



# ČASOVÉ ŘADY



**Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.**

**UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123  
kalina@mail.muni.cz**

© Institut biostatistiky a analýz

# **OPERACE SE DVĚMA POSLOUPNOSTMI (BINÁRNÍ OPERACE)**

# KONVOLUCE

# DEFINICE

Konvoluce je matematická operace mezi dvěma funkcemi  $x_1(t)$  a  $x_2(t)$  téhož argumentu definovaná (v případě spojitých funkcí) integrálem

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = (x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau,$$

kde funkce  $x_2(t)$  se často nazývá ***konvoluční jádro***.

# DEFINICE

Konvoluce je matematická operace mezi dvěma posloupnostmi  $x_1(n)$  a  $x_2(n)$  téhož argumentu definovaná součtovým vztahem

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = (x_1 * x_2)(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \cdot x_2(n - m).$$

kde posloupnost  $x_2(n)$  se často nazývá ***konvoluční jádro***.

# KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

## ✓ komutativní zákon

$$x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n);$$

## ✓ asociativní zákon

$$x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] = [x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n).$$

## ✓ distributivní zákon (vůči sčítání)

$$x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n);$$

# KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

## ☑ zákon o posunu v čase

Je-li  $x_1(n) * x_2(n) = c(n)$ ,

pak

$$x_1(n) * x_2(n - m) = c(n - m)$$
$$x_1(n - m) * x_2(n) = c(n - m)$$

a dále

$$x_1(n - m_1) * x_2(n - m_2) = c(n - m_1 - m_2).$$

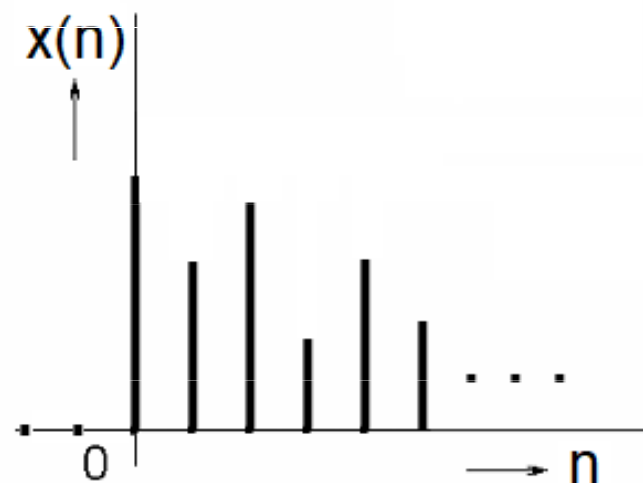
# KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

## KAUZALITA

**Kauzální** je takový systém, jehož výstup v každém časovém okamžiku  $t_0$  závisí pouze na průběhu vstupní veličiny  $x(t)$  pro  $t \leq t_0$ . Jinými slovy, hodnota výstupu systému v každém okamžiku závisí pouze na vstupu v daném okamžiku a jeho průběhu v minulosti, nikoliv na budoucích hodnotách vstupní veličiny. Systém, který tento požadavek nesplňuje, nazýváme **nekauzální**, příp. **anticipativní**.

### **Zprostředkovaně:**

jako kauzální označujeme takové posloupnosti, pro které platí  $x(n) = 0$  pro  $n < 0$ .





# KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

## KAUZALITA

### Konvoluce kauzálních funkcí:

Pro kauzální funkce platí  $s(t) = 0$  pro  $t < 0$

$$\checkmark s_1(t) * s_2(t) = \int_0^t s_1(\tau) \cdot s_2(t - \tau) \cdot d\tau$$

# KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

- ☑ pro kauzální posloupnosti, tj. takové pro které platí  $x(n) = 0$  pro  $n < 0$  se konvoluční vztah mění na

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^n x_1(m) \cdot x_2(n-m).$$

- ☑ V reálných podmínkách při zpracování reálných dat samozřejmě nejsou posloupnosti  $x_1(n)$  a  $x_2(n)$  nekonečné, nýbrž mají konečnou délku. Předpokládejme obecně  $N_1$  vzorků v případě posloupnosti  $x_1(n)$  a  $N_2$  vzorků v případě posloupnosti  $x_2(n)$ . Dále položme  $x_1(n) = 0$  pro  $n \notin \langle 0, N_1-1 \rangle$  a analogicky  $x_2(n) = 0$  pro  $n \notin \langle 0, N_2-1 \rangle$ .

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=\max(0, N_2-n+1)}^{\min(n, N_1)} x_1(m) \cdot x_2(n-m).$$

# KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

## ☑ šířková vlastnost konvoluce

Pokud jsou doby trvání (šířky, tj. počty vzorků posloupností, jejichž hodnoty jsou různé od nuly) posloupností  $x_1(n)$  a  $x_2(n)$  konečné, např.  $N_1$  v případě posloupnosti  $x_1(n)$  a  $N_2$  pro  $x_2(n)$  je počet vzorků výsledné konvoluční posloupnosti obou funkcí rovna  $N_1 + N_2 - 1$ .

# KONVOLUČNÍ ZÁKONITOSTI

## ☑ konvoluce posloupnosti s jednotkovým impulzem

Výsledkem konvoluce posloupnosti  $x(n)$  s jednotkovým impulzem je posloupnost  $x(n)$ .

Z definice konvoluce vyplývá, že

$$x(n) * \delta(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m) \cdot \delta(n - m)$$

Protože  $\delta(n-m)$  reprezentuje jednotkový impulz posunutý oproti počátku o  $n$  vzorků, je suma ve výše uvedeném vztahu průběžně rovna hodnotě  $x(n)$ . Proto

$$x(n) * \delta(n) = x(n)$$

# DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

## SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

---

# DISKRÉTNÍ KRUHOVÁ KONVOLUCE

## SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

# DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

## PŘÍKLAD 1

Vypočtěte konvoluci posloupností  $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$  a  $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$  ..

Řešení:

$$x_1(m) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ \hline \end{array}$$

$$x_2(m) \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_{20} & x_{21} & x_{22} \\ \hline \end{array}$$

$$x_1(m) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ \hline \end{array}$$

$$\sum \times$$

$$x_2(-m) \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_{22} & x_{21} & x_{20} \\ \hline \end{array} \Rightarrow$$

$$x_1(m) \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline x_{10} & x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ \hline \end{array}$$

$$\sum \begin{array}{|c|c|c|} \hline \times & \times & \times \\ \hline \end{array}$$

$$x_2(2-m) \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_{22} & x_{21} & x_{20} \\ \hline \end{array} \Rightarrow$$

			1	2	-2	-1	
			1	-1	1		
			<hr/>				
			1	2	-2	-1	
		1	-1	1			1
			<hr/>				
			1	2	-2	-1	
		1	-1	1			1
			<hr/>				
			1	2	-2	-1	
				1	-1	1	-3
			<hr/>				
			1	2	-2	-1	
					1	-1	1
			<hr/>				
			1	2	-2	-1	
							3
			<hr/>				
			1	2	-2	-1	
							-1
			<hr/>				
			1	2	-2	-1	
							-1
			<hr/>				
							1
							-1
			<hr/>				
							1
							-1

# DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

## PŘÍKLAD 2

Vypočtěte konvoluci posloupností  $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$  a  $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$  ..

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$$\begin{aligned} & \{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{13}\} * \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\} = \\ & = (x_{10} \cdot x_{20})(x_{10} \cdot x_{21})(x_{10} \cdot x_{22}) \\ & \quad (x_{11} \cdot x_{20})(x_{11} \cdot x_{21})(x_{11} \cdot x_{22}) \\ & \quad \quad (x_{12} \cdot x_{20})(x_{12} \cdot x_{21})(x_{12} \cdot x_{22}) \\ & \quad \quad \quad (x_{13} \cdot x_{20})(x_{13} \cdot x_{21})(x_{13} \cdot x_{22}) \end{aligned}$$

---

součet dílčích součinů v jednotlivých sloupcích



# DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

## PŘÍKLAD 2

Vypočtěte konvoluci posloupností  $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$  a  $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$ .

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$$\begin{array}{rcccccc} \{1, 2, -2, -1\} * \{1, -1, 1\} = & & & & & & \\ = & 1 & -1 & 1 & & & \\ & & 2 & -2 & 2 & & \\ & & & -2 & 2 & -2 & \\ & & & & -1 & 1 & -1 \\ \hline & 1 & 1 & -3 & 3 & -1 & -1 \end{array}$$

# DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

## PŘÍKLAD 3

Vypočtěte konvoluci posloupností  $x_1 = \{1, 2, -2, -1\}$  a  
 $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí i následující maticové schéma:

$$[a \quad b \quad c \quad d] * [e \quad f \quad g] = [a \quad b \quad c \quad d] \begin{bmatrix} e & f & g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e & f & g & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f & g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & f & g \end{bmatrix}$$

# DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

## PŘÍKLAD 3

Vypočtete konvoluci posloupností  $x_1 = \{1, 2, -2, -1\}$  a  $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí i následující maticové schéma:

$$[1, 2, -2, -1] * [1, -1, 1] = [1, 2, -2, -1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$
$$= [1, 1, -3, 3, -1, -1]$$

# DEFINICE

**ABZ slovník  
cizích slov**

**Korelace** = vzájemný vztah, souvztažnost mezi znaky, veličinami, ději

# DEFINICE



**Korelace** (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

# DEFINICE



**Korelace** (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

lātiō - nesení, poskytování

relātiō – nesení zpět, odnášení, opakování;  
zpráva; vztah, poměr

correlātiō – vzájemný vztah, souvislost

# DEFINICE



**Korelace** (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

Pokud se jedna z nich mění, mění se **korelativně** i druhá a naopak.

Pokud se mezi dvěma procesy ukáže korelace, je možné, že na sobě závisejí, nelze z toho však ještě usoudit, že by jeden z nich musel být [příčinou](#) a druhý [následkem](#). To samotná korelace nedovoluje rozhodnout.

# DEFINICE



**Korelace** (z [lat.](#)) znamená vzájemný vztah mezi dvěma procesy nebo veličinami.

Pokud se jedna z nich mění, mění se **korelativně** i druhá a naopak.

**Kauzalita** - příčinná souvislost či závislost.

Jeden jev vyvolává druhý, popřípadě se oba vzájemně podporují (synergie)



# DEFINICE

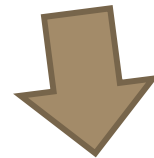


Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný (nejčastěji **lineární**) vztah mezi znaky či veličinami  **$x$**  a  **$y$** .

# DEFINICE



Ve specifičtějším slova smyslu se pojem korelace užívá ve **statistice**, kde znamená vzájemný (nejčastěji **lineární**) vztah mezi znaky či veličinami  $x$  a  $y$ .



funkční závislost a  
míru této závislosti

# ČASOVĚ NEZÁVISLÁ DATA

## KORELAČNÍ KOEFICIENT

numerická míra **určitého typu** korelace, tj. statistického vztahu mezi dvěma proměnnými

# ČASOVĚ NEZÁVISLÁ DATA

## KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$1. \rho_{X,Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$2. r_s = \rho_{r_{gX}, r_{gY}} = \frac{\text{COV}(r_{gX}, r_{gY})}{\sigma_{r_{gX}} \sigma_{r_{gY}}}$$

$$3. r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

$$4. \tau = \frac{(\text{počet shodných dvojic}) - (\text{počet neshodných dvojic})}{n(n-1)/2}$$

# ČASOVĚ NEZÁVISLÁ DATA

## KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$1. \rho_{X,Y} = \frac{E[(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

obecný  
vztah

## PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$3. r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

výběrový  
Pearsonův  
korelační  
koeficient

# ČASOVĚ NEZÁVISLÁ DATA

## KORELAČNÍ KOEFICIENT

**pořadová korelace** – míra vztahu mezi pořadím hodnot dvou proměnných

$$2. r_s = \rho_{rg_X, rg_Y} = \frac{\text{COV}(rg_X, rg_Y)}{\sigma_{rg_X} \sigma_{rg_Y}}$$

### SPEARMANŮV POŘADOVÝ KORELAČNÍ KOEFICIENT

### KENDALLŮV POŘADOVÝ KORELAČNÍ KOEFICIENT

4.

$$\tau = \frac{(\text{počet shodných dvojic}) - (\text{počet neshodných dvojic})}{n(n-1)/2}$$

# PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$r = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}$$

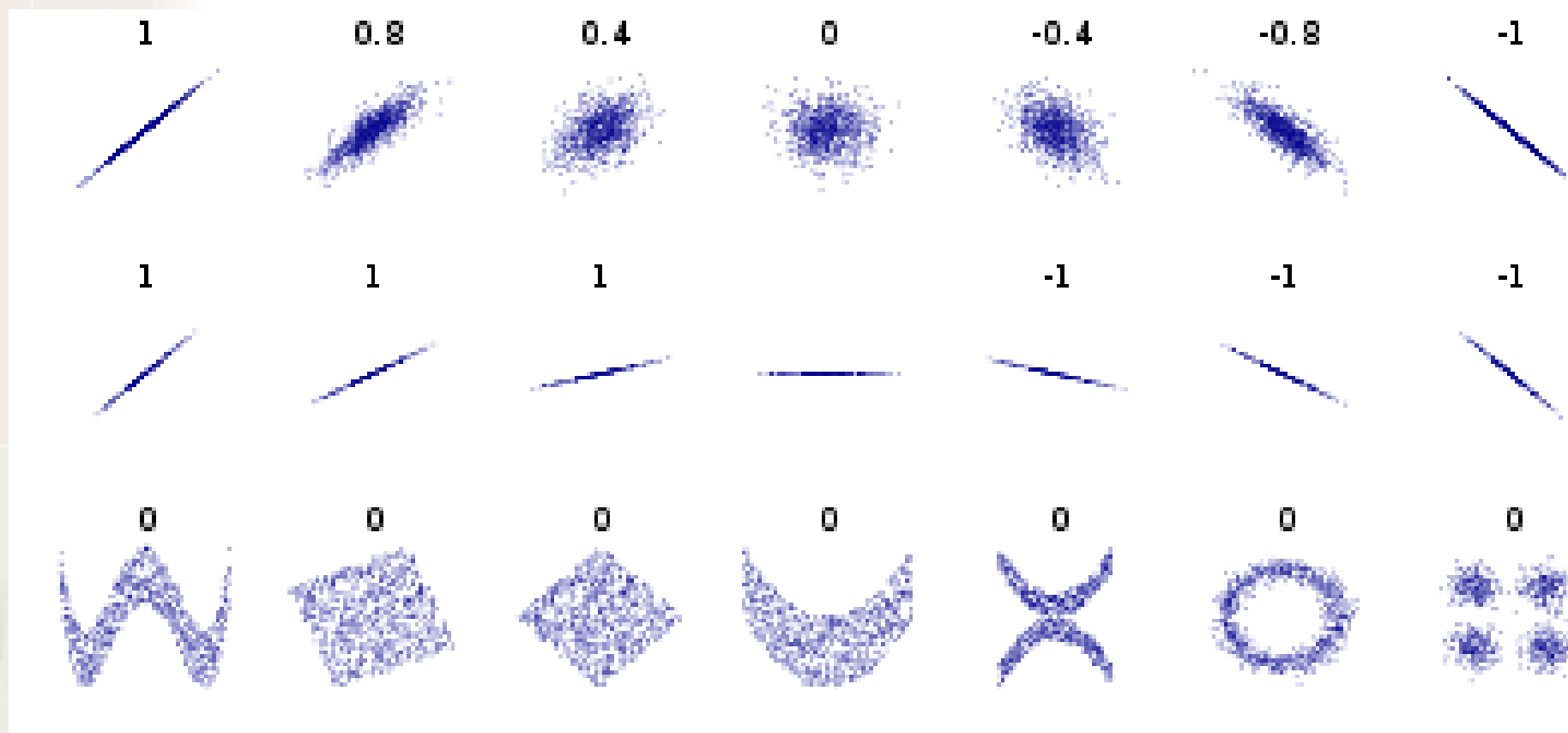
$$r = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{(x_n - \bar{x})}{\sigma_x} \cdot \frac{(y_n - \bar{y})}{\sigma_y}$$

nabývá hodnoty v intervalu  $\langle -1, 1 \rangle$ .

Když je roven +1, znamená to zcela pozitivní (přímou) **lineární** korelaci ( $y=kx$ , tj. funkční závislost), při nulové hodnotě není mezi proměnnými **lineární** vztah a hodnota -1 znamená zcela negativní **lineární** korelaci mezi oběma proměnnými ( $y=-kx$ ).

# PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$r = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{(x_n - \bar{x})}{\sigma_x} \cdot \frac{(y_n - \bar{y})}{\sigma_y}$$





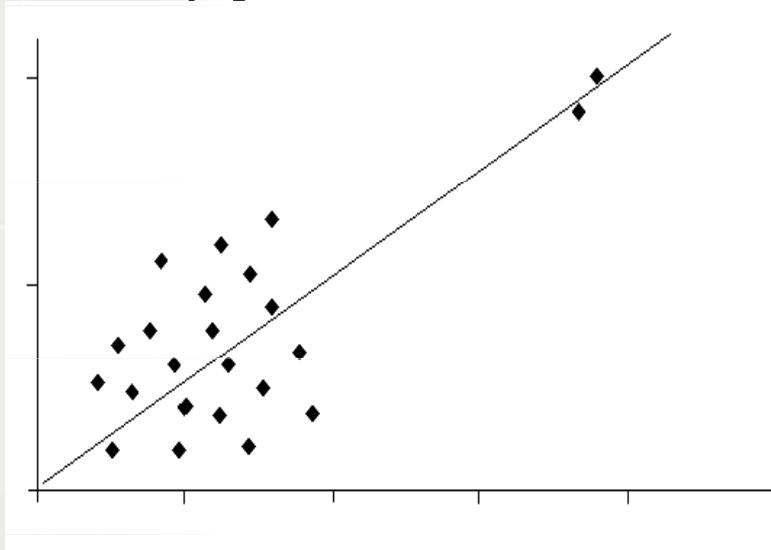
# PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

- ☑ nabývá hodnot od  $-1$  do  $+1$ , které značí perfektní lineární vztah (záporný nebo kladný)
  - v případě kladné korelace hodnoty obou proměnných zároveň stoupají;
  - v případě záporné korelace hodnota jedné proměnné stoupá a druhé klesá;
  - v případě neexistence lineárního vztahu  $r = 0$ ;
- ☑ je nezávislý na jednotkách původních proměnných, je bezrozměrný;
- ☑ při změně pořadí proměnných se výše korelačního koeficientu nemění;
- ☑ korelační koeficient je platný pouze v rozmezí daném použitými daty;
- ☑ korelační koeficient výrazně odlišný od nuly není důkazem funkčního vztahu proměnných, jiného než lineárního;
- ☑ malá hodnota korelačního koeficientu není známkou nefunkčního vztahu proměnných.

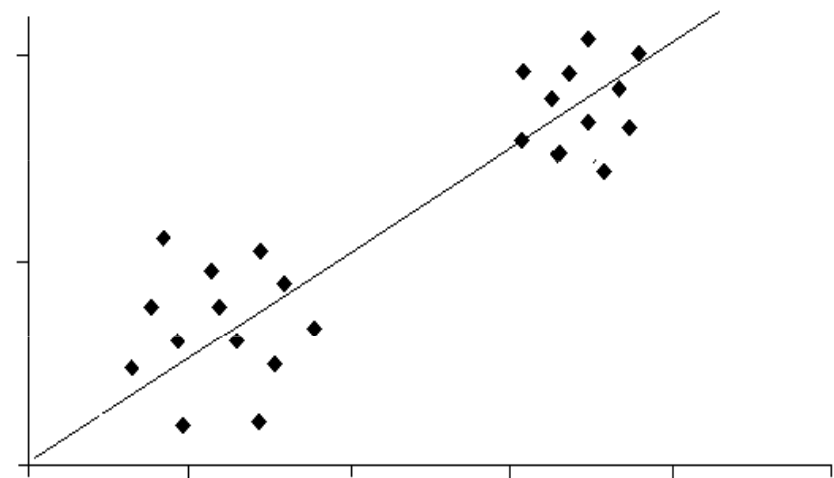
# PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

Správná interpretace Pearsonova korelačního koeficientu předpokládá, že obě proměnné jsou náhodné veličiny a mají **společné dvourozměrné normální rozdělení**. Potom nulový korelační koeficient znamená, že veličiny jsou i statisticky **nezávislé**.

Pokud není splněn předpoklad dvourozměrné normality, z nulové hodnoty korelačního koeficientu nelze usuzovat na nic víc, než že veličiny jsou nekorelované.



odlehlé hodnoty

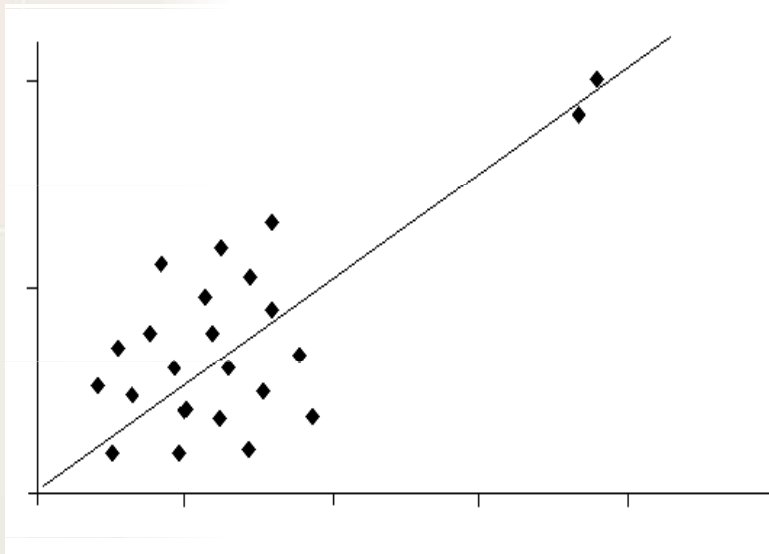


bimodální rozložení

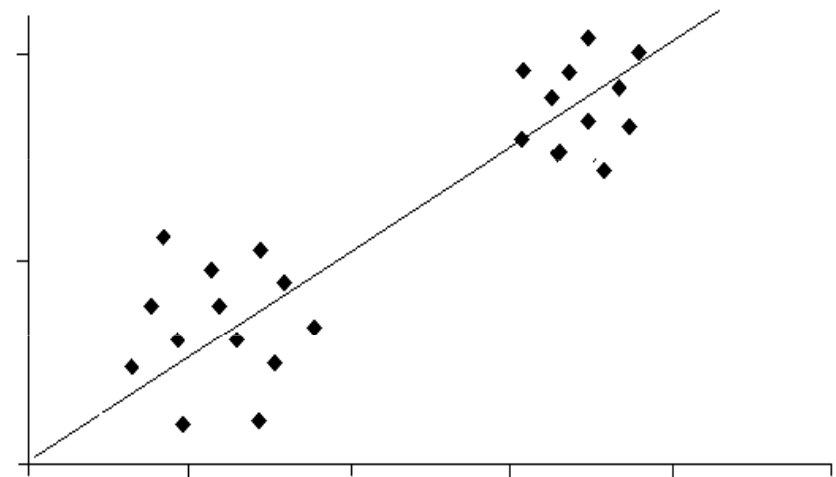
# PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

může být nadhodnocen:

- ☑ vlivem třetí skryté proměnné
- ☑ přítomností odlehlých hodnot
- ☑ data jsou složena z různých podskupin (tříd)



odlehlé hodnoty



bimodální rozložení

# SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$r_s = \rho_{rg_X, rg_Y} = \frac{\text{COV}(rg_X, rg_Y)}{\sigma_{rg_X} \sigma_{rg_Y}}$$

Hodnotí, jak dobře lze vztah mezi dvěma proměnnými popsat pomocí **monotónní** funkce.

Pokud jsou všechna pořadí určena **různými celými čísly od 1 do  $n$** , pak jeho hodnotu lze určit pomocí vztahu

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

kde  $d_i = rg(X_i) - rg(Y_i)$  je rozdíl mezi pořadími každého pozorování

# SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

Určeme korelaci mezi IQ sledovaných osob a počtem hodin, které stráví za týden sledováním televize.

([https://en.wikipedia.org/wiki/Spearman%27s\\_rank\\_correlation\\_coefficient](https://en.wikipedia.org/wiki/Spearman%27s_rank_correlation_coefficient))

$X_i$ IQ	$Y_i$ hours
86	0
112	6
106	7
113	12
110	17
97	20
100	27
99	28
103	29
101	50

$X_i$ IQ	$Y_i$ hours	rank $x_i$	rank $y_i$	$d_i$	$d_i^2$
86	0	1	1	0	0
97	20	2	6	-4	16
99	28	3	8	-5	25
100	27	4	7	-3	9
101	50	5	10	-5	25
103	29	6	9	-3	9
106	7	7	3	4	16
110	17	8	5	3	9
112	6	9	2	7	49
113	12	10	4	6	36

$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$$r_s = 1 - \frac{6 \times 194}{10 \cdot (10^2 - 1)} = -0.1757575\dots$$

# SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

## ZÁVĚR

Nízká hodnota korelačního koeficientu ukazuje, že korelace mezi IQ a hodinami sledování TV je malá a jeho záporná hodnota indikuje, že delší čas před TV je vázán na menší hodnotu IQ.

Nehodnotíme zde ovšem statistickou signifikanci neboli riziko falešně pozitivního výsledku korelačního testu...

# SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

## PŘÍKLADY



$$r_s = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2 - 1)}$$

$X_i$	$Y_i$	rank $x_i$	rank $y_i$	$d_i$	$d_i^2$
1	1	1	1	0	0
2	2	2	2	0	0
3	3	3	3	0	0
4	4	4	4	0	0

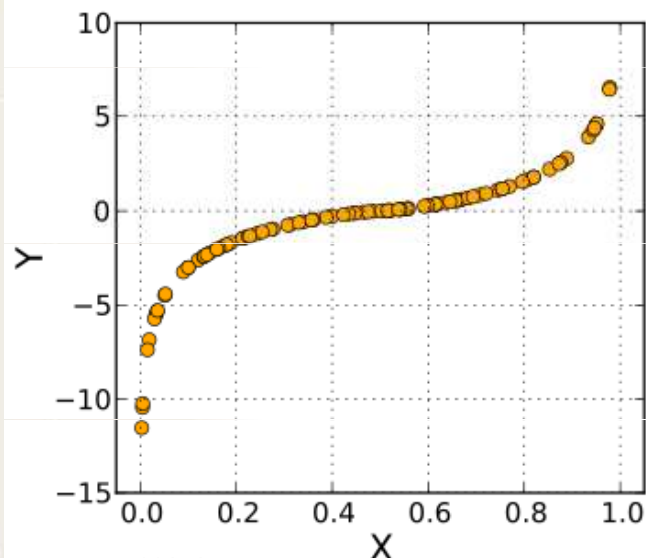
$$r_s = 1 - \frac{6 \times 0}{4 \times (16 - 1)} = 1$$

$X_i$	$Y_i$	rank $x_i$	rank $y_i$	$d_i$	$d_i^2$
1	-1	1	4	-3	9
2	-2	2	3	-1	1
3	-3	3	2	1	1
4	-4	4	1	3	9

$$\begin{aligned} r_s &= 1 - \frac{6 \times 20}{4 \times (16 - 1)} = \\ &= 1 - \frac{120}{60} = -1 \end{aligned}$$

# SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

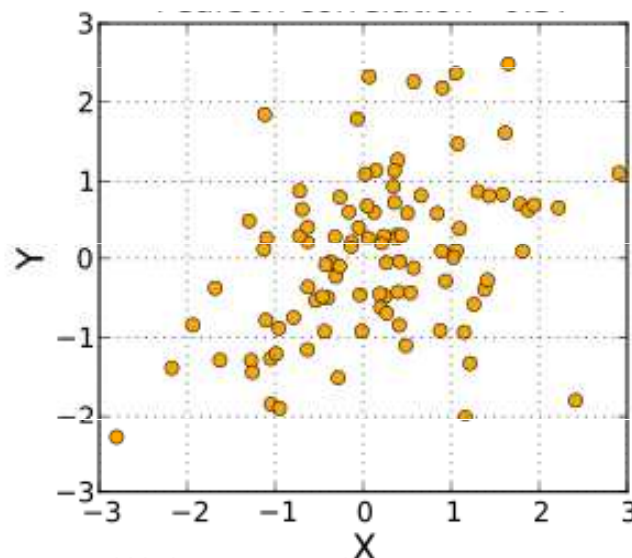
Spearmanův koeficient=1  
Pearsonův koeficient=0,88



By Skbkekas - Own work, CC BY-SA 3.0,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8778554>

Hodnota Spearmanova korelačního koeficientu je rovna 1 pokud jsou srovnávané veličiny monotónně závislé, i pokud je jejich vzájemný vztah nelineární.

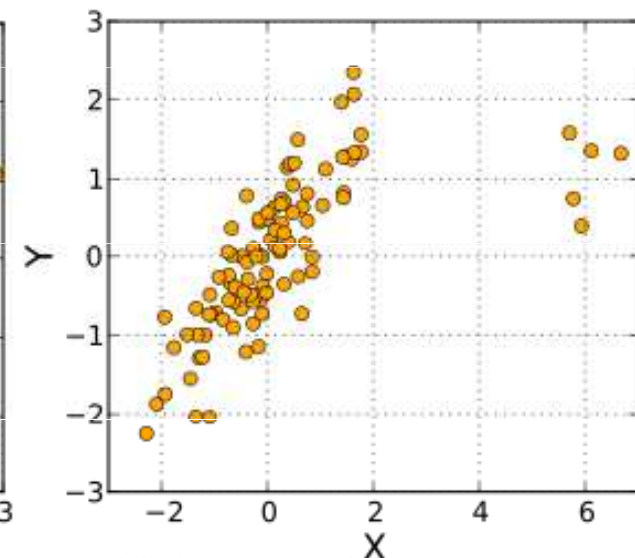
Spearmanův koeficient=0,35  
Pearsonův koeficient=0,37



By Skbkekas - Own work, CC BY-SA 3.0,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8778562>

Pokud jsou data rozložena přibližně elipticky a nevyskytují se žádné významné odlehlé hodnoty, pak Pearsonův a Spearmanův korelační koeficient nabývají přibližně týchž hodnot.

Spearmanův koeficient=0,84  
Pearsonův koeficient=0,67



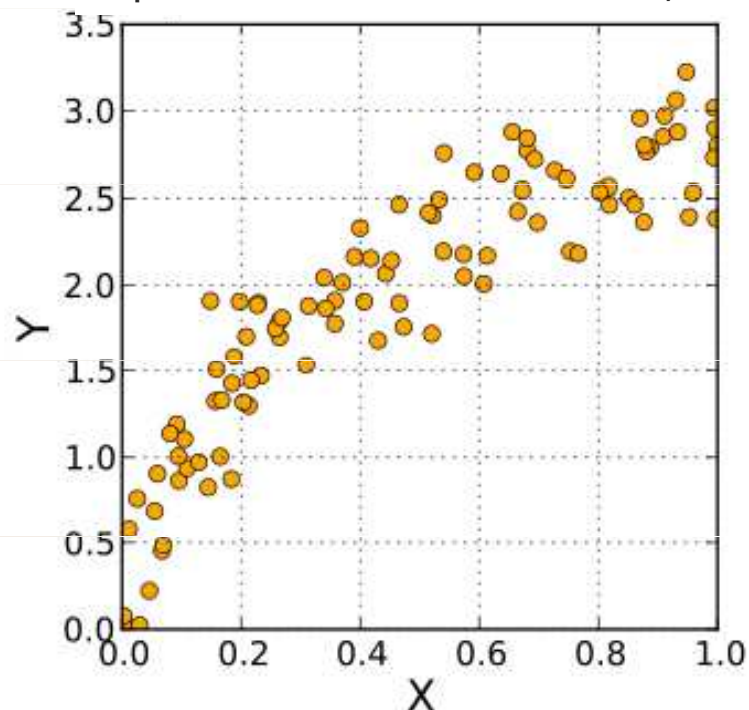
By Skbkekas - Own work, CC BY-SA 3.0,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8778570>

Spearmanův korelační koeficient je méně citlivý vůči významným odlehlým hodnotám. To je způsobeno skutečností, že Spearmanův koeficient redukuje hodnoty odlehlých hodnot na jejich pořadí v posloupnosti.



# SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

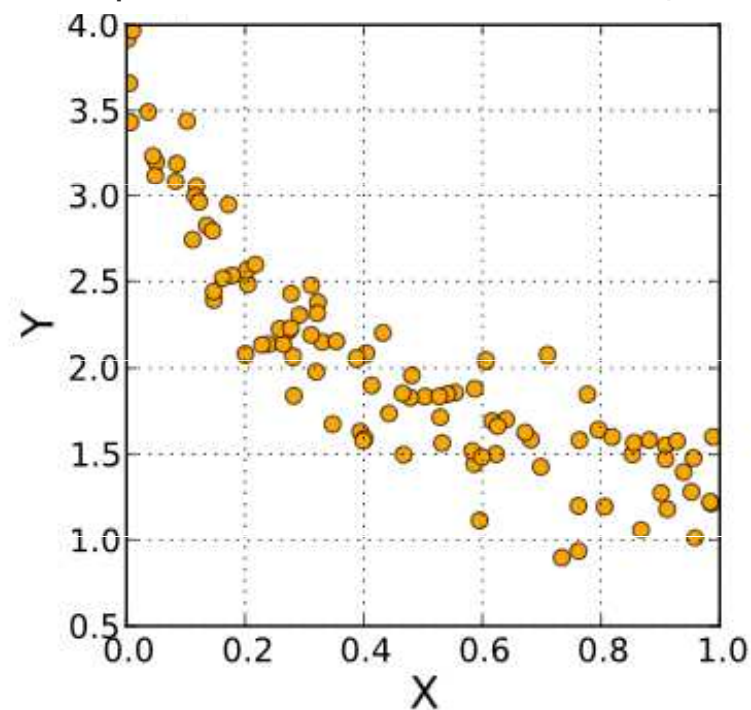
Spearmanova korelace = 0,92



By Skbkakas - Own work, CC BY-SA 3.0,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8779966>

Kladná hodnota Spearmanova korelačního koeficientu odpovídá monotónně rostoucí závislosti mezi náhodnými veličinami X a Y.

Spearmanova korelace = -0,91



By Skbkakas - Own work, CC BY-SA 3.0,  
<https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=8779958>

Záporná hodnota Spearmanova koeficientu odpovídá monotónně klesající závislosti mezi X a Y.

# SPEARMANŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

Spearmanův ( $\rho$ ) a Kendallův ( $\tau$ ) koeficient pracují s monotónností (ranky) namísto linearity.

Nejsou proto ani příliš citlivé na malé počty odlehlých hodnot (tj. nemají požadavek na 2D normalitu dat).

# ČASOVĚ ZÁVISLÁ DATA

## KŘÍŽOVÁ (VZÁJEMNÁ) KORELAČNÍ POSLOUPNOST

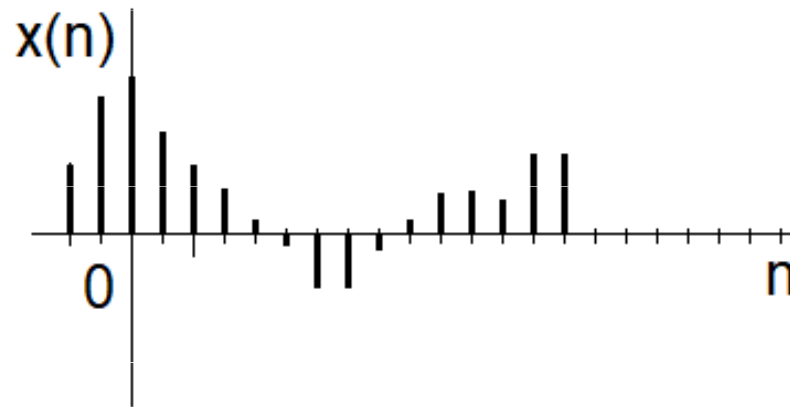
$$1. \quad R_{x_1x_2}(mT_{vz}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz})$$

$$2. \quad R_{x_1x_2}(mT_{vz}) = \sum_n^N x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz})$$

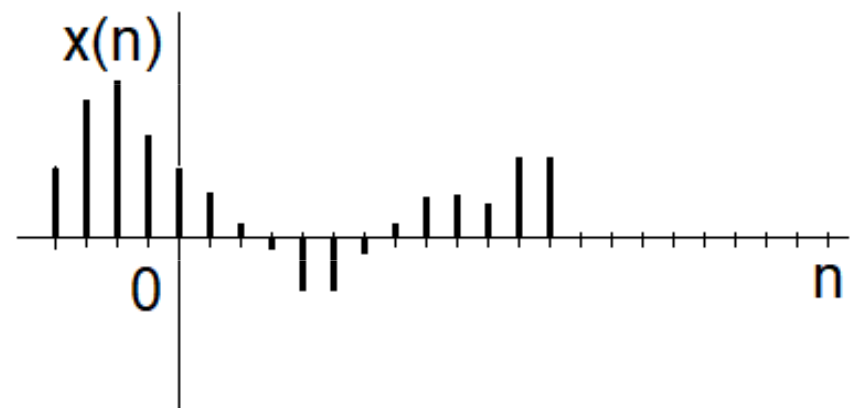
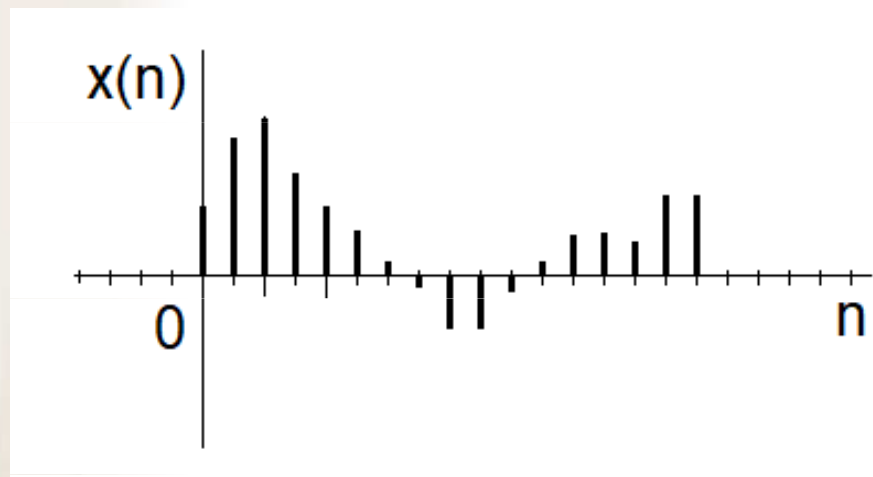
$$3. \quad R_{x_1x_2}(m) = \sum_n^N x_1(n)x_2(n+m) \quad R_{x_1x_2}(m) = \sum_n^N x_1(n)x_2(n-m)$$

$$4. \quad R_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_n^N x_1(n)x_2(n+m) \quad R_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_n^N x_1(n)x_2(n-m)$$

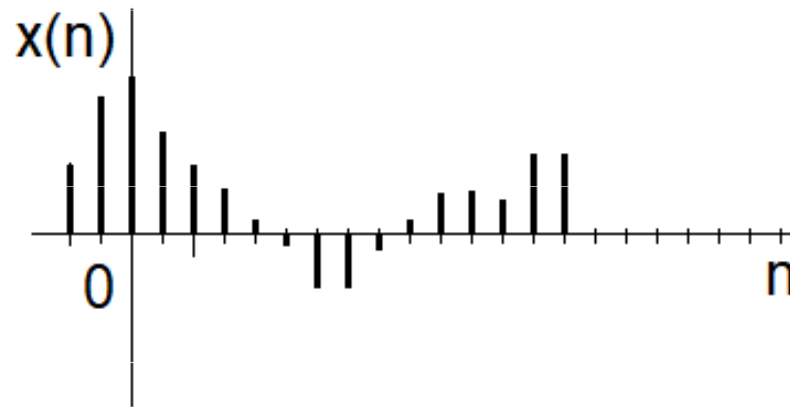
# KŘÍŽOVÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST



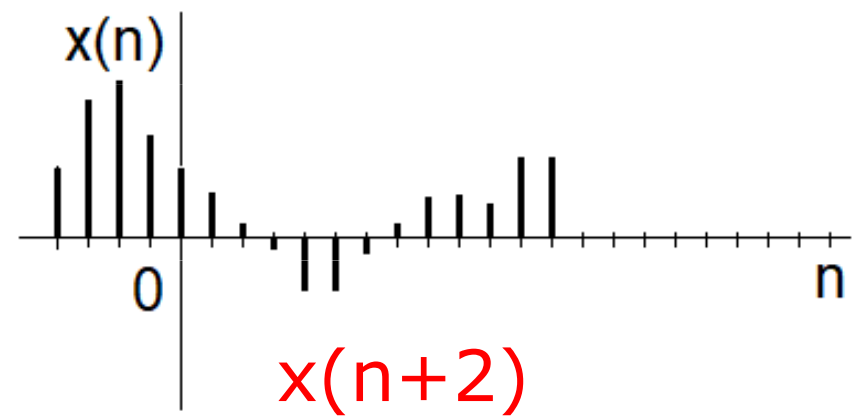
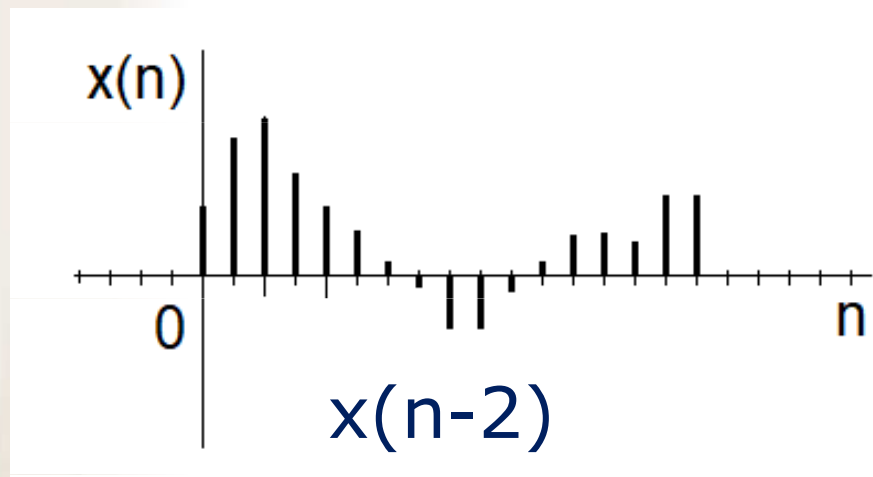
**?  $x(n+2)$  ?**



# KŘÍŽOVÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST



**?  $x(n+2)$  ?**



# ČASOVĚ ZÁVISLÁ DATA

## KŘÍŽOVÁ (VZÁJEMNÁ) KORELAČNÍ POSLOUPNOST

1. 
$$R_{x_1x_2}(mT_{vz}) = \sum_{-\infty}^{\infty} x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz})$$

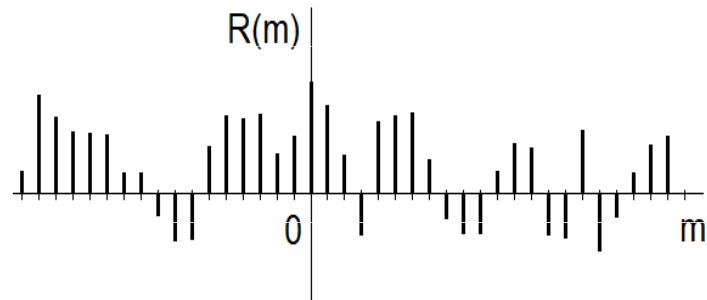
2. 
$$R_{x_1x_2}(mT_{vz}) = \sum_n^N x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz})$$

3. 
$$R_{x_1x_2}(m) = \sum_n^N x_1(n)x_2(n + m) \quad R_{x_1x_2}(m) = \sum_n^N x_1(n)x_2(n - m)$$

4. 
$$R_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_n^N x_1(n)x_2(n + m) \quad R_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_n^N x_1(n)x_2(n - m)$$

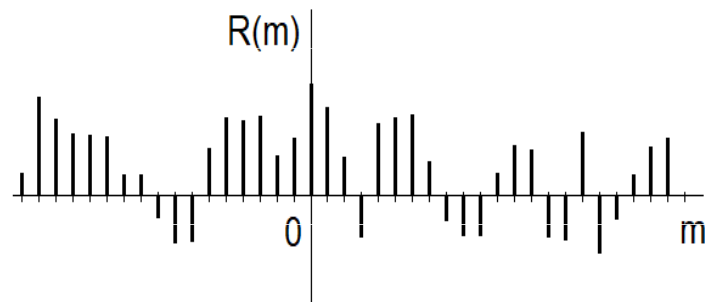
# KŘÍŽOVÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST

?

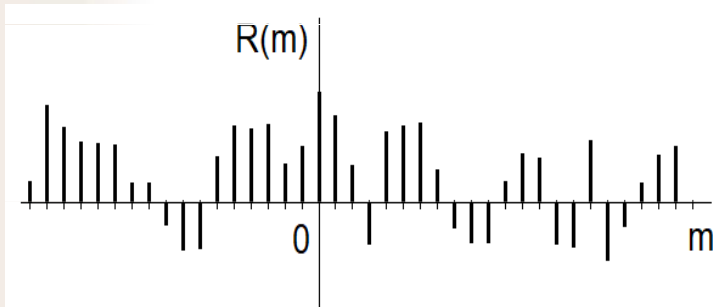


# KŘÍŽOVÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST

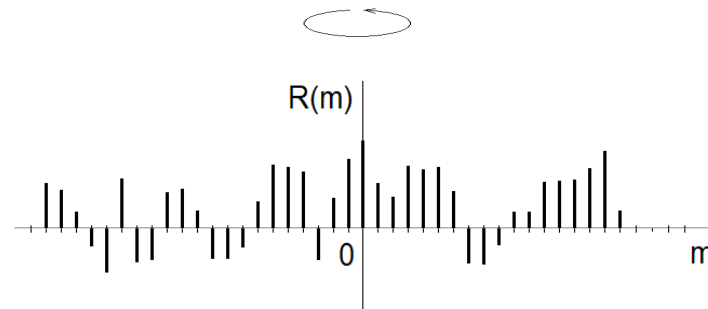
?



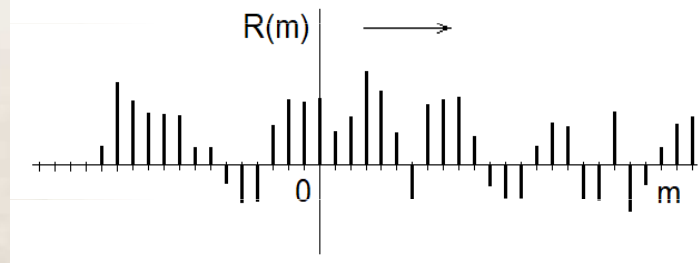
1.



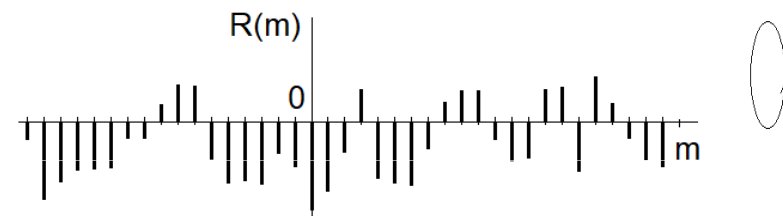
2.



3.



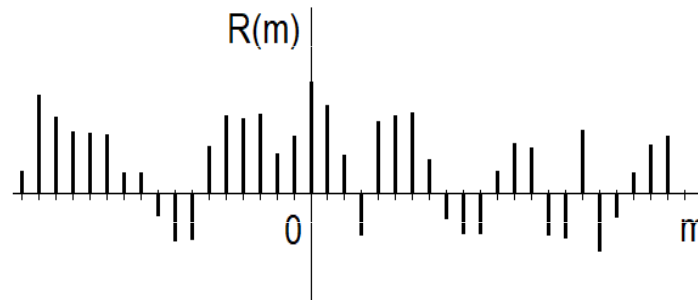
4.



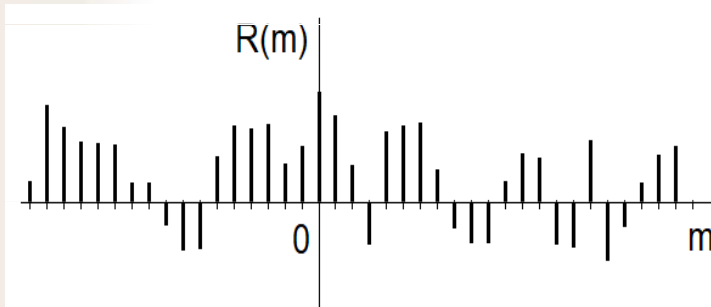


# KŘÍŽOVÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST

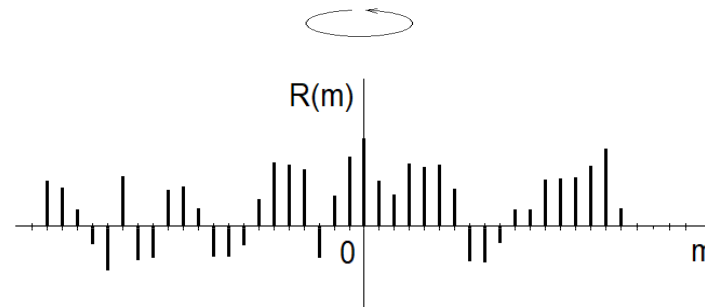
?



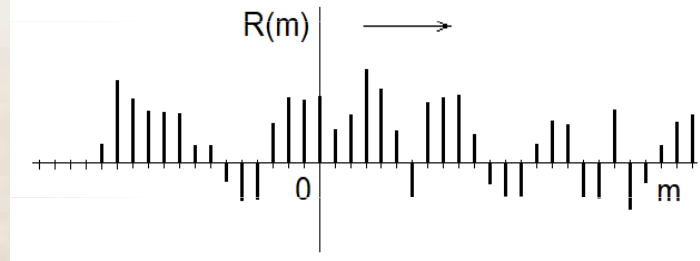
1.



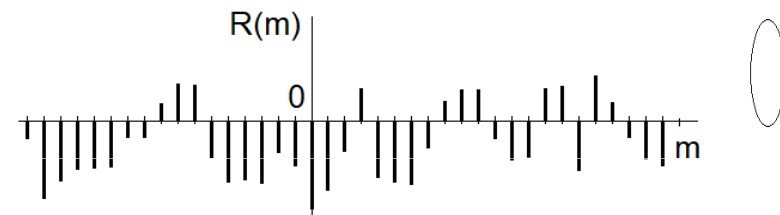
2.



3.



4.



# KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

## KŘÍŽOVÁ (VZÁJEMNÁ) KORELAČNÍ POSLOUPNOST

$$x_1(n) \neq x_2(n)$$

## AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOST

$$x_1(n) = x_2(n)$$

## KŘÍŽOVÁ KOVARIANČNÍ/AUTOKOVARIANČNÍ POSLOUPNOST

$$x_1(n) = x_{1\text{orig}}(n) - m_{x_{1\text{orig}}} \quad x_2(n) = x_{2\text{orig}}(n) - m_{x_{2\text{orig}}}$$

# KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

## VLASTNOSTI VZÁJEMNÉ KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

- ✓ vzájemná korelační posloupnost není komutativní, tj.

$$R_{x_1x_2}(n) \neq R_{x_2x_1}(n)$$

## VLASTNOSTI AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

- ✓ sudá, tj.  $R(-n) = R(n)$ ;
- ✓  $\forall n \in \mathbb{Z}: R(0) \geq R(n)$ ;
- ✓  $R(0)$  je rovna energii, resp. výkonu posloupnosti  $x(n)$ ;
- ✓ pokud je posloupnost  $x(n)$  periodická, pak je její autokorelační posloupnost rovněž periodická s toutéž periodou.

## VLASTNOSTI AUTOKOVARIANČNÍ POSLOUPNOSTI

- ✓  $R(0)$  je rovna disperzi posloupnosti  $x(n)$  pokud je  $R$  určena pomocí vztahu

$$R_{xx}(m) = \frac{1}{N} \sum_n [x(n) - m_x] [x(n+m) - m_x]$$

# KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

---

?

**ENERGIE & VÝKON**

# KORELAČNÍ POSLOUPNOST VS. PERSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

## ☑ VZÁJEMNÁ KORELAČNÍ POSLOUPNOST

$$\hat{R}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n+m)$$

$$\hat{R}_{x_1x_2}(0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n+0) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n)x_2(n)$$

## ☑ PEARSONŮV KORELAČNÍ KOEFICIENT

$$r = \frac{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - \bar{x})(y_n - \bar{y})}{\sigma_x \sigma_y} = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \frac{(x_n - \bar{x})}{\sigma_x} \cdot \frac{(y_n - \bar{y})}{\sigma_y}$$

Pokud jsou srovnávané posloupnosti  $x_1(n)$  a  $x_2(n)$  standardizovány, pak každý vzorek jejich vzájemné korelační posloupnosti je roven odpovídající hodnotě Pearsonova korelačního koeficientu.

# KORELAČNÍ POSLOUPNOST VS. KONVOLUCE

vzájemná korelační posloupnost:

konvoluce:

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_m x_1(m) \cdot x_2(n-m) = \sum_m x_1(n-m) \cdot x_2(m)$$

Po záměně symbolů

$$y(m) = x_1(m) * x_2(m) = \sum_n x_1(n) \cdot x_2(m-n)$$

Vztahy by byly ekvivalentní, pokud by posloupnost  $x_2$  byla invertována v čase. Pro symetrickou posloupnost, tj.  $x_2(n-m) = x_2(m-n)$  je tento požadavek splněn.

# PARCIÁLNÍ KORELACE

**Parciální korelační koeficient** je míra vztahu mezi dvěma veličinami, které jsou řízeny jednou nebo více řídicími veličinami.

# PARCIÁLNÍ KORELACE

**PŘÍKLAD:** ([https://en.wikipedia.org/wiki/Partial\\_correlation](https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_correlation))

Předpokládejme, že známe hodnoty tří proměnných,  $X$ ,  $Y$ , a  $Z$ :

X	Y	Z
2	1	0
4	2	0
15	3	1
20	4	1

Pokud  $Z = 0$ , jsou hodnoty  $X$  rovny přesně dvojnásobkům  $Y$ , a pokud  $Z = 1$ ,  $X$  je přesně rovno pětinásobku  $Y$ . Tak v závislosti na  $Y$  je přesný vztah mezi  $X$  a  $Y$ ; tato relace ale nemůže být přesná bez reference k hodnotám  $Z$ .

Pokud určíme Pearsonův korelační koeficient mezi posloupnostmi  $X$  a  $Y$ , je výsledná hodnota 0,836. Určíme-li ale parciální korelaci mezi  $X$  a  $Y$  pomocí dále uvedeného vztahu, odpovídá její hodnota 0,919 podstatně silnějšímu vzájemnému vztahu.



# PARCIÁLNÍ KORELACE

## JAK JI SPOČÍTAT?

Parciální korelace  $r_{XY.Z}$  mezi posloupnostmi X a Y za předpokladu, že existují řídicí veličiny  $\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}$  je rovna Pearsonově korelaci mezi rezidui  $e_x$  a  $e_y$ , která plynou z lineární regrese (MNČ) posloupnosti X a posloupnosti  $\mathbf{Z}$ , resp. posloupnosti Y a posloupnosti  $\mathbf{Z}$ .

- ✓ pomocí lineární regrese;
- ✓ pomocí maticové inverze;
- ✓ pomocí rekurzivního vztahu

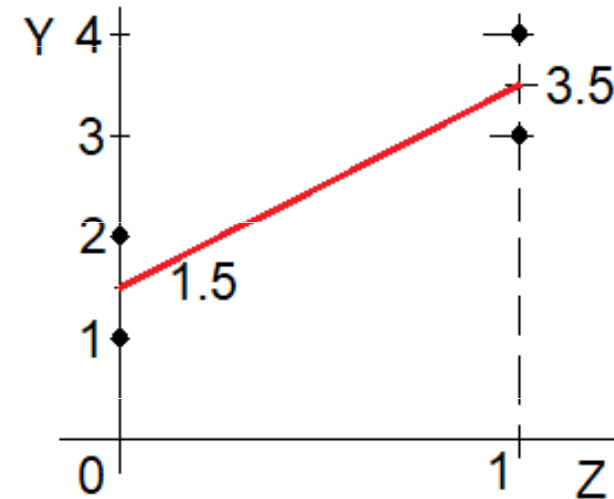
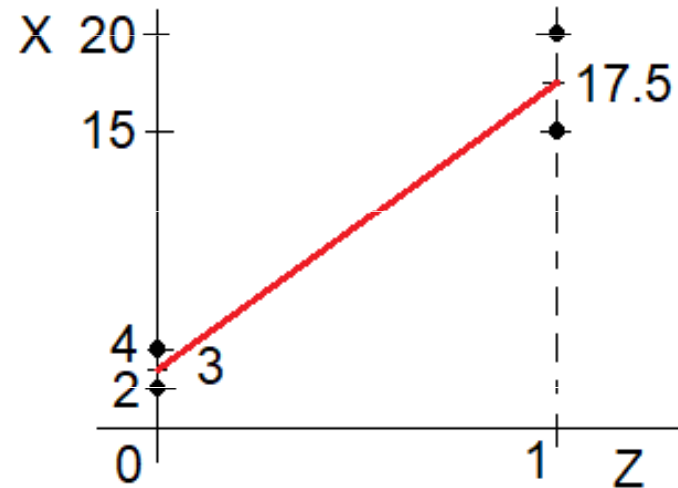
s jedinou řídicí proměnnou se tento vztah redukuje na tvar

$$r_{XYZ} = \frac{r_{XY} - r_{XZ}r_{YZ}}{\sqrt{(1 - r_{XZ}^2)(1 - r_{YZ}^2)}}$$

# PARCIÁLNÍ KORELACE

## JAK JI SPOČÍTAT?

X	Y	Z
2	1	0
4	2	0
15	3	1
20	4	1



X	$\Delta X$	Y	$\Delta Y$
2	-1.0	1	-0.5
4	1.0	2	0.5
15	-2.5	3	-0.5
20	2.5	4	0.5

$$r_{\Delta X \Delta Y} = 0,919$$

# PARCIÁLNÍ AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOST

**Parciální autokorelační posloupnost (PACF)** určuje hodnoty parciální korelace mezi hodnotami časové řady a jejími zpožděnými hodnotami, přičemž jako řídicí posloupnost je použita posloupnost pro všechna menší zpoždění.

Na rozdíl od obyčejné autokorelační posloupnosti, která již na ničem dalším nezávisí.

Je-li známa časová řada  $x(n)$ , pak parciální autokorelační posloupnost  $R_{xx}(k)$  pro zpoždění  $k$  je určena podle následujících vztahů

$$R_{xx}(1) = \text{Cor}(x(n), x(n+1)),$$

$$R_{xx}(k) = \text{Cor}(x(n) - \hat{x}(n), x(n+k) - \hat{x}(n+k)), \quad k = 2, 3, \dots,$$

kde  $\hat{x}(n)$  a  $\hat{x}(n+k)$  jsou hodnoty nejlepší lineární predikce  $x(n)$  a  $x(n+k)$  z hodnot  $x(n+1), \dots, x(n+k-1)$ .

# ZA TÝDEN NASHLEDANOU