ČASOVÉ ŘADY

Mgr. et Mgr. Jiří Kalina, PhD.

UKB, pavilon D29 (Recetox), kancelář 123
kalina@mail.muni.cz

TESTÍK

1. Systém se stavovou rovnicí $s(n) - s(n-1)\cdot(1+r) = x(n)$ nazveme:
   1. lineárním homogenním
   2. nelineárním homogenním
   3. lineárním nehomogenním
   4. nelineárním nehomogenním
2. Systém se stavovou rovnicí $s(n) - s(n-1)\cdot p(s,n) = 0$ nazveme:
   1. lineárním homogenním
   2. nelineárním homogenním
   3. lineárním nehomogenním
   4. nelineárním nehomogenním
3. Systém se stavovou rovnicí $s(n) - s(n-1)\cdot p(s,n) = x(n)$ nazveme:
   1. lineárním homogenním
   2. nelineárním homogenním
   3. lineárním nehomogenním
   4. nelineárním nehomogenním
4. Systém se stavovou rovnicí $s(n) - s(n-1)\cdot(1+r) = 0$ nazveme:
   1. lineárním homogenním
   2. nelineárním homogenním
   3. lineárním nehomogenním
   4. nelineárním nehomogenním

XI. POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

PŘEDEVŠÍM VE FREKVENČNÍ DOMÉNĚ

POPIS SYSTÉMU

vnější popis

- vyjadřuje vztah mezi vstupní a výstupní veličinou;

vnitřní popis

- zohledňuje vnitřní strukturu systému/modelu;
- vyjadřuje vztah mezi stavovými, vstupními a výstupními veličinami;

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

☑ diferenční rovnice

jednodruhová autonomní populace

(lineární, je-li je r = konst.)

$$s(n) = s(n-1) + s_b(n) - s_d(n) = s(n-1) \cdot (1+b-d) = s(n-1) \cdot (1+r)$$

$$s(n) - s(n-1) \cdot (1+r) = 0$$

jednodruhová neautonomní populace

$$s(n) - s(n-1) \cdot (1+r) = x(n)$$

nelineární autonomní systém (populace)

$$s(n) - s(n-1) \cdot p(s,n) = 0$$

nelineární neautonomní systém (populace)

$$s(n) - s(n-1) \cdot p(s,n) = x(n)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

☑ diferenční rovnice

$$\sum_{j=0}^{n} b_j y(kT_{vz} - jT_{vz}) = \sum_{i=0}^{m} a_i x(kT_{vz} - iT_{vz})$$

resp.

$$\sum_{j=0}^{n} b_j y(k-j) = \sum_{i=0}^{m} a_i x(k-i)$$

kde a_i a b_i jsou parametry systému, x(k) jsou hodnoty vstupní posloupnosti a y(k) hodnoty výstupní posloupnosti.

Je-li systém autonomní, tj. bez vstupu, je diferenční rovnice homogenní, s nulovou pravou stranou.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

Parametry a_i a b_j mohou být obecně funkcemi jak vstupních i výstupních veličin (nelineární systémy), tak i času (časově závislé systémy). Jsou-li parametry konstantní, splňuje systém princip superpozice a **systém je lineární**.

Hodnota n určuje maximální zpoždění pro vzorky výstupní posloupnosti a současně **řád systému**, m určuje maximální zpoždění pro vzorky vstupní posloupnosti zahrnuté do výpočtu.

Alternativním zápisem diferenční rovnice může být výraz pro výpočet k-tého výstupního vzorku, který využívá hodnotu k-tého vzorku vstupní posloupnosti a předchozí vzorky jak vstupní, tak výstupní posloupnosti až do zpoždění m, resp. n

$$y(k) = \sum_{i=0}^{m} \frac{a_i}{b_0} x(k-i) - \sum_{j=1}^{n} \frac{b_j}{b_0} y(k-j)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU

PŘÍKLAD:

Diferenční rovnice $y(k) = x(k) - 2y(k-1) + y(k-2)$ reprezentuje diskrétní, časově invariantní lineární rekurzivní systém, přičemž koeficienty diferenční rovnice jsou $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $b_1 = 2$ a $b_2 = -1$.

Diferenční rovnice a její řešení představuje to nejdůležitější, co očekáváme od konstrukce matematického modelu, tj. možnost určení průběhu veličin reprezentujících chování, tj. dynamiku modelovaného objektu.

Existuje i jiná možnost popisu systému, která by dokázala odhalit jiné zajímavé či užitečné vlastnosti zkoumaného systému ?

Lineární systémy představují značné zjednodušení – jejich parametry musí být konstantní. Nicméně právě lineární systémy umožňují různé formy popisu, přestože si zachovávají širokou oblast použití.

Z TRANSFORMACE

definice DTFT - opakování

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot e^{-i\omega kT_{vz}}$$

X(ω) je obecně komplexní funkce reálné proměnné ω - kmitočtu

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot (e^{i\omega T_{vz}})^{-k}$$

je-li z = exp(iωT), dostaneme

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot z^{-k}$$

oboustranná Z-transformace

Z-TRANSFORMACE

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot z^{-k}$$

ednostranná Z-transformace

Z-transformace jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT_{vz}))=1$$

Z-transformace posunutého jednotkového impulsu

$$Z(\Delta(kT_{vz}-nT_{vz}))=$$

Z-TRANSFORMACE

Z-transformace jednotkového skoku

$$U(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + z^{-4} + \dots$$

vynásobíme-li obě strany (z-1) dostaneme

$$(z-1).U(z) = (z+1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\dots) - (1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+z^{-4}+\dots) = z$$

$$U(z) = z/(z-1) = 1/(1-z^{-1})$$

VLASTNOSTI Z-TRANSFORMACE

Linearita

$$a \cdot x(k) + b \cdot y(k) \sim a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$$

Posun vpravo x(k)·u(k)

$$x(k-n) \cdot u(k-n) \sim z^{-n} X(z)$$

Posun vpravo x(k)

$$x(k-1) \sim z^{-1} X(z) + x(-1)$$

$$x(k-2) \sim z^{-2} X(z) + x(-2) + z^{-1}.x(-1)$$

$$\vdots$$

$$x(k-n) \sim z^{-n} X(z) + x(-n) + z^{-1} \cdot x(-n+1) + \ldots + z^{-n+1} \cdot x(-1)$$

Je-li $x(m) = 0$ pro $m = -1, -2, \ldots., -n$, je

$$x(k-n) \sim z^{-n} X(z),$$

což je totéž jako pro $x(k-n) \cdot u(k-n)$.

VLASTNOSTI Z-TRANSFORMACE

Konvoluce

- $$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i) \cdot y(n-i) \approx X(z) \cdot Y(z)$$

VLASTNOSTI Z-TRANSFORMACE

$x(k)$	$X(z)$	oblast konvergence
$\delta(k)$	1	$\forall z$
$\delta(k-i)$	z^{-i}	pro $\forall z$ kromě $z=0$, když $i > 0$ nebo $z \to \infty$, když $i < 0$
$\sigma(k)$, resp. $-\sigma(-k-1)$		$\|z\| > 1$, resp. $\|z\| < 1$
$a^k \sigma(k)$, resp. $-a^k \sigma(-k-1)$		$\|z\| > a$, resp. $\|z\| < a$
$k a^k \sigma(k)$, resp. $-k a^k \sigma(-k-1)$		$\|z\| > a$, resp. $\|z\| < a$
$(k+1) a^k \sigma(k)$		$\|z\| > a$
$\cos(k\Omega_0)\, \sigma(k)$		$\|z\| > 1$
$\sin(k\Omega_0)\, \sigma(k)$		$\|z\| > 1$
$[a^k \cdot \cos(k\Omega_0)]\, \sigma(k)$		$\|z\| > a$
$[a^k \cdot \sin(k\Omega_0)]\, \sigma(k)$		$\|z\| > a$
$\begin{cases} a^k, & 0 \le k \le N-1; \\ 0, & \text{jindy.} \end{cases}$		$\|z\| > 0$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
PŘENOSOVÁ FUNKCE

$$y(nT_{vz}) = h(nT_{vz}) * x(nT_{vz})$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$H(z) = Y(z)/X(z)$, kde $H(z)$ je racionální lomená funkce proměnné z^{-1} (**obrazová přenosová funkce**)

$a \cdot x(k) + b \cdot y(k) \sim a \cdot X(z) + b \cdot Y(z)$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
NULOVÉ BODY A PÓLY

A – zesílení; z_{ni} … nulové body; z_{pi} … póly

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
DIFERENČNÍ ROVNICE

$$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$(b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0).Y(z) = \\ = (a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0).X(z)$$

$$b_m Y(z).z^{-m} + b_{m-1} Y(z).z^{-m+1} + b_{m-2} Y(z).z^{-m+2} + \ldots + b_0.Y(z) = \\ = a_n X(z).z^{-n} + a_{n-1} X(z).z^{-n+1} + a_{n-2} X(z).z^{-n+2} + \ldots + a_0.X(z)$$

$$b_m y(iT_{vz} - mT_{vz}) + b_{m-1} y(iT_{vz} - mT_{vz} + T_{vz}) + b_{m-2} y(iT_{vz} - mT_{vz} + 2T_{vz}) + \ldots + b_0 y(iT_{vz}) \\ =$$

!!! za předpokladu nulových počátečních podmínek !!!

$$= a_n x(iT_{vz} - nT_{vz}) + a_{n-1} x(iT_{vz} - nT_{vz} + T_{vz}) + a_{n-2} x(iT_{vz} - nT_{vz} + 2T_{vz}) + \ldots + a_0 x(iT_{vz})$$

$$y(iT_{vz}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{b_0}.x(iT_{vz} - kT_{vz}) - \sum_{k=1}^{m} \frac{b_k}{b_0}.y(iT_{vz} - kT_{vz})$$

diferenční rovnice

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
FREKVENČNÍ PŘENOSOVÁ FUNKCE

- $$H(z) = \frac{a_n z^{-n} + a_{n-1} z^{-n+1} + a_{n-2} z^{-n+2} + \ldots + a_0}{b_m z^{-m} + b_{m-1} z^{-m+1} + b_{m-2} z^{-m+2} + \ldots + b_0} \cdot \frac{z^m}{z^m}, \qquad n \leq m$$

$$H(z) = \frac{a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \ldots + a_n z^{m-n}}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + b_2 z^{m-2} + \ldots + b_m}$$

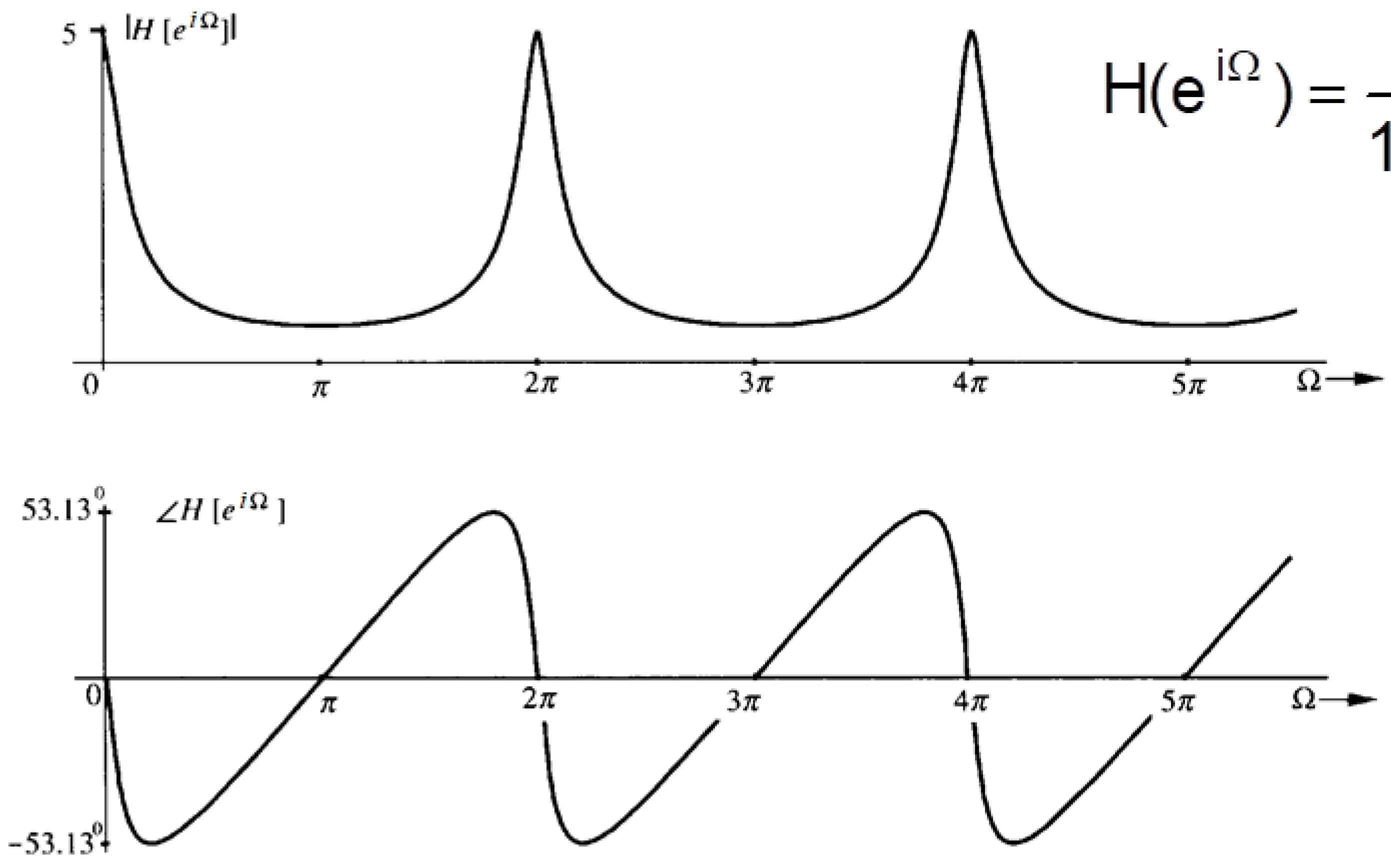
$$z = \exp(i\omega T_{vz})$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

$$H(\omega) = \frac{a_0 e^{i\omega m T_{vz}} + a_1 e^{i\omega (m-1) T_{vz}} + a_2 e^{i\omega (m-2) T_{vz}} + \ldots + a_m e^{i\omega (m-n) T_{vz}}}{b_0 e^{i\omega m T_{vz}} + b_1 e^{i\omega (m-1) T_{vz}} + b_2 e^{i\omega (m-2) T_{vz}} + \ldots + b_m e^{i\omega 0 T_{vz}}}$$

$$H(\omega) = |H(\omega)|.e^{i\varphi}$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY



$$H(e^{i\Omega}) = \frac{1}{1 - 0{,}8 . e^{-i\Omega}}$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
FREKVENČNÍ CHARAKTERISTIKY

$$H(e^{i\Omega}) = \frac{1}{1 - 0{,}8.e^{-i\Omega}} \quad \overline{\Omega}$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
IMPULZNÍ CHARAKTERISTIKA

operátorová (též obrazová) přenosová funkce

$$H(z) = Y(z) / X(z)$$

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

$$x(n) * y(n) = \sum_{i=0}^{n} x(i) \cdot y(n-i) \approx X(z) \cdot Y(z)$$

konvoluce

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
IMPULZNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z) \cdot 1$$

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
IMPULZNÍ CHARAKTERISTIKA

$$Y(z) = H(z) \cdot X(z)$$

za předpokladu, že $X(z) = 1$ máme

$$Y(z) = H(z) \cdot 1$$

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z))$$

$$X(z) = 1 \Rightarrow x(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(1)$$

Z-transformace jednotkového impulzu

$$\mathcal{Z}(\Delta(kT_{vz}))=1$$

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
IMPULZNÍ CHARAKTERISTIKA

$$y(kT_{vz}) = h(kT_{vz}) = \mathcal{Z}^{-1}(H(z).\mathcal{Z}(\Delta(kT_{vz})))$$

odezva na jednotkový impulz -

- impulzní charakteristika

- impulzní charakteristika a obrazová přenosová funkce tvoří transformační pár Z transformace.
- impulzní charakteristika a frekvenční přenosová funkce tvoří transformační pár Fourierovy (DFT) transformace.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
IMPULZNÍ CHARAKTERISTIKA

- ☑ je-li $h(kT_{vz}) = 0$ pro $k > k_0$ hovoříme o systému s konečnou impulzní charakteristikou (KIO – FIR);
- ☑ není-li $h(kT_{vz}) = 0$ pro $k > k_0$ hovoříme o systému s nekonečnou impulzní charakteristikou (NIO – IIR);

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍHO SYSTÉMU
PŘECHODOVÁ CHARAKTERISTIKA

přechodová charakteristika =

= odezva systému na jednotkový skok

$\mathcal{Z}(u(kT_{vz})) = 1/1\text{-}z^{-1} = z/(z-1)$

$Y(z) = G(z) = H(z).z/(z-1)$

LINEÁRNÍ SYSTÉMY S VÍCE VSTUPY A VÝSTUPY

Jak se situace změní, když má systém více vstupů, resp. více výstupů?

Lineární časově invariantní systém (tj. s konstantními parametry) s více vstupy lze řešit s použitím principu *superpozice*. Podle něj lze každý vstup uvažovat jednotlivě s tím, že všechny ostatní vstupy jsou vynulovány. Poté součet všech výstupních reakcí na separované, ovšem na systém současně přivedené vstupy dává celkovou odezvu systému.

LINEÁRNÍ SYSTÉMY S VÍCE VSTUPY A VÝSTUPY

Jak se situace změní, když má systém více vstupů, resp. více výstupů?

K zamyšlení:

Je potřeba případ více výstupů řešit na základě nějakého specifického pravidla nebo nikoliv?

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ

1. diferenční rovnice;
2. obrazová neboli operátorová přenosová funkce (z transformace);
3. rozložení nulových bodů a pólů;
4. frekvenční přenosová funkce;
5. frekvenční charakteristiky – modulová, fázová;
6. impulzní charakteristika;
7. přechodová charakteristika.

VNĚJŠÍ POPIS LINEÁRNÍCH SYSTÉMŮ