# Cvičení z elektrodynamiky a teorie relativity

1. Ukažte pro úplně antisymetrický tenzor 3. řadu

$$\begin{aligned}
&\text{a)}\ \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mnk} = \delta^i{}_m\,\delta^j{}_n - \delta^i{}_n\,\delta^j{}_m \\
&\text{b)}\ \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{ljk} = 2\,\delta^i{}_l \\
&\text{c)}\ \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{ijk} = 6.
\end{aligned}$$

   Platí Einsteinova konvence, že se tvoří součet přes každou dvojici stejných kovariantních a kontravarantních indexů, např. $\epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mnk} \equiv \sum_{k=1}^{3} \epsilon^{ijk}\,\epsilon_{mnk}$. (V Euklidovském prostoru není nutné rozlišovat kovariantní a kontravariantní indexy.)

2. Ukažte pomocí $\epsilon$-tenzoru

$$\begin{aligned}
&\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a}\vec{c}) - \vec{c}(\vec{a}\vec{b}) \\
&(\vec{a} \times \vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a}\vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a}\vec{d})(\vec{b}\vec{c}) \\
&\text{rot rot} = \text{grad div} - \triangle \\
&\text{rot grad} = 0 \\
&\text{div rot} = 0
\end{aligned}$$

3. Vypočtěte vzájemnou silu dvou nábojů o velikosti 1C ve vzdalenosti 1m.

4. Ukažte, že dvojrozměrné silové pole

$$\vec{K} = -\gamma \frac{(x, y, 0)}{x^2 + y^2}$$

   je bezvírové (rot $\vec{K} = 0$) a že

$$\oint \vec{K}\,\mathrm{d}\vec{x} = 0.$$

   Výberte za uzavřenou trajektorii v rovině $(x, y)$
   a) obdélník rovnoběřný se souřadnicovými osami
   b) kružnici kolem počátku souřadnic.

5. Vypočtěte rotaci vektorového pole

$$\vec{K} = \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2}$$

   a drahový integrál

$$\oint \vec{K}\,\mathrm{d}\vec{x}$$

   po kružnici kolem počátku.

6. Uvěřte Gaussovu větu pro vektorové pole $\vec{v} = (ax, by, cz)$ a kouli $x^2+y^2+z^2 \leq R^2$.

7. Vypočtěte Greenovu funkci Laplaceova operátoru pomocí Fourierovy representace $\delta$-funkce

$$\begin{aligned} G(\vec{x}, \vec{x}\,') &= G(\vec{x} - \vec{x}\,') =: G(\vec{y}), \\ \tilde{G}(\vec{k}) &= \int G(\vec{y})\, e^{-i\vec{k}\vec{y}}\, \mathrm{d}^3 y, \\ \delta(y) &= \frac{1}{2\pi} \int \mathrm{d}k\, e^{iky}. \end{aligned}$$

8. Ukažte

$$\int_K \triangle \ln r \, \mathrm{d}^2 r = 2\pi$$

pomocí Gaussovy věty, kde $K$ je kruhová deska.

9. Použijte vzorec

$$\vec{E}(\vec{x}) = k \int \frac{\rho(\vec{x}\,')(\vec{x} - \vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|^3}\, \mathrm{d}^3 x'$$

pro vypočet pole homogenně nabitého, nekonečného drátu.

10. Podobně vypočtěte pole homogenně nabité, nekonečné rovné desky.

11. Lze vytvořit elektrostatické pole $\vec{E}$ konstantního směru, jehož absolutní velikost se mění kolmo na $\vec{E}$?

12. Vyjádřete následující rozložení náboje pomocí Diracovy $\delta$-funkce ve tvaru prostorové hustoty náboje $\rho(\vec{x})$ ve vhodných souřadnicívh.
a) Náboj $Q$, rozložený rovnoměrně po povrchu koule s poloměrem $R$ (kulové souřadnice).
b) Rovnoměrně rozložený náboj na povrchu válce s poloměrem $b$, přičemž náboj na jednotkovou délku je $\lambda$ (válcové souřadnice).
c) Náboj $Q$, rozložený rovnoměrně po infinitesimálně tenkém kruhovém disku (válcové souřadnice).
d) Totéž v kulových souřadnicích.

13. Vypočtěte Laplaceův operátor v kulových souřadnicích.

14. Dosaďte rozvoj $P_\ell(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ do Legendrovy rovnice

$$(1 - x^2) P_\ell(x)'' - 2x P_\ell(x)' + \ell(\ell+1) P_\ell(x) = 0$$

a určete rekursivní vztah pro koeficienty $a_n$. Jaká je podmínka, aby počet nenulových koeficientů byl konečný, t.j. aby řešením byl polynom?

15. Pomocí integrálu

$$\int_{-1}^{1} \left\{ P_{\ell'}(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[ (1 - x^2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_\ell(x) \right] - P_\ell(x) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left[ (1 - x^2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} P_{\ell'}(x) \right] \right\} \mathrm{d}x$$

ukažte ortogonalitu Legendrových polynomů, t.j.

$$\int_{-1}^{1} P_\ell(x)\, P_{\ell'}(x)\, \mathrm{d}x = 0 \quad \text{pro} \quad \ell \neq \ell'.$$

16. Vypočtěte magnetické pole z potenciálu

$$\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\vec{j}\,(\vec{x}\,')}{|\vec{x} - \vec{x}\,'|} \mathrm{d}^3 x'.$$

17. Vypočtěte magnetické pole lineárního vodiče (Biotův-Savartův zákon).

18. Vypočtěte energii homogenně nabité koule o poloměru $a$.

19. Dvě soustředné kulové slupky o poloměrech $a$ a $b$ tvoří kulový kondenzátor. Vypočtěte jeho kapacitu.

20. Ukažte

$$\left[\vec{E}\,\mathrm{div}\vec{D} - \vec{D} \times \mathrm{rot}\vec{E}\right]_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(E_i D_j - \frac{1}{2}\,\delta_{ij}\,\vec{E}\vec{D}\right)$$

za předpokladu, že $\vec{D}$ a $\vec{E}$ jsou úměrná.

21. Ukažte

$$\int_V \vec{r} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}\right) \mathrm{d}V = \int_{\partial V} \vec{r} \times \left(\vec{n} \times \vec{M}\right) \mathrm{d}S - \int_V \left(\vec{M} \times \vec{\nabla}\right) \times \vec{r}\,\mathrm{d}V.$$

22. Vypočtěte vektorový potenciál

$$\vec{A}(\vec{x}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\, I \int \mathrm{d}s\, \frac{\mathrm{d}\vec{\xi}(s)}{\mathrm{d}s} \frac{1}{|\vec{x} - \vec{\xi}(s)|}$$

konstantního proudu $I$ v kruhové smyčce $\vec{\xi}(s)$, $\xi_1(s) = R\cos\frac{s}{R}$, $\xi_2(s) = R\sin\frac{s}{R}$, $\xi_3 = 0$ ve velké vzdalenosti $|\vec{x}| \gg R$. Udejte magnetický moment $\vec{m}$, pomocí něhož je $\vec{A}(\vec{x}) = \frac{\vec{m} \times \vec{x}}{|\vec{x}|^3}$.

23. Podle Larmorova vzorce je intenzita záření zrychleného náboje $q$

$$P = \frac{1}{6\pi\epsilon_0} \frac{q^2 a^2}{c^3},$$

kde $a$ je zrychlení.
Jak dlouho může nerelativistický elektron obíhat okolo jádra vodíku po spirálové dráze, než je jádrem pohlcen? Odvoďte diferenciální rovnici pro $r(t)$ ze závislosti energie $E$ na $r$ a ze vztahu $P = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}$. (Náboj $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$C, poloměr atomu $r(0) = 10^{-10}$m, hmotnost elektronu $m_e = 10^{-30}$kg, $\epsilon_0 = 10^{-11}$F/m.)

24. a) Ukažte, že pro elektromagnetické potenciály $\vec{A}$ a $\Phi$ lze žádat kalibrační podmínka

$$f(\vec{x}, t) := \mathrm{div}\vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = 0$$

(Lorenzova kalibrace).
b) Jsou pak potenciály jednoznačně určeny pomocí intenzit $\vec{E}$ a $\vec{B}$?

25. Nájděte Greenovu funkci d'Alembertova operátoru.

26. Model dielektrika: Elektrony jsou harmonicky vázany elektrickými silami. Pod vlivem periodického elektrického pole $\propto e^{i\omega t}$ platí

$$m(\ddot{\vec{x}} + \gamma\dot{\vec{x}} + \omega_0^2\vec{x}\,) = q\vec{E}(\vec{x}, t) \approx q\vec{E}(\vec{0}, t).$$

($\omega_0$... vlastní frekvence oscilátoru, $\gamma$... konstanta tlumení, $\vec{E}$ se mění málo ve srovnání s amplitudou $\vec{x}$). Vypočtěte indukovaný dipólový moment $\vec{P} = Nq\vec{x}$ ($N$ je počet elektronů v jednotkovém objemu) a dielektrickou konstantu $\epsilon(\omega)$ ze vztahu $\epsilon\vec{E} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P}$.

27. Lorentzova transformace (matice $L$) spolu s translací danou vektorem $\vec{a}$ tvoří Poincarého transformaci. Složení dvou Poincarého transformací $P = (\vec{a}, L)$ a $P' = (\vec{a}\,', L')$ je zase takto transformace s Lorentzovou maticí $LL'$ a s translačním vektorem $\vec{a}\,' + L'\vec{a}$. Ukažte, že množina $\mathcal{P} = \{(\vec{a}, L)\}$ se součinem

$$(\vec{a}\,', L') \circ (\vec{a}, L) = (\vec{a}\,' + L'\vec{a}, L'L)$$

je grupa (Poincarého grupa).

28. Dokažte pomocí vzorce $\bar{t} = \gamma\left(t - \frac{v}{c^2}\,x\right)$, $\bar{x} = \gamma(x - vt)$, že Lorentzova kontrakce je recipročním jevem, t.z. i měřítko v klidu v soustavě $(t, x)$ se jeví zkráceno faktorem $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, když je pozorovano z pohybující se soustavy $(\bar{t}, \bar{x})$.

29. Člověk, který nese žebřík o délce 2,1m před sebou, běží rychlostí $v = \frac{\sqrt{3}}{2}\,c$ do pokoje o délce 1m a zavře za sebou dveře. (Pozor na numerické hodnoty!)
a) Proč je to možné?
b) Jak vypadá situace z hlediska tohoto člověka?
c) Co se stane potom?
d) Nakreslete prostoročasový diagram.

30. Napište Lorentzovu transformaci $t \to t'$, $\vec{x} \to \vec{x}\,'$, když se pohybuje soustava $(t', \vec{x}\,')$ rychlostí $\vec{v}$ v libovolném směru vůči soustavě $(t, \vec{x})$.

31. Odvod'te transformaci složek rychlosti $v^i = \mathrm{d}x^i/\mathrm{d}t \to v^{i'} = \mathrm{d}x^{i'}/\mathrm{d}t'$, když se čárkovaná soustava pohybuje rychlostí $\vec{u} = (u, 0, 0)$ vůči nečárkované.

32. Vysvětlujte vzorec

$$\epsilon^{iklm}\epsilon_{prsm} = -\begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s \end{vmatrix}$$

a odvod'te z toho výrazy pro $\epsilon^{iklm}\epsilon_{prlm}$, $\epsilon^{iklm}\epsilon_{pklm}$ a $\epsilon^{iklm}\epsilon_{iklm}$.

33. Ukažte

$$\star\star T = (-1)^{p-1}\,T$$

pro antisymetrický tenzor $T$ $p$-tého řadu. (Antisymetrické tenzory 0-tého a prvního řadu jsou prostě skaláry a vektory.)

34. Najděte takovou rychlost, že po Lorentzově transformaci pole $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou rovnoběžná. (Máte-li takový systém, pak to platí i ve všech systémech, které se pohybují libovolnou rychlostí podél $\vec{E}$ a $\vec{B}$ - můžete vybrat nejjednodušší případ.)

35. Kovariantní tvar Maxwellových rovnic skrývá skutečnost, že rovnice $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ a $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ nezahrnují derivaci podle času a tak jsou vlastně počátečními podmínkami. Dokažte, že zbývající rovnice časového vývoje tyto podmínky prodlužují, t. z. že platí vždy, pokud platí jednou.

36. Buď $A_j(x) = \mathrm{Re}\left(a_j\, e^{-ik_l x^l}\right)$ čtyřpotenciál rovinné elektromagneické vlny ve vakuu s komplexní amplitudou $a$ a vlnovým vektorem $k$.
a) Jaké podmínky pro $a$ a $k$ plynou z rovnic pole a z Lorenzovy kalibrace?
b) Tenzor elektromagnetického pole má tvar $F_{mn} = \mathrm{Re}\left(f_{mn}\, e^{-ik_l x^l}\right)$. Vypočtěte komplexní amplitudu $f_{mn}$ a ukažte

$$f^{mn}\, k_n = 0 = \star f^{mn}\, k_n \qquad\qquad f^{mn}\, f_{mn} = 0 = f^{mn} \star f_{mn}$$
$$F^{mn}\, k_n = 0 = \star F^{mn}\, k_n \qquad\qquad F^{mn}\, F_{mn} = 0 = F^{mn} \star F_{mn}.$$

Zapište tyto rovnice ve třírozměrné podobě $(k^0, \vec{k})$, užitím popřípadě $\vec{E}$ a $\vec{B}$.
c) Ukažte, že vlna je kruhově polarisována, právě když je $\star f_{mn} = \pm i f_{mn}$. Které znaménko odpovídá pravotočivé nebo levotočivé polarisací?

37. Ukažte pro tenzor energie-hybnosti elektromagnetického pole

$$T_i^i = 0, \qquad\qquad T_i^j = \frac{1}{2\mu_0}(F_{ik}\, F^{kj} + \star F_{ik} \star F^{kj}).$$

38. Ukažte, že $\mathcal{E}^2 - \frac{1}{c^2}\vec{S}^2 \geq 0$ je invariantní, nezápornou veličinou ($\mathcal{E}$ = hustota energie, $\vec{S}$ = Poyntingův vektor elektromagnetického pole). Jaký je fyzikální význam této nerovnosti?

39. Odvoďte vzorce

$$\Phi = \frac{e}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 - c^{-2}(\vec{r}\times\vec{u})^2}}\,, \qquad \vec{A} = \Phi\,\vec{u}$$

ze vzorců $\Phi' = e/(4\pi\epsilon_0 r')$, $\vec{A} = 0$, které platí v klidovém systému $S'$ náboje $e$ tím, že použijete transformace

$$t' = \gamma\left(t - \frac{u}{c^2}\,x\right), \qquad x' = \gamma(x - ut), \qquad y' = y, \qquad z' = z.$$

40. Udejte inverzní transformaci k infinitesimální Lorentzově transformaci

$$x_i' = (\delta_{ik} + \omega_{ik})x_k.$$

41. Odvoďte pohybové rovnice pro vektorový potenciál

$$\vec{A} = \sum_{\vec{k}} \left( \vec{a}_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t - i\vec{k}\vec{x}} + \vec{a}^{*}_{\vec{k}}\, e^{i\omega_{\vec{k}} t + i\vec{k}\vec{x}} \right)$$

z Hamiltoniánu $\mathcal{E} = \frac{1}{2}\left(\vec{P}^{2}_{\vec{k}} + \omega^{2}_{\vec{k}}\vec{Q}^{2}_{\vec{k}}\right)$ proměnných

$$\vec{Q}_{\vec{k}} = \sqrt{\epsilon_0 V}\left(\vec{a}_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t} + \vec{a}^{*}_{\vec{k}}\, e^{i\omega_{\vec{k}} t}\right)$$

a

$$\vec{P}_{\vec{k}} = i\omega_{\vec{k}}\sqrt{\epsilon_0 V}\left(-\vec{a}_{\vec{k}}\, e^{-i\omega_{\vec{k}} t} + \vec{a}^{*}_{\vec{k}}\, e^{i\omega_{\vec{k}} t}\right).$$