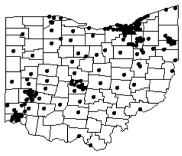
Modelování prostorového uspořádání bodů (pattern detectors)

Uspořádání bodů v prostoru



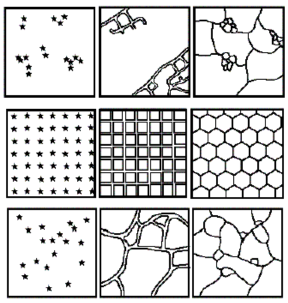
Rozmístění bodů v prostoru je výsledkem určitých procesů či vhodných podmínek (lokace měst je výsledkem působení faktorů jako reliéf, přírodní zdroje, komunikace, atd.)

Cílem studia prostorového rozmístění bodů je zjistit:

- **jak daleko má konkrétní rozmístění objektů k rozmístění teoretickému**
- **jak se liší rozmístění bodů ve dvou různých oblastech**
- **jak se mění rozmístění bodů v rámci jedné oblasti v čase.**

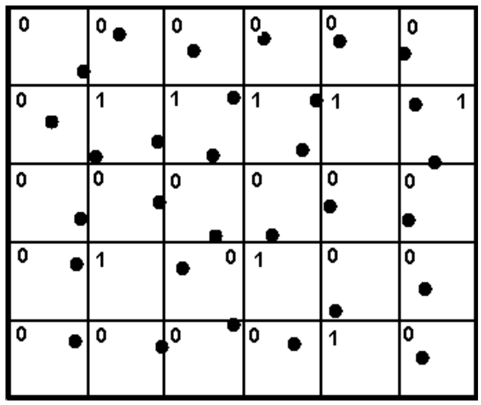
Statisticky prokázaný výskyt určitého prostorového uspořádání může být základem pro zjišťování příčin, které vedly k pozorovanému uspořádání.

Základní typy prostorového uspořádání bodů



- **Shlukové (Clustered)**
- **Pravidelné (Regular)**
- **Náhodné (Random)**

Klasifikace prostorového uspořádání bodů



Body – Skóre

0 -> 1
1 -> 0
2 -> 1
3 -> 4
4 -> 9
5 -> 16
6 -> 25
7 -> 36

Σ = 8

Klasifikace prostorového uspořádání bodů

Σ < 16	**Pravidelné (Regular)**
Σ =(17;45)	**Náhodné (Random)**
Σ > 45	**Shlukové (Clustered)**

Základní metody statistického popisu prostorového uspořádání bodů

- **Analýza kvadrátů** – testujeme, zda rozmístění bodů v ploše je náhodné či nikoliv.
- **Metoda nejbližšího souseda** – porovnává průměrnou vzdálenost mezi nejbližšími sousedy pole bodů k teoretickému rozmístění.
- **Prostorová autokorelace** – měří jak podobné či nepodobné jsou hodnoty atributů sousedních bodů.

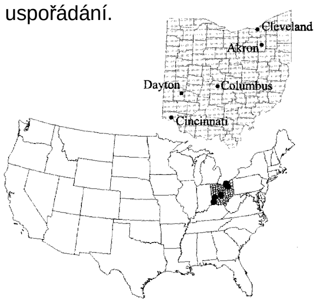
Problémy spojené s popisem prostorového uspořádání bodů

• měřítko
• rozsah studované oblasti
• kartografická projekce

Měřítko – je nutné vhodně zvolit tak, aby studovaný jev mohl být prezentován body v prostoru.

Rozsah studované oblasti

V závislosti na zvolené oblasti (často vymezené administrativními hranicemi) se mění jak vzdálenosti mezi jednotlivými body, tak také charakteristiky jejich prostorového uspořádání.



Kartografická projekce

Projekce se volí podle účelu (viz. analýza kvadrátů).

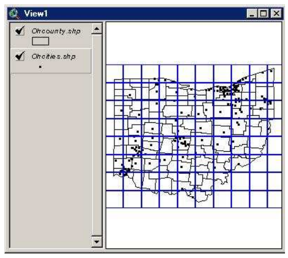
Projekcí se mění tvar, vzdálenosti, vzájemná poloha objektů.

Čím větší studovaná oblast, tím větší bude role zvolené projekce.

Analýza kvadrátů (QUADRAT ANALYSIS)

• Je založena na **hodnocení změn hustoty bodů** v prostoru. Je porovnáváno, zda rozmístění bodů v prostoru je náhodné, či má blíže k uspořádání shlukovému či pravidelnému.

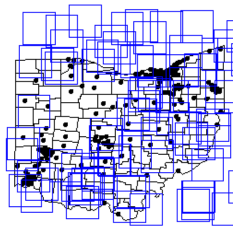
• Studovaná plocha je rozdělena pravidelnou sítí na buňky a je zjištěn počet bodů v každé buňce.



Analýza kvadrátů

• Je analyzováno rozdělení četností buněk s určitým počtem bodů.
• Toto rozdělení je porovnáváno s náhodným rozdělením četností.
• **Extrémně shlukové uspořádání** – většina bodů v jedné či několika málo buňkách.
• **Extrémně pravidelné** – ve všech buňkách přibližně stejně
• Buňky se označují jako **kvadráty** a nemusí jít o čtverce, ale např. i o kruhy či šestiúhelníky – je to dáno empirií.
• V rámci jedné analýzy však tvar a velikost buněk musí být konstantní.

Analýza kvadrátů



Modifikace metody - Při analýze lze buňky stejné velikosti také rozmístit náhodně po studované ploše.

Optimální velikost kvadrátů (QS)

$$QS = \frac{2 \cdot A}{n}$$

A - plocha studované oblasti

n - počet analyzovaných bodů.

Velikost strany vhodného kvadrátu

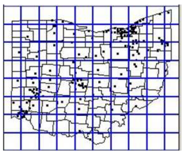
$$\sqrt{2A/n}$$

Testování výsledků analýzy kvadrátů

Získané rozložení četností bodů v kvadrátech (empirické) je porovnáváno s náhodným rozložením (teoretickým).

Vhodným testem je např. K-S test nebo X^2 test

Testem můžeme kvantifikovat rozdíl empirického a teoretického (shlukové, pravidelné, náhodné) rozdělení bodů v ploše.



Počet měst v každém čtverci	Zjištěné rozdělení	Pravidelné rozdělení	Shlukové rozdělení
0	36	0	79
1	17	26	0
2	10	26	0
3	3	26	0
4	2	2	0
5	2	0	0
6	1	0	0
7	1	0	0
8	1	0	0
9	1	0	0
10	1	0	0
11	1	0	0
12	1	0	0
13	1	0	0
14	1	0	0
28	1	0	0
164	0	0	1

Zjištěné rozdělení četnosti 164 měst v kvadrátech ve studované oblasti a rozdělení četností teoretická

Praktický postup testování výsledků analýzy kvadrátů

1. (H0) - neexistuje statistiky významný rozdíl (je-li rozdíl malý, může být výsledkem náhody, čím je větší, s tím větší pravděpodobností náhodný není, ale je statistiky významný).

2. Zvolíme hladinu významnosti $\alpha = 0{,}05$

3. Vypočteme kumulované četnosti (O – observed, E – expected)

4. Vypočteme testovací kritérium: $D = \max|O_i - E_i|$

5. Vypočteme kritickou hodnotu: $D_\alpha = \frac{1{,}36}{\sqrt{m}}$ $\quad D_\alpha = 1{,}36\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}$

6. Je-li vypočtená hodnota D větší než kritická hodnota D_α, potom rozdíl mezi oběma uspořádáními je statisticky významný.

Použití K-S testu: Je rozmístění bodů v prostoru pravidelné?

Počet měst v každém čtverci	Zjištěné rozdělení	Relativní četnosti	Kumulativní četnosti	Pravidelné rozdělení	Relativní četnosti	Kumulativní četnosti	Absolutní diference
0	36	0,450	0,450	0	0,000	0,00	0,45
1	17	0,213	0,663	26	0,325	0,33	0,34
2	10	0,125	0,788	26	0,325	0,65	0,14
3	3	0,038	0,825	26	0,325	0,98	0,15
4	2	0,025	0,850	2	0,025	1,00	0,15
5	2	0,025	0,875	0	0,000	1,00	0,13
6	1	0,013	0,888	0	0,000	1,00	0,11
7	1	0,013	0,900	0	0,000	1,00	0,10
8	1	0,013	0,913	0	0,000	1,00	0,09
9	1	0,013	0,925	0	0,000	1,00	0,08
10	1	0,013	0,938	0	0,000	1,00	0,06
11	1	0,013	0,950	0	0,000	1,00	0,05
12	1	0,013	0,963	0	0,000	1,00	0,04
13	1	0,013	0,975	0	0,000	1,00	0,03
14	1	0,013	0,988	0	0,000	1,00	0,01
28	1	0,013	1,000	0	0,000	1,00	0,00
164	0	0,000	1,000	0	0,000	1,00	0,00

Testovací kritérium: D = 0,45

Kritická hodnota pro $\alpha = 0{,}05$: $D_\alpha = 0{,}2115$

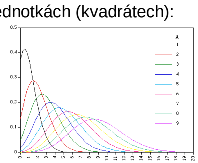
Zamítáme nulovou hypotézu - rozdělení měst se statisticky významně liší od rozdělění pravidelného

Jak porovnat dané rozmístění bodů s rozmístěním náhodným?

Testování pozorovaného rozložení bodů s rozložením náhodně generovaným (podle určitého teoretického rozdělení).

Poissonovo rozdělení (Poisson random process) je určeno průměrnou frekvencí výskytu (λ) v jednotlivých jednotkách (kvadrátech):

$$\lambda = {}^{n}\!/_{m}$$



m – počet kvadrátů; *n* - počet bodů v prostoru

Je-li *x* počet bodů v kvadrátu, potom pravděpodobnost výskytu *x* bodů v kvadrátu podle Poissonova rozdělení je definována vztahem:

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

Z uvedeného vztahu můžeme pro různá *x* vypočítat pravděpodobnost rozložení bodů, které budou mít Poissonovo (náhodné) rozdělení

Hodnoty průměru a rozptylu Poissonova rozdělení se rovnají hodnotě (λ).

Interpretace:

Bude-li distribuce bodů v prostoru generována náhodným procesem, potom toto rozdělení má stejný průměr a rozptyl a jejich poměr se bude blížit jedné.

Postup testování:

1. Vypočteme hodnoty průměru a rozptylu pro četnosti bodů v kvadrátech.
2. Hodnoty dáme do poměru, hodnotu porovnáme s 1.
3. Rozdíl lze standardizovat (vyjádřit v násobcích směrodatné odchylky).
4. Vyjde-li hodnota větší než 1,96, potom je rozdíl statisticky významný na hladině $\alpha = 0,05$.

Test založený na poměru průměru a rozptylu je silnější než K-S test

Lze ho však použít pouze v případě, že předpokládáme Poissonovo rozdělení studované množiny bodů.

Testování výsledků analýzy kvadrátů vůči rozložení generovanému Poissonovým náhodným procesem (pro $\lambda = 2,05$) s pomocí K-S testu

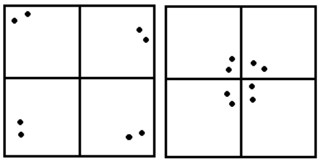
Počet měst v každém čtverci	Zjištěné rozdělen	Relativní četnosti	Kumulativní četnosti	Pravděpodobnosti Poissonova rozd.	Kumulativní četnosti	Absolutní diference
0	36	0,450	0,450	0,1287	0,13	0,32
1	17	0,213	0,663	0,2639	0,39	0,27
2	10	0,125	0,788	0,2705	0,66	0,12
3	3	0,038	0,825	0,1848	0,85	0,02
4	2	0,025	0,850	0,0947	0,94	0,09
5	2	0,025	0,875	0,0388	0,98	0,11
6	1	0,013	0,888	0,0133	0,99	0,11
7	1	0,013	0,900	0,0039	1,00	0,10
8	1	0,013	0,913	0,001	1,00	0,09
9	1	0,013	0,925	0,0002	1,00	0,07
10	1	0,013	0,938	0	1,00	0,06
11	1	0,013	0,950	0	1,00	0,05
12	1	0,013	0,963	0	1,00	0,04
13	1	0,013	0,975	0	1,00	0,02
14	1	0,013	0,988	0	1,00	0,01
28	1	0,013	1,000	0	1,00	0,00
164	0	0,000	1,000	0	1,00	0,00

Testovací kritérium: $D = 0,3213$

Kritická hodnota pro $\alpha = 0,05$: $D_{\alpha} = 0,1520$

Rozdíl mezi oběma uspořádáními je statisticky významný.

Omezení analýzy kvadrátů:



Analýza kvadrátů neřeší otázku rozložení bodů uvnitř kvadrátů.

Analýza nejbližšího souseda

(NEAREST NEIGHBOUR ANALYSIS)

Metoda analýzy kvadrátů je založena na konceptu **hustoty** (počet bodů v ploše)

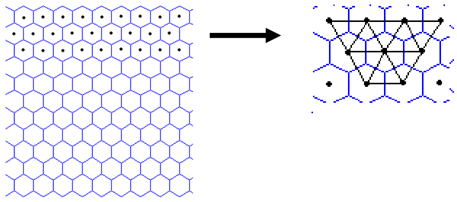
Metoda analýzy nejbližšího souseda je naopak založena na konceptu **vzdálenosti** (spacing – plocha připadající na bod).

Metoda analýzy nejbližšího souseda je založena na porovnání pozorované průměrné vzdálenosti mezi nejbližšími sousedy a této průměrné vzdálenosti u známého (teoretického) prostorového uspořádání (pravidelného či náhodného).

Pravidelné uspořádání bodů

Nejpravidelnější uspořádání – studovaná oblast je rozdělena sítí pravidelných šestiúhelníků a body v této oblasti tvoří jejich středy.

Body lze pospojovat do sítě pravidelných trojúhelníků.



Testovací kritérium

Za výše uvedené konfigurace bude vzdálenost mezi body rovna:

$$1{,}075\sqrt{A/n}$$

kde *A* je plocha a *n* počet bodů v ploše.

K testování, zda má určité rozložení bodů v ploše jistý vzorek lze využít **R statistiku (R - randomness)**.

R statistika

Určí se jako poměr mezi pozorovanou a očekávanou průměrnou vzdáleností nejbližších sousedů v určité oblasti:

$$R = \frac{r_{obs}}{r_{\exp}}$$

Hodnotu r_{obs} zjistíme tak, že určíme vzdálenost mezi daným bodem a všemi jeho sousedy. Dále najdeme nejkratší vzdálenost – tedy nejbližšího souseda. Tento proces se opakuje pro všechny body. Ze všech nejkratších vzdáleností se vypočte průměr.

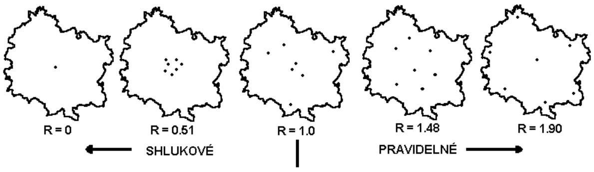
Hodnotu r_{exp} zjistíme ze vztahu:

$$r_{\exp} = \frac{1}{2\sqrt{n/A}}$$

Interpretace hodnot R statistiky

Čím je hodnota R < 1, tím více se prostorové rozložení bodů blíží rozložení shlukovému ($r_{obs} < r_{exp}$).

Čím je hodnota R > 1, tím více se prostorové rozložení bodů blíží rozložení pravidelnému ($r_{obs} > r_{exp}$).



R = 0	zcela shlukové uspořádání
R = 1	náhodné uspořádání
R = 2,149	zcela pravidelné uspořádání

K hodnocení rozdílu mezi pozorovanou a očekávanou vzdáleností nejbližšího souseda lze využít tzv. **směrodatné chyby** (Standard Error – SE_r)

$$SE_r = \frac{0{,}26136}{\sqrt{n^2/A}}$$

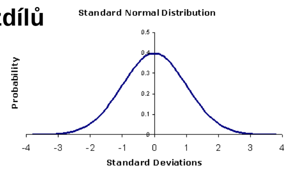
Směrodatná chyba popisuje pravděpodobnost, že jakýkoliv rozdíl dvou hodnot je výsledkem náhodných vlivů. Je-li zjištěná diference malá ve srovnání s *SE*, potom rozdíl není statisticky významný a naopak.

Za statisticky významný považujeme rozdíl, který můžeme obdržet v pěti případech ze sta – tedy s pravděpodobností 5 %, α=0,05.

Vyjádřeno v násobcích směrodatné chyby - rozdíl mezi dvěma populacemi považujeme za statisticky významný, jestliže je menší než $-1{,}96SE_r$ a nebo větší než $+1{,}96SE_r$:

Pravděpodobnost (<95%) = ($-1{,}96SE_r$; $+1{,}96SE_r$)

Standardizace hodnot rozdílů



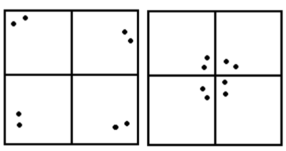
Pomocí směrodatné chyby lze vypočítat standardizovanou hodnotu (Z-skóre):

$$Z_R = \frac{r_{obs} - r_{\exp}}{SE_r}$$

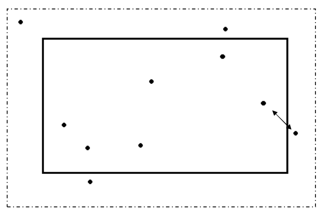
Je-li tedy $Z_R < -1{,}96$ či $Z_R > 1{,}96$ potom vypočtený rozdíl mezi pozorovaným a náhodným uspořádáním je statisticky významný – tedy není náhodný a naopak.

Problémy spojené s metodou analýzy nejbližšího souseda:

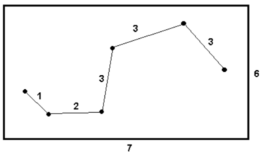
- Nelze spoléhat na vizuální srovnání prostorového rozložení ani na vypočtenou hodnotu R. Ta by měla být doplněna hodnotou Z_R pro ověření statistické významnosti pozorovaného rozdílu.
- Výsledky jsou vysoce citlivé k měřítku (lokální vs. regionální)
- V závislosti na studovaném jevu musí být věnována pozornost vymezení studované plochy (administrativní či přirozené hranice).
- Metoda analýzy nejbližšího souseda může být rozšířena na analýzu nejbližších sousedů druhého, třetího a vyšších řádů.



Metoda nejbližšího souseda – problém definice hranic studované oblasti (boundary effect)



Metoda nejbližšího souseda – problém definice hranic studované oblasti (boundary effect)



R_o=2.167

R_e=1.323

→ $R=R_o/R_e$ = 1.638 → tendence k pravidelnému rozložení bodů

Pomocí *SE* převedeme **R** na standardizovanou hodnotu (Z skore) → $Z=2{,}99$ → Z > 1.96 → Zamítáme H0 (náhodné rozmístění bodů)

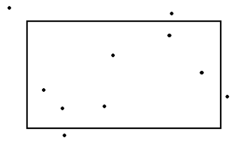
Boundary effect?

Co když nemáme jinou informaci než tu ze studované oblasti?

Simulace

- H0 – rozmístění bodů je náhodné
- V prostoru 7 x 6 simulujeme náhodné rozmístění 6-ti bodů
- Pro každý náhodný pokus vypočteme R_o
- Zopakujeme to 10 000 krát, dostaneme průměrné R_o=*1.62*
- $R_o > R_e$ (R_e=*1,323*)
- Body jsou v průměru dále od sebe než očekáváme a to i po 10 000 náhodných pokusech . Proč?

(Body blízko hranice jsou relativně dále od ostatních bodů studované oblasti než by pravděpodobně byly, kdybychom uvažovali body i vně oblasti)



Princip simulace metodou Monte Carlo

- 10 000 hodnot *Ro* seřadíme od největší po nejmenší
- Najdeme 9 500. největší hodnotu R_o = *2,29* (tedy jen v pěti procentech případů bychom dostali hodnotu R_o větší než *2,29)*
- R_o pro našich původních 6 bodů bylo jen *2.176* – tedy takovouto hodnotu bychom dostali častěji než jen v 5% případů
- Proto Ho přijímáme.
- Simulací jsme zjistili, že rozdělení bodů ve studovaném prostoru se od rozdělení náhodného významně neliší