



ČASOVÉ ŘADY



Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.

**UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz**

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

KORELAČNÍ POSLOUPNOST

1.
$$R_{x_1x_2}(mT_s) = \sum_n^N x_1(nT_s)x_2(nT_s+mT_s)$$

2.

3.

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

KORELAČNÍ POSLOUPNOST

1.
$$R_{x_1x_2}(mT_s) = \sum_n^N x_1(nT_s)x_2(nT_s+mT_s)$$

2.

3.

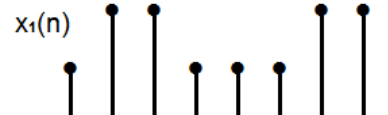
ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o téže délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

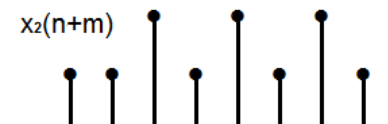
$$\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2(n+m) \quad A = \frac{1}{N}$$

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$

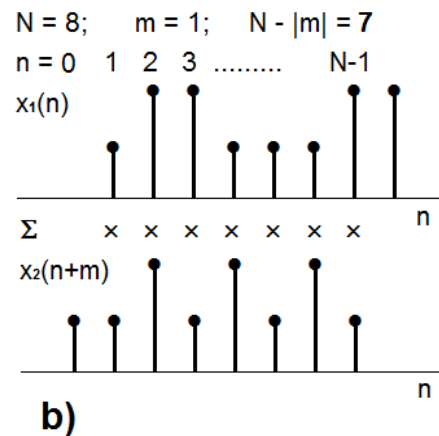
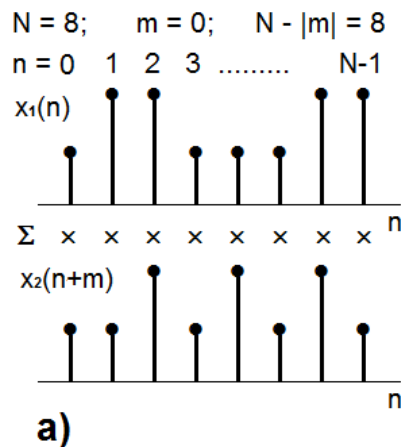


a)

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o též délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

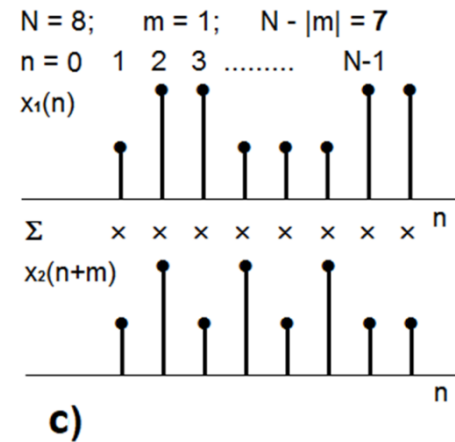
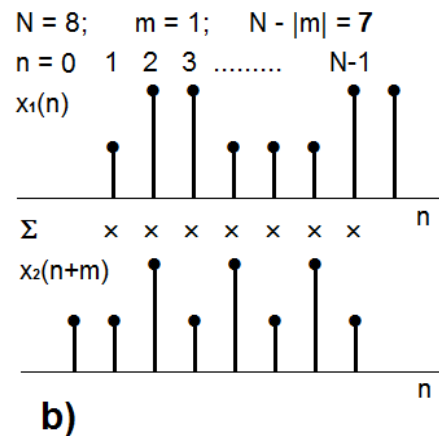
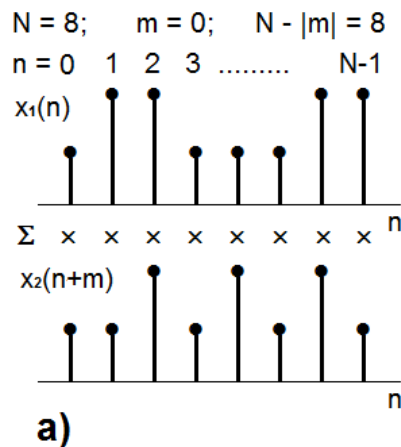
$$\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2(n+m) \quad A = \frac{1}{N}$$



ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o též délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

$$\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2(n+m) \quad A = \frac{1}{N}$$



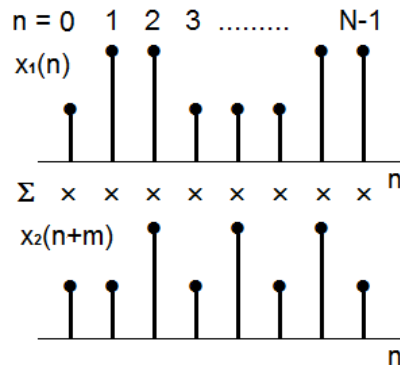
kruhová korelace

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o též délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

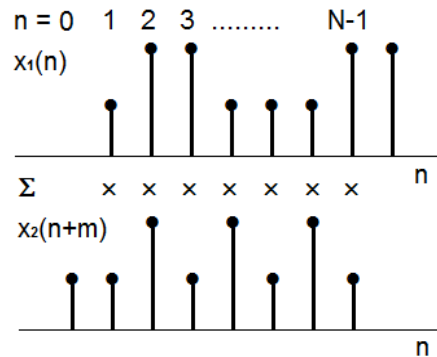
$$\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2(n+m) \quad A = \frac{1}{N}$$

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$



a)

$N = 8; \quad m = 1; \quad N - |m| = 7$



b)

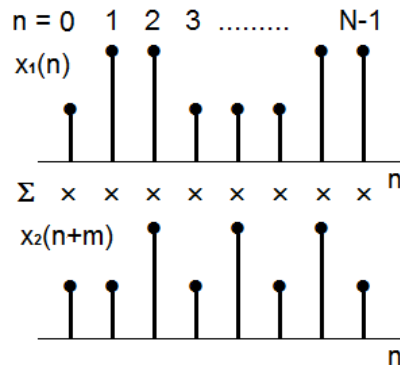
$$A = \frac{1}{N} \text{ nebo } A = \frac{1}{N-1}$$

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o též délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

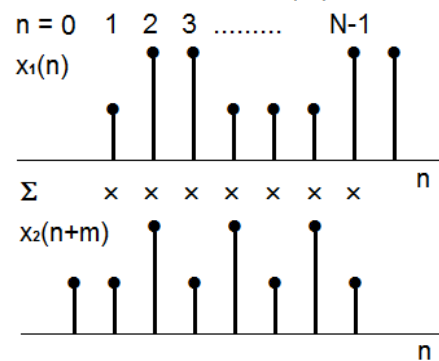
$$\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2(n+m) \quad A = \frac{1}{N}$$

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$



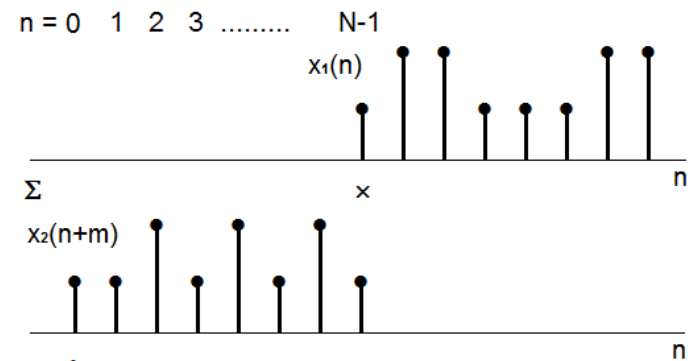
a)

$N = 8; \quad m = 1; \quad N - |m| = 7$



b)

$N = 8; \quad m = N-1; \quad N - |m| = 1$



c)

$$A = \frac{1}{N} \text{ nebo } A = \frac{1}{N-1}$$

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o téže délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

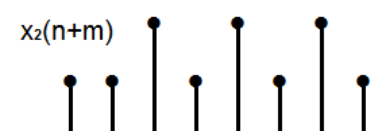
$$\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2(n+m) \quad A = \frac{1}{N}$$

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



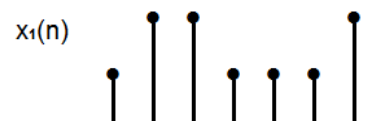
$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$



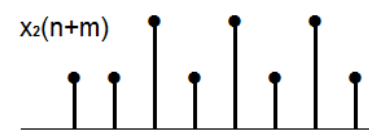
a)

$N = 8; \quad m = 1; \quad N - |m| = 7$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$



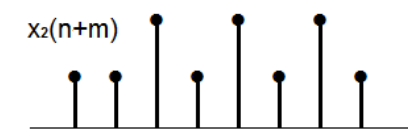
b)

$N = 8; \quad m = N-1; \quad N - |m| = 1$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



$\Sigma \quad x \quad n$



c)

$${}_1\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1 \quad {}_2\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

KRÁTKÝ ODHADOVÝ EXKURZ

- ☑ odhad parametru je závislý na volbě úseku analyzované veličiny;
- ☑ protože je výběr intervalu **náhodný**, je i odhad parametru **náhodnou** veličinou;
- ☑ základní (požadované) vlastnosti odhadů:
 - **neustrannost** – záruka, že v průměru se bude odhad pohybovat kolem správné hodnoty parametru

$$E\hat{q} = q; \quad \lim_{K \rightarrow \infty} E\hat{q} = q \quad \text{asymptoticky neustranný odhad}$$

- **konzistence** – čím delší bude zkoumaný interval, tím více se bude odhad blížit neznámé hodnotě

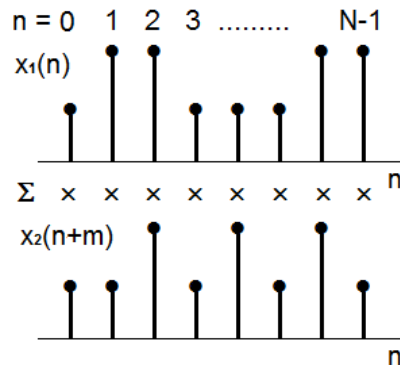
$$(\forall \varepsilon > 0) \lim_{K \rightarrow \infty} P(\|\hat{q} - q\| > \varepsilon) = 0$$

ODHAD KORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

Nyní předpokládejme dvě konečné časové řady (obě o téže délce N vzorků), jejichž vzájemnou korelační posloupnost chceme spočítat.

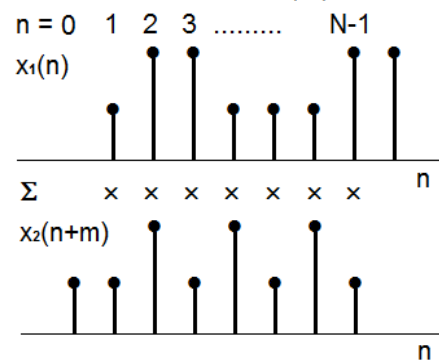
$$\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = A \cdot \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) \cdot x_2(n+m) \quad A = \frac{1}{N}$$

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$



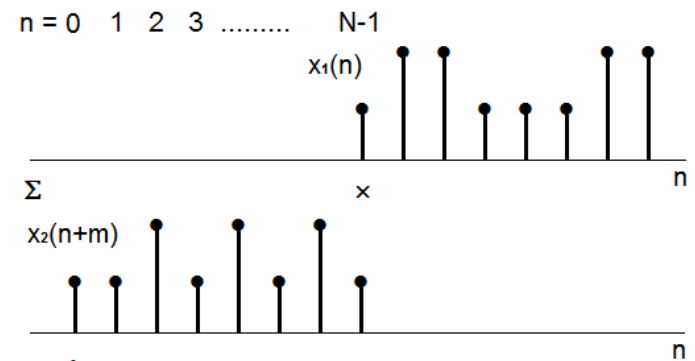
a)

$N = 8; \quad m = 1; \quad N - |m| = 7$



b)

$N = 8; \quad m = N-1; \quad N - |m| = 1$



c)

1)

$$\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N - |m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

2)

$$\tilde{r}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1$$

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad1) **střední hodnota**

$$E[\tilde{r}_{xx1}(mT_{vz})] = \frac{1}{N-|m|} \cdot \sum_{n=0}^{N-|m|-1} \underbrace{E[x(nT_{vz})x(nT_{vz} + mT_{vz})]}_{\gamma_{xx}(mT_{vz})} = \gamma_{xx}(mT_{vz})$$

takhle je definovaná AKF
stacionárního diskrétního
náhodného procesu

tzn. je nestranný odhad

rozptyl [Jenkins, G.M., Watts, D.G.: Spectral Analysis & Its
Application, Holden-Day, 1968]

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad1) pokračování

Protože $\hat{\rho}_m$ a $\hat{\rho}_m^*$
je odhad konzistentní

pro velké hodnoty m má odhad $\hat{\rho}_m^*$ velký rozptyl

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad2) **střední hodnota**

je asymptoticky nestranný odhad

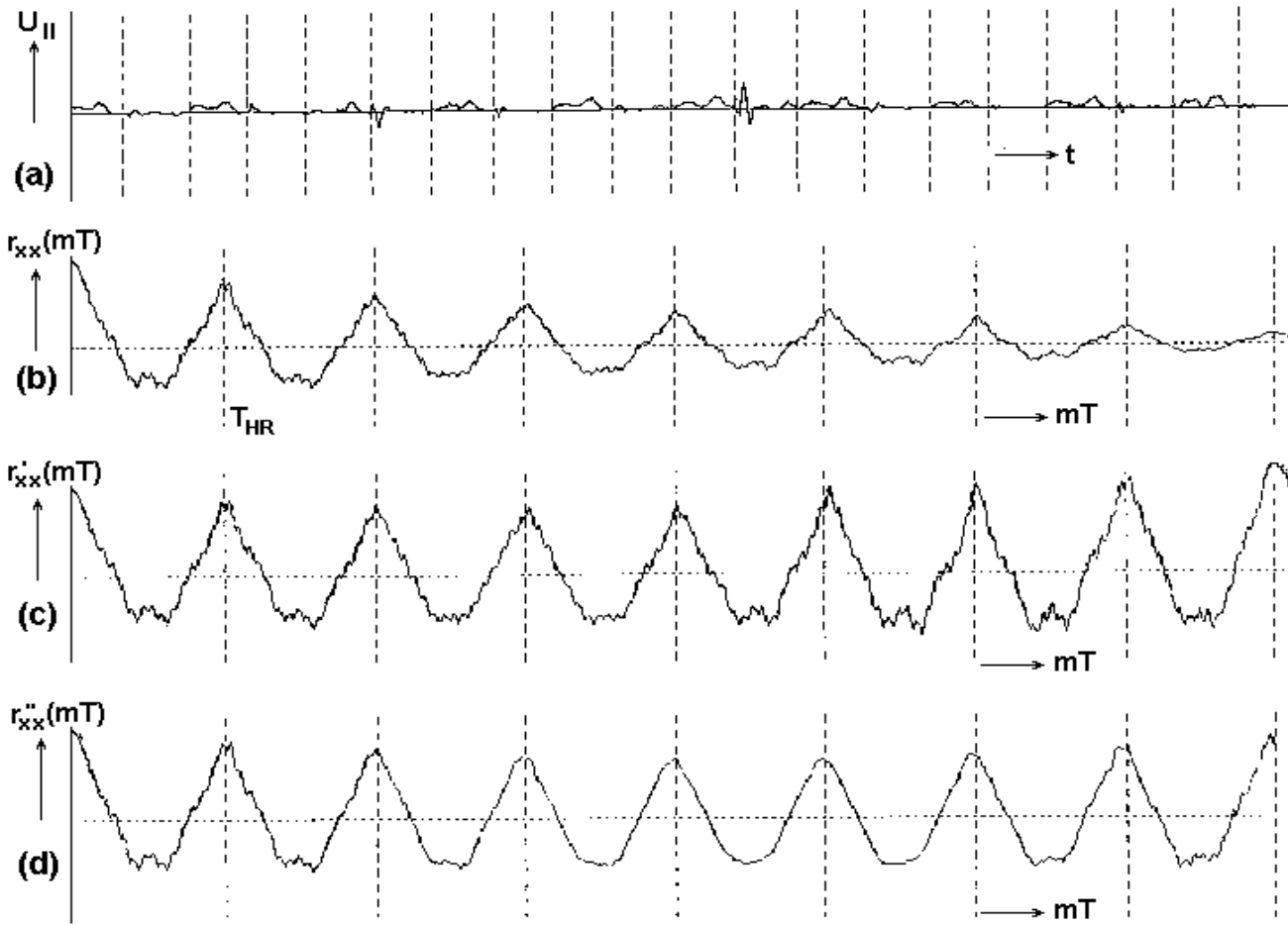
ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI

ad2) **rozptyl**

je to menší než pro

a tak je také konzistentní

ODHADY AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTI PŘÍKLAD ZE ŽIVOTA

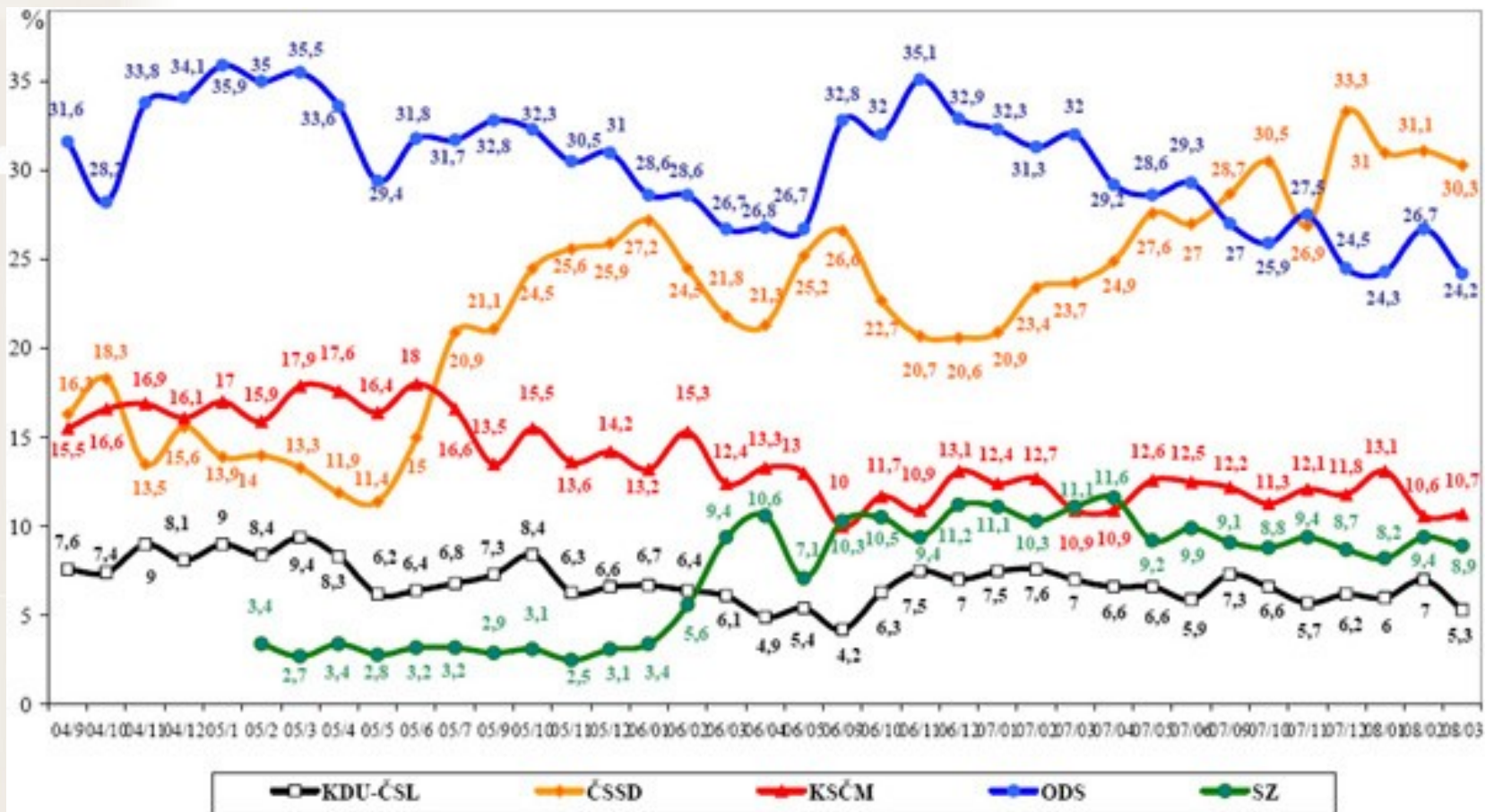




VII. HARMONICKÁ DEKOMPOZICE



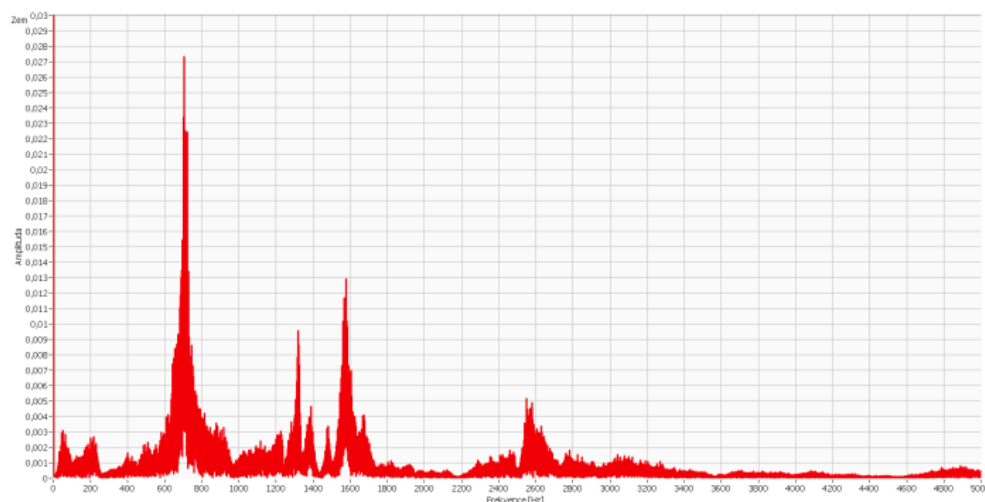
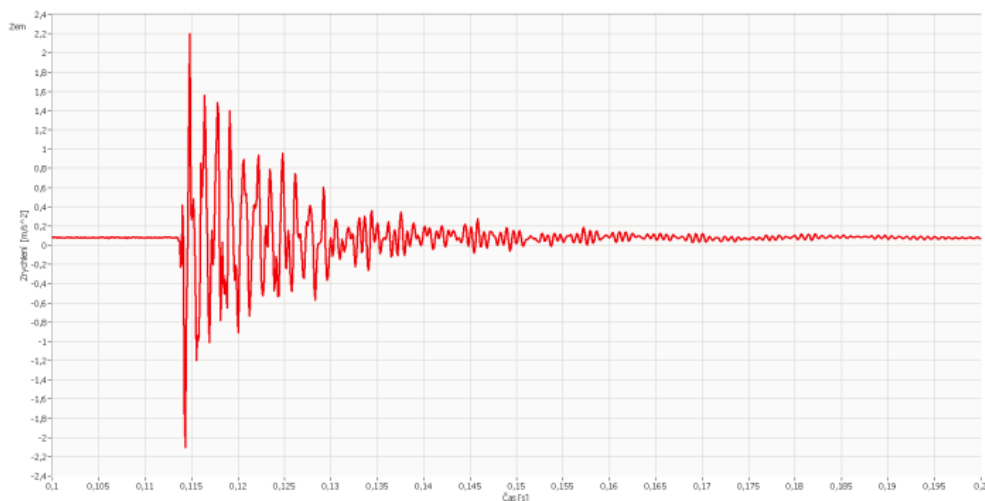
ČASOVÁ ŘADA



Zdroj: STEM, Trendy 2004/9 - 2008/03

Preference politických stran v ČR v období od 8/2004 do 3/2008

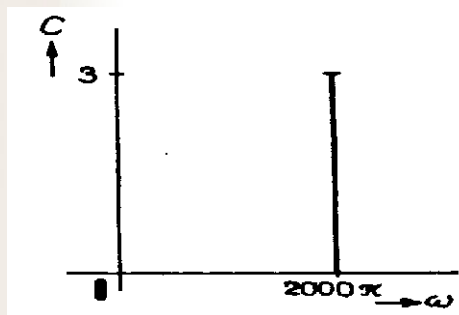
OSCILACE



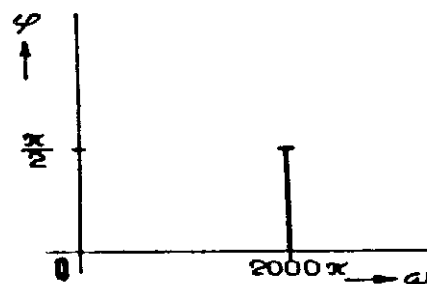
HARMONICKÁ FUNKCE

- ☑ tříparametrickou harmonickou funkci lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách
amplituda \times úhlový kmitočet a počáteční fáze \times
úhlový kmitočet:

$$C_1 = C_1(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_1 = \varphi_1(\omega);$$



spektrum amplitud



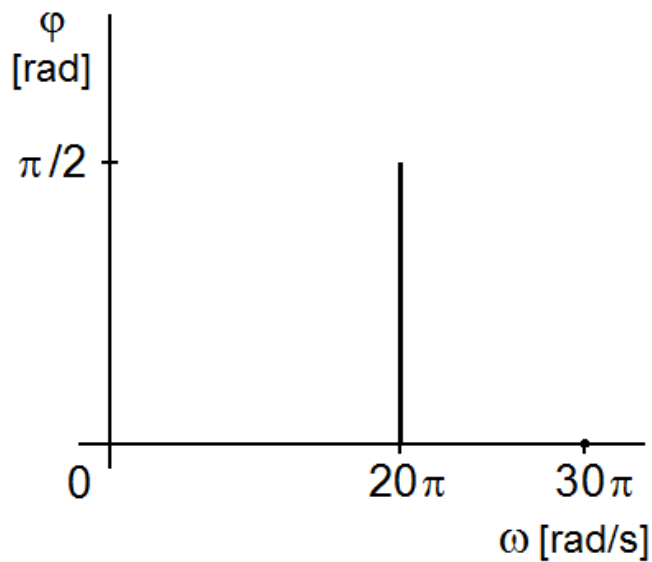
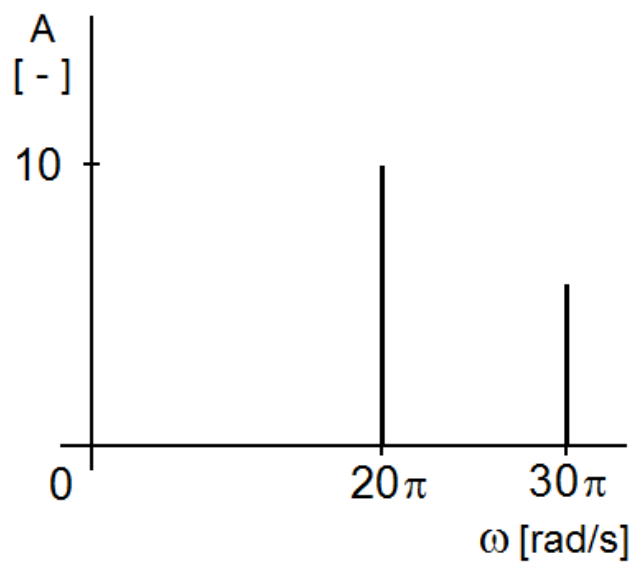
spektrum počátečních fází

HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2).$$

HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10 \cdot \cos(2\pi \cdot 10t + \pi/2) + 5 \cdot \cos(2\pi \cdot 15t)$$





!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!

Frekvenční spektrum funkce je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se funkce skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !

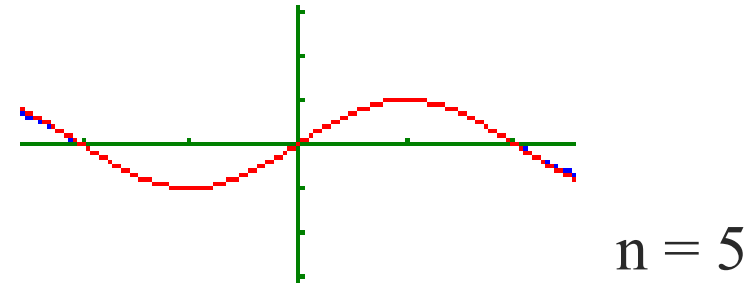
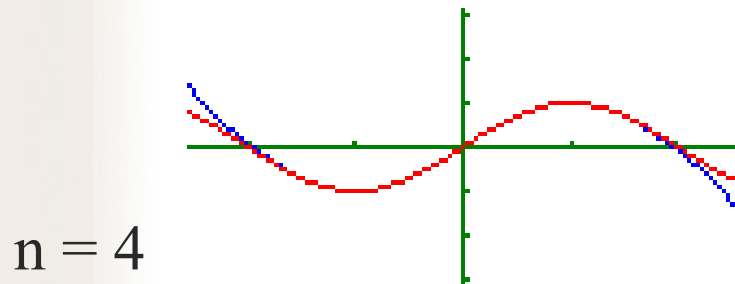
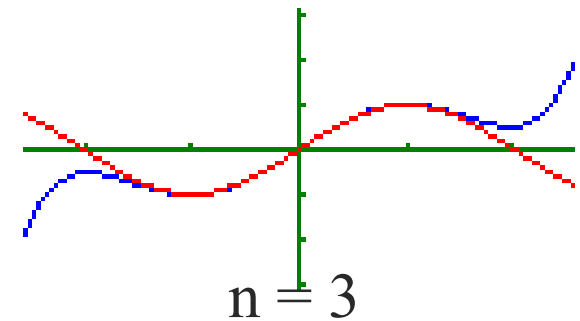
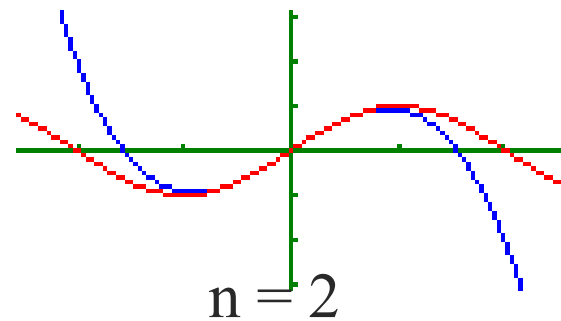
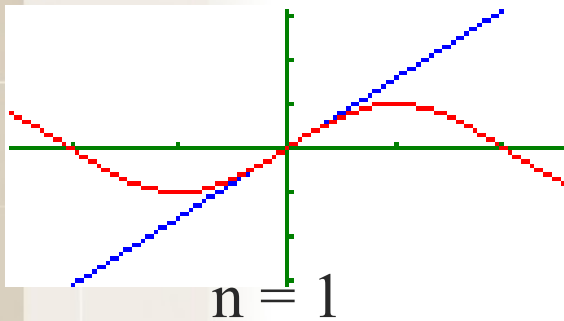
TAYLORŮV ROZVOJ

Nechť funkce $f(x)$ má v okolí $U(x_0)$ bodu x_0 derivace až do řádu $n+1$ včetně

Taylorova řada

Maclaurinova řada, tj. Taylorova řada pro $x_0 = 0$

TAYLORŮV ROZVOJ FUNKCE $y = \sin(x)$ PRO $x = 0$

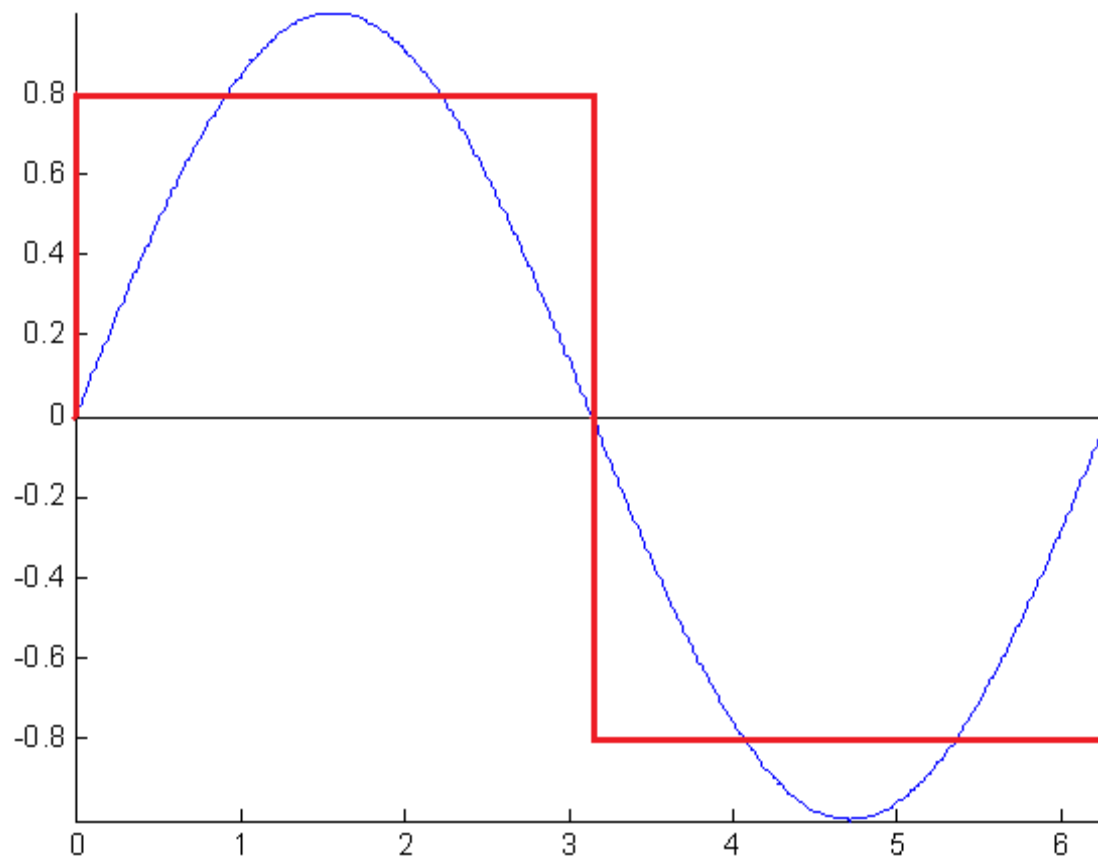


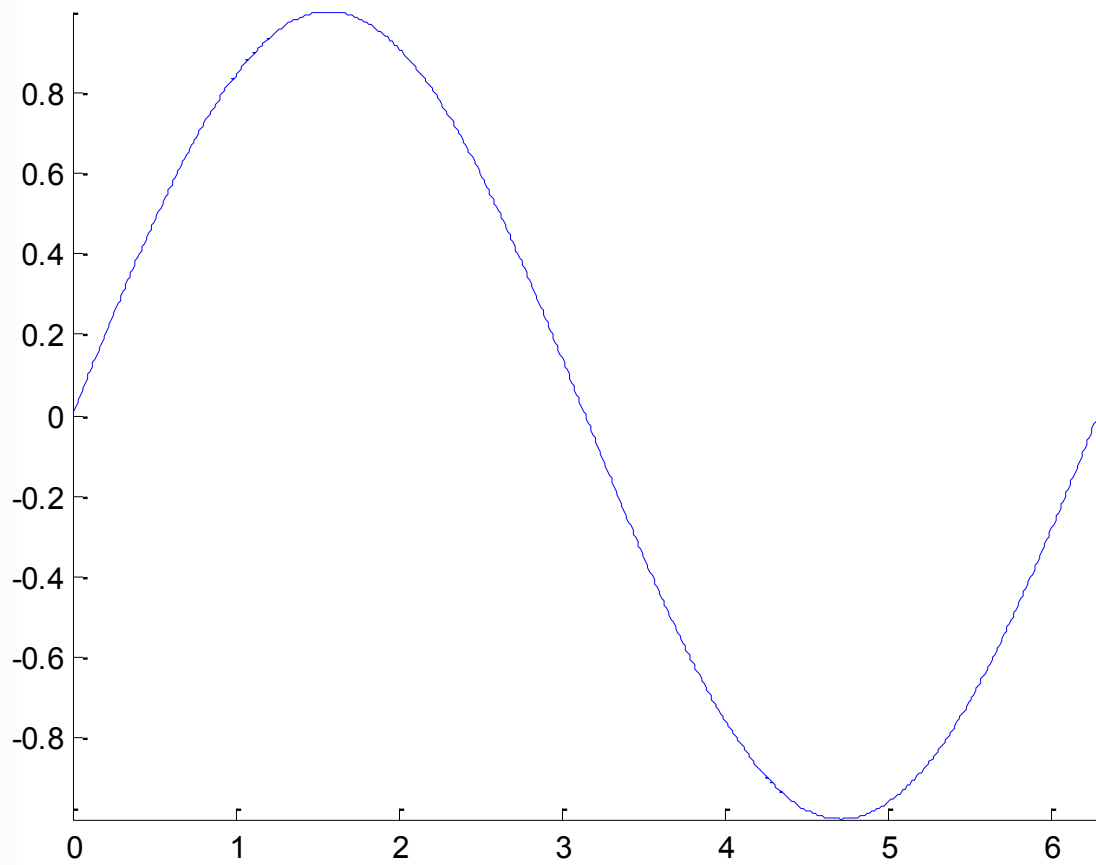
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

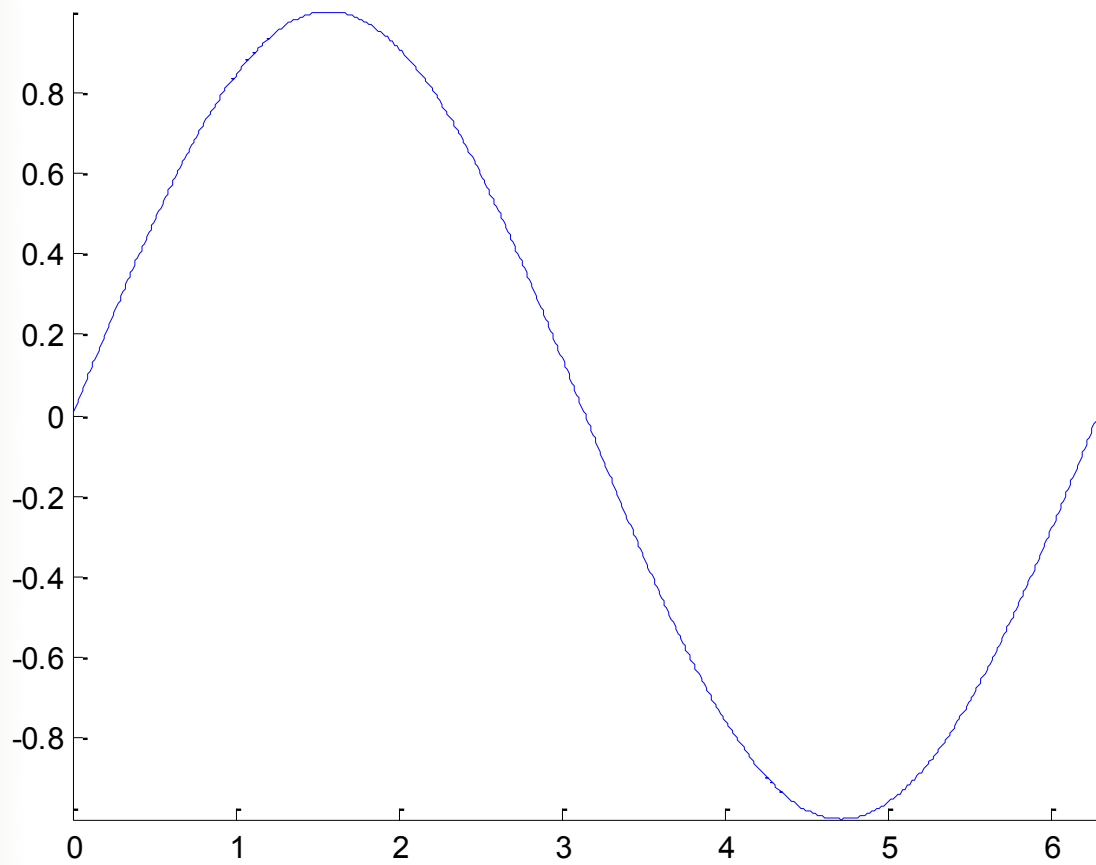
ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

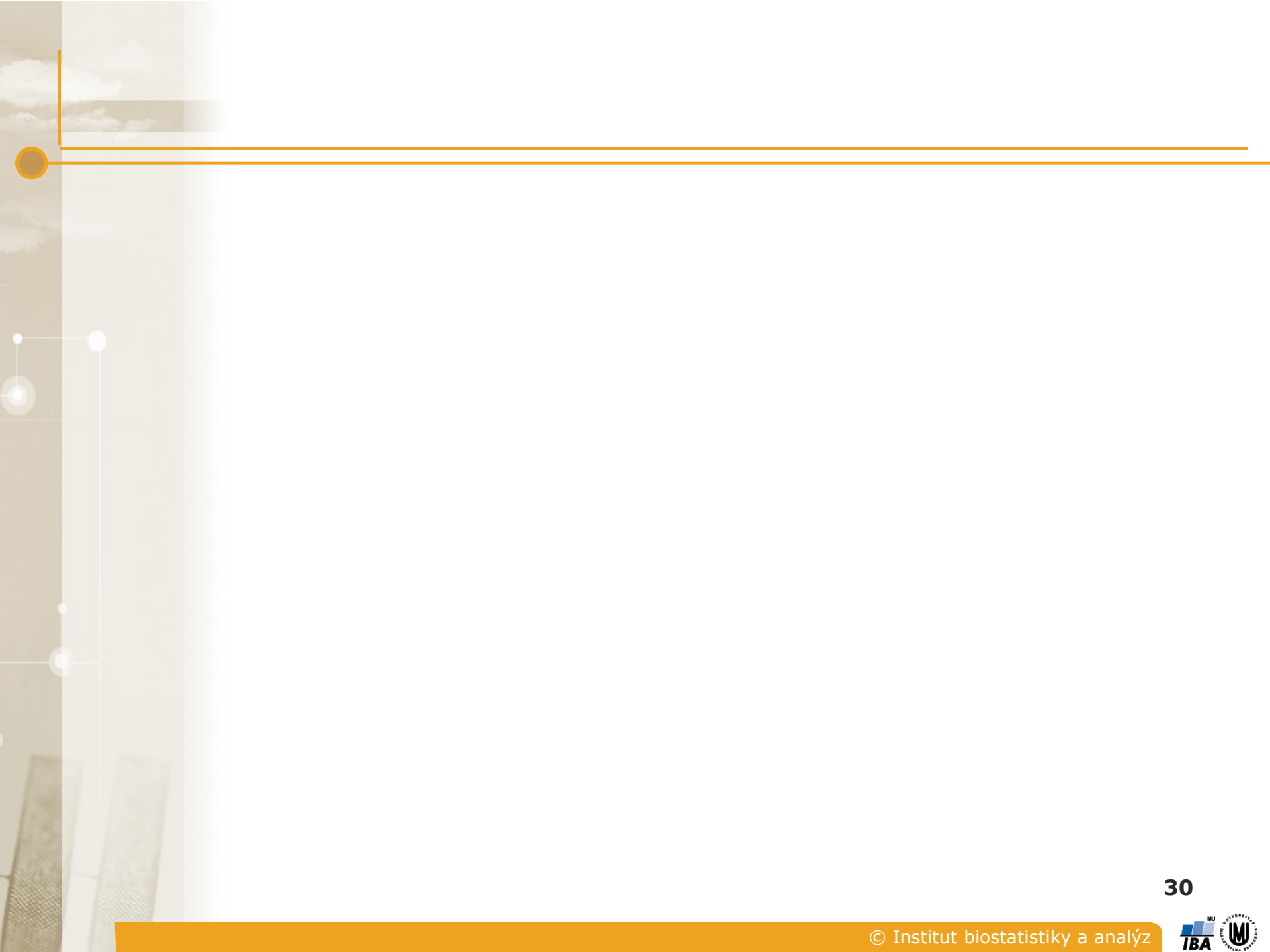
FOURIEROVY ŘADY

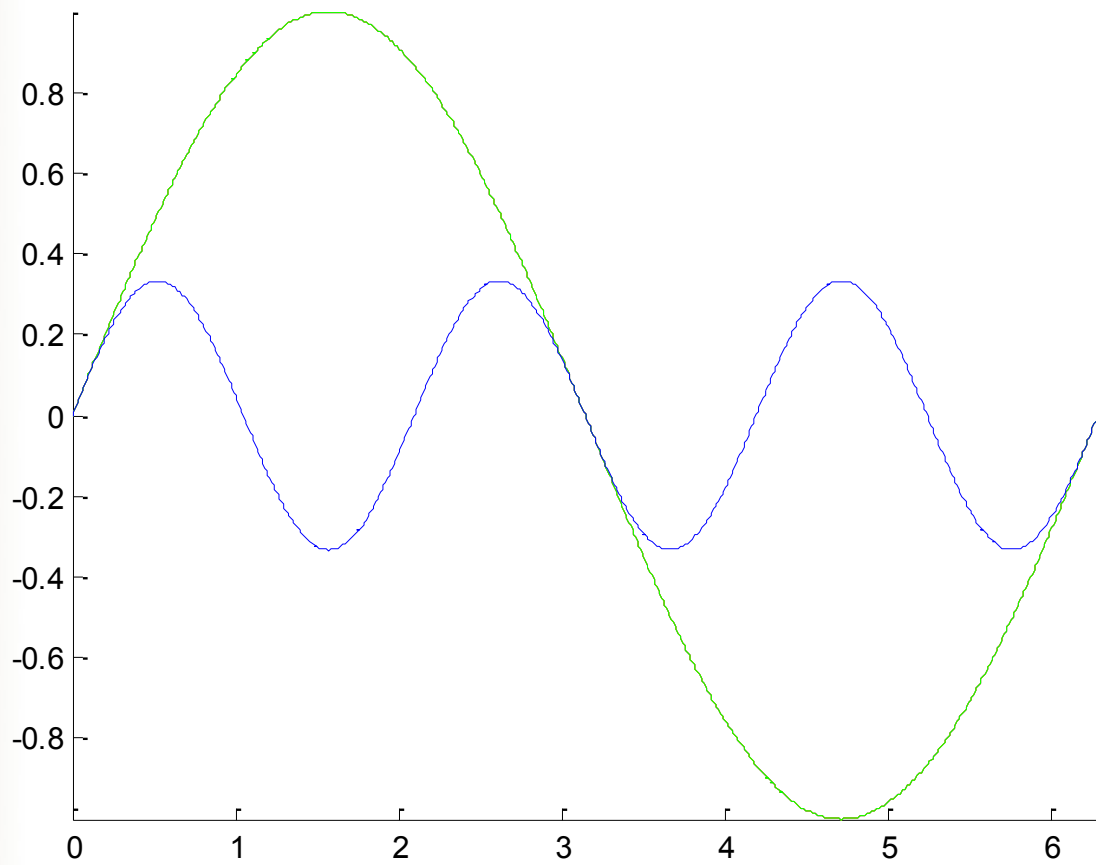
- ☑ poznali jsme, že funkci je možné vyjádřit jako **mocninou řadu**;
- ☑ jinou možností je vyjádřit funkci jako harmonickou (trigonometrickou) řadu (tj. jako součet harmonických funkcí);
- ☑ takto lze vyjádřit obsáhlejší třídu funkcí než mocninnými řadami.

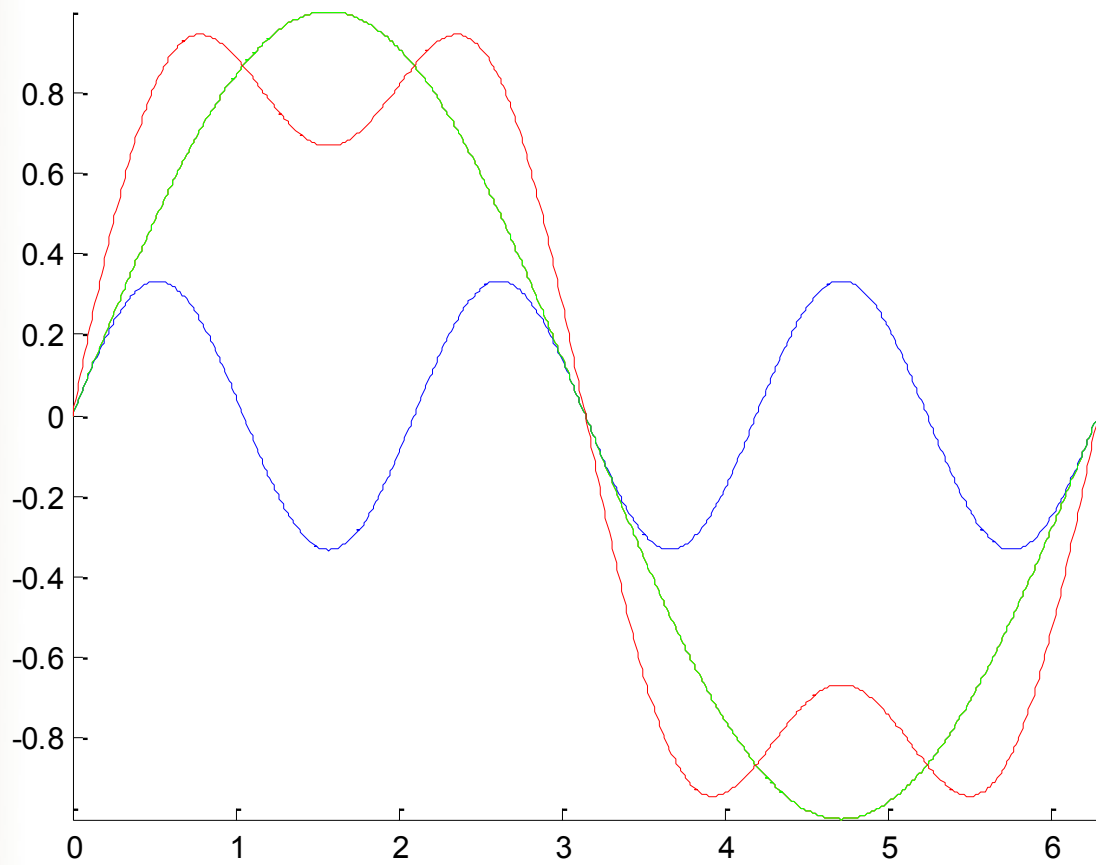


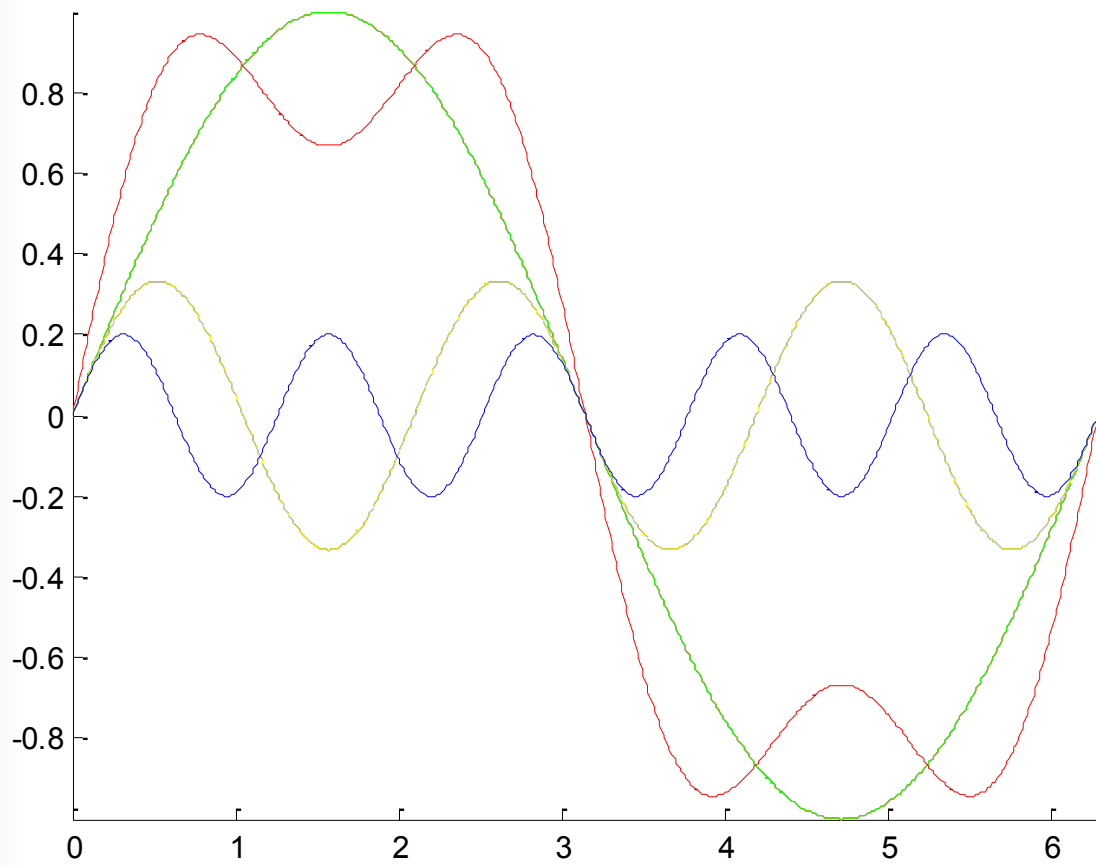


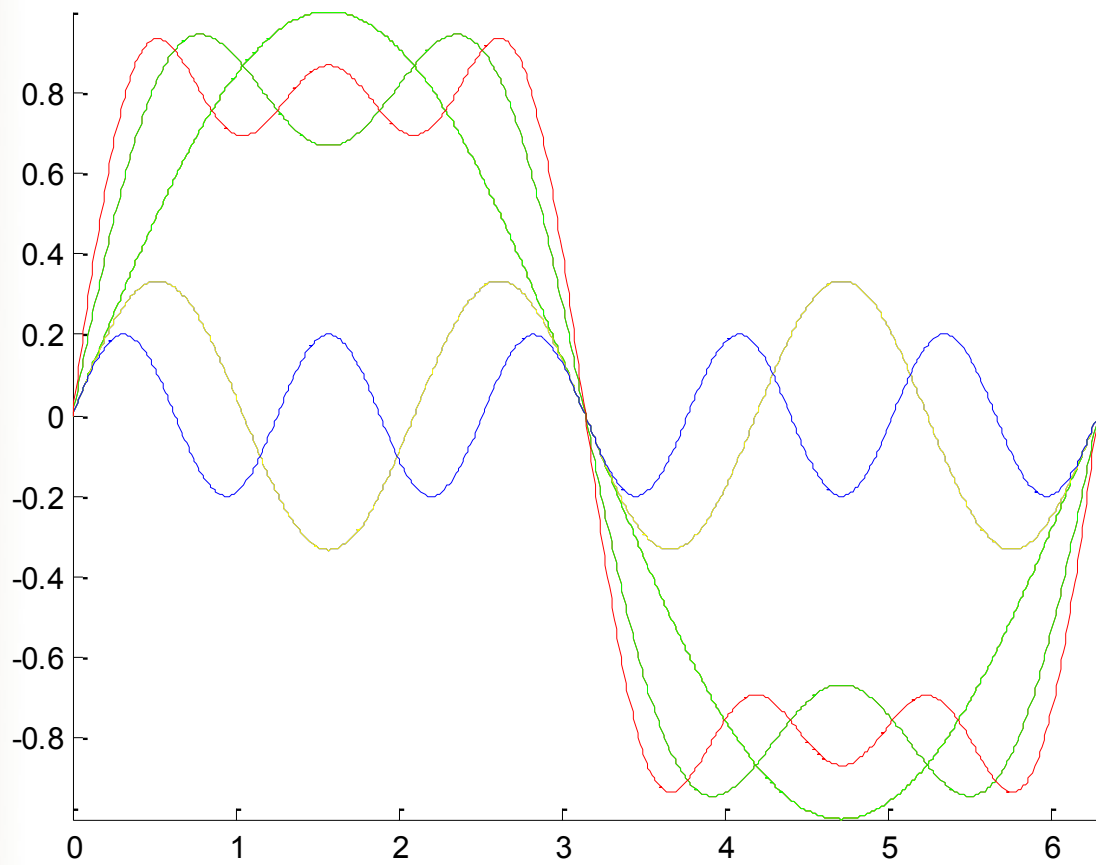


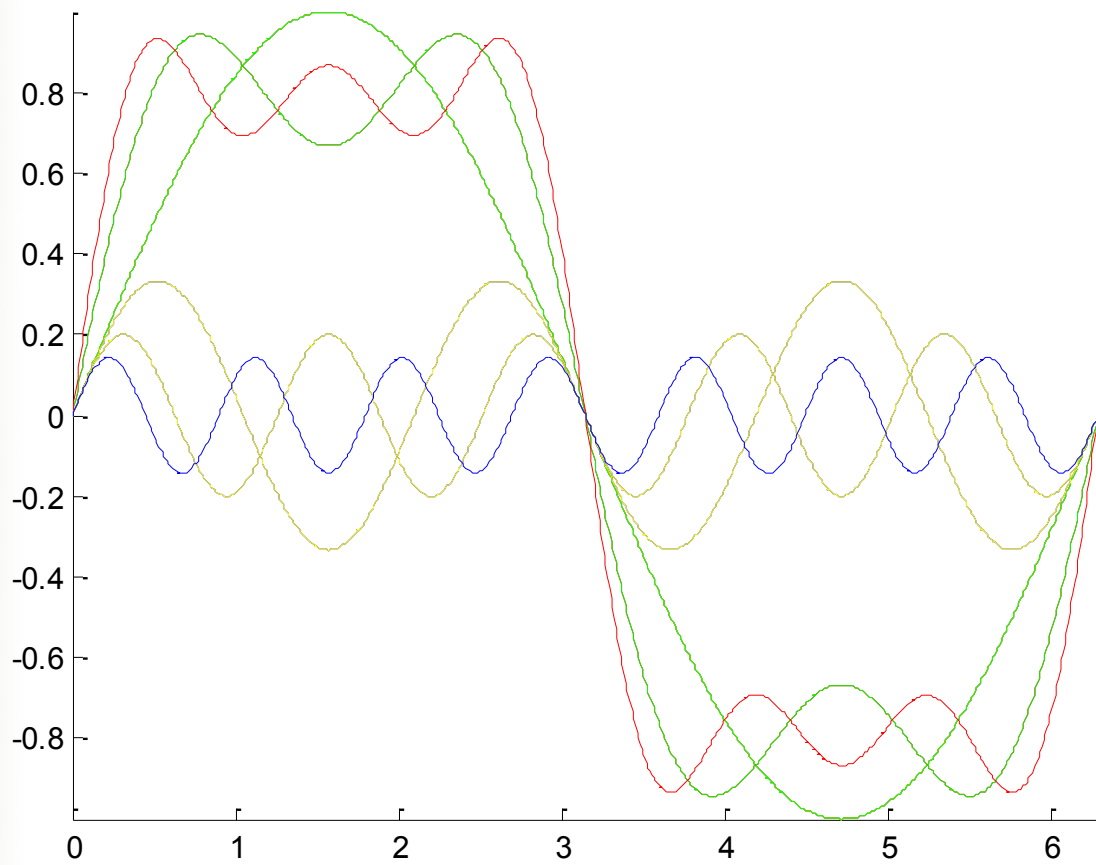


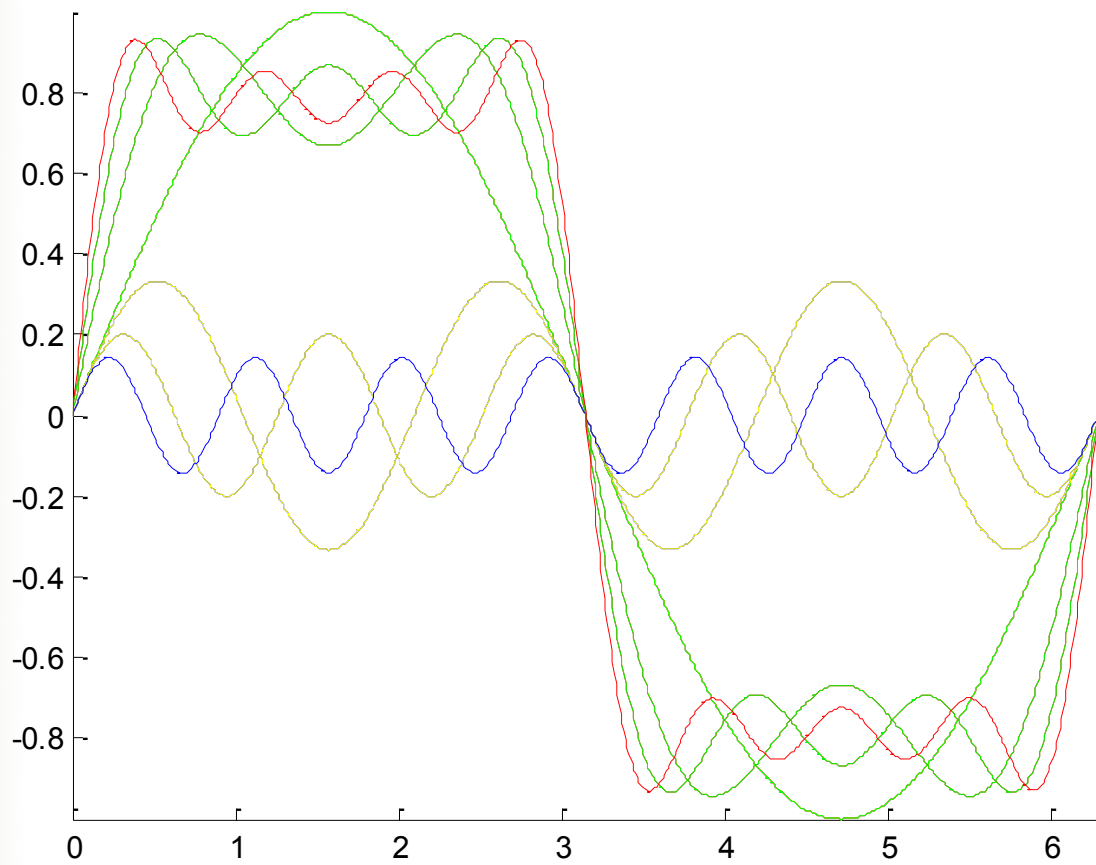


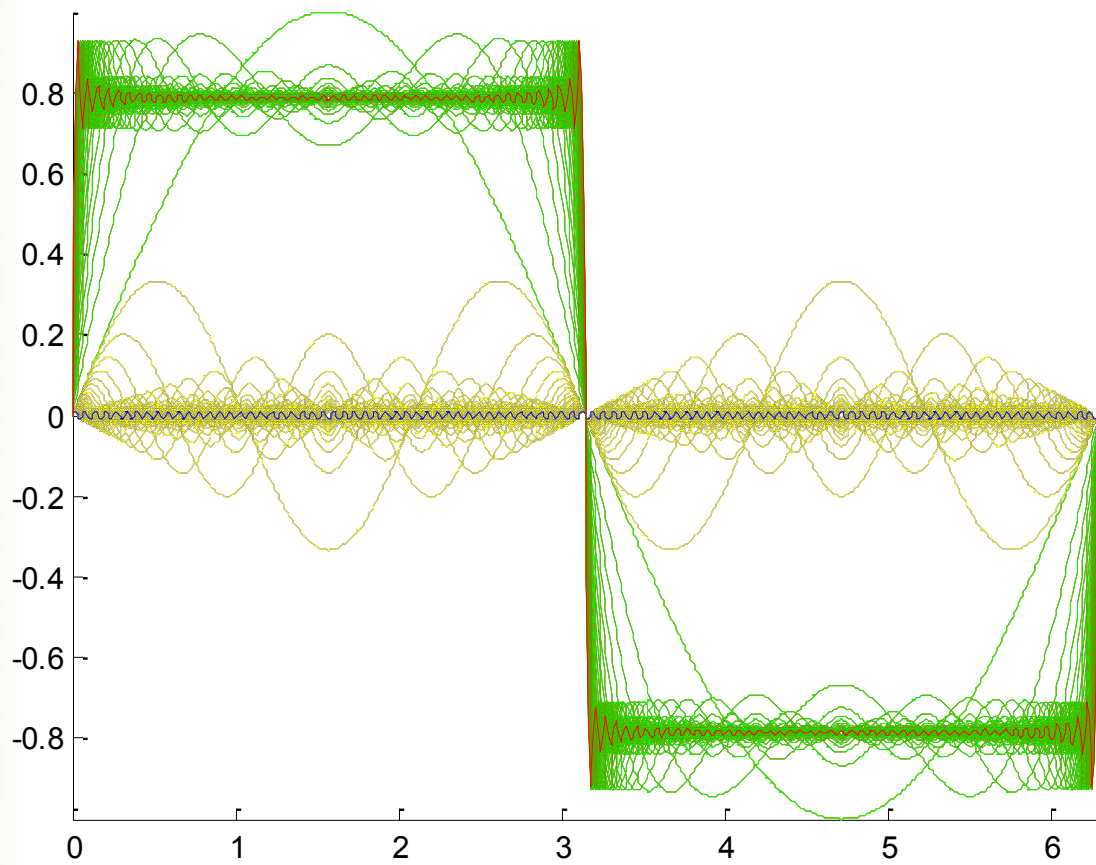


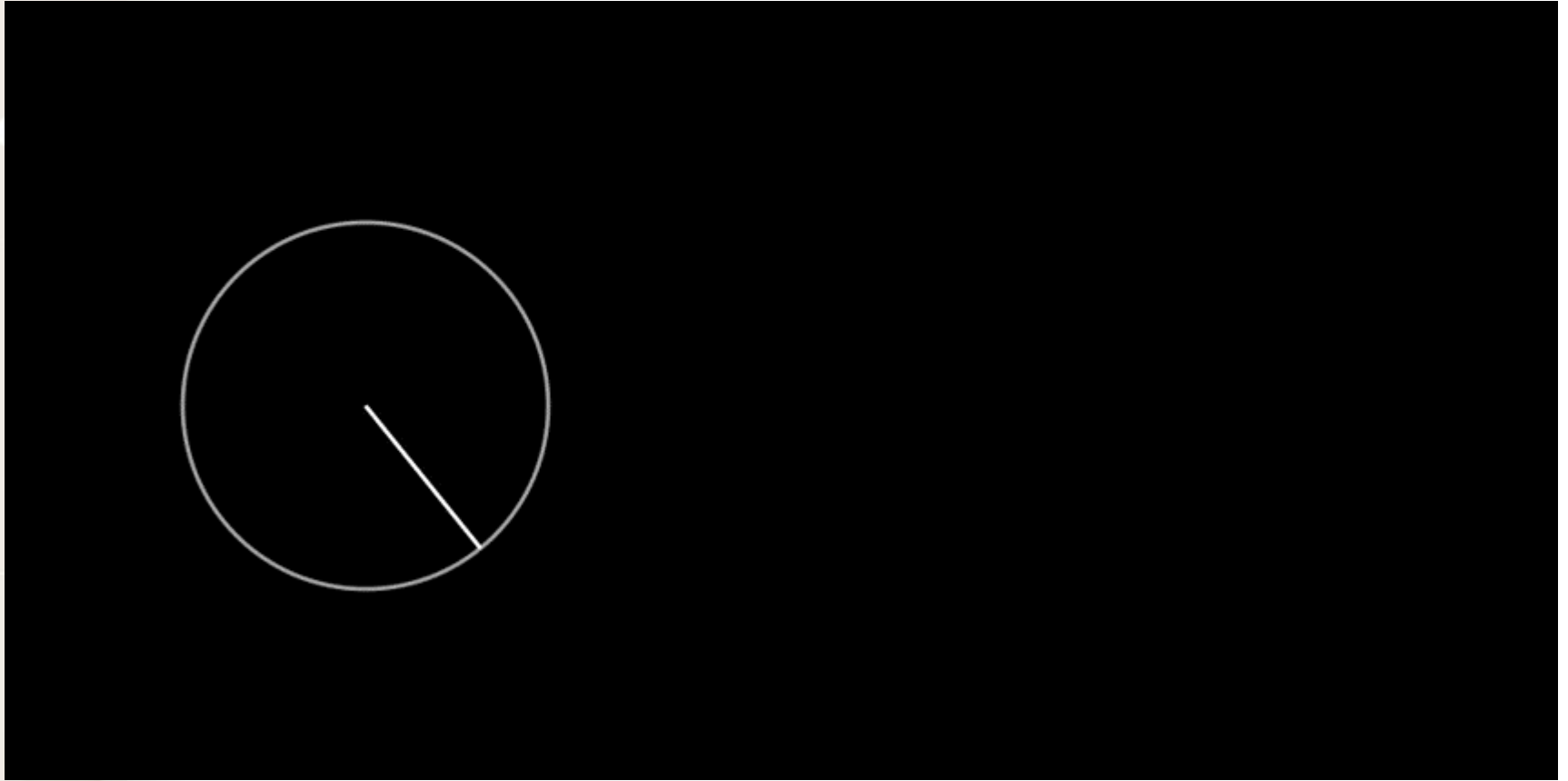


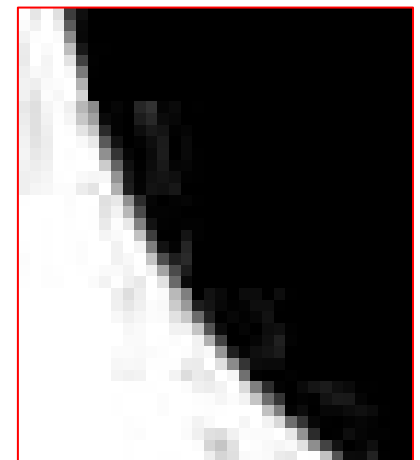
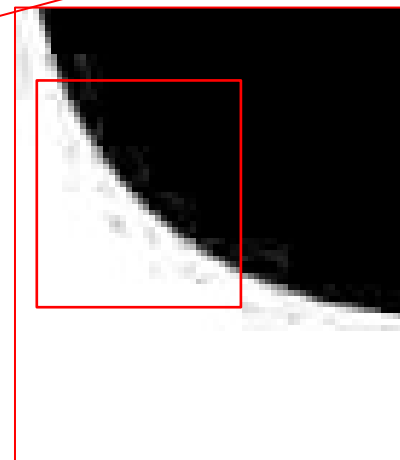
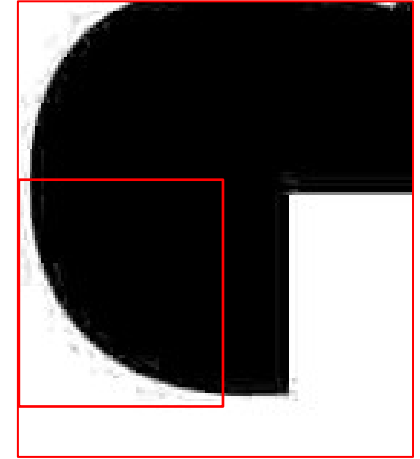
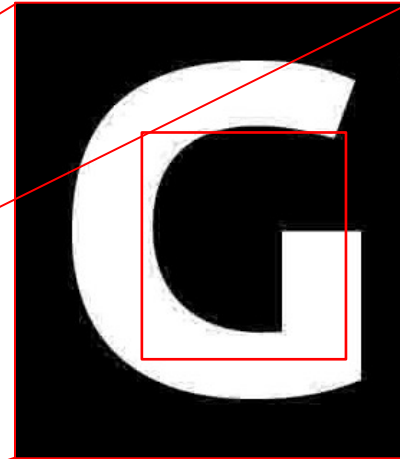












- ☑ Demonstrace nedokonalé aproximace skokových přechodů v jpg kompresi.

ZVOLNA DO FOURIEROVY ANALÝZY

- ☑ Fourierova analýza – snaha vyjádřit (rozložit, rozvinout) funkci jako součet jednoduchých funkcí (harmonických funkcí, složek).
- ☑ počty těchto harmonických složek, jejich amplitudy, frekvence a fázové posuny jednoznačně charakterizují analyzovanou funkci.
- ☑ Základní rozdělení podle periodicity:
 - Fourierova řada (periodické funkce).
 - Fourierův integrál, Fourierova transformace (neperiodické).
- ☑ Fourierovy řady mohou být vyjádřeny v klasickém, trigonometrickém nebo **komplexním** tvaru.
- ☑ zpracovávat můžeme spojité i diskrétní veličiny.

FOURIEROVA ŘADA

- ☑ Každou periodickou funkci $x(t+kT) = x(t)$, která vyhovuje Dirichletovým podmínkám, lze vyjádřit pomocí Fourierovy řady, pro kterou v exponenciálním tvaru je

kde c_n jsou komplexní *Fourierovy koeficienty* definované vztahem

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-in\omega_1 t} dt$$

a $\omega_1 = 2\pi/T$ je úhlový kmitočet první základní harmonické složky určený základní periodou T rozkládané funkce $x(t)$.

Dirichletovy podmínky pro rozklad periodické funkce $x(t)$ do Fourierovy řady jsou:

- 1) $x(t)$ je absolutně integrovatelná nad každou periodou;
- 2) $x(t)$ má nad každou periodou pouze konečný počet maxim a minim;
- 3) $x(t)$ má nad každou periodou konečný počet nespojitostí.

Dirichletovy podmínky jsou postačující, nikoliv nutné. Lze konstatovat, že všechny rozumné, tj. fyzikálně realizovatelné funkce Dirichletovy podmínky splňují.

FOURIEROVA ŘADA

- ☑ Modul komplexního Fourierova koeficientu určuje amplitudu odpovídající harmonické složky, jeho fáze hodnotu počáteční fáze odpovídající harmonické funkce.
- ☑ Pro $n = 0$ je

FOURIEROVA ŘADA

☑ Modul komplexního Fourierova koeficientu určuje amplitudu odpovídající harmonické složky, jeho fáze hodnotu počáteční fáze odpovídající harmonické funkce.

☑ Pro $n = 0$ je

což je střední hodnota (stejnoseměrná složka) funkce $x(t)$.

☑ Pro reálné funkce $x(t)$ je (symbolem $*$ označujeme komplexně sdruženou hodnotu).

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 1

Určíme parametry jednotlivých harmonických složek, z nichž se skládá obdélníkový pulz o základní periodě T , době trvání jednotlivých impulzů τ a výšce A .
Nechť je první z impulzů umístěn symetricky kolem počátku časové osy.

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 1 - ŘEŠENÍ

Spočítejme nejdříve hodnotu pomocného integrálu

Pro $n = 0$ je

a pro $n \neq 0$

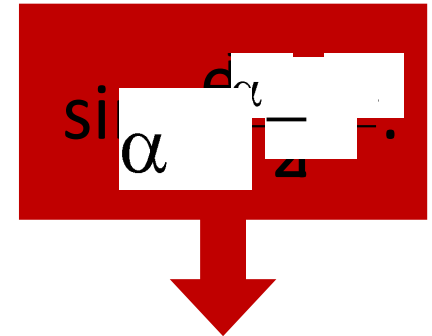
FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 1 - ŘEŠENÍ

Spočítejme nejdříve hodnotu pomocného integrálu

Pro $n = 0$ je

a pro $n \neq 0$



FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 1 - ŘEŠENÍ



Nulové hodnoty nabývá funkce $Sa(x)$ pro argumenty rovné celočíselným násobkům π , tj.

$$\frac{\vartheta}{2}\omega = \pm k\pi$$

a tedy pro frekvenci

$$\omega = \pm k \frac{2\pi}{\vartheta}.$$

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 2

Co se stane, když posuneme obdélníkový pulz z předešlého příkladu tak, aby nástupná hrana obdélníka byla v počátku časové osy?

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 2 - ŘEŠENÍ

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD 2 - VÝSLEDEK

FOURIEROVA TRANSFORMACE

Pro periodickou funkci je kmitočet základní harmonické složky

$$\omega_1 = 2\pi/T.$$

Pro **neperiodickou** funkci, tj. pro periodickou s $T \rightarrow \infty$ je

Pro neperiodický signál tedy budou spektrální čáry na sebe spojitě navazovat a definiční sumační vztah pro Fourierovu řadu přechází na vztah integrační, kde koeficienty \hat{c}_n určíme následovně.

FOURIEROVA TRANSFORMACE

Ve vztahu

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-in\omega_1 t} dt$$

je $T = 2\pi/d\omega$ a tedy pro limitní rozdíl dvou sousedních frekvencí $d\omega \rightarrow 0$ je $T \rightarrow \infty$ a $n\omega_1 \rightarrow \omega$. Meze integrálu budou pro nekonečně dlouho trvající funkci $-\infty$ a $+\infty$. Pro $T \rightarrow \infty$ budou rovněž amplitudy spojitého spektra jednorázového impulzu **nekonečně malé**.

Vyjádříme-li výše uvedený vztah pro v limitním tvaru a dostáváme

FOURIEROVA TRANSFORMACE

připomeňme vztah
pro Fourierovu řadu:

$$\dot{c}_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cdot e^{-in\omega_1 t} dt$$

V tom případě se definiční vztah Fourierova rozkladu transformuje do podoby

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega t} dt \right) \cdot e^{i\omega t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{X}(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega \quad (*)$$

kde vztah

nazýváme *Fourierovu transformací* a vztah (*)
inverzní (zpětnou) Fourierovu transformací.

FOURIEROVA TRANSFORMACE

VLASTNOSTI

Princip superpozice (! podmínka linearity !)

$$s_1(t) + s_2(t) \sim S_1(\omega) + S_2(\omega)$$

$$a \cdot s(t) \sim a \cdot S(\omega)$$

Lineární kombinaci funkcí odpovídá lineární kombinace jejich spekter

Změna znaménka

$$s(-t) \sim S^*(\omega)$$

Změna měřítka

$$s(t/a) \sim a \cdot S(a\omega), \text{ kde } a > 0$$

FOURIEROVA TRANSFORMACE

VLASTNOSTI

Translace funkce

$$s(t-\tau) \sim S(\omega) \cdot e^{-i\omega\tau}$$

Transpozice spektra

$$S(\omega-\Omega) \sim s(t) \cdot e^{i\Omega t}$$

Konvoluce funkcí



! SHRNU TÍ !



! URČITĚ SI ZAPAMATOVAT !

- ☑ **spojitá periodická funkce** má **diskrétní** frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu řadu;
- ☑ **spojitá neperiodická funkce** má **spojité** frekvenční spektrum – pro rozklad jsme použili Fourierovu transformaci.

! A VĚDĚT PROČ !