

$S(T)$ značí množinu konvexních podmnožin množiny $T \subseteq R^l$.

Definice 1.2
Nechť je $K \subseteq R^l$ kompaktní, $T \subseteq R^l$ kompaktní a konvexní. Pak zobrazení $\varphi : K \to S(T)$ nazýváme *korespondence* z K do T.
Graf korespondence φ je množina

$$\Gamma_\varphi = \{[x, y] \in K \times T;\ y \in \varphi(x)\}.$$

ε-okolí grafu Γ_φ definujeme takto:

$$B_\varepsilon(\Gamma_\varphi) = \{y \in K \times T;\ \mathrm{dist}(y, \Gamma_\varphi) \leq \varepsilon\}.$$

Věta 1.2
Jestliže je φ korespondence z K do T s kompaktním grafem Γ_φ, potom pro dané $\varepsilon > 0$ existuje spojité zobrazení $f : K \to T$ takové, že $\Gamma_f \subset B_\varepsilon(\Gamma_\varphi)$.
Důkaz viz [1].

1.7 Vlastnosti konvexních množin a obalů

Lemma 1.3
Součet dvou konvexních množin R^l je konvexní množina.

Důkaz:
Nechť $a_1, a_2 \in A$ a $b_1, b_2 \in B$, kde A a B jsou konvexní množiny. Pak platí

$$t(a_1 + b_1) + (1 - t)(a_2 + b_2) = (ta_1 + (1 - t)a_2) + (tb_1 + (1 - t)b_2) \in A + B.$$

■

Lemma 1.4
Nechť $\widetilde{Y}_j$ značí konvexní obal množiny Y_j v R^l, pak

$$\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y}_j = \widetilde{\sum_{j=1}^{m} Y_j}.$$

Důkaz:
Stačí dokázat, že $\widetilde{A} + \widetilde{B} = \widetilde{A+B}$. Tvrzení pro více množin se pak již jednoduše dokáže pomocí indukce. Podle lemmatu 1.3 je $\widetilde{A} + \widetilde{B}$ konvexní množina. Protože $\widetilde{A+B}$ je nejmenší konvexní množina obsahující $A + B$, platí

$$\widetilde{A} + \widetilde{B} \supseteq \widetilde{A+B}.$$

Důkaz opačné inkluze je složitější.
Pro množinu $X \subseteq R^l$ definujeme

$$X_n = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i;\ x_i \in X,\ t_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} t_i = 1\},$$

tedy množina X_n je množinou všech konvexních kombinací n prvků z množiny X. Nechť $a_1, a_2 \in A$, $b_1, b_2 \in B$ a $t, s \in R$ takové, že $t, s \in (0, 1)$.
Platí

$$\begin{aligned} & ta_1 + (1-t)a_2 + sb_1 + (1-s)b_2 = \\ & \qquad ta_1 + tb_1 + (s-t)b_1 + (1-s)b_2 + (1-s)a_2 + (s-t)a_2 = \\ & \qquad\qquad t(a_1 + b_1) + (s-t)(a_2 + b_1) + (1-s)(a_2 + b_2). \end{aligned} \quad (1.1)$$

Dále dostáváme

$$\widetilde{X} = \bigcup_{k=1}^{\infty} X_k = \bigcup_{r=1}^{\infty} X_{2^r}.$$

Z platnosti vztahu (1.1) vyplývá, že

$$A_2 + B_2 \quad \subseteq \quad (A+B)_3 \subseteq \widetilde{A+B}. \tag{1.2}$$

Dále platí

$$X_{2^{k+1}} = (X_{2^k})_2 \tag{1.3}$$

Inkluze $X_{2^{k+1}} \supseteq (X_{2^k})$ je zřejmá. Obráceně:
Nechť $x \in X_{2^{k+1}}$. Pak

$$x = \sum_{i=1}^{2^{k+1}} t_i x_i; \text{ kde } \sum_{i=1}^{2^{k+1}} t_i = 1,\ t_i \geq 0.$$

Pokud $0 < \sum\limits_{i=1}^{2^k} t_i < 1$, pak

$$x = \left(\sum_{i=1}^{2^k} t_i\right)\left(\sum_{i=1}^{2^k} \frac{t_i}{\sum\limits_{i=1}^{2^k} t_i} x_i\right) + \left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} t_i\right)\left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{t_i}{\sum\limits_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} t_i} x_i\right) \in (X_{2^k})_2\,.$$

Pokud $\sum\limits_{i=1}^{2^k} t_i = 0$, pak

$$x = 0 \cdot \left(\sum_{i=1}^{2^k} \frac{1}{2^k} x_i\right) + 1 \cdot \left(\sum_{i=2^k+1}^{2^{k+1}} t_i x_i\right) \in (X_{2^k})_2\,.$$

Analogicky pro $\sum_{i=1}^{2^k} t_i = 1$.
Nyní indukcí dokážeme, že
$$A_{2^k} + B_{2^k} \subseteq \widetilde{A+B}.$$
Pro $k = 1$ to plyne z (1.2).
Dále pokračujeme indukcí. Předpokládáme, že inkluze platí pro k. Pro $k+1$ pomocí vztahů (1.2) a (1.3) dostaneme
$$\begin{aligned} A_{2^{k+1}} + B_{2^{k+1}} &= (A_{2^k})_2 + (B_{2^k})_2 \subseteq (A_{2^k} + B_{2^k})_3 \subseteq \\ &\subseteq (\widetilde{A+B})_3 = \widetilde{A+B} \end{aligned}$$
Tedy platí
$$\begin{aligned} \widetilde{A} + \widetilde{B} &= \bigcup_{k=1}^{\infty} A_{2^k} + \bigcup_{k=1}^{\infty} B_{2^k} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (A_{2^k} + B_{2^k}) \subseteq \\ &\subseteq \widetilde{A+B}. \end{aligned}$$
Rovnost $\widetilde{A} + \widetilde{B} = \widetilde{A+B}$ tedy platí a lemma 1.4 je dokázáno.

■

Lemma 1.5
Nechť $\overline{A}$ značí uzávěr množiny A. Pak platí
$$\overline{A} + \overline{B} \subseteq \overline{A+B}.$$
Důkaz:
Nechť $a \in \overline{A}$ a $b \in \overline{B}$ a pro $a_n \in A$, resp. $b_n \in B$ platí $a_n \to a$, resp. $b_n \to b$. Pak platí, že
$$a_n + b_n \in A + B$$
a zároveň
$$a_n + b_n \to a + b,$$

z čehož vyplývá

$$a + b \in \overline{A + B}.$$

■

Kapitola 2

Výrobce

2.1 Úvod

Nyní se budeme zabývat výrobní stranou ekonomiky. Hlavní rolí výrobce je sestavit a uskutečnit svůj výrobní plán. Pro každého z $n, j = 1, \ldots, n$ výrobců to znamená určit množství všech svých vstupů a výstupů. Bod $y_j \in R^l$ se nazývá *produkce* a označuje všechny dosažitelné i nedosažitelné produkce daného výrobce, množina dosažitelných produkcí se značí Y_j a nazývá se *produkční množina*. *Celková produkční množina* a *celková dosažitelná produkční množina* vzniknou sečtením dílčích množin, tedy:

$$y = \sum_{j=1}^{n} y_j \qquad \text{a} \qquad Y = \sum_{j=1}^{n} Y_j$$

Jelikož tímto sečtením dojde k odstranění přesunů komodit mezi výrobci, představuje y čistý výstup ekonomiky.

2.2 Vlastnosti produkčních množin

O produkčních množinách předpokládáme následující:

(a) Y_j je uzavřená.
Nechť je y_j^q posloupnost produkcí dostupných j-tému výrobci a pokud $y_j^q \to y_j^0$, pak je i y_j^0 dostupná j-tému výrobci.

(b) $0 \in Y_j$ (možnost žádné produkce)
Výrobce má možnost nedělat nic.

(c) $Y \cap (-Y) = \{0\}$ (podmínka nenávratnosti)
Tato podmínka říká, že výroba je "jednosměrný proces", kdy výstup již nelze znovu "rozložit" zpět na původní vstupy.

(d) Y_j je konvexní.
Pokud jsou y_j^1 a y_j^2 dosažitelné produkce, je dosažitelný i jejich vážený průměr $ty_j^1 + (1-t)y_j^2$ pro libovolné $t \in (0,1)$.

(e) $Y \supset (-R_+^l)$ (podmínka volného použití)
Celková produkce s nulovými výstupy je dosažitelná. Tzn. že výrobci používají všechny vyprodukované komodity jako vstupy.

(f) $Y - R^l \subset Y$
Tato vlastnost je důsledkem vlastností (a) a (d), viz [2, strana 42].

Z těchto uvedených podmínek vychází Arrowova-Debreuova věta uvedená v následující kapitole. Produkční množiny mají několik dalších vlastností.

(g) Nejprve nechť $R_+^l = \{x \in R^l; x \geq 0\}$ a $Y \subset R^l$, pak platí:
$Y \cap R_+^l \subset \{0\}$ (nemožnost volné produkce)
Výstupy dosažitelné celkové produkce s nulovými vstupy jsou nulové.

(h) $(Y_j + Y_j) \subset Y_j$ (aditivita)
Pokud jsou dva výrobní plány dosažitelné samostatně, pak jsou dosažitelné i společně.

(i) Y_j je kužel s vrcholem v bodě 0. (konstantní výnosy z rozsahu)
Tzn. $y_j \in Y_j \Rightarrow ty_j \in Y_j, t > 0$. Poměry vstupů a výstupů ve výrobě jsou stejné, ale rozsah může být libovolně měněn.

2.3 Maximalizace zisku

Každý racionálně uvažující a jednající výrobce (dále budeme uvažovat pouze tyto) se snaží maximalizovat zisk z prodeje svých výstupů. V daném cenovém systému p a při produkci y_j se tedy snaží maximalizovat *ziskovou funkci* $\pi_j(p, y_j) : Y_j \to R$ definovanou

$$\pi_j(p, y_j) = p \cdot y_j.$$

Pro tuto funkci platí

$$\pi_j(tp, y_j) = t\pi_j(p, y_j).$$

Celkový zisk všech výrobců je $p \cdot y$. Výrobce si vybírá takovou produkci z produkční množiny Y_j, která maximalizuje jeho zisk, tato se pak nazývá *rovnovážná produkce*. Pokud $p \neq 0$ a y_j je produkce maximalizující zisk, pak množina Y_j leží v uzavřeném poloprostoru pod nadrovinou $H = \{y \in R^l, p \cdot y = p \cdot y_j\}$ určenou normálovým vektorem p. Množina maxim je dána průnikem Y_j a H.
Nabídkou j-tého výrobce rozumíme korespondenci $S_j : R^l - \{0\} \to Y_j$. Výsledkem je množina všech dosažitelných produkcí, které maximalizují výrobcův zisk, tedy

$$S_j(p) = \{\overline{y} \in Y_j;\ p \cdot \overline{y} = \max_{y \in Y_j} p \cdot y\}.$$

Celková nabídka je korespondence $S : R^l - \{0\} \to Y$ definována takto:

$$S(p) = \sum_{j=1}^{n} S_j(p).$$

Celková produkce y maximalizuje zisk na Y tehdy a jen tehdy maximalizuje--li zisk každé y_j na Y_j.

Kapitola 3

Spotřebitel

3.1 Úvod

Spotřebitel je v ekonomice charakterizován svými preferencemi a svým rozpočtovým omezením. Jeho hlavní charakteristiky nám podávají *spotřební množina* X_i a jeho preference. Spotřební množina X_i je množina všech dosažitelných spotřeb, spotřebu určuje bod x_i komoditního prostoru. Spotřebitelovou rolí v ekonomice je vybrat si a uskutečnit spotřební plán pro budoucnost, tzn. určit množství vstupů a výstupů.

3.2 Vlastnosti spotřebních množin

Uvažujme m spotřebitelů. Spotřební množinu i-tého spotřebitele ($i = 1, 2, ...,$ m) označme X_i. Platí pro ni následující podmínky:

(a) X_i je uzavřená množina.

(b) X_i je zdola ohraničená.
To znamená, že existuje takové $d_i \in R^l$, že $X_i \subset \{x \in R^l \mid x \geq d_i\}$, což zapisujeme také $X_i \geq d_i$.

(c) X_i je konvexní.
Tzn., pokud x_i^1 a x_i^2 jsou dvě možné spotřeby i-tého spotřebitele, je jeho možnou spotřebou i jejich vážený průměr $tx_i^1 + (1-t)x_i^2,\ t \in (0,1)$.

3.3 Preference spotřebitele

Základem zkoumání chování spotřebitele při výběru optimálního spotřebního koše jsou spotřebitelovy preference. Na jejich základě spotřebitel rozhoduje, která ze spotřeb je pro něj "lepší" nebo "horší". Preference zahrnují faktory biologické, psychologické, kulturní, společenské a další. Tyto preference popisuje úplná preferenční relace "$\preceq$". Výraz $x_i^1 \preceq x_i^2$ znamená, že spotřeba x_i^1 je pro spotřebitele "nejvýše tak dobrá" jako spotřeba x_i^2. Tato relace je reflexivní a tranzitivní.
Pro každé $\overline{x_i} \in X_i$ jsou množiny $\{x_i \in X_i; x_i \preceq_i \overline{x_i}\}$ a $\{x_i \in X_i; x_i \succeq_i \overline{x_i}\}$ uzavřené v X_i (podmínka spojitosti). Výraz $x_i^1 \sim x_i^2$ znamená, že spotřebitel je k oběma výběrům indiferentní, tedy že nemůže říci, který je "lepší" a který "horší". Tato relace je navíc i symetrická. Pro spotřebitelovy koše x_i^1 a x_i^2 platí $x_i^1 \sim x_i^2$ právě tehdy, když

$$x_i^1 \preceq x_i^2 \ \text{ a } \ x_i^1 \succeq x_i^2.$$

Bod $x_i \in X_i$ se nazývá *nasycení*, pokud neexistuje lepší dostupná spotřeba.

3.4 Užitková funkce

Spotřebitelovy preference reprezentuje *užitková funkce*[1] $u_i : X_i \to R$. Tato funkce je rostoucí a platí pro ni následující podmínka:

$$(x \preceq y) \Leftrightarrow (u(x) \leq u(y))$$

Užitková funkce má následující vlastnosti:

(a) u_i nemá maximum (podmínka nenasycenosti). $\forall x_i \in X_i, \exists \overline{x_i} \in X_i : x_i \preceq_i \overline{x_i}$.

(b) u_i splňuje podmínku konvexity: pokud $x, x' \in X_i$ a $u_i(x) > u_i(x')$, potom $u_i(tx + (1-t)x') > u_i(x')$ pro každé $t \in (0, 1)$.

Poznámka 2.1
Funkce u_i je konkávní a přitom splňuje podmínku konvexity (platí zákon klesájícího mezního užitku), naopak konvexní funkce podmínku konvexity splňovat nemusí.

Důležitým pojmem pro studium chování spotřebitele je *indiferenční plocha*, kterou definujeme jako vrstevnici funkce u_i, $\{x \in R^l, u_i(x) = c\}$. V dvourozměrném případě mluvíme o indiferenční křivce, ta vyjadřuje všechny kombinace daných dvou komodit, které mají pro daného spotřebitele stejný užitek.

3.5 Rozpočtové omezení

Spotřebitel samozřejmě nemůže spotřebovávat do nekonečna, je ohraničen svým *rozpočtovým omezením*. Hodnota w_i těchto prostředků spotřebitele omezuje při výběru kombinací komodit z komoditního prostoru, a to tak, že nemůže tuto hodnotu překročit. Spotřebiteli jsou tedy dostupné pouze ty komoditní vektory,

[1] Nutnou a postačující podmínkou existence spojité funkce užitku je, aby množina $A = \{(x, y) \in R^l \times R^l ; x \preceq y\}$ byla vzhledem k $R^l \times R^l$ uzavřená.

jejichž hodnota je menší nebo rovna hodnotě jeho prostředků w_i. V daném cenovém systému pak rozpočtové omezení definujeme jako skalární součin

$$p \cdot x = \sum_{h=1}^{l} p^h \cdot x_i^h = w_i; \quad p^h, x_i^h \in R, \quad w_i \in R,$$

přičemž p^h jsou složky cenového vektoru a x_i^h složky komoditního vektoru.
Nadrovina $\{a \in R^l; \sum_{h=1}^{l} p^h \cdot a^h = w_i\}$ se nazývá *rozpočtová nadrovina.* Nerovnost $p \cdot x_i \leq w_i$ říká, že x_i leží v poloprostoru pod rozpočtovou nadrovinou.
Každý spotřebitel disponuje majetkem $e_i \in X_i$, přičemž existuje takové $x_i \in X_i$, že platí $e_i > x_i$. Pokud uvažujeme ekonomiku se soukromými vlastníky, potom θ_{ij} značí podíl i-tého agenta v j-té firmě s výrobou $y_j \in R^l$. Je zřejmé, že $0 \leq \theta_{ij} \leq 1$ a $\sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} = 1$. Pro daný cenový systém p je bohatství i-tého agenta

$$w_i = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} p \cdot y_j.$$

Vektor $w \in R^m$ se nazývá *rozložení bohatství* a jeho složkami jsou hodnoty bohatství jednotlivých spotřebitelů (w_i).

3.6 Rovnováha spotřebitele

Spotřebitel dosahuje optima, pokud si vybere takový spotřební koš x_i, který mu v preferenčním uspořádání "$\preceq$" přináší největší užitek, a zároveň platí, že výdaje $p \cdot x_i$ na tento spotřební koš jsou nejvýše rovny jeho bohatství w_i. Námi uvažovaný racionálně jednající spotřebitel si samozřejmě takový koš vybere a bude jej na trhu poptávat.

Spotřebitelovou *poptávkou* rozumíme korespondenci $D_i(p) : R^l - \{0\} \to X_i$ definovanou jako množinu všech dosažitelných spotřeb $x_i \in X_i$, v nichž užitková funkce $u_i(x_i)$ nabývá svého maxima na rozpočtové množině $B_i = \{\overline{x} \in X_i;\ p \cdot \overline{x} \leq w_i\}$, tedy

$$D_i(p) = \{\overline{x} \in B_i;\ u_i(\overline{x}) = \max_{x \in B_i} u_i(x)\}.$$

Všechny body z množiny $D_i(p)$ jsou navzájem indiferentní a pro všechny $x'_i \in D_i(p)$ a $x_i \in B_i$ platí nerovnost $x_i \preceq_i x'_i$. Pro poptávku samozřejmě platí:

$$D_i(tp) = D_i(p),\ \text{pro libovolné } t > 0.$$

Celková poptávka je korespondence $D(p) : R^l - \{0\} \to \bigcup_{i=1}^{m} X_i$ definovaná takto:

$$D(p) = \sum_{i=1}^{n} D_i(p).$$

Kapitola 4

Rovnováha ekonomiky

4.1 Definice rovnováhy

Rovnováha ekonomiky je její stav (x, y, p), kde $x \in \prod_{i=1}^{m} X_i,\ y \in \prod_{j=1}^{n} Y_j,\ p \in S_+^{l-1} = \{p \in R_+^l; \|p\|^2 = \sum_{i=1}^{l} (p_i)^2 = 1\}$, který splňuje následující podmínky:

(A) Dosažitelnost, neboli $\sum_{i=1}^{m} x_i = \sum_{j=1}^{n} y_j + \sum_{i=1}^{m} e_i$.

(B) Každý spotřebitel se snaží maximalizovat svůj užitek, neboli x_i je spotřeba, při níž u_i dosahuje maxima na rozpočtové množině $B_i = \{\overline{x} \in X_i; p \cdot \overline{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p \cdot y_j\}$.

(C) Každý výrobce se snaží maximalizovat svůj zisk, neboli y_j je výroba, při níž je $\pi_j(p, y_j) = p \cdot y_j$ maximální na Y_j.

4.2 Arrowova-Debreuova věta

Arrowova-Debreuova věta:
Pro ekonomiku splňující podmínky 2.2 (a), (b), (c), (d), (e), (f) a 3.2 (a), (b), (c), 3.4 (a), (b) vždy existuje rovnovážný stav.

Než dokáži Arrowovu-Debreuovu větu, uvedu a dokážu větu 4.1 a větu 4.6, které splňují silnější předpoklady.

Definice 4.1:
Konvexní množina K se nazývá striktně konvexní, jestliže pro všechna $x, y \in K$ a $t \in (0,1)$ je $tx + (1-t)y \in K^\circ$, kde K° je vnitřek K.

Věta 4.1:
Předpokládejme nyní, že ekonomika popsaná výše splňuje kromě předpokladů Arrowovy-Debreuovy věty tyto dodatečné podmínky:

(1) Každá Y_j je uzavřená a striktně konvexní.

(2) Každá u_i splňuje podmínku ostré konvexity tj., pokud $u_i(x) \geq c$, $u_i(x') \geq c$ a $0 < t < 1$, potom $u(tx + (1-t)x') > c$.

Potom existuje rovnovážný stav.

Poznámka 4.1
Podmínka (2) z věty 4.1 neznamená, že u_i je striktně konvexní.

K důkazu věty 4.1 budu potřebovat několik lemmat.

Lemma 4.2: (základní odhad)
Nechť je Y uzavřená konvexní podmnožina R^l s vlastnostmi $Y \cap (-Y) = \{0\}$ a $Y \supset -R^l_+$. Pak pro dané $b \in R_l$ a n přirozené existuje konstanta c taková, že pokud $y_1, ..., y_n \in Y$ a $\sum_{j=1}^{n} y_j \geq b$, potom $\| y_j \| < c$ pro všechna j.

K důkazu tohoto lemmatu použijeme následující tři tvrzení. V nich označme $K = \{y \in Y; \|y\| = 1\}$.

Tvrzení 4.1:
Počátek 0 prostoru R^l neleží v konvexním obalu množiny K.

Důkaz:
Předpokládejme, že $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_r x_r = 0$ pro $x_i \in K, 0 < \alpha_i < 1,\ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i = 1$. Pak

$$-\alpha_1 x_1 = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_r x_r$$

Protože $0, x_2, \ldots, x_r \in Y$ a Y je konvexní, leží výraz na pravé straně v Y. Výraz $-\alpha_1 x_1$ lze rozepsat takto:

$$-\alpha_1 x_1 = -(\alpha_1 x_1 + (1 - \alpha_1) \cdot 0)$$

Tedy $-\alpha_1 x_1$ leží rovněž v $-Y$. Z toho vyplývá, že $\alpha_1 x_1 \in Y \cap (-Y) = \{0\}$. Zároveň $\|x_1\| = 1$, tedy $\alpha_1 = 0$, což je spor s předpoklady. 0 tedy nepatří do konvexního obalu množiny K.

■

Tvrzení 4.2:
Existuje $q = (q^1, q^2, \ldots, q^l) \in R^l,\ q^h > 0$ pro všechna h, takové, že pro všechna $x \in K$ platí $q \cdot x < 0$.

Důkaz:
Jestliže $A \subseteq R^l$ je kompaktní konvexní množina a bod $b \in R^l$ neleží v A, pak lze A od b oddělit nadrovinou $q_1x_1 + q_2x_2 + \ldots + q_lx_l = c$. Nechť je nyní konkretně A konvexním obalem množiny K, pak dle tvrzení 1 platí $0 \notin A$. Existuje tedy nadrovina, která odděluje A a 0. Tato nadrovina má rovnici $q \cdot x = c$. Pro všechna $x \in A$ platí následující nerovnosti:

$$\begin{array}{rcl} q \cdot x & < & c \\ 0 = q \cdot 0 & > & c \end{array}$$

Tedy pro všechna $x \in K \subseteq A$ platí $q \cdot x < 0$.
Navíc pro všechny vektory v^h standartní báze v R^l platí

$$-v^h \in K \quad \text{a} \quad -q^h = q \cdot (-v^h) < 0.$$

Tedy $q^h > 0$, pro všechna h.

■

Tvrzení 4.3:
Existují konstanty $\varepsilon > 0$ a $\beta > 0$ tak, že pro všechna $x \in Y$, platí

$$q \cdot x \leq \beta + \varepsilon - \varepsilon \|x\|.$$

Důkaz:
Nechť $q \in R^l$ je vektor z tvrzení 4.2. Nejprve definujme:

$$\begin{array}{rcl} \beta & = & \max\{q \cdot x; \|x\| \leq 1\} \\ -\varepsilon & = & \max\{q \cdot x; x \in K\} \end{array}$$

Nyní rozlišíme dvě možnosti:
(1) Nechť $\|x\| \leq 1$. Potom

$$q \cdot x \leq \beta \leq \beta + \varepsilon - \varepsilon \|x\|,$$

neboť $\varepsilon - \varepsilon\|x\| \geq 0$.
(2) Nechť $\|x\| > 1$, pak $\frac{x}{\|x\|} \in K$ a platí:

$$-\varepsilon \geq q \cdot \frac{x}{\|x\|}.$$

Tedy

$$-\varepsilon\|x\| \geq q \cdot x$$

a odtud

$$q \cdot x \leq -\varepsilon\|x\| < -\varepsilon\|x\| + \beta + \varepsilon,$$

neboť

$$\beta + \varepsilon > 0.$$

Uvedená nerovnost tedy platí.

$\blacksquare$

Důkaz lemmatu 4.2:
Nechť $q \in R^l$ je vektor z tvrzení 4.2.
Předpokládejme, že $\sum_{j=1}^{n} y_j \geq b$ pro $y_j \in Y$ Potom platí:

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^h \geq b^h.$$

Nerovnost vynásobíme číslem $q^h > 0$ a dostaneme

$$\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\right)^h q^h \geq b^h q^h.$$

Nyní vše sečteme podle h a výsledkem je nerovnost

$$\sum_{j=1}^{n} y_j q \geq b \cdot q.$$

Odtud dostáváme:

$$b \cdot q \leq \sum_{j=1}^{n} y_j \cdot q \leq \sum_{j=1}^{n} ((\beta + \varepsilon) - \varepsilon \|y_j\|) = n(\beta + \varepsilon) - \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \|y_j\|$$

Po úpravě:

$$\begin{aligned} \varepsilon \sum_{j=1}^{n} \|y_j\| + b \cdot q &\leq n(\beta + \varepsilon) \\ \sum_{j=1}^{n} \|y_j\| &\leq \tfrac{n(\beta+\varepsilon)-q\cdot b}{\varepsilon} \\ \|y_j\| &\leq \tfrac{n(\beta+\varepsilon)-q\cdot b}{\varepsilon} = c \end{aligned}$$

■

Lemma 4.3:
Nechť $i = 1, ..., m$ a nechť $X_i \geq d_i$. Pro dané $c_1 \in R^l$ existuje $a > 0$ tak, že pro všechna $x_i \in X_i$ taková, že

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \leq c_1,$$

platí $\| x_i \| < a$, pro všechna i.

Důkaz:
Platí následující nerovnost:

$$\begin{aligned}(d_i)^h &\leq (x_i)^h = (x_1 + \ldots + x_m)^h - (x_1)^h - \ldots - (x_{i-1})^h - (x_{i+1})^h - \ldots \\ &\ldots - (x_m)^h \leq (c_1)^h - (d_1)^h - \ldots - (d_{i-1})^h - (d_{i+1})^h - \ldots - (d_m)^h\end{aligned}$$

Tedy pro $|(x_i)^h|$ platí následující:

$$\begin{aligned}|(x_i)^h| &\leq \max(|(d_1)^h|, \ldots, |(d_{i-1})^h|, |(d_{i+1})^h|, \ldots, |(d_m)^h|, \\ &|(c_1)^h - \sum_{k=1}^m (d_k)^h + (d_1)^h|, |(c_1)^h - \sum_{k=1}^m (d_k)^h + (d_2)^h|, \ldots, \\ &|(c_1)^h - \sum_{k=1}^m (d_k)^h + (d_m)^h|) = a^h\end{aligned}$$

Tedy $|(x_i)^h| \leq a^h$. Definujme $a = \sqrt{\sum_{k=1}^l (a^h)^2 + 1}$. Z toho dostáváme

$$\|x_i\|^2 \leq \sum_{h=1}^l (x_i^h)^2 = \sum_{h=1}^l (a^h)^2 < \sum_{h=1}^l (a^h)^2 + 1 = a^2.$$

$\blacksquare$

Nabídka firmy j je definována jako $S_j(p) = \{\overline{y} \in Y_j;\ p \cdot \overline{y} = \max_{y \in Y_j} p \cdot y\}$. Nyní nechť $b = \sum_{i=1}^n d_i - \sum_{i=1}^n e_i$ a zvolme c stejně jako v Lemmatu 4.2 tak, že když $\sum_{j=1}^m y_j \geq b$, potom $\| y_j \| < c$, pro všechna j. Nechť $\widehat{Y}_j = Y_j \cap D_c$, kde $D_c = \{y \in D^l; \| y \| \leq c\}$. Pro $p \in R_+^l - \{0\}$, je $\widehat{S}_j(p) = \overline{y} \in \widehat{Y}_j$ takové, že funkce $\pi(p, y) = p \cdot y$, má na $\widehat{Y}_j$ maximum v $\overline{y}$. Potom se $\widehat{S}_j$ nazývá *falešná nabídka* firmy j.

Lemma 4.4:
Funkce $\pi(p,y) = p \cdot y$ nabývá na $\widehat{Y}_j$ svého maxima právě v jednom bodě. Tedy funkce $\widehat{S}_j : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{Y}_j$ je dobře definována. Dále je spojitá a platí pro ni:

(1) $\widehat{S}_j(\lambda p) = \widehat{S}_j(p)$ pro $\lambda > 0$.

(2) Jestliže $\|\widehat{S}_j(p)\| < c$, pak $\pi(p,y) = p \cdot y$ nabývá svého maxima na Y_j rovněž v bodě $\widehat{S}_j(p)$.

Důkaz lemmatu 4.4:
Sporem dokážeme, že funkce $\pi(p,y) = p \cdot y$ nabývá na $\widehat{Y}_j$ svého maxima právě v jednom bodě.
Nechť $\pi(p,y) = p \cdot y$ nabývá svého maxima v bodech $\overline{y}$ a $\widetilde{y}$. Musíme dokázat, že $\overline{y}$ a $\widetilde{y}$ leží na hranici. Kdyby $\overline{y} \in \widehat{Y}_j^{\circ}$, pak by pro všechna $t > 0$ bylo

$$(\overline{y} + tp) \cdot p = \overline{y}p + t\|p\|^2 > \overline{y}p$$

$\overline{y}$ a $\widetilde{y}$ musí tedy ležet na hranici a platí

$$p\overline{y} = p\widetilde{y} = q.$$

Předpokládejme, že $\overline{y} \neq \widetilde{y}$. Potom funkce $p \cdot y$ nabývá svého maxima ve všech bodech úsečky $\overline{y}\widetilde{y}$.
Platí tedy

$$p(t\overline{y} + (1-t)\widetilde{y}) = tp\overline{y} + (1-t)p\widetilde{y} = tq + (1-t)q = q.$$

Body $t\overline{y} + (1-t)\widetilde{y}$ musí tedy ležet na hranici, což je ovšem spor se striktní konvexitou množiny $Y_j \cap D_c$.
Důkaz spojitosti funkce $\widehat{S}_j : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{Y}_j$ vynecháme.
(1) Funkce $\pi(p,y) = py$ a $\pi(\lambda p, y) = \lambda py$ nabývají svého maxima ve stejných bodech množiny $\widehat{Y}_j$. Tedy $\widehat{S}_j(\lambda p) = \widehat{S}_j(p)$.
(2) Předpokládejme, že existuje $\overline{y} \in Y_j \backslash \widehat{Y}_j$ takové, že $p\overline{y} > p\widehat{S}_j(p)$.

Uvažujme úsečku $\overline{y}\ \widehat{S}_j(p)$. Tato úsečka leží celá v Y_j, neboť Y_j je konvexní. Navíc existuje $\varepsilon > 0$ tak, že pro $t \in (0, \varepsilon)$ je

$$\overline{\overline{y}} = (1-t)\widehat{S}_j(p) + t\overline{y} \in \widehat{Y}_j,$$

neboť $\|\widehat{S}_j(p)\| < c$.
Potom

$$\pi(p, \overline{\overline{y}}) = p\overline{\overline{y}} = (1-t)p \cdot \widehat{S}_j(p) + tp\overline{y} > (1-t)p \cdot \widehat{S}_j(p) + tp \cdot \widehat{S}_j(p) = p \cdot \widehat{S}_j(p),$$

což je spor s tím, že $\widehat{S}_j(p)$ je maximum $\pi(p, y)$ na $\widehat{Y}_j$.

■

Poptávkou i-tého spotřebitele rozumíme $D_i(p) = \{\overline{x} \in X_i;\ u_i(\overline{x}) = \max_{x \in X_i} u_i(x)$ a zároveň $p \cdot \overline{x} \le w_i\}$. Definujme $\widehat{w}_i : R^l_+ - \{0\} \to R$ jako *falešný příjem* spotřebitele i rovností $\widehat{w}_i(p) = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p \cdot \widehat{S}_j(p)$. Funkce $\widehat{w}_i$ je spojitá. Nechť jsou $b = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$, c jako v lemmatu 4.2 a e počáteční obdaření agenta, vyberme $c_1 \in R^l$ tak, že $\sum_{j=1}^{n} y_j + e \le c_1$, pokud $\|y_j\| < c$ pro všechna j. Vyberme a podle Lemmatu 4.3 a nechť $\widehat{X}_i = X_i \cap D_a$.
Falešná poptávka $\widehat{D}_i : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{X}_i$ je takové $\overline{x}$, že $u_i(\overline{x}) = \max\{u(x); x \in \widehat{X}, p \cdot x \le \widehat{w}_i(p)\}$ a $\widehat{B}_p = \{x \in X_i; p \cdot x \le \widehat{w}_i(p)\}$.

Lemma 4.5:
(1) Funkce u_i nabývá na $\widehat{B}_p$ svého maxima právě v jednom bodě, tedy funkce
$\widehat{D}_i(p) : R^l_+ - \{0\} \to \widehat{X}_i$ je dobře definovaná.
(2) $\widehat{D}_i(p)$ je spojitá.
(3) $\widehat{D}_i(\lambda p) = \widehat{D}_i(p)$.
(4) Je-li $\|\widehat{D}_i(p)\| < a$, pak $\widehat{D}_i(p)$ je bodem, kde u_i nabývá svého maxima

na množině

$$B_p = \{x \in X_i; p \cdot x \leq \widehat{w}_i(p)\}$$

a $p \cdot D_i(p) = \widehat{w}_i(p)$.

Důkaz:
(1) $\widehat{B}_p$ je kompaktní, proto u_i nabývá na $\widehat{B}_p$ svého maxima. Předpokládejme, že u_i nabývá svého maxima v bodech $\overline{x}$ a $\widehat{x}$, $u_i(\overline{x}) = u_i(\widehat{x})$. Jelikož je $\widehat{B}_p$ konvexní, pak úsečka $t\overline{x}+(1-t)\widehat{x},\ t \in (0,1)$ leží v $\widehat{B}_p$.Z podmínky striktní konvexity pro u_i plyne

$$u(t\overline{x} + (1-t)\widehat{x}) > u(\overline{x}) = u(\widehat{x}),\ \text{pro } t \in (0,1),$$

což je spor s tím, že u_i nabývá v bodech $\overline{x}$ a $\widehat{x}$ svého maxima.
(2) Důkaz vynecháme.
(3) $\widehat{D}_i(\lambda p)$ nabývá maxima na množině $\widehat{B}_{\lambda p}$, pro niž platí

$$\begin{aligned}\widehat{B}_{\lambda p} &= \{x \in \widehat{X}_i; \lambda px \leq \widehat{w}_i(\lambda p) = \lambda pe_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}\lambda p\widehat{S}_j(p)\} \\ &= \{x \in \widehat{X}_i; px \leq \widehat{w}_i(p) = pe_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij}p\widehat{S}_j(p)\} = \widehat{B}_p\end{aligned}$$

Hledáme tedy bod maxima stejné funkce na stejné množině.
(4) Nechť $\overline{x} \in X_i \cap D_a \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$ s normou $\|\overline{x}\| < a$, navíc je to bod, kde u_i nabývá maxima na $\widehat{B}_p$. Dále mějme bod $\widehat{x} \in X_i \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$. Předpokládejme, že $u_i(\widehat{x}) > u_i(\overline{x})$. Pak úsečka $\overline{x}\ \widehat{x}$ leží celá v $\{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\}$, celá v X_i a její část v D_a. Tedy existuje $t > 0,\ t \in (0,1)$ takové, že

$$(1-t)\overline{x} + t\widehat{x} \in X_i \cap \{x \in R^l; xp \leq \widehat{w}_i(p)\} \cap D_a = \widehat{B}_p$$

Z podmínky striktní konvexity na u_i vyplývá, že

$$u_i((1-t)\overline{x} + t\widehat{x}) > u(\overline{x}),$$

což je spor.

■

Důkaz věty 4.1:
Nejprve si zvolíme konstanty.

$$b = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$$

a c zvolme podle Lemmatu 4.2. Dále nechť

$$c_1 = (nc + e_1, nc + e_2, \ldots, nc + e_l).$$

Podle Lemmatu 4.3 zvolme a. Pro tato c a a dostaneme $\widehat{Y}_j$ a $\widehat{X}_i$ a z nich falešnou nabídku a falešnou poptávku.
Dále definujme funkce $\widehat{S}, \widehat{D}, \widehat{Z} : R^l_+ - \{0\} \to R^l$ takto:

$$\widehat{S} = \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_j + \sum_{i=1}^{n} e_i, \ \widehat{D} = \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_i, \ \widehat{Z} = \widehat{D} - \widehat{S}.$$

$\widehat{Z}$ má následující vlastnosti :
(1) Je homogenní, neboť:

$$\begin{aligned} \widehat{Z}(\lambda p) &= \widehat{D}(\lambda p) - \widehat{S}(\lambda p) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_i(\lambda p) - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_j(\lambda p) - \sum_{i=1}^{n} e_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_i(p) - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_j(p) - \sum_{i=1}^{n} e_i = \widehat{D}(p) - \widehat{S}(p) = \widehat{Z}(p) \end{aligned}$$

(2) $\widehat{Z}$ je spojitá.
(3) Splňuje slabý Walrasův zákon: Pro všechna p je

$$p \cdot \widehat{Z}(p) \leq 0.$$

Platí totiž

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{Z}(p) &= p \cdot \widehat{D}(p) - p \cdot \widehat{S}(p) = \sum_{i=1}^{n} p \cdot \widehat{D}_i(p) - \sum_{j=1}^{m} p \cdot \widehat{S}_j(p) - \sum_{i=1}^{n} p \cdot e_i = \\ &= \sum_{i=1}^{n} p \cdot \widehat{D}_i(p) - \sum_{i=1}^{n} \widehat{w}_i(p) = \sum_{i=1}^{n} [p \cdot \widehat{D}_i(p) - \widehat{w}(p)] \leq 0, \end{aligned}$$

neboť

$$\widehat{D}_i(p) \in \widehat{B}^i(p).$$

Podle věty 1.1 existuje $p^* \in R^l_+ - \{0\}$ tak, že $\widehat{Z}(p^*) \leq 0$.
Definujme $y_j^* = \widehat{S}_j(p^*)$, $x_j^* = \widehat{D}_j(p^*)$. Protože $\widehat{Z}(p^*) \leq 0$ dostáváme

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* - \sum_{i=1}^{n} e_i \leq 0 \quad \text{a tedy} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i.$$

Dále platí

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^* - \sum_{i=1}^{n} e_i \geq \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i = b$$

a tedy podle Lemmatu 4.2 $\|y_j^*\| < c$. Podle Lemmatu 4.4 je y_j^* bodem maxima funkce $\pi(p^*, y)$ na Y_j. Takže je splněna podmínka (C) z definice rovnováhy.
Platí následující nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* \leq \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i \leq n(c, c, \ldots, c) + \sum_{i=1}^{n} e_i = (nc + e_1, nc + e_2, \ldots, nc + e_l) = c_1.$$

Podle Lemmatu 4.3
$$\|x_i^*\| < a.$$

Dle Lemmatu 4.5 je x_i^* bodem, kde u_i nabývá svého maxima na B_p^i. Tedy platí podmínka (B), podle níž spotřebitel maximalizuje svůj užitek na své rozpočtové množině.
Nyní dokážeme zbývající podmínku (A). Nechť

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z, \ z \in R_+^l.$$

Skalárně vynásobíme s p^* a dostaneme

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^* p^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* p^* - \sum_{i=1}^{n} e_i p^* = z p^*,$$

přičemž všechny složky z a p^* jsou větší nebo rovny nule. Odtud plyne

$$z \cdot p^* = 0.$$

Podle vlastnosti 2.2(e) produkčních množin,

$$Y - R_+^l \subset Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j,$$

platí, že
$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z \in Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{j=1}^{m} y_j^* - z.$$

Potom

$$p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*) - p^* z = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*),$$

protože $p^* \cdot z = 0$ a tedy $\sum_{j=1}^{m} p^* y_j = \sum_{j=1}^{m} p^* y_j^*$.
y_j^* je maximum π_j na Y_j, tedy

$$\pi_j(p, y_j) = p y_j \leq p y_j^* = \pi_j(p, y_j^*)$$

Jelikož $\sum_{j=1}^{m} p y_j = \sum_{j=1}^{m} p y_j^*$ musí být

$$p y_j = p y_j^*.$$

Tedy pro (p^*, x^*, y) platí (C). Navíc

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z = \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

tedy (p^*, x^*, y) splňuje podmínku (A) dosažitelnosti stavu ekonomiky.
Protože platí podmínky (A), (B) a (C), je stav (p^*, x^*, y) rovnovážným stavem ekonomiky a Věta 4.1 je tím dokázána.

■

Zobecněním věty 4.1 a dalším krokem k důkazu Arrowovy-Debreuovy věty je následující věta 4.6.

Věta 4.6
Nechť jsou splněny předpoklady Arrow-Debreuovy věty a nechť navíc každá Y_j je uzavřená a konvexní. Potom existuje rovnovážný stav.

K jejímu důkazu budeme potřebovat definice falešné nabídky $\widehat{S}_j$ a falešné poptávky $\widehat{D}_i$ jako korespondence. Definujme korespondenci $\widehat{S}_j(p) : S_+^{l-1} \to \widehat{Y}_j$ takto:

$$\widehat{S}_j(p) = \{\overline{y} \in \widehat{Y}_j = Y_j \cap D_c;\ p \cdot \overline{y} = \max_{y \in \widehat{Y}_j} p \cdot y\}.$$

Lemma 4.7 (vlastnosti $\widehat{S}_j$)
Korespondence $\widehat{S}_j$ má tyto vlastnosti:
(1) $\widehat{S}_j(p)$ je konvexní uzavřená množina.
(2) Graf $\Gamma_{\widehat{S}_j} = \{(p, y) \in S_+^{l+1} \times \widehat{Y}_j,\ y \in \widehat{S}_j(p)\}$ je kompaktní.
(3) Jestliže $y_j \in \widehat{S}_j(p)$ a $\|y_j\| < c$, pak $y_j \in S_j(p)$.

Důkaz:
(1) Nechť $y_1, y_2 \in \widehat{S}_j(p)$ jsou různé a libovolné. Potom $\pi(y_1) = \pi(y_2)$. Nechť $y_3 = ty_1 + (1-t)y_2$ pro nějaké $t \in (0, 1)$.
Platí

$$\begin{aligned} \pi(y_3) &= py_3 = pty_1 + p(1-t)y_2 = tpy_1 + (1-t)py_2 = \\ &= t\pi(y_1) + (1-t)\pi(y_2) = \pi(y_1). \end{aligned}$$

Tedy y_3 je prvkem množiny $\widehat{S}_j(p)$.
(2) Důkaz vynecháme.
(3) Důkaz se provádí stejně jako v Lemmatu 4.4 (2).

■

Funkce $\widehat{w}_i : S_+^{l-1} \to R$ definovaná takto:

$$\widehat{w}_i(p) = p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \cdot p \cdot \widehat{S}_j(p)$$

je dobře definovaná a spojitá.
Falešnou poptávku definujeme jako korespondenci $\widehat{D}_i : S_+^{l+1} \to \widehat{X}_i$ určenou vztahem

$$\begin{aligned}\widehat{D}_i(p) \;\; = \;\; & \{\overline{x} \in X_i \cap D_c; \text{funkce } u_i(x) \text{ nabývá maxima v } \overline{x} \\ & \text{na } \widehat{B}_p = \{x \in X_i; p \cdot x \leq \widehat{w}_i\}\}.\end{aligned}$$

Lemma 4.8 (Vlastnosti $\widehat{D}_i$)
Pro korespondenci $\widehat{D}_i$ platí:
(1) $\widehat{D}_i(p)$ je konvexní a uzavřená množina.
(2) Graf $\Gamma_{\widehat{D}_i} = \{(p, x) \in S_+^{l+1} \times \widehat{X}_i,\ x \in \widehat{D}_i(p)\}$ je kompaktní.
(3) $\widehat{D}_i(\lambda p) = \widehat{D}_i(p)$.
(4) Jestliže $x_i \in \widehat{D}_i(p)$ a $\|x_i\| < a$, pak $x_i \in \widehat{D}_i(p)$.

Důkaz:
(1) Nejprve ukáži, že $\widehat{D}_i(p)$ je uzavřená. Pro $\overline{x}_n \in \widehat{D}_i(p)$ platí, že $u_i(\overline{x}_n)$ je bodem maxima funkce $u_i(x)$ na množině $\widehat{B}(p)$. Nechť $\overline{x}_n \to x' \in \widehat{B}_p$, jelikož je $u_i(x)$ spojitá, platí

$$u_i(x') = \lim u_i(\overline{x}_n) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x),$$

tedy $x \in \widehat{D}_i(p)$ a $\widehat{D}_i(p)$ je uzavřená.
Nyní ukáži, že $\widehat{D}_i(p)$ je konvexní. Pro body $z, y \in \widehat{X}_i$ splňující $u_i(z) = u_i(y) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x)$ platí

$$\begin{aligned} p(tz + (1-t)y) &= tpz + (1-t)py \leq \\ &\leq t \cdot \widehat{w}_i(p) + (1-t) \cdot \widehat{w}_i(p) = \widehat{w}_i(p). \end{aligned}$$

Z toho vyplývá, že $tz + (1-t)y \in \widehat{B}_p$.
Podle vlastnosti (2.4b)

$$u_i(tz + (1-t)y) \geq u_i(x) = \max_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x).$$

Tudíž $u_i(tz + (1-t)y) = \max\limits_{x \in \widehat{B}_p} u_i(x)$ a z toho vyplývá, že $tz + (1-t)y \in \widehat{D}_i(p)$. $\widehat{D}_i(p)$ je tedy konvexní.
(2) Důkaz vynecháme.
(3) $\widehat{D}_i(\lambda p)$ nabývá maxima na množině $\widehat{B}_{\lambda p}$, pro niž platí

$$\begin{aligned} \widehat{B}_{\lambda p} &= \{x \in \widehat{X}_i; \lambda px \leq \widehat{w}_i(\lambda p) = \lambda pe_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \lambda p \widehat{S}_j(p)\} \\ &= \{x \in \widehat{X}_i; px \leq \widehat{w}_i(p) = pe_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} p \widehat{S}_j(p)\} = \widehat{B}_p \end{aligned}$$

Hledáme tedy bod maxima stejné funkce na stejné množině.
(4) Důkaz se provádí stejně jako v Lemmatu 4.5 (4).

■

Důkaz věty 4.6
Nejprve si opět zvolíme konstanty.

$$b = \sum_{i=1}^{n} d_i - \sum_{i=1}^{n} e_i$$

a c zvolme podle Lemmatu 4.2. Dále nechť

$$c_1 = (nc + e_1, nc + e_2, \ldots, nc + e_l).$$

Podle Lemmatu 4.3 zvolme a. Pro tato c a a dostaneme $\widehat{Y}_j$ a $\widehat{X}_i$ a z nich falešnou nabídku $\widehat{S}_j(p)$ s vlastnostmi v Lemmatu 4.7 a falešnou poptávku $\widehat{D}_j(p)$ s vlastnostmi v Lemmatu 4.8.
Vezmeme $\varepsilon > 0$. Podle věty 1.2 existuje spojitá funkce $\widehat{S}_{j\varepsilon} : S_+^{l-1} \to \widehat{Y}_j$ tak, že

$$\Gamma_{\widehat{S}_{j\varepsilon}} \subset B_\varepsilon(\Gamma_{\widehat{S}_j}).$$

Stejně pro $\widehat{D}_i$ dostaneme spojité zobrazení $\widehat{D}_{i\varepsilon} : S_+^{l-1} \to \widehat{X}_i$ s vlastností

$$\Gamma_{\widehat{D}_{i\varepsilon}} \subset B_\varepsilon(\Gamma_{\widehat{D}_i}),$$

pro které navíc na S_+^{l-1} platí

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) - \widehat{w}_i(p) &< \varepsilon \\ p \cdot \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) &< \widehat{w}_i(p) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Definujme $Z_\varepsilon : S_+^{l-1} \to R^l$ a $\widehat{Z}_\varepsilon : S_+^{l-1} \to R^l$ takto

$$\begin{aligned} Z_\varepsilon(p) &= \sum_{i=1}^n \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) - \sum_{j=1}^m \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) - \sum_{i=1}^n e_i \\ \widehat{Z}_\varepsilon(p) &= Z_\varepsilon(p) - (p \cdot Z_\varepsilon(p)) \cdot p. \end{aligned}$$

Pak platí

$$\begin{aligned} p \cdot \widehat{Z}_\varepsilon(p) &= p \cdot Z_\varepsilon(p) - (p \cdot Z_\varepsilon(p))(p \cdot p) = \\ &= p \cdot Z_\varepsilon(p) - p \cdot Z_\varepsilon(p) = 0. \end{aligned}$$

Dále platí

$$
\begin{aligned}
p \cdot Z_\varepsilon(p) = \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot p = \\
= \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j}(p) \cdot p + \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j}(p) \cdot p \\
= \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j}(p) \cdot p - \sum_{i=1}^{n} e_i \cdot p + \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p \\
\leq \sum_{i=1}^{n} \widehat{D}_{i\varepsilon}(p) \cdot p - \widehat{w}_i(p) + \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j}(p) \cdot p - \sum_{j=1}^{m} \widehat{S}_{j\varepsilon}(p) \cdot p < 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

$\widehat{Z}_\varepsilon$ splňuje Walrasův zákon. Podle věty 1.1 existuje $p_\varepsilon \in S_+^{l-1}$ tak, že

$$\widehat{Z}_\varepsilon(p_\varepsilon) \leq 0.$$

Podle poznámky 1.1 je buď

$$\widehat{Z}^h_\varepsilon(p_\varepsilon) = 0 \quad \text{nebo} \quad p^h_\varepsilon = 0. \tag{4.1}$$

Z (4.1) a z nerovnosti pro $p \cdot Z_\varepsilon(p)$ plyne

$$Z^h_\varepsilon(p_\varepsilon) = (p_\varepsilon \cdot Z_\varepsilon(p_\varepsilon))p^h_\varepsilon < 2\varepsilon \cdot p^h_\varepsilon \leq 2\varepsilon,$$

pokud $p^h_\varepsilon \neq 0$ nebo

$$Z^h_\varepsilon(p_\varepsilon) \leq 0,$$

pokud $p^h_\varepsilon = 0$. Tedy

$$Z^h_\varepsilon(p_\varepsilon) \leq 2\varepsilon \quad \text{pro všechna } h.$$

Nechť jsou $y_{j\varepsilon} = \widehat{S}_{j\varepsilon}(p_\varepsilon)$ a $x_{i\varepsilon} = \widehat{D}_{i\varepsilon}(p_\varepsilon)$. Dále máme posloupnost $\{\varepsilon_k\}_{k=1}^{\infty}$ konvergující k 0. Z ní lze vybrat podposloupnost tak, že

$$p_{\varepsilon_k} \to p^* \in S_+^{l-1}, \quad y_{j\varepsilon_k} \to y_j^* \in \widehat{S}_j(p), \quad x_{i\varepsilon_k} \to x_i^* \in \widehat{D}_i(p).$$

Stejně jako v důkazu věty 4.1 se ukáže, že když

$$y_j^* \in \widehat{S}_j(p^*) \ \text{ a } \ \|y_j^*\| < c,$$

potom $y_j^* \in S_j(p^*)$, což je podmínka (C) z definice rovnováhy, a že když

$$x_i^* \in \widehat{D}_i(p^*) \ \text{ a } \ \|x_i^*\| < a,$$

potom $x_i^* \in D_i(p^*)$, což je podmínka (B) z definice rovnováhy.
Nyní již zbývá pouze dokázat podmínku A z definice rovnováhy.
Z definice Z_ε^h plyne, že

$$\sum_{i=1}^{n} x_{i\varepsilon}^h - \sum_{j=1}^{m} y_{j\varepsilon}^h - \sum_{i=1}^{n} e_i^h \leq 2\varepsilon.$$

Limitním přechodem dostaneme nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^{*h} - \sum_{j=1}^{m} y_j^{*h} - \sum_{i=1}^{n} e_i^h \leq 0.$$

Tudíž platí

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* - \sum_{i=1}^{n} e_i \leq 0.$$

Nyní budeme postupovat stejně jako v důkazu věty 4.1.
Položme

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z, \; z \in R_+^l.$$

Skalárně vynásobíme s p^* a dostaneme

$$0 \geq \sum_{i=1}^{n} x_i^* p^* - \sum_{j=1}^{m} y_j^* p^* - \sum_{i=1}^{n} e_i p^* = zp^*,$$

přičemž všechny složky z a p^* jsou větší nebo rovny nule. Odtud plyne

$$z \cdot p^* = 0.$$

Podle vlastnosti 2.2(e) produkčních množin,

$$Y - R_+^l \subset Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j,$$

platí, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z \in Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ tak, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j = \sum_{j=1}^{m} y_j^* - z.$$

Potom

$$p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^* - z) = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*) - p^* z = p^*(\sum_{j=1}^{m} y_j^*),$$

protože $p^* \cdot z = 0$ a tedy $\sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j = \sum\limits_{j=1}^{m} p^* y_j^*$.
y_j^* je maximum π_j na Y_j, tedy

$$\pi_j(p, y_j) = py_j \leq py_j^* = \pi_j(p, y_j^*)$$

Jelikož $\sum\limits_{j=1}^{m} py_j = \sum\limits_{j=1}^{m} py_j^*$ musí být $py_j = py_j^*$.
Tedy pro (p^*, x^*, y) platí (C). Navíc

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i - z = \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} e_i,$$

tedy (p^*, x^*, y) splňuje podmínku (A) dosažitelnosti stavu ekonomiky.
Protože platí podmínky (A), (B) a (C), je stav (p^*, x^*, y) rovnovážným stavem ekonomiky a Věta 4.8 je tím dokázána.

■

Než začnu dokazovat vlastní Arrowovu-Debreuovu větu musím ještě ukázat lemma o vlastnostech množin Y_j a Y.

Lemma 4.9
Nechť Y_j^* značí uzávěr konvexního obalu množiny Y_j, neboli $Y_j^* = \overline{\widetilde{Y_j}}$. Za předpokladu, že $\sum\limits_{j=1}^{m} Y_j = Y$ je konvexní a uzavřená, platí

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j^* = Y.$$

Důkaz:
"$\supseteq$"

Podle lemmatu 1.4 je

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j^* \supseteq \sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y}_j = \widetilde{\sum_{j=1}^{m} Y_j} = \widetilde{Y} = Y.$$

"$\subseteq$"

Podle lemmatu 1.5 platí, že

$$\sum_{j=1}^{m} Y_j^* = \sum_{j=1}^{m} \overline{\widetilde{Y}_j} \subseteq \overline{\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y}_j}.$$

Pro výraz $\overline{\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y}_j}$ platí

$$\overline{\sum_{j=1}^{m} \widetilde{Y}_j} = \overline{\widetilde{\sum_{j=1}^{m} Y_j}} = \overline{\widetilde{Y}} = \overline{Y} = Y$$

a lemma 4.9 je tedy dokázáno.

$\blacksquare$

Důkaz Arrowovy-Debreuovy věty

Rozdíl mezi Arrowovou-Debreuovou větou a větou 4.6 spočívá v podmínkách kladených na množiny Y_j. Y_j obecně nejsou ani konvexní ani uzavřené, pouze o $\sum_{j=1}^{m} Y_j$ se předpokládá, že je uzavřená a konvexní.

Nyní místo Y_j uvažujme $Y_j^* = \overline{\widetilde{Y}_j}$. Platí

$$Y_j \subset Y_j^* \quad \text{a} \quad \sum_{j=1}^{m} Y_j = Y = \sum_{j=1}^{m} Y_j^*.$$

Aplikujeme-li větu 4.6 na množiny Y_j^*, obdržíme rovnovážný stav (x_i^*, y_j^*, p). Podle lemmatu 4.9 pro $y_j^* \in Y_j^*$ platí, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* \in \sum_{j=1}^{m} Y_j^* = Y.$$

Tedy existují $y_j \in Y_j$ takové, že

$$\sum_{j=1}^{m} y_j^* = \sum_{j=1}^{m} y_j \qquad (*)$$

Dokážeme, že platí rovněž

$$p \cdot y_j = p \cdot y_j^*. \qquad (**)$$

Vynásobením výrazu $(*)$ cenovým vektorem p dostaneme

$$p \cdot (\sum_{j=1}^{m} y_j^*) = p \cdot (\sum_{j=1}^{m} y_j). \qquad (+)$$

$p \cdot y_j^*$ je maximum funkce $p \cdot y_j$ na množině $Y_j^* \supseteq Y_j$, pro všechna j. Platí tedy

$$p \cdot y_j^* \geq p \cdot y_j.$$

Aby platila rovnost $(+)$, musí být splněna i rovnost $(**)$.
Nyní ověříme, že stav (x_i^*, y_j, p) splňuje podmínky rovnováhy, víme-li, že (x_i^*, y_j^*, p) je rovnovážný stav a že $p \cdot y_j^* = p \cdot y_j$ a $\sum_{j=1}^{m} y_j^* = \sum_{j=1}^{m} y_j$.

(A) $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = \sum_{j=1}^{m} y_j^* + \sum_{i=1}^{n} e_i = \sum_{j=1}^{m} y_j + \sum_{i=1}^{n} e_i.$

(B) x_i^* maximalizuje u_i na množině

$$\begin{aligned} B_i &= \{\overline{x} \in X_i;\ p \cdot \overline{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j^*\} = \\ &= \{\overline{x} \in X_i;\ p \cdot \overline{x} \leq p \cdot e_i + \sum_{j=1}^{m} \theta_{ij} \cdot p \cdot y_j\}. \end{aligned}$$

(C) y_j maximalizuje funkci $p \cdot y$ na Y_j, neboť y_j^* maximalizuje $p \cdot y$ na Y_j^* a platí $p \cdot y_j = p \cdot y_j^*$ a $Y_j^* \supseteq Y_j$.

Arrowova-Debreuova věta je tedy dokázána.

■

Literatura

[1] Cellina, A.: A Theorem on the Approximation of Compact Multi-valued Mappings. Rendiconti Academia Nazionale Lincei, (8) 47 (1969), 429–433

[2] Debreu, G.: Theory of Value, An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium. John Wiley & Sons, Inc.,New York, 1959

[3] Debreu, G.: Ekonomická teorie v matematické formulaci (přednáška při příležitosti udělení Nobelovy ceny), Nobelova cena za ekonomii, Academia, Praha, 1993

[4] Paseka, J.: Matematická ekonomie, text k přednáškám,
http://www.math.muni.cz/~paseka

[5] Smale, S.: Global Analysis and Economics, Handbook of Mathematical Economics. 8.kap. Elsevier Science, Amsterdam, 1994, 331–369

[6] Soukupová, J. a kol.: Mikroekonomie. 2.vyd. Management Press, Praha, 1999

[7] Žalská, J.: Teorie všeobecné rovnováhy, vybrané problémy. Brno, 2000