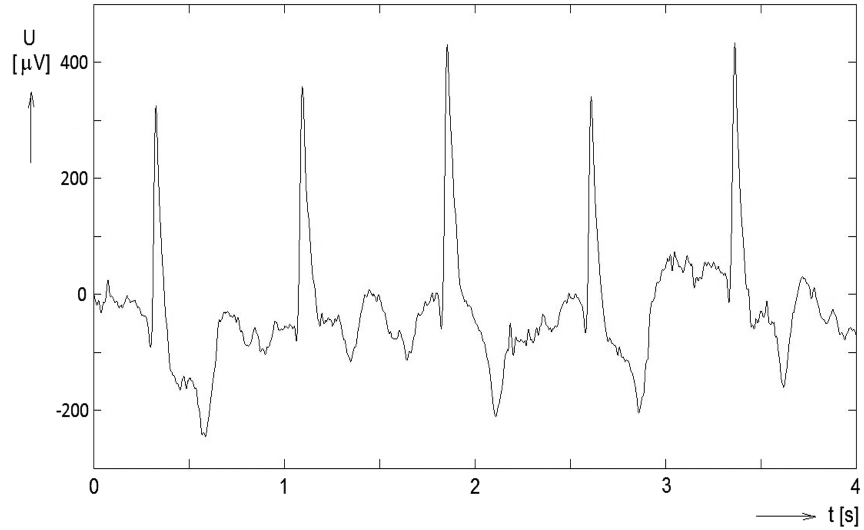
ČASOVÉ ŘADY

Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.
prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

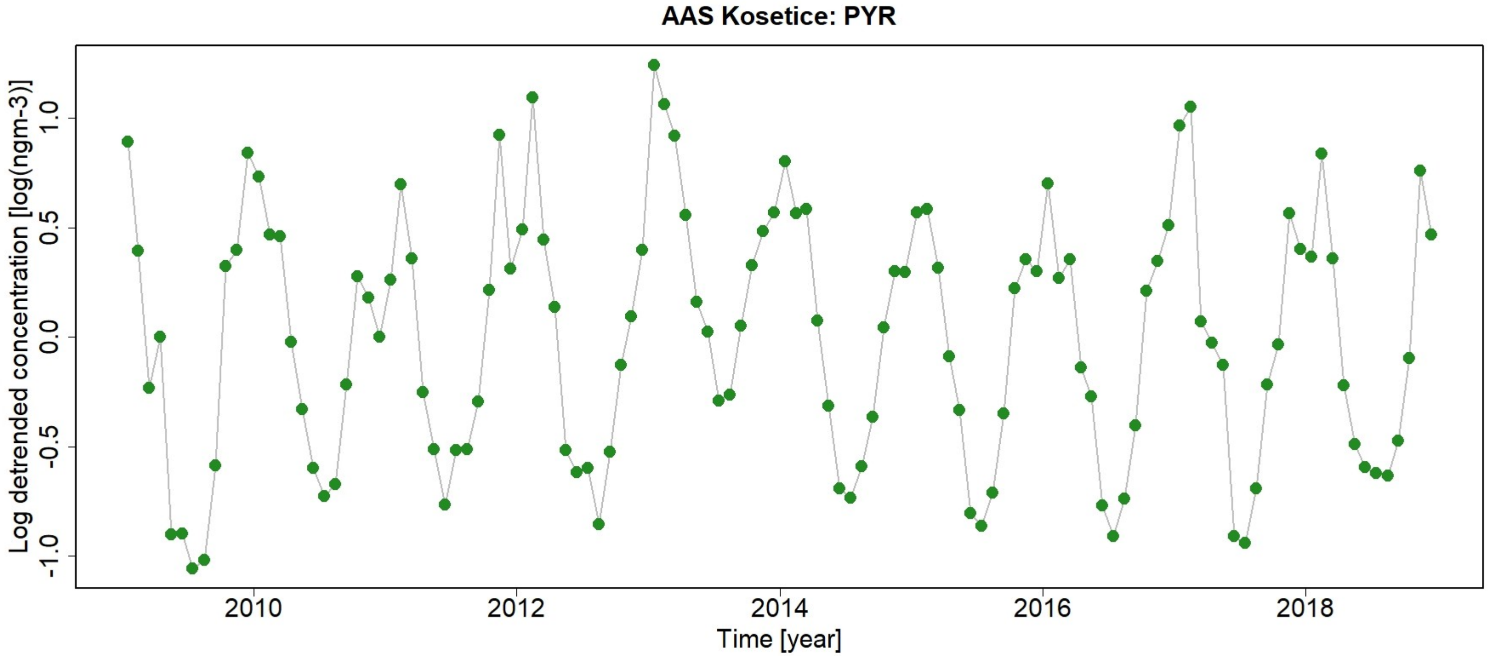
UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz

V. MATEMATICKÉ MODELY ČASOVÝCH ŘAD

PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI



PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI



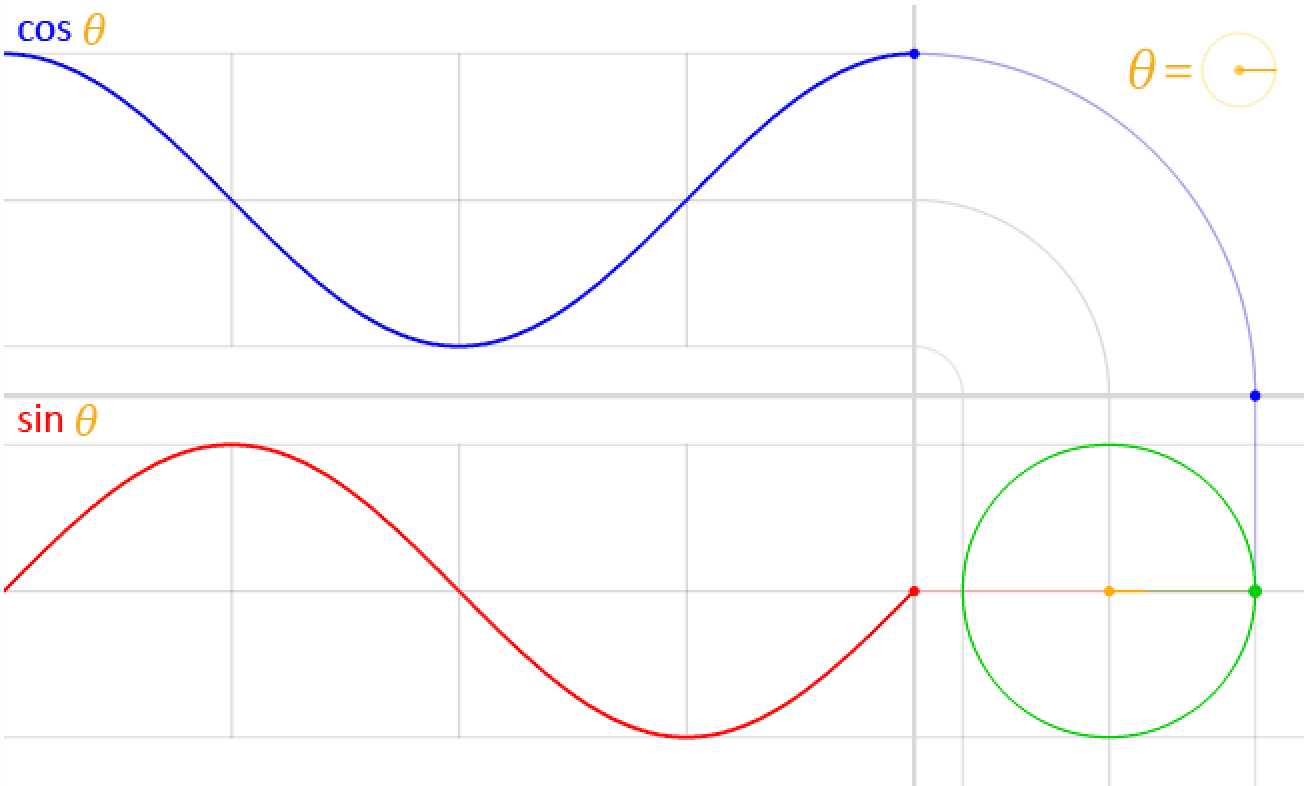
PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI

$$x(nT_{vz}) = \begin{cases} 1 & \text{pro } n \in \langle 5k; 5k+2 \rangle, \text{ kde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \\ 0 & \text{pro } n \in \langle 5k+3; 5k+4 \rangle, \text{ kde } k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \end{cases}$$

$x(nT_{vz}) = \{\ldots,0,0,1,1,1,0,0,1,1,1,0,0,1,1,\ldots\}$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

HARMONICKÁ POSLOUPNOST



https://en.wikipedia.org/wiki/File:Circle_cos_sin.gif

$$\Theta = f(t) \Rightarrow \cos(t), \sin(t) \Rightarrow \cos(nT_{vz}), \sin(nT_{vz})$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

☑ **harmonická posloupnost** je dána vztahem

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0),$$

kde

A>0 je amplituda harmonické posloupnosti;

Ω >0 je úhlová rychlost, tj. velikost úhlu (posunu) za čas;

φ_0 je počáteční fáze, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase $nT_{vz} = 0$;

$(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$ je fáze harmonické posloupnosti;

perioda harmonické posloupnosti je dána vztahem

$$T = 2\pi/\Omega$$

kmitočet harmonické posloupnosti je definován

$$f = 1/T = \Omega/2\pi$$

AMPLITUDA

Amplituda (též **výkmit** či **rozkmit**) je *maximální hodnota* periodicky měnící se veličiny. Spolu s frekvencí/úhlovou frekvencí, počáteční fází a u vln též vlnovou délkou/vlnovým vektorem je amplituda jedním ze základních parametrů periodických dějů.

Etymologie:

z latiny „amplitudo“ – rozsáhlost, rozpětí, velikost; znamenitost; důstojnost

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

- **harmonická posloupnost** je dána vztahem

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega n T_{vz} + \varphi_0),$$

kde

$A > 0$ je amplituda harmonické posloupnosti;

$\Omega > 0$ je úhlový kmitočet h.p., úhlová rychlost;

φ_0 je počáteční fáze, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase $nT_{vz} = 0$;

$(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)$ je fáze harmonické posloupnosti;

perioda harmonické posloupnosti je dána vztahem

$$T = 2\pi/\Omega$$

kmitočet harmonické posloupnosti je definován

$$f = 1/T = \Omega/2\pi$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

- ☑ **harmonická posloupnost** je dána vztahem

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega n T_{vz} + \varphi_0),$$

kde

$A > 0$ je amplituda harmonické posloupnosti;

$\Omega > 0$ je úhlový kmitočet h.p., úhlová rychlost;

φ_0 je počáteční fáze, tj. fáze (počáteční úhel, posun) v čase $nT_{vz} = 0$;

$(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)$ je fáze harmonické posloupnosti;

perioda harmonické posloupnosti je dána vztahem

$$T = 2\pi/\Omega \Rightarrow \Omega = 2\pi/T \Rightarrow \Omega \cdot T_{vz} = \Omega_N = 2\pi \cdot T_{vz}/T$$

kmitočet harmonické posloupnosti je definován

$$f = 1/T = \Omega/2\pi \Rightarrow f_N = T_{vz}/T = \Omega_N/2\pi = f/f_{vz}$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$$

pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a Ω pro $T=8T_{vz}$

$T_s \equiv T_{vz}$

$_{vz}$ … vzorkování

$_s$ … sampling

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$$

pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a $\Omega_N = 2\pi.T_{vz}/T = \pi/4$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega n T_{vz} + \varphi_0)$$

pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a Ω pro $T=4T'_{vz}$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

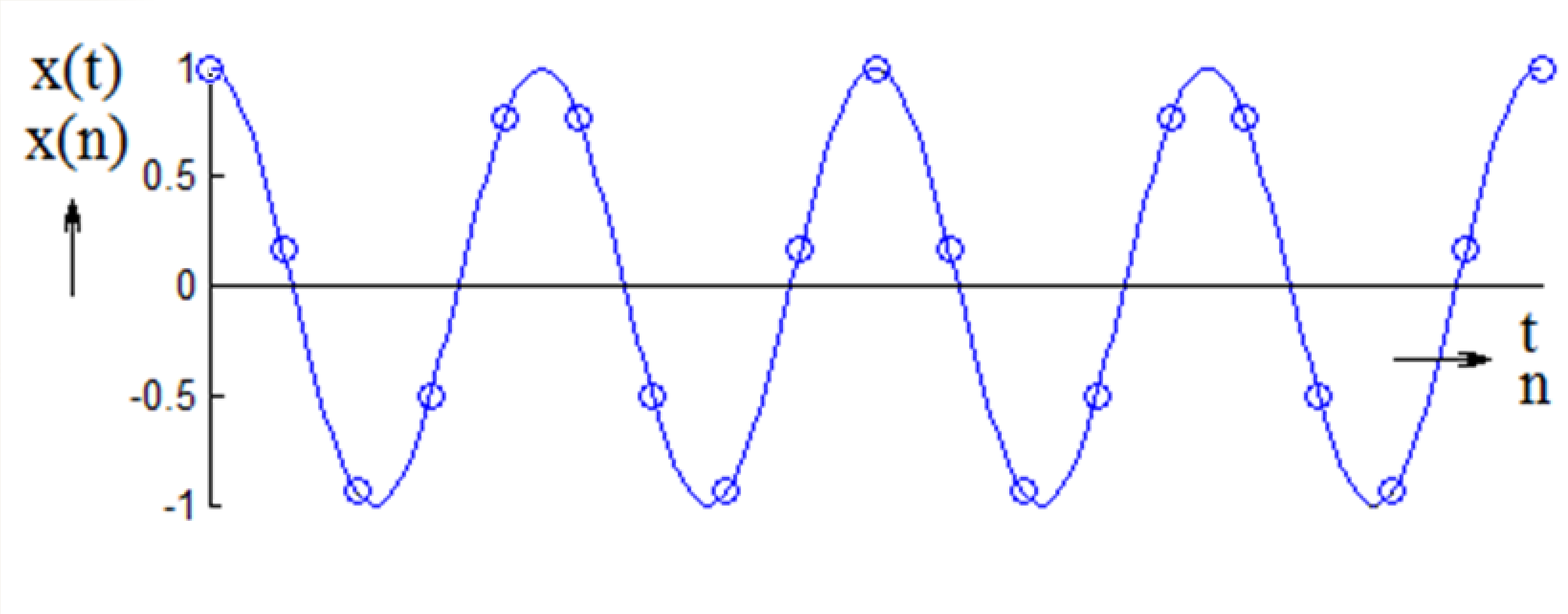
$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$$

pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a Ω pro $T=4T'_{vz}$

$$x(nT_{vz}) = A.\cos(\Omega nT_{vz} + \varphi_0)$$

pro $A=1$, $\varphi_0=0$ a $\Omega_N = 2\pi.T_{vz}/T = \pi/2$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST



Změna periodicity veličiny po vzorkování se vzorkovací periodou, která neodpovídá bezezbytkovému celočíselnému podílu T/T_{vz} (desetinná část podílu je rovna 0,5).

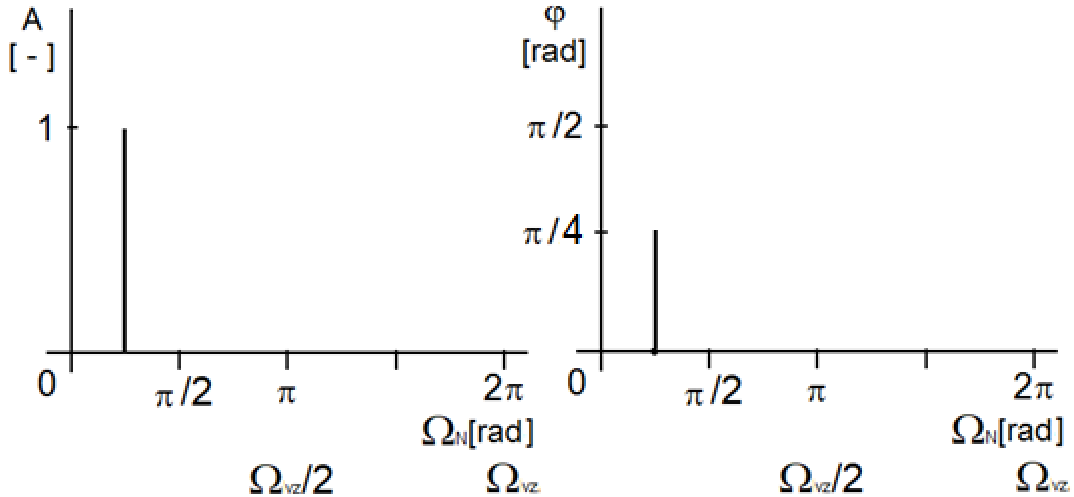
HARMONICKÁ POSLOUPNOST

V případě, kdy podíl vzorkovací periody a celkové periody T/T_{vz} nelze vyjádřit jako poměr dvou přirozených čísel (tedy racionální číslo), není navzorkovaná posloupnost periodická (přestože původní funkce periodická byla).

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

pro A=1, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

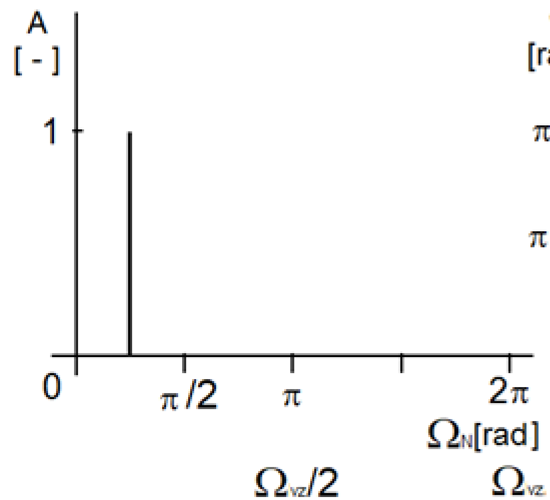
pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$

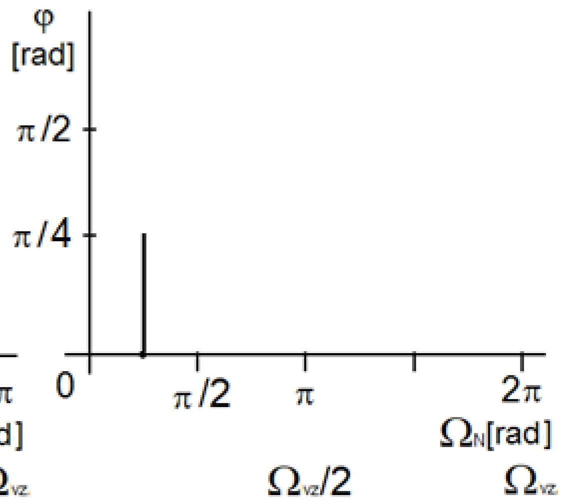
- tříparametrickou harmonickou posloupnost lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

amplituda x (úhlový) kmitočet a

počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\Omega) \quad \text{a} \quad \varphi_0 = \varphi_0(\Omega);$$





spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!

Frekvenční spektrum časové řady je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se časová řada skládá, v závislosti na frekvenci.

(Tj. skládá se z amplitudového a fázového spektra).

!ZAPAMATOVAT NA VĚKY!

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

DALŠÍ DEFINICE

TRIGONOMETRICKÝ TVAR

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega n T_{vz} + \varphi_0) =$$
$$= A_1 \cdot \cos(\Omega n T_{vz}) + A_2 \cdot \sin(\Omega n T_{vz})$$

Jak to tak?

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

$$A \cdot \cos(\Omega n T_{VZ} + \varphi_0) = A \cdot \cos(\Omega n T_{VZ}) \cdot \cos\varphi_0 - A \cdot \sin(\Omega n T_{VZ}) \cdot \sin\varphi_0 =$$
$$= \underbrace{A \cdot \cos\varphi_0}_{A_1} \cdot \cos(\Omega n T_{VZ}) - \underbrace{A \cdot \sin\varphi_0}_{A_2} \cdot \sin(\Omega n T_{VZ})$$

DALŠÍ DEFINICE

TRIGONOMETRICKÝ TVAR

$A_1 = A \cdot \cos\varphi_0$ a $A_2 = -A \cdot \sin\varphi_0$

$$A_1^2 + A_2^2 = A^2 \cdot (\cos^2 \phi_0 + \sin^2 \phi_0)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

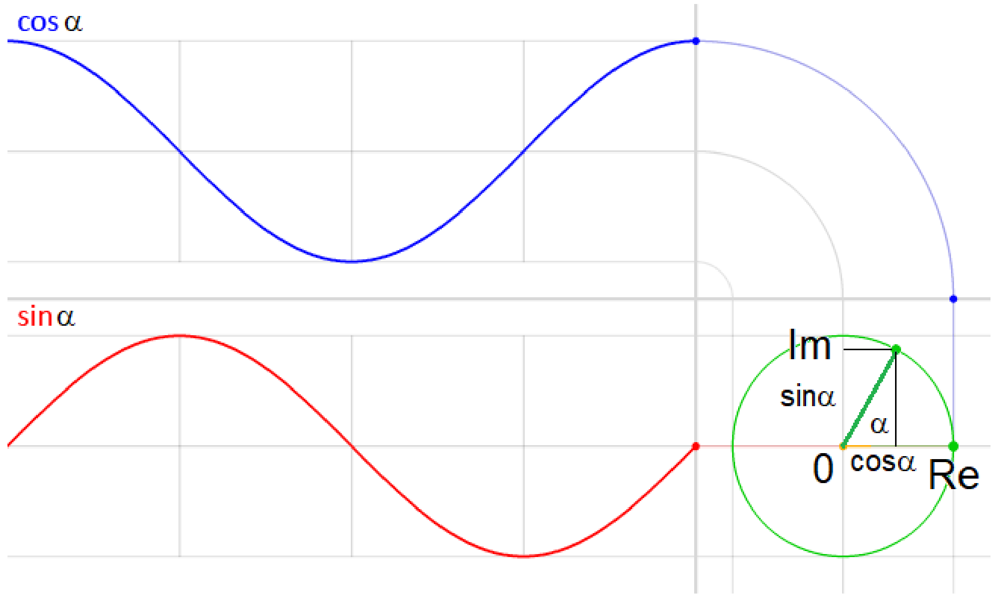
$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{-A \cdot \sin \phi_0}{A \cdot \cos \phi_0} = -tg\phi_0.$$

$$\phi_0 = -arctg\frac{A_2}{A_1}.$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

DALŠÍ DEFINICE

EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR



$$\cos\alpha(n) + i\cdot\sin\alpha(n) = e^{i\alpha(n)}$$

$$\cos\alpha(n) - i\cdot\sin\alpha(n) = e^{-i\alpha(n)}$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(\Omega n T_{vz} + \varphi_0) = A.\cos(2\pi f\, nT_{vz} + \phi_0)$$

když T = NT_{vz} a tedy f = $1/NT_{vz}$ nebo

$$x(nT_{vz}) = A.\exp\left[i\left(\frac{2\pi n}{N} + \varphi_0\right)\right].$$

Zde se zabýváme pouze reálnou částí pravé strany…

Komplexní exponenciála samozřejmě rovněž reprezentuje periodickou veličinu, protože platí

$$x\left[(k+N)T_{vz}\right] = \exp\frac{i2\pi(k+N)}{N} = \exp\frac{i2\pi k}{N}.\exp(i2\pi),$$

když $\exp(i2\pi) = \cos(2\pi) + i.\sin(2\pi) = 1 + i0 = 1$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

DALŠÍ DEFINICE

EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR

$$\cos\alpha(n) + i.\sin\alpha(n) = e^{i\alpha(n)}$$
$$\cos\alpha(n) - i.\sin\alpha(n) = e^{-i\alpha(n)}$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2} \qquad \sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}.$$

Eulerovy vztahy

$$x(n) = A.\cos(\alpha(n)) = \mathrm{Re}\{A.e^{i\alpha(n)}\}$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

DALŠÍ DEFINICE

EXPONENCIÁLNÍ (KOMPLEXNÍ) TVAR

$$x(n) = \mathit{Re}\{\dot{x}(n)\} = \mathit{Re}\{A.\exp[i(\Omega n T_{vz}+\varphi_0)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

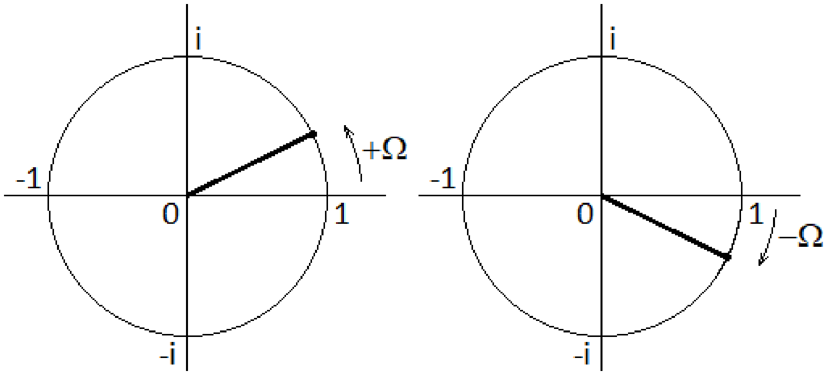
HARMONICKÁ POSLOUPNOST

kupodivu lze použít i vztah

$$x(n) = \mathit{Re}\{A.\exp[i(-\Omega n T_{vz} - \varphi_0)]\} = \mathit{Re}\{\dot{x}^*(n)\}$$

pozor !!! pozor

- záporný kmitočet - ale funguje to



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

Protože platí

$x(n) = \mathit{Re}\{\dot{x}(n)\} = \mathit{Re}\{\dot{x}^*(n)\}$ a $\mathit{Im}\{\dot{x}(n)\} = -\mathit{Im}\{\dot{x}^*(n)\}$

je i

$$x(n) = ½.\{\dot{x}(n) + \dot{x}^*(n)\}$$

$$x(t) = ½.\{A.\exp(i\varphi_0).\exp(i\Omega n T_{vz})\} +$$
$$+ ½.\{A\exp(-i\varphi_0).\exp(-i\Omega n T_{vz})\}$$

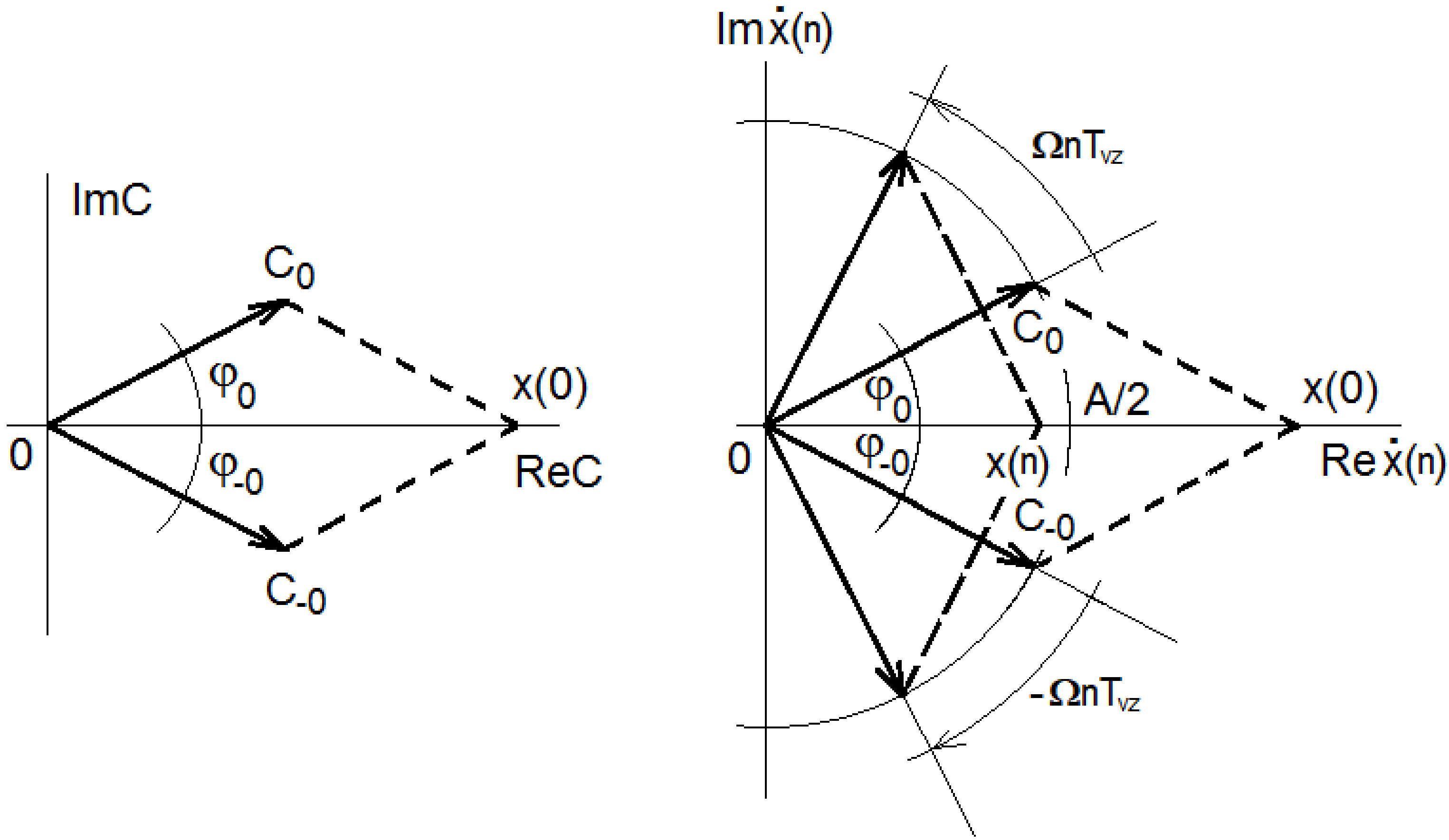
Označíme-li

$$\dot{C}_0 = ½.A.\exp(i\varphi_0) \quad \text{a} \quad \dot{C}_{-0} = ½.A\exp(-i\varphi_0)$$

je

$$x(n) = \dot{C}_0.\exp(i\Omega n T_{vz}) + \dot{C}_{-0}.\exp[i(-\Omega) n T_{vz}]$$

HARMONICKÁ POSLOUPNOST



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

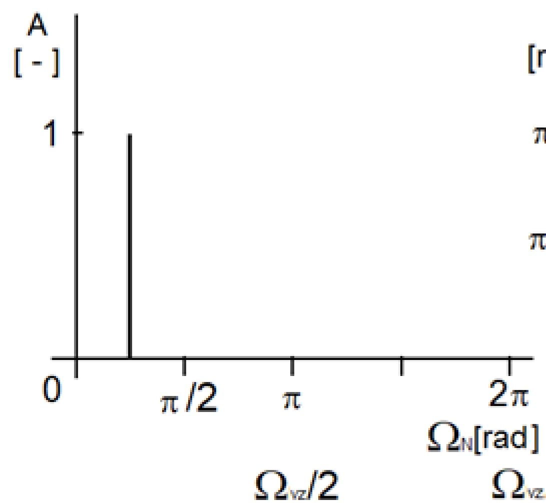
pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$

- ☑ tříparametrickou harmonickou posloupnost lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

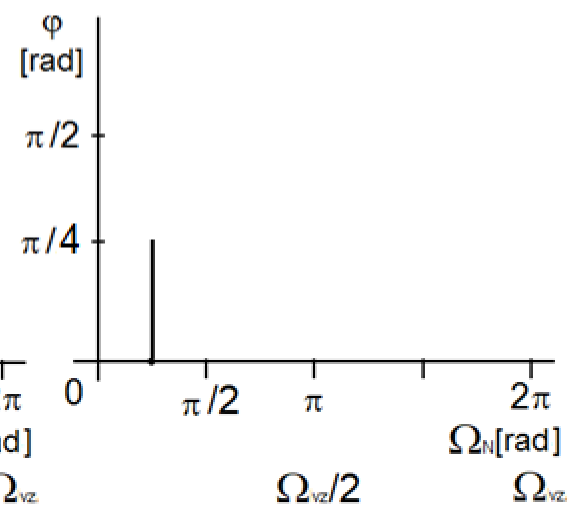
  amplituda x (úhlový) kmitočet a

  počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$



spektrum amplitud

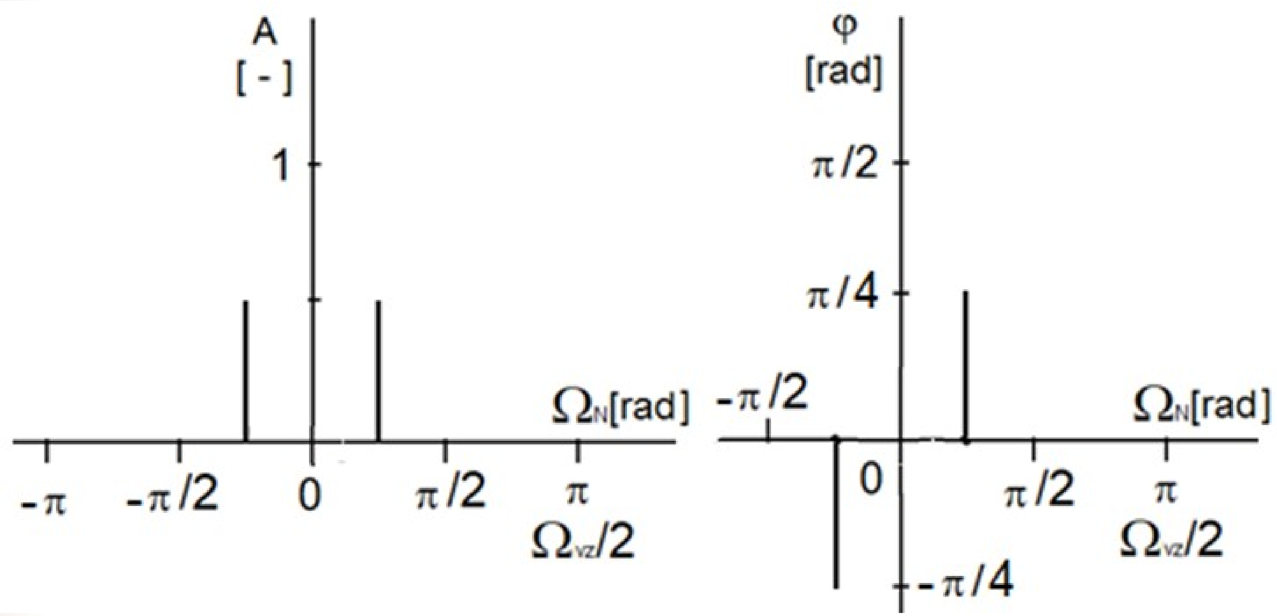


spektrum počátečních fází

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$

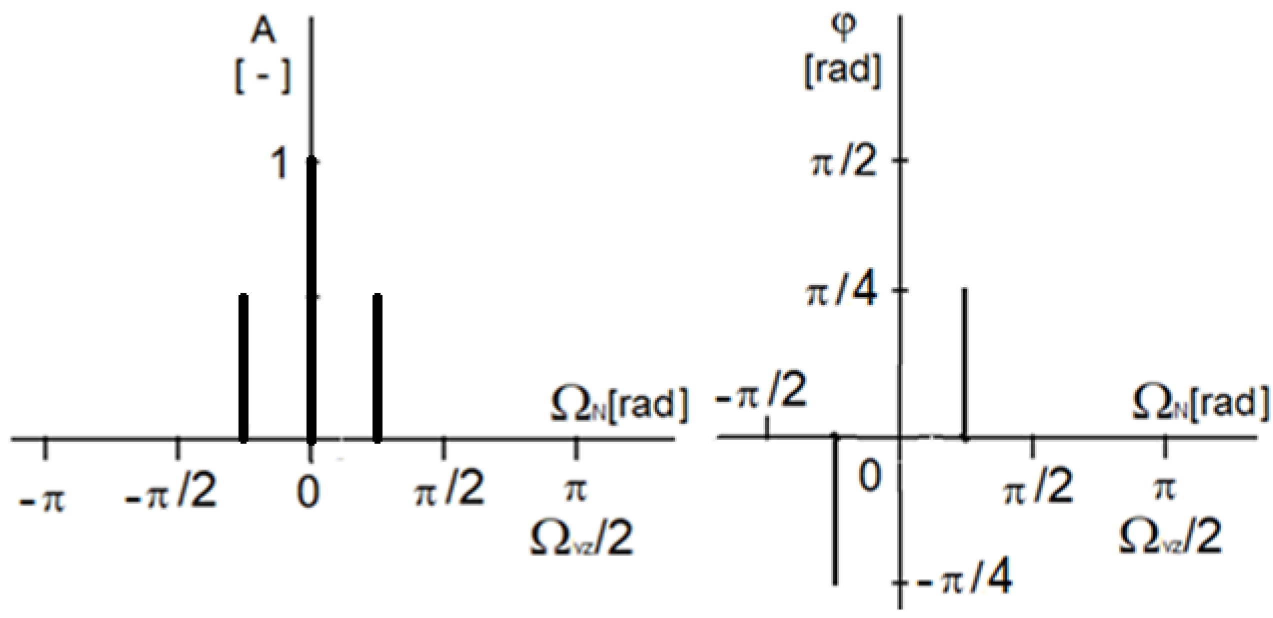


spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = 1 + \cos(\Omega n T_{vz} + \pi/4)$$

pro $A=1$, $\varphi_0 = \pi/4$ a Ω pro $T=8T_{vz}$, tj. pro $\Omega_N = \pi/4$



spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

HARMONICKÁ POSLOUPNOST

- http://www.mysearch.org.uk/website1/html/222.Function.html
- http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/complex/complex.html
- http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic
- http://www.khanacademy.org/science/physics/oscillatory-motion/harmonic-motion/v/introduction-to-harmonic-motion
- http://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg

NEPERIODICKÉ POSLOUPNOSTI

☑ **jednorázová deterministická veličina**

$s(t) = 10.10^{-6}$ V pro $t \in \langle -0{,}5\ \mu s;\ 0{,}5\ \mu s \rangle$

$s(t) = 0$ V pro $t \in (0{,}5\ \mu s;\ \infty \rangle$

$s(t) = 0$ V pro $t \in \langle -\infty;\ -0{,}5\ \mu s\ )$

- „začíná a končí“

JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI

- ☑ diskrétní jednotkový impulz;
- ☑ diskrétní jednotkový skok;
- ☑ diskrétní jednotkový obdélníkový impulz;

JEDNOTKOVÝ IMPULZ

- jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

zjednodušeně:

jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice vysoký (limitně nekonečně) obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & pro\ t \neq 0; \\ \infty, & pro\ t = 0. \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1\ .$$

JEDNOTKOVÝ IMPULZ

- jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$$

zjednodušeně:

jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky $\Rightarrow$ mohutnost je jednotková

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}$$

JEDNOTKOVÝ IMPULZ

- jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

  splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t).\delta(t-t_0)dt =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt =$$

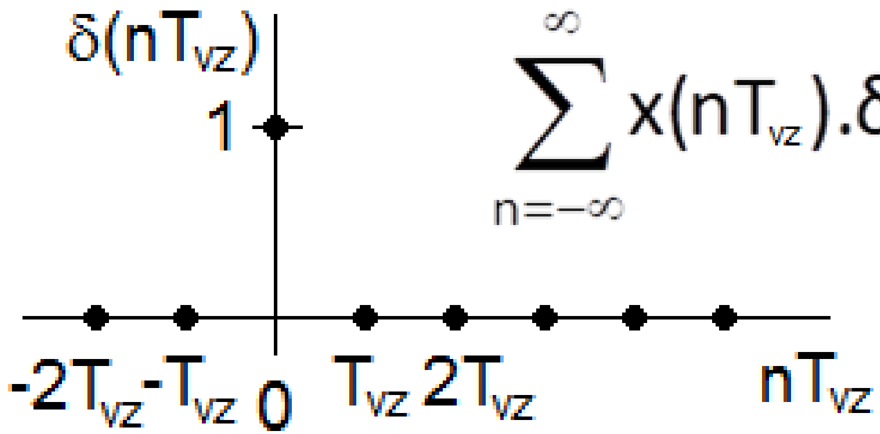
DISKRÉTNÍ JEDNOTKOVÝ IMPULZ

definice:

$$\delta(nT_{vz}) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(nT_{vz}) = 1$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).\delta(nT_{vz}) = x(0),$$



$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}).\delta(nT_{vz} - mT_{vz}) = x(mT_{vz})$$

JEDNOTKOVÝ SKOK

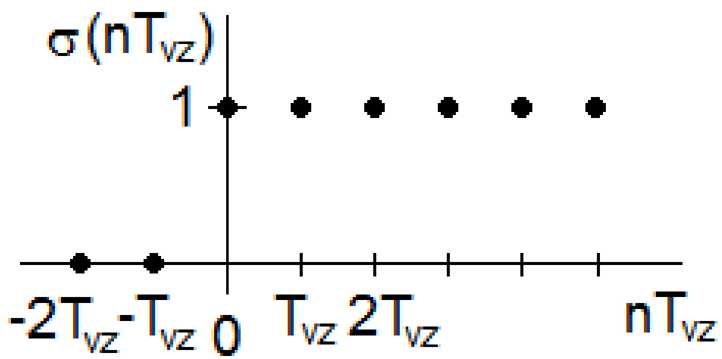
- jednotkový skok (Heavisidova funkce)

- $$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & pro\ t < 0; \\ 1, & pro\ t \geq 0. \end{cases}$$

DISKRÉTNÍ JEDNOTKOVÝ SKOK

- definice:

$$\sigma(nT_{vz}) = \sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$



VZÁJEMNÉ VZTAHY

- pro obě uvedené jednorázové „funkce" platí:

$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t) \qquad \frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t).$$

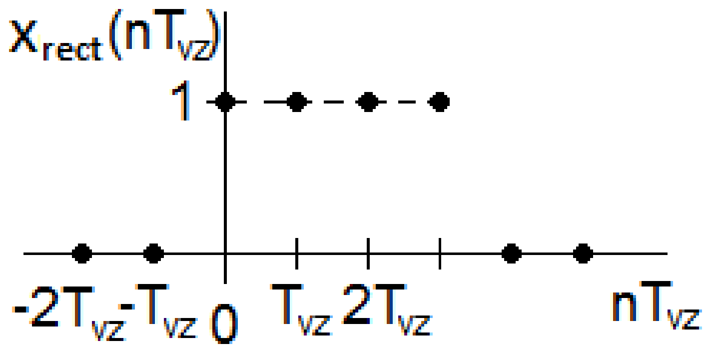
- pro obě uvedené jednorázové posloupnosti platí:

$$\sum_{n=-\infty}^{m} \delta(nT_{vz}) = \sigma(mT_{vz}) \qquad \delta(nT_{vz}) = \sigma(nT_{vz}) - \sigma[(n-1)T_{vz}]$$

DISKRÉTNÍ JEDNOTKOVÝ OBDÉLNÍKOVÝ IMPULZ

- ☑ definice:

$$x_{rect}(nT_{vz}) = x_{rect}(n) = \begin{cases} 1, & n \in \langle 0, M-1 \rangle; \\ 0, & n < 0 \text{ a } n \geq M. \end{cases}$$



$$x_{rect}(nT_{vz}) = x_{rect}(n) = \sigma(nT_{vz}) - \sigma[(n-M)T_{vz}]$$

VI. ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI MODELY ČASOVÝCH ŘAD

MU

IBA

OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ

(UNÁRNÍ OPERACE)

OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- **násobení konstantou**

$$x(n) \sim A \cdot x(n),$$

A=2

OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- **změna časového měřítka**

$$x(n) \sim x(m \cdot n),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje

OPERACE S JEDNOU POSLOUPNOSTÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- **změna časového měřítka**

$$x(n) \sim x(m \cdot n),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m = 1$ – nic se neděje

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – ?

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – zpoždění

a) originál x(n); b) funkce x(n-1); c) funkce x(n+1);

OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ
(UNÁRNÍ OPERACE)

- ☑ **obrácení (inverze) časové osy**

$$x(n) \sim x(-n) \,,$$

a) originál x(n); b) funkce x(-n); c) funkce x(-n+1)

SHRNUTÍ

- ☑ definice základních modelů veličin (jednotkový skok, impulz, periodická posloupnost);
- ☑ různé formy vyjádření harmonické posloupnosti;
- ☑ co je frekvenční spektrum?
- ☑ základní unární operace s posloupnostmi.

TESTÍK

1. Harmonickou posloupnost definují tři parametry:
   1. amplituda, frekv., poč. fáze
   2. úhl. rych., frekv., poč. fáze
   3. amplituda, frekv., perioda
   4. amplituda, per., úhl. rych.
2. Frekvenční spektrum časové řady se skládá ze spekter
   1. fázového a imaginárního
   2. reálného a imaginárního
   3. reálného a amplitudového
   4. amplitudového a fázového

Jednotkový (diskrétní) impulz
1. má nekonečnou výšku
2. má nekonečnou šířku
3. má jednotkovou výšku
4. má jednotkovou šířku

4. Komplexně sdružená čísla mají
   1. opačnou imaginární složku
   2. stejnou imaginární složku
   3. opačnou reálnou složku
   4. obě složky opačné

ZA TÝDEN NASHLEDANOU