Komplexní čísla

Základní informace

Tato kapitola je kapitolou opakovací. Předpokládáme, že studenti znají základy počítání s komplexními čísly, nicméně tušíme, že setkání s problematikou už bylo dávno a navíc zřejmě na středních školách v různém rozsahu. Proto bychom tímto připomenutím chtěli i sjednotit úroveň znalostí. A to všechno kvůli tomu, že bez komplexního kalkulu se problematika zpracování časových řad prostě neobejde.

Výstupy z výuky

- seznámit se se základními typy vyjádření komplexních čísel a dokázat způsoby vyjádření komplexních čísel mezi sebou převádět;
- zvládnout základní matematické operace s komplexními čísly a dokázat je bez váhání provádět;
- seznámit s průběhem exponenciální funkce pro různé varianty komplexních exponentů;

1. Základní typy popisu komplexních čísel

Definice 1.1

Komplexní čísla jsou čísla ve tvaru $x = a + ib$, kde a, b jsou reálná čísla a i je tzv. imaginární jednotka. Číslo a se nazývá reálná část (složka) komplexního čísla x ($\mathrm{Re}(x) = a$) a reálné číslo b nazýváme imaginární část (složka) komplexního čísla x ($\mathrm{Im}(x)= b$). Platí-li $a = 0$, $b \neq 0$ nazýváme komplexní číslo x ryze imaginárním.

Poznámka

V matematických textech je zvykem pro vyjádření imaginární jednotky používat písmeno i. V elektrotechnických textech, kde se problematika zpracování signálů a časových řad objevila jako první, se písmene i používá k označení jedné ze základních elektrotechnických veličin a to okamžité hodnoty elektrického proudu. Proto se v textech, zabývajících se problematikou zpracování signálů, používá k označení komplexní jednotky symbolu j. Budeme se nadále držet této konvence navzdory skutečnosti, že tyto texty jsou určeny především pro čtenáře s matematickým vzděláním, protože se domníváme, že tento zvyk usnadní případné doplňkové studium publikací o zpracování signálů a časových řad.
Výše uvedenou definici komplexního čísla tedy budeme vnímat ve tvaru $x = a + jb$.

Imaginární jednotka byla zavedena a použita, aby bylo možné zvládnout řešení rovnic typu $x^2 = -1$. Proto pro imaginární jednotku platí mocniny

$$j^{4k} = 1,\ j^{1+4k} = j,\ j^{2+4k} = -1 \text{ a } j^{3+4k} = -j, \text{ kde k je celé nezáporné číslo.} \qquad (1.1)$$

Definice 1.2

Číslo $x^* = a - jb$ s imaginární složkou s opačným znaménkem označujeme jako komplexně sdružené k číslu x = a + jb.

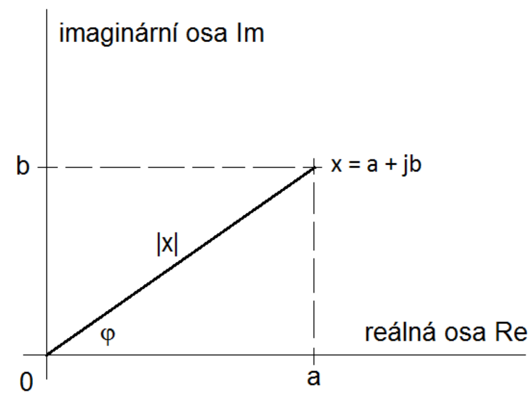
Poznámka

Komplexní čísla jsou dle definice 1.1 v podstatě dána uspořádanou dvojicí reálných čísel, což vlastně vede k podobnému nahlížení, znázornění i k manipulaci jako v případě dvousložkových vektorů. Komplexní číslo (je-li zcela zřejmé, že se o komplexní číslo jedná a nelze je tudíž zaměnit s dvousložkovým vektorem) můžeme také zapsat ve tvaru x = (a,b).

Definice 1.3

Zápis komplexního čísla po složkách ve tvaru x = a + jb nebo x = (a,b) nazýváme složkový nebo kartézský tvar komplexního čísla.

V duchu výše uvedené poznámky si můžeme komplexní číslo geometricky znázornit v tzv. Gaussově komplexní rovině, jak je na obr.1.1.



Obr.1.1 *Znázornění komplexního čísla v Gaussově rovině*

Definice 1.4

Goniometrickým (trigonometrickým) tvarem komplexního čísla x = a + jb rozumíme zápis

$$x = r.(\cos\varphi + j.\sin\varphi), \tag{1.2}$$

kde reálné číslo

$$r = |x| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{x \cdot \overline{x}} \tag{1.3}$$

nazýváme modulem (absolutní nebo prostou hodnotou) komplexního čísla x a úhel φ nazýváme fází (argumentem) komplexního čísla x.

Pro fázi φ platí (až na celistvé násobky 2π) vztahy

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \text{ resp. } \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \tag{1.4}$$

Hlavní hodnotou fáze komplexního čísla je taková hodnota úhlu φ, pro nějž platí -π < < φ ≤ π, případně 0 ≤ φ < 2π.

Exponenciálním (polárním) tvarem komplexního čísla nazýváme zápis

$$x = r.e^{j\varphi} \tag{1.5}$$

kde pro parametry r a φ platí vztahy (1.3) a (1.4).

Poznámka

1. Modul r komplexního čísla x = a + jb je nezáporné reálné číslo a r = 0 právě když a = b =0.

2. Z ekvivalence vztahů (1.2) a (1.5) je

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j.\sin\varphi \tag{1.6}$$

což bude dokázáno později v kap.3.

Příklad 1.1

Vyjádřete v exponenciálním tvaru číslo x = 1 + j.

Řešení:

S použitím vztahů (1.3) a (1.4) dostáváme

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

a

$$\varphi = \arccos\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

Exponenciální tvar zadaného komplexního čísla je proto x = $\sqrt{2} \cdot e^{j\pi/4}$. □□□

Příklad 1.2

Vyjádřete v exponenciálním tvaru číslo x = -1 + j $\sqrt{3}$.

Řešení:

$$x = 2.e^{j2\pi/3}.$$ □□□

Příklad 1.3

Vyjádřete ve složkovém tvaru komplexní číslo x = 4.(cos(π/6) + jsin(π/6)).

Řešení:

$$x = 4.\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3} + 2j.$$ □□□

2. Matematické operace s komplexními čísly

2.1. Rovnost dvou komplexních čísel

Dvě komplexní čísla $x_1 = a_1 + jb_1$ a $x_2 = a_2 + jb_2$ v kartézském tvaru jsou si rovna, pokud platí

$$a_1 = a_2 \text{ a } b_1 = b_2. \tag{2.1}$$

Dvě komplexní čísla $x_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ a $x_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ v exponenciálním tvaru jsou si rovna, pokud platí

$$r_1 = r_2 \text{ a } \varphi_1 = \varphi_2. \tag{2.2}$$

Ekvivalentně platí vztah (2.2) i pro goniometrický tvar komplexních čísel

2.2. Sečítání a rozdíl dvou komplexních čísel

Pro sečítání komplexních čísel $x_1 = a_1 + jb_1$ a $x_2 = a_2 + jb_2$ platí

$$x = x_1 + x_2 = (a_1 + jb_1) + (a_2 + jb_2) = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2). \tag{2.3}$$

Pro rozdíl dvou komplexních čísel pak ekvivalentně je

$$x = x_1 - x_2 = (a_1 + jb_1) - (a_2 + jb_2) = (a_1 - a_2) + j(b_1 - b_2). \tag{2.4}$$

Příklad 2.1

Sečtěte komplexní čísla $x_1 = 2 + 3j$ a $x_2 = 2 - 4j$.

Řešení:

$$x_1 + x_2 = (2 + 2) + j(3 -4) = 4 - j.$$ □□□

2.3 Součin a podíl dvou komplexních čísel

Součin dvou komplexních čísel $x_1 = a_1 + jb_1$ a $x_2 = a_2 + jb_2$ v kartézském tvaru se určí podle vztahu

$$(a_1 + jb_1).(a_2 + jb_2) = (a_1.a_2 - b_1.b_2) + j(a_1b_2 + a_2b_1). \tag{2.5}$$

Komplexní čísla tedy násobíme jako dvojčleny a využijeme vztah $j^2 = -1$.

Součin $x = x_1.x_2$ dvou komplexních čísel $x_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ a $x_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2}$ v exponenciálním tvaru určíme podle vztahu

$$x = r_1 \cdot r_2 \cdot e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Pro sečítání a násobení dvou, případně více komplexních čísel platí následující pravidla:

asociativní zákon: $(x + y) + z = x + (y + z)$;

$(x.y).z = x.(y.z)$;

komutativní zákon: $x + y = y + x$;

$x.y = y.x$;

distributivní zákon $(x + y).z = x.z + y.z$;

pro každé x platí $x + 0 = x$;

$x.1 = x$;

ke každému x existuje takové číslo -x, že $x + (-x) = 0$;

ke každému $x \neq 0$ existuje takové číslo x', že $x.x' = 1$. Pak píšeme, že $x' = x^{-1}$ nebo $x = 1/x$.

Podíl dvou komplexních čísel $x_1 = a_1 + jb_1$ a $x_2 = a_2 + jb_2 \neq 0$ v kartézském tvaru je dán vztahem

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1 + jb_1}{a_2 + jb_2} = \frac{(a_1 + jb_1)(a_2 - jb_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + j(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}. \tag{2.6}$$

Podíl dvou komplexních čísel $x_1 = r_1 \cdot e^{j\varphi_1}$ a $x_2 = r_2 \cdot e^{j\varphi_2} \neq 0$ v exponenciálním tvaru je dán vztahem

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{j\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}. \tag{2.7}$$

Pro operace s komplexně sdruženými čísly platí

$$(x + y)^* = x^* + y^*; \quad x + x^* = 2\,\mathrm{Re}(x); \quad (x \cdot y)^* = x^* \cdot y^*; \quad \left(\frac{x}{y}\right)^* = \frac{x^*}{y^*}.; \tag{2.8}$$

Příklad 2.2

Mějme komplexní čísla $x_1 = 1 + 2j$ a $x_2 = 2 - j$. Určete jejich součet, rozdíl, součin a podíl.

Řešení:

$$x_1 + x_2 = (1 + 2) + j(2 - 1) = 3 + j;$$
$$x_1 - x_2 = (1 - 2) + j(2 + 1) = -1 + 3j;$$
$$x_1.x_2 = (1 + 2j).(2 - j) = 2 + 4j - j + 2 = 4 + 3j;$$
$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{(1+2j)(2+j)}{2^2+(-1)^2} = \frac{2+4j+j-2}{5} = \frac{0+5j}{5} = j\,. \qquad \square\square\square$$

Příklad 2.3

Vynásobte komplexní čísla $x_1 = \sqrt{3}.e^{j\pi/4}$ a $x_2 = \sqrt{3}.e^{j\pi/2}$.

Řešení:

$$x_1.x_2 = 3.e^{j3\pi/4} \qquad \square\square\square$$

2.4 Uspořádání komplexních čísel

Na rozdíl od reálných čísel nelze komplexní čísla uspořádat, tj. nelze je seřadit podle velikosti tak, aby se toto seřazení rozumně chovalo z hlediska základních matematických operací.

2.5 Umocňování a odmocňování komplexních čísel

Moivrova věta: Pro každé reálné φ a celočíselné k je

$$(\cos\varphi + j.\sin\varphi)^k = \cos(k\varphi) + j.\sin(k\varphi) \text{ a také } (e^{j\varphi})^k = e^{jk\varphi}. \tag{2.9}$$

Z Moivrovy věty pak pro celočíselné umocňování komplexních čísel v geometrickém, resp. exponenciálním tvaru různých od nuly je

$$x^k = [r.(\cos\varphi + j.\sin\varphi)]^k = r^k.[\cos(k\varphi) + j.\sin(k\varphi)], \tag{2.10a}$$

resp.

$$x^k = [r.\, e^{j\varphi}]^k = r^k.\, e^{jk\varphi}. \tag{2.10b}$$

Pro přirozené číslo k je k-tá odmocnina $\sqrt[k]{x}$ z komplexního čísla x takové číslo y, pro které platí

$$y = \sqrt[k]{x} \Leftrightarrow y^k = x\,. \tag{2.11}$$

Je-li $x = r.\, e^{j\varphi}$ od nuly různé, existuje právě k různých hodnot odmocniny $\sqrt[k]{x}$, pro které je

$$y = \sqrt[k]{x} = \sqrt[k]{r}\cdot e^{j(\varphi+2n\pi)/k} = \sqrt[k]{r}\cdot(\cos\frac{\varphi+2n\pi}{k} + j\sin\frac{\varphi+2n\pi}{k})\,, \tag{2.12}$$

pro n = 0, 1, 2, …, k-1.

Pro x = 0 je $\sqrt[k]{x} = 0$.

Příklad 2.4

Určete x^6, pokud je $x = \sqrt{3}.e^{j\pi/2}$.

Řešení:

Podle Moivrovy věty je $x^6 = (\sqrt{3})^6.e^{j6\pi/2} = 27.e^{3\pi} = 27.e^{\pi}$. □□□

Příklad 2.5

Určete $z = \sqrt[3]{125.e^{j4\pi/3}}$.

Řešení:

S aplikací Moivrovy věty a z ní vyplývajícího vztahu (2.12) je

$$\sqrt[3]{125.e^{j4\pi/3}} = \sqrt[3]{125}.e^{j(4\pi/3+2n\pi)/3} \text{ pro } n = 0,1,2.$$

To znamená, že je

$$z_0 = 5.e^{j(4\pi/3+0)/3} = 5.e^{j4\pi/9}, \quad \text{pro } n = 0;$$
$$z_1 = 5.e^{j(4\pi/3+2.1.\pi)/3} = 5.e^{j10\pi/9}, \quad \text{pro } n = 1;$$
$$z_0 = 5.e^{j(4\pi/3+2.2.\pi)/3} = 5.e^{j16\pi/9}, \quad \text{pro } n = 2.$$

□□□

Příklad 2.5

Určete $z = \sqrt[4]{1}$.

Řešení (obr.2.1):

$$z_0 = 1, \quad \text{pro } n = 0;$$
$$z_1 = j, \quad \text{pro } n = 1;$$
$$z_2 = -1, \quad \text{pro } n = 2;$$
$$z_3 = -j, \quad \text{pro } n = 3.$$

□□□

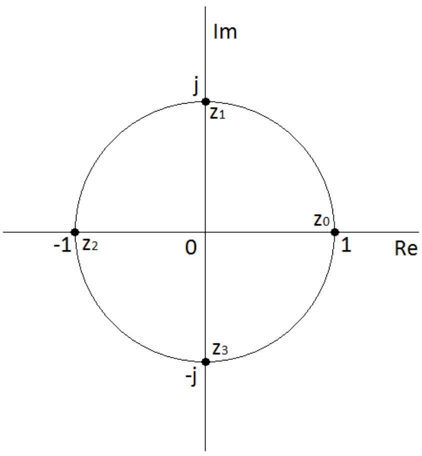
Příklad 2.6

Určete $z = \sqrt[4]{(-1)}$.

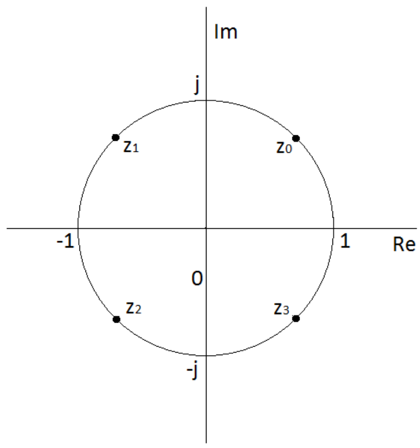
Řešení (obr.2.2):

$$z_0 = e^{\pi/4}, \quad \text{pro } n = 0;$$
$$z_1 = e^{3\pi/4}, \quad \text{pro } n = 1;$$
$$z_2 = e^{5\pi/4} = e^{-3\pi/4}, \quad \text{pro } n = 2;$$
$$z_3 = e^{3\pi/4} = e^{-\pi/4}, \quad \text{pro } n = 3.$$

□□□



Obr.2.1 *Řešení příkladu 2.5*



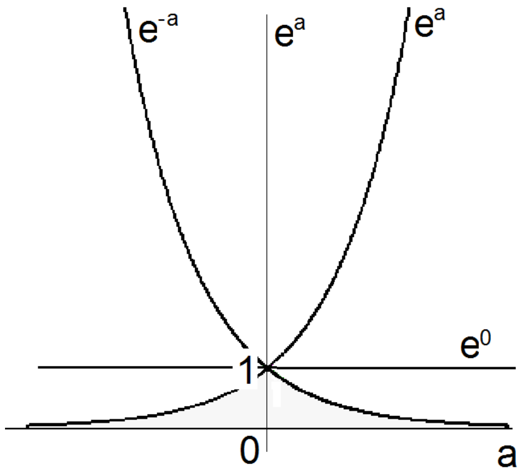
Obr.2.2 *Řešení příkladu 2.6*

3 Komplexní exponenciála

Exponenciální funkce s komplexním exponentem x = a + jb je definována podle vztahu

$$\exp(x) = e^{x} = e^{a+jb} = e^{a} \cdot e^{jb}. \tag{3.1}$$

Průběh exponenciální funkce s komplexním exponentem je tedy určen součinem exponenciály s reálným exponentem a exponenciály s ryze imaginárním exponentem. Exponenciála s reálným exponentem má známý průběh, v závislosti na znaménku exponentu má typický rostoucí (pro kladný exponent) či klesající (pro záporný exponent) průběh, případně konstantní průběh pro nulový exponent (obr.3.1). Abychom si učinili představu o celkovém průběhu exponenciály s obecným komplexním exponentem, musíme určit průběh exponenciály s ryze imaginárním exponentem. K tomu bude užitečné rozvinout funkce e^x, sin(x), resp. cos(x) do mocninné řady. Ze dvou typických způsobů rozvoje funkce do mocninné řady, pomocí Taylorova řady a Maclaurinovy řady, se zabývejme druhým, sice jednodušším a v podstatě méně, ale dostatečně obecným způsobem pro vztažný bod $x_0 = 0$.



***Obr.3.1** Průběh exponenciální funkce s reálným exponentem*

Pro Maclaurinův rozvoj funkce f(x) do nekonečné řady platí

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot x + \frac{f''(0)}{2!} \cdot x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} \cdot x^3 + \dots . \tag{3.2}$$

Příklad 3.1

Rozviňte do Maclaurinovy řady funkce sin(x), cos(x) a e^x.

Řešení:

Rozvoj funkce sin(x) pro x = 0:

$[\sin(x)]|_{x=0} = 0;$

$[\sin(x)]'|_{x=0} = \cos(x)|_{x=0} = 1;$

$[\sin(x)]''|_{x=0} = -\sin(x)|_{x=0} = 0;$

$[\sin(x)]'''|_{x=0} = -\cos(x)|_{x=0} = -1;$

$[\sin(x)]''''|_{x=0} = \sin(x)|_{x=0} = 0, \dots .$

Z těchto dílčích hodnot derivací plyne, že

$$\sin(x) = 0 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{0}{2!} \cdot x^2 - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \dots = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots . \tag{3.3}$$

Je užitečné si všimnout, že funkce sin(x), která je lichá, se skládá pouze z lichých mocniných členů.

Rozvoj funkce cos(x) pro x = 0:

$[\cos(x)]|_{x=0} = 1;$

$[\cos(x)]'|_{x=0} = -\sin(x)|_{x=0} = 0;$

$[\cos(x)]''|_{x=0} = -\cos(x)|_{x=0} = -1;$

$[\cos(x)]'''|_{x=0} = \sin(x)|_{x=0} = 0;$

$[\cos(x)]''''|_{x=0} = \cos(x)|_{x=0} = 1, \dots .$

Z těchto dílčích hodnot derivací pak plyne, že

$$\cos(x) = 1 + \frac{0}{1!}\cdot x - \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{0}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 + \dots = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots . \tag{3.4}$$

Rozvoj sudé funkce cos(x) obsahuje pouze sudé mocniny argumentu.

Konečně, Maclaurinův rozvoj exponenciální funkce e^x pro x = 0 je:

$[e^x]|_{x=0} = 1;$

$[e^x]'|_{x=0} = e^x|_{x=0} = 1;$

$[e^x]''|_{x=0} = e^x|_{x=0} = 1;$

$[e^x]'''|_{x=0} = e^x|_{x=0} = 1;$

$[e^x]''''|_{x=0} = e^x|_{x=0} = 1, \dots .$

Z těchto dílčích hodnot derivací pak plyne, že

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}\cdot x + \frac{1}{2!}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 + \dots = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \dots . \tag{3.5}$$

□□□

Příklad 3.2

Určete pomocívypočítaných mocninných řad pro funkce sin(x), cos(x) a e^x nalezněte vztah mezi funkcemi $e^{j\varphi}$, sin(φ) a cos(φ).

Řešení:

Do odvozeného mocniného vztahu (3.5) dosadíme za x = jφ, tj. se symbolem φ, jenž lépe navozuje představu úhlové veličiny. Potom s využitím vztahu (1.1) platí, že

$$\begin{aligned} e^x = e^{j\varphi} &= 1 + \frac{1}{1!}\cdot j\varphi + \frac{1}{2!}\cdot (j\varphi)^2 + \frac{1}{3!}\cdot (j\varphi)^3 + \frac{1}{4!}\cdot (j\varphi)^4 + \dots = \\ &= 1 + j\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - j\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + j\frac{\varphi^5}{5!} + \dots = \end{aligned} \tag{3.6}$$

Tento vztah lze rozdělit na reálnou a imaginární část tak, že je

$$e^{j\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots + j\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \dots\right) \tag{3.7}$$

a z toho s využitím vztahů (3.3) a (3.4) je

$$e^{j\varphi} = 1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \dots + j\left(\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} + \dots\right) = \cos(\varphi) + j\cdot\sin(\varphi), \tag{3.8}$$

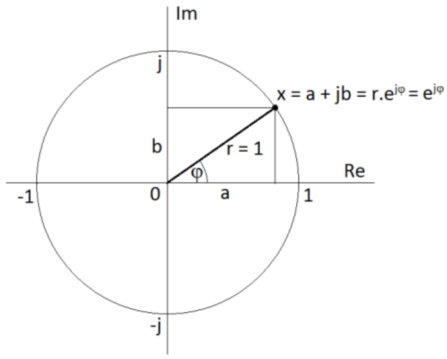
což je právě rovno dříve uvedenému vztahu (1.6). □□□

Co z odvozeného výrazu platí pro geometrickou představu o průběhu exponenciální funkce $e^{j\varphi}$ s ryze imaginárním exponentem?

K tomu si vyjádřeme danou situaci pomocí obr.3.2.

Protože podle tohoto obrázku je

$$\cos\varphi = \frac{a}{r} = \frac{a}{1}, \qquad (3.9)$$



Obr.3.2 *Geometrický význam exponenciální funkce s ryze imaginárním exponentem*

tak pro reálnou složku komplexního čísla x, které je vyjádřené ve složkovém kartézském tvaru, tj. $x = a + jb$ a které má jednotkový modul, platí $a = \cos\varphi$ a podobně pro imaginární složku b tohoto komplexního čísla je $b = \sin\varphi$. Z toho plyne, že hodnoty exponenciální funkce $e^{j\varphi}$ s ryze imaginárním exponentem jsou v závislosti na hodnotě veličiny φ vyjádřeny body na jednotkové kružnici v komplexní rovině.

Pro některé konkrétní hodnoty úhlu φ je $e^{j0} = 1$, $e^{j\pi} = -1$, $e^{j\pi/2} = j$, $e^{j3\pi/2} = e^{-j\pi/2} = -j$, atd.

Z této geometrické interpretace také plyne, že funkce $e^{j\varphi}$ je periodická s periodou opakování 2π.

Z formule (1.6), resp. (3.8), tj. že $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j.\sin\varphi$, resp. z její varianty pro zápornou hodnotu úhlu φ, tj. $e^{-j\varphi} = \cos\varphi - j.\sin\varphi$ (při jejím odvození využíváme vlastností sudé funkce kosinus a liché funkce sinus) lze odvodit tzv. Eulerovy vztahy.

Sečtením obou rovnic pro kladnou i zápornou hodnotu fázového úhlu φ dostáváme

$$e^{j\varphi} + e^{-j\varphi} = 2\cos\varphi \qquad (3.10)$$

a z toho pro kosinus platí

$$\cos\varphi = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}. \qquad (3.11)$$

Naopak, odečtením druhé rovnice od první máme

$$e^{j\varphi} - e^{-j\varphi} = 2j\sin\varphi \qquad (3.12)$$

a proto Eulerův vztah pro sinus je

$$\sin\varphi = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}. \qquad (3.13)$$