Historie astronomie VI.

Stabilita Sluneční soustavy

Lagrange - Laplace

Vladimír Štefl
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

Stabilita Sluneční soustavy
Nerovnosti pohybu Saturnu - historie

Výklad nerovností pohybu Jupiteru a Saturnu, stabilita sluneční soustavy – důležitý problém nebeské mechaniky ☼ v historii →

Konjunkce nastává cca každých dvacet roků,

antika: Písemně zachycené pozorovací údaje, včetně opravy na precesi – **Almagest**: střední denní hodnota pohybu Jupiteru na $n_J = 299{,}104581''$ a Saturnu $n_S = 120{,}422528''$.

Novověká astronomická pozorování především v 18. století - upřesnění hodnot středních denních pohybů, pro Jupiter $n_J = 299{,}128361''$ a Saturn $n_S = 120{,}454645''$. Rozdíl novověkých a antických údajů je u Jupiteru $\Delta n_J = 0{,}02378''$ a Saturnu $\Delta n_S = 0{,}03212''$. Pro současné hodnoty platí $n_J : n_S \approx 2{,}483328 \approx 5 : 2$.

Nerovnosti pohybu Saturnu - Kepler

roku 1625 **Johannes Kepler 1571 - 1630**
zpracoval pozorování planet

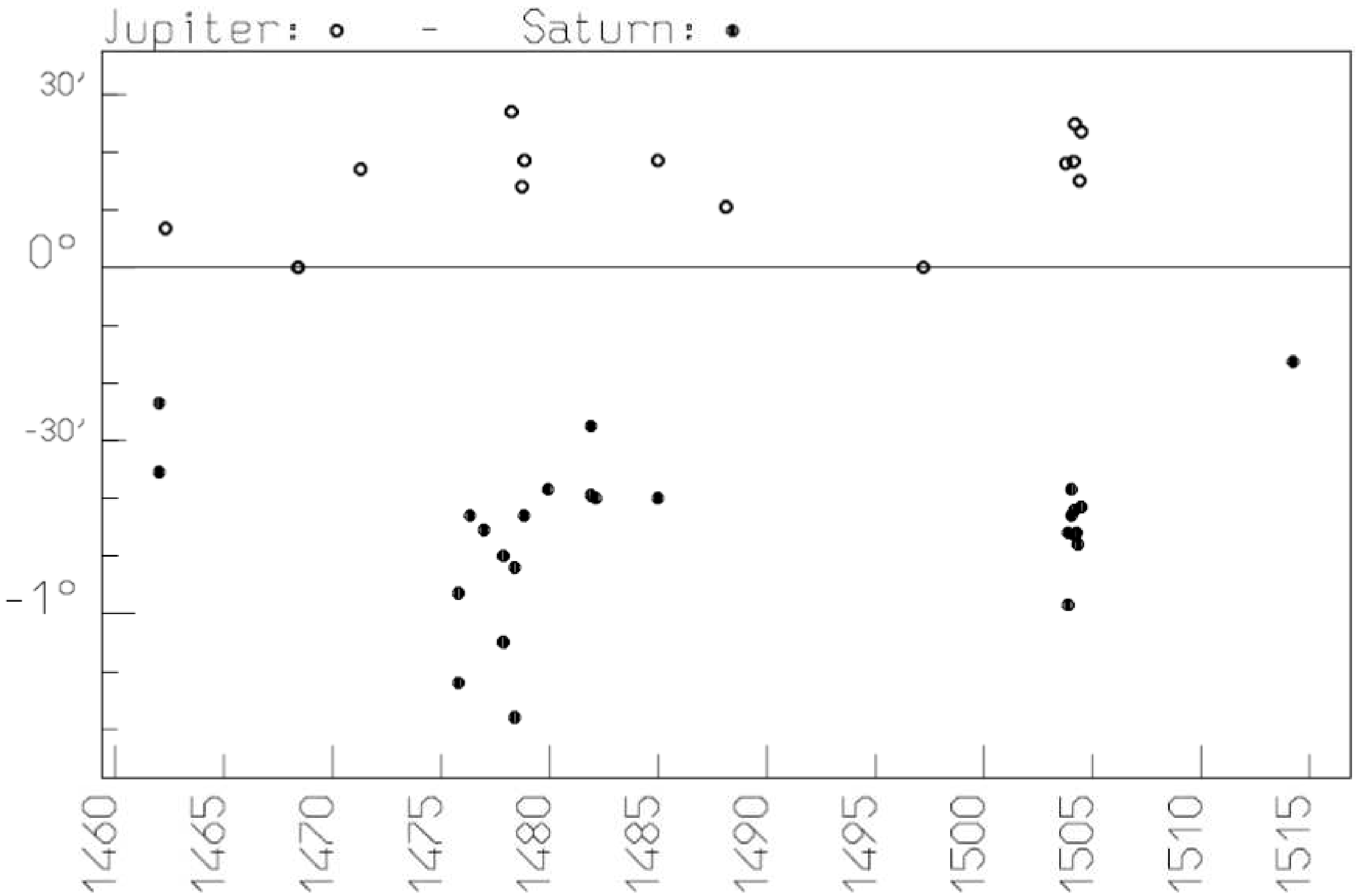
Johanna Regiomontanuse 1436 - 1476
Bernarda Walthera 1430 - 1504

Pozorovaný pohyb Jupiteru a Saturnu **neodpovídá** úplně **teorii pohybu po eliptické dráze**, podrobná analýza jevu *. Pozorované odchylky poloh planet dosahují až 28´ u Jupiteru a 48´ u Saturnu. Poruchy výraznější u Saturnu, má přibližně 3krát menší hmotnost než Jupiter.

*Giorgilli, A.: A Kepler´s note on secular inequalities. Milano 2011.

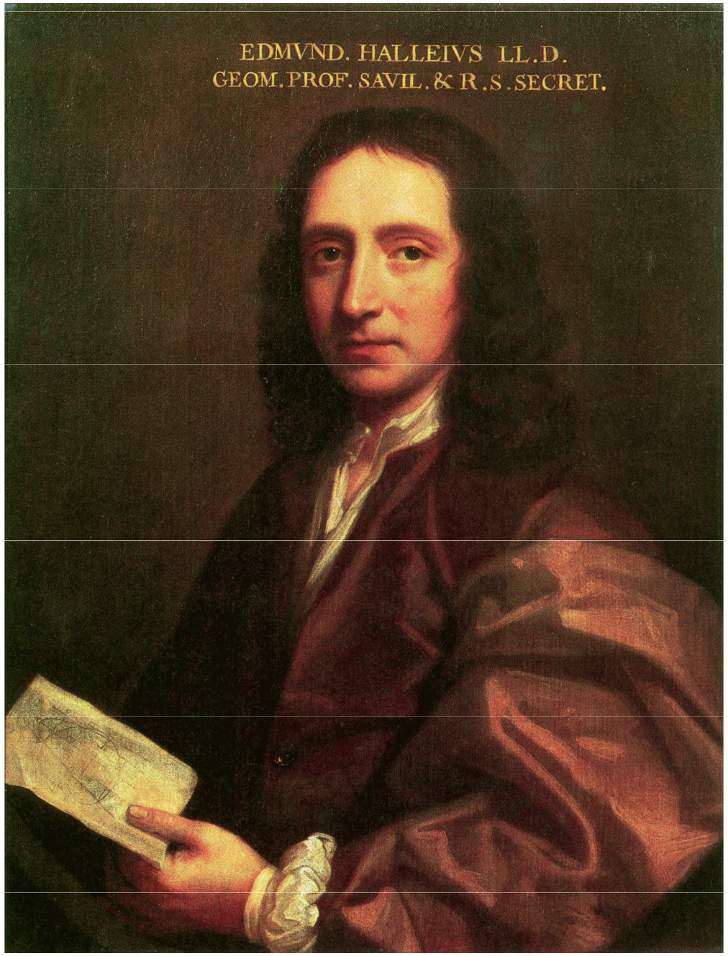
Nerovnosti pohybu Saturnu - Kepler

Rozdíl ekliptikálních délek Jupiteru a Saturnu: **Kepler - Rudolfinské tabulky 1627** x polohy stanovené Regiomontanusem a Waltherem.
Graf: **zrychlování pohybu Jupiteru**, **zpomalování Saturnu**.



Nerovnosti pohybu Saturnu - Halley

Edmond Halley 1656 - 1742 roku 1695:



potvrzení Keplerových závěrů, výpočet zrychlení středního pohybu Jupiteru a zpomalení středního pohybu Saturnu.

Poloměr dráhy Jupiteru se zmenšuje, poloměr dráhy Saturnu zvětšuje.

- narůstání těchto jevů → **narušení stability Sluneční soustavy**.

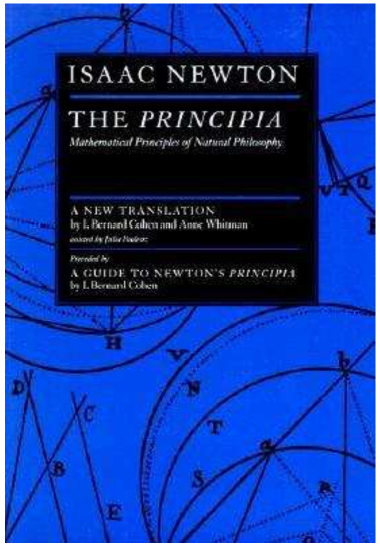
Halley na základě svých pozorování → planetární tabulky, vyšly souhrnně až posmrtně roku 1749.

Nerovnosti pohybu Saturnu - Newton

Gravitační působení Jupiteru a Saturnu - **Isaac Newton 1643-1727** promýšlel přibližně od roku 1684, kdy v prosinci v dopisu Flamsteedovi doplnil popis pohybu Saturnu po eliptické dráze: **„*ohnisko jeho dráhy se nenachází ve středu Slunce nýbrž v hmotném středu soustavy Slunce - Jupiter*“,** viz Principie*, věta XIII. poučky XIII.

Výpočet gravitační interakce poruchového působení planet - nutná znalost poměru hmotností planet a Slunce. U Země, Jupiteru a Saturnu Newton tento poměr propočítal z velikostí oběžných dob a vzdáleností tehdy známých měsíců od planet, III. Keplerův zákon v přesném tvaru, viz Principie *.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{G(M+m)}{4\pi^2} \approx \frac{GM}{4\pi^2}$$



* Cohen, I. B.: *The Principia - Mathematical Principles of Natural Philosophy*. University of California Press, Berkeley, Los Angeles, London 1989

Nerovnosti pohybu Saturnu - Newton

V srpnu 1691 Newton dopis Flamsteedovi - žádost o pozorovací údaje o **polohách Jupiteru a Saturnu** v následujících čtyřech až pěti rocích. Zřejmě k ověřování výpočtů vzájemných poruch obou planet. Flamsteed v prosinci roku 1694 poslal Newtonovi pozorované polohy Saturnu z let 1691 - 1694, včetně jejich rozdílů od poloh v Rudolfínských tabulkách.

Vzájemné gravitační působení planet v Principiích v I. knize, ve větě LXVI: „ *působení planet jedné na druhou ačkoliv je velmi malé a může být zanedbáváno, ruší pohyb planet po elipsách…„působení Jupiteru na Saturn nemůže být zanedbáváno“*… Zřetelná myšlenka, že obě planety se ve svém pohybu ovlivňují.

Podrobněji v Principiích v III. knize, větě XIII., poučce XIII.: „***Planety se pohybují po elipsách, majících svoje ohnisko ve středu Slunce, rádius vektory vztahující se k tomuto středu opisují plochy úměrné času“***

Pohyb Saturnu v Principiích

Avšak působení Jupiteru na Saturn nesmíme zanedbávat**, protože přitažlivost k Jupiteru se má (při stejných vzdálenostech) k přitažlivosti Slunce jako 1 : 1 067, tudíž při konjunkcích Jupiteru a Saturnu, když je jeho vzdálenost k Jupiteru vzhledem ke vzdálenosti k Slunci jako 4 : 9, přitažlivost Saturnu k Jupiteru bude k jeho přitažlivosti ke Slunci jako 81 ku 16 x 1067 nebo zaokrouhleně jako **1 ku 211#. Porucha dráhy Saturnu při každé jeho konjunkci s Jupiterem je tak znatelná, že vyvolává bezradnost astronomů**.* Při přihlédnutí k poloze planety při těchto konjunkcích, **její výstřednost se jednou zvyšuje, podruhé zmenšuje**, **afélium se jednou přesouvá vpřed, podruhé ustupuje vzad**, ¤ střední pohyb jeden za druhým se jednou zrychluje podruhé zpomaluje**.

Štefl,V.: K Newtonově a Eulerově interpretaci nerovností pohybu Jupiteru a Saturnu. Čs. čas. fyz. **63**, (2013), č. 3, p. 168 - 174.

* pozorovatelé zjistili rozdílné polohy od tabulkových odvozených z Keplerovy teorie.

¤ naznačení periodických změn výstřednosti respektive přímky apsid.

Pohyb Saturnu - Optika

Newton - pochybnosti o stabilitě Sluneční soustavy, interakce planet a také **komet**, v jeho čase neznámých hmotností, odpor éteru...

BOOK III. 325

Qu. 21. Is not this Medium much rarer within the dense Bodies of the Sun, Stars, Planets and Comets, than in the empty celestial Spaces between them? And in passing from them to great distances, doth it not grow denser and denser perpetually, and thereby cause the gravity of those great Bodies towards one another, and of their parts towards the Bodies; every Body endeavouring to go from the denser parts of the Medium towards the rarer? For if this Medium be rarer within the Sun's Body than at its Surface, and rarer there than at the hundredth part of an Inch from its Body, and rarer there than at the fiftieth part of an Inch from its Body, and rarer there than at the Orb of *Saturn*; I see no reason why the Increase of density should stop any where, and not rather be continued through all distances from the Sun to *Saturn*, and beyond. And though this Increase of density may at great distances be exceeding slow, yet if the elastick force of this Medium be exceeding great, it may suffice to impel Bodies from the denser parts of the Medium towards the rarer, with all that power which we call Gravity. And that the elastick force of this Medium is exceeding great, may be gather'd from the swiftness of its Vibrations.

BOOK III. 327

exceedingly more able to press upon gross Bodies, by endeavouring to expand it self.

Qu. 22. May not Planets and Comets, and all gross Bodies, perform their Motions more freely, and with less resistance in this Æthereal Medium than in any Fluid, which fills all Space adequately without leaving any Pores, and by consequence is much denser than Quick-silver or Gold? And may not its resistance be so small, as to be inconsiderable? For instance; If this *Æther* (for so I will call it) should be supposed 700000 times more elastick than our Air, and above 700000 times more rare; its resistance would be above 600000000 times less than that of Water. And so small a resistance would scarce make any sensible alteration in the Motions of the Planets in ten thousand Years. If any one would ask how a Medium can be so rare, let him tell me how the Air, in the upper parts of the Atmosphere, can be above an hundred thousand thousand times rarer than Gold. Let him

Newton, I.: *Opticks: or, a treatise of the reflections, refractions, inflections and colours of light.* London, 1730. Kniha III., p. 325, 327.

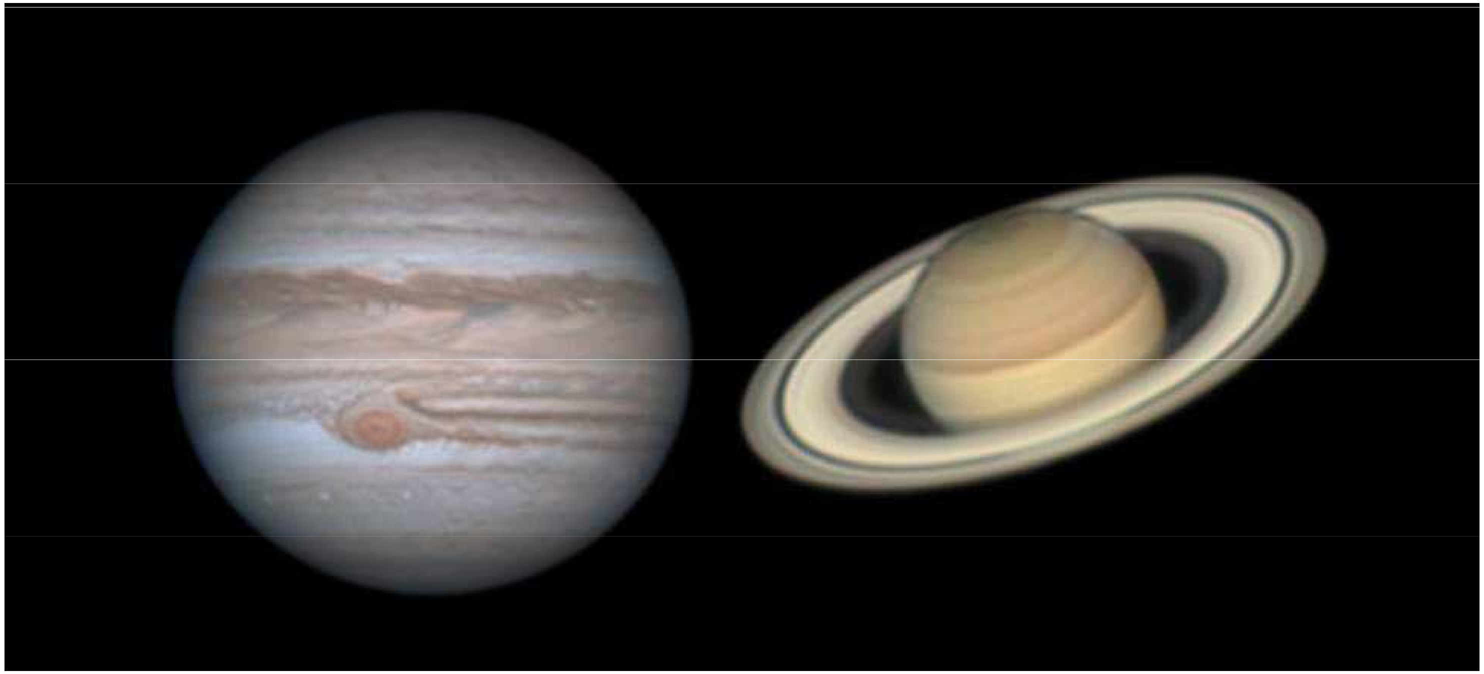
Výměna energií Jupiter ↔ Saturn konjunkce

Před konjunkcí: Jupiter „dohání“ Saturn, zpomaluje ho → úbytek kinetické energie jeho planetárního pohybu → přechod na nižší oběžnou dráhu → **zvýšení rychlosti středního pohybu Saturnu.**
Po konjunkci: jev opačný → přechod na vyšší oběžnou dráhu → **zpomalení rychlosti středního pohybu Saturnu.**
Při stejné velikosti gravitační interakce obou planet před a po konjunkci - výsledný efekt nulový. **Úplně přesně nikoliv**, dráhy planet nejsou soustředné. Pokud ke konjunkci dochází v poloze v prostoru, kde dráhy obou planet k sobě konvergují, v periheliu Saturnovy dráhy a v aféliu Jupiterovy dráhy, je jev po konjunkci větší než před ní. Výsledek - zvětšování poloměru Saturnovy dráhy a zmenšování velikosti jeho středního pohybu. Při konjunkci v prostoru, kdy dráhy obou planet k sobě divergují, je výsledkem pokles poloměru Saturnovy dráhy a zvýšení rychlosti jeho středního pohybu.

Důsledkem jsou celková **nepatrná zpomalování nebo zrychlování pohybu Saturnu**, rozeznatelná za větší časové intervaly.

Stabilita Sluneční soustavy

astronomové objevili v pohybu Jupiteru a Saturnu poruchy,
velmi pomalé změny jejich střední rychlosti,
příčina - oběžné doby Jupiteru a Saturnu kolem Slunce jsou přibližně 12 roků a 30 roků, každých zhruba 20 roků dochází ke konjunkci, při níž se zesiluje gravitační interakce, v průběhu konjunkce dochází k výměně kinetických energií planet, před ní Jupiter „dohání“ Saturn, zpomaluje ho, nastává úbytek jeho kinetické energie – přechází na nižší oběžnou dráhu



Pohyb Saturnu - Euler

Pařížská akademie vypsala cenu ¤ r. 1748 na

...„teorii Jupiteru a Saturnu vysvětlující nerovnosti těchto planet, majících příčinu v jejich pohybech, specielně v době konjunkce“...

Leonhard Euler 1703 - 1783

geometrická metoda → analytická.

≈ do r. 1750 - pochybnosti o gravitačním zákonu, domněnka - síly mají původ v neprostupnosti hmoty, **síly kontaktní**.

Euler vycházel z gravitačního zákona, odvodil poruchy Saturnu způsobené Jupiterem, soutěž → ¤ cena: ***za inovativní přístup k výpočtu planetárních poruch***, nikoliv za úplný výklad zpomalování Saturnu a zrychlování Jupiteru .

decelerace Saturnu /akceleraci Jupiteru = 7/3 → Laplace 1784!

Euler - poruchové síly

Souběžně Euler zkoumal, zda střední pohyby planet se podrobují **sekulárním změnám**,(v jeho době chápáno neperiodickým či s dlouhodobou periodou).

Na soustavu Slunce – Jupiter – Saturn, Euler aplikoval II. Newtonův pohybový zákon v pravoúhlých souřadnicích

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m_{Sa}} \qquad 2\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m_{Sa}} \qquad 2\frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m_{Sa}}$$

m_{Sa} je hmotnost rušené planety - Saturnu, $X,\ Y,\ Z$ jsou složky síly působící na Saturn ve směru souřadných os. Koeficient 2 - Eulerova volba jednotek (zrychlení volného pádu na zemském povrchu položil za jednotkové pro vyjádření urychlujících sil, místo $v^2 = 2gh$ používal $v^2 = h$).

#Euler, L.: Recherches sur le mouvement des corps céléstes en générale. Mémoires de l´Académie des Science de Berlin **3** (1747), p. 93 - 143.

Eulerovy výsledky

Metoda variace dráhových elementů - propočet jejich změn, nikoliv odchylek v poloze planet.

- rovnice pro malé šířkové odchylky Saturnu od dráhové roviny Jupiteru ve směru $z = r \sin(\phi - \Omega) tgi$,**délku výstupného uzlu *Ω*, sklon dráhy *i***.

- při bezporuchové eliptické dráze *Ω* a *i* konstantní, proměnnost vyvolána poruchami.

- velmi pozvolné změny *Ω* a *i,* → matematické zjednodušení řešení.

- vypočítané výsledky neodpovídaly úplně polohám Saturnu, nepřesnosti 8´ - 9´.

První analytické určení změn dráhových elementů: při omezení propočtu na několik prvních členů řad vyjadřujících změny dráhových elementů –, délky výstupného uzlu *Ω,* sklonu dráhy *i*.

Euler → poruchy dlouhodobé.

Pierre Simon de Laplace 1749 - 1827

Výklad světové soustavy 1796 - 1836

vyšel celkem 6krát, byl přepracováván postupně s vývojem astronomických poznatků, nesprávné hypotézy Laplace vylučoval, např. *hypotézy o původu komet*, v prvních třech vydáních předpokládal, že komety jsou relikty z doby vzniku Sluneční soustavy, ve čtvrtém vydání se domníval, že jde o mlhoviny, zachycené ve Sluneční soustavě, v dalších vydáních již tuto hypotézu opustil, obsah je rozdělen do šesti kapitol:

1. O zdánlivých pohybech nebeských těles
2. O reálných pohybech nebeských těles
3. O zákonech pohybu
4. O teorii všeobecné gravitace
5. Krátký přehled historie astronomie
6. Úvaha o světové soustavě a budoucích úspěších astronomie   V posledně uvedené je *Laplaceova kosmogonická hypotéza* o vzniku Sluneční soustavy z rotujícího plynu a prachu

Pierre Simon de Laplace

Nebeská mechanika 1799 - 1825 5. dílů

O obecných zákonech rovnováhy a pohybu
O zákon všeobecné gravitace a pohybech těžišť nebeských těles
O tvarech nebeských těles
O oscilacích moře a atmosféry
O pohybech nebeských těles kolem jejich vlastních těžišť
Teorie pohybu planet
Teorie Měsíce. Dodatek prezentovaný autorem u Komise pro délky 17.8.1808
Teorie měsíců Jupiteru, Saturnu a Uranu
Teorie komet
O několika tématech v systému světa.

Doplněk: O kapilárních jevech a doplněk k teorii kapilárních jevů

Pierre Simon de Laplace

* Výpočet aproximací vyšších řádů → střední pohyby obou planet imunní k dlouhodobým změnám.
* Poslední část spisu - odvození sekulárních nerovností dráhových elementů planet.

*P. S. Laplace: „Mémoire sur les solutions particuliéres des équations différentielles et sur les inégalités séculaires des planétes“, Mémoires de l´Académie royle des Sciences de Paris, anné 1772, p. 325 - 366.

Pierre Simon de Laplace

Laplace*: *„Síly vyvolávající poruchy od eliptického pohybu, zavedené ve výrazech pro* ***r****,* ***dv/dt*** *a* ***s****, v předcházející kapitole, čas* ***t*** *přes sinus a cosinus ve tvaru kruhového oblouku narůstajícího neomezeně...Jelikož tyto změny jsou vytvářeny velmi pomalým způsobem, bývají proto nazývány termínem sekulární nerovnosti.“*

C H A P I T R E V I I.

Des inégalités séculaires des mouvemens célestes.

53. LES forces perturbatrices du mouvement elliptique introduisent dans les expressions de r, $\frac{dv}{dt}$ et s, du chapitre précédent, le temps t, hors des signes *sinus* et *cosinus*, ou sous la forme d'arcs de cercle qui en croissant indéfiniment, doivent à la longue, rendre ces expressions fautives; il est donc essentiel de faire disparoître ces arcs, et d'avoir les fonctions qui les produisent par leur développement en série. Nous avons donné pour cet objet, dans le Chapitre V, une méthode générale de laquelle il résulte que ces arcs naissent des variations du mouvement elliptique, qui sont alors fonctions du temps. Ces variations s'exécutant avec une grande lenteur, elles ont été désignées sous le nom *d'inégalités séculaires.*

současnost - sekulární nerovnosti neperiodické, narůstající s časem

*P. S. Laplace: *Traité de Mécanique Céleste, vol. 2* Duprat, Paris 1799.

Pierre Simon de Laplace - gravitace

SUR LE PRINCIPE

DE LA

GRAVITATION UNIVERSELLE

ET SUR LES

INÉGALITÉS SÉCULAIRES DES PLANÈTES QUI EN DÉPENDENT (¹).

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris (Savants étrangers), année 1773, t. VII, 1776.

DE LA GRAVITATION UNIVERSELLE. 213

2° La force attractive d'un corps est le résultat de l'attraction de chacune des parties qui le composent.

3° Cette force se propage dans un instant, du corps attirant à celui qu'il attire.

4° Elle agit de la même manière sur les corps en repos et en mouvement.

1. *Přitažlivost je přímo úměrná hmotnosti tělesa a nepřímo úměrná čtverci vzdálenosti.*
2. *Působící síla tělesa je výslednicí interakcí všech jeho částí.*
3. *Síla se šíří okamžitě.*
4. *Přitažlivost je stejná u tělesa v klidu jako v pohybu.*

P. S. Laplace: „Sur le principe de la gravitation universelle et sur les inégalités séculaires des planétes dui en dépendent“, Mémoires de l´Académie royle des Sciences de Paris, anné 1773, p. 201 - 275.

Jean Louis Lagrange

Postup Lagrangea popisoval poruchy jako důsledek vzájemné gravitační interakce tehdy známých šesti planet, které byly malé vzhledem ke gravitačnímu působení Slunce. Planety proto nejprve považoval za pohybující se po eliptické dráze v souladu s Keplerovými zákony. Poruchové působení zachytil prostřednictvím pozvolných změn dráhových elementů eliptické dráhy. Popis vycházel z označení $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ vzdálenosti planety od Slunce, F/r^2 síly působící na planetu od Slunce, X, Y, Z x-ové, y-ové a z-ové složky celkové poruchové síly. Diferenciální rovnice pohybu planety v pravoúhlých souřadnicích měly tvar

$$0 = \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Fx}{r^3} + X, \quad 0 = \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{Fy}{r^3} + Y,$$

$$0 = \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Fz}{r^3} + Z. \tag{2}$$

Jean Louis Lagrange

pomocnou potenciální poruchovou funkci R, což mu umožnilo zjednodušit řešení (v analyzované soustavě Slunce – Země – Měsíc) pohybu Měsíce započtením gravitačního vlivu vyvolaného Sluncem. Pro poruchovou funkci zavedl vztah

$$R = GM_S\left(\frac{1}{\Delta_{MS}} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r_{ZS}^3}\right), \tag{1}$$

kde M_S je hmotnost rušícího Slunce, Δ_{MS} vzdálenost Měsíce a Slunce, r_{ZS} vzdálenost Země a Slunce, x, y, z jsou geocentrické souřadnice Měsíce, x', y', z' obdobné souřadnice Slunce.

Jean Louis Lagrange

Teoretická řešení pohybu Měsíce v soustavě Slunce – Země – Měsíc a pohybu Saturnu v soustavě Slunce – Jupiter – Saturn jsou principiálně analogická. Rozdílné prostorové rozložení jmenovaných těles v obou soustavách a odtud vyplývající důsledky pro metody a výsledky výpočtů byly diskutovány v článku [1].

Při aplikaci vztahu (1) na soustavu Slunce – Jupiter – Saturn má poruchová funkce tvar

$$R = Gm_J\left(\frac{1}{\Delta_{JSa}} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r_{SJ}^3}\right),$$

kde m_J je hmotnost rušící planety Jupiteru, Δ_{JSa} vzdálenost mezi Jupiterem a Saturnem, r_{SJ} vzdálenost mezi Sluncem a rušící planetou Jupiterem, x, y, z jsou heliocentrické souřadnice rušené planety Saturnu vzhledem ke Slunci, zatímco x', y', z' jsou ve stejné vztažné soustavě souřadnice Jupiteru opět k Slunci. Poruchová funkce dosahuje nízkých hodnot při malé velikosti výrazu v závorce.

Jean Louis Lagrange

Jestliže poruchové síly X, Y, Z byly nulové, rovnice získaly tvar

$$0 = \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{Fx}{r^3}, 0 = \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{Fy}{r^3}, 0 = \frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{Fz}{r^3}. \quad (3)$$

Uvedené rovnice byly integrovatelné, jejich konečný integrál vedl k hodnotám x, y, z. Šest integračních konstant určovalo šest dráhových elementů eliptické dráhy. V pozdější interpretaci Lagrange za ně zvolil velikost velké poloosy elipsy, výstřednost, polohu velké poloosy, respektive přímky apsid, sklon dráhové roviny elipsy, polohu uzlové přímky, respektive přímky průsečíku dvou rovin, dobu středního oběhu, respektive hodnotu střední délky v daném čase, detailněji viz [12]. Z šesti dráhových elementů první tři (*velká poloosa, výstřednost, počáteční poloha velké poloosy*) určovaly

Jean Louis Lagrange

velikost a tvar elipsy, další tři (*sklon dráhy, poloha uzlové přímky a přímky apsid)* stanovovaly polohu elipsy v prostoru.

Derivací diferenciálních rovnic (2) podle času obdržel Lagrange tři rovnice prvního řádu, z nichž každá obsahovala jednu integrační konstantu. Rovnice společně se třemi integrálními rovnicemi poskytovaly šest diferenciálních rovnic prvního řádu, každá obsahovala jednu integrační konstantu. Šest rovnic umožňovalo určení šesti integračních konstant v jednotkách hodnot $x, y, z, dx/dt, dy/dt, dz/dt$ v libovolném čase. Nechť $V = k$, kde k je konstanta, V je funkce $x, y, z, t, dx/dt, dy/dt, dz/dt$. Derivací Lagrange dostal $dV = 0$, diferenciální rovnice druhého řádu, neboť

$$-Fx\frac{dt}{r^3}, -Fy\frac{dt}{r^3}, -Fz\frac{dt}{r^3}$$

Jean Louis Lagrange

Vztah pro vyjádření pohybu po eliptické dráze používaný Lagrangem měl tvar

$$r = \frac{p}{1 + e\cos(\phi - \alpha)},$$

kde p je *semilatus rectum*, e výstřednost elipsy, r rádius vektor, ϕ délka od pevné přímky a α úhel velké poloosy od této přímky, potom $\phi - \alpha$ je skutečná délka. Dále ze vztahů

$$r^2 d\phi = dt\sqrt{Fp} \text{ a } p = a\left(1 - e^2\right)$$

Lagrange postupně odvodil diferenciální rovnici určující změny velké poloosy

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{r} - \frac{r^2 d\varphi^2 + dr^2}{2F dt^2}.$$

Jean Louis Lagrange 1736 - 1813

Zjednodušil ji úpravami

$r = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}$ a $r^2 d\phi^2 + dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$

a obdržel

$$\frac{1}{2a} = \frac{1}{\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{2F dt^2},$$

což je tzv. rovnice energie, respektive živé síly pro eliptický pohyb. Levá strana rovnice je ztotožněná se členem k, pravá strana s V. Volbou $k = 1/2a$ získáme rovnici pro V, jak je podrobně diskutováno v [12], [13] či přehledově v [14].

Následně Lagrange vyjádřil zlomky obsahující derivace V:

Jean Louis Lagrange

Po dosazení a úpravě derivací podle času *t* získal Lagrange **vztah**

$$d\,\frac{1}{2a} = \frac{Xdx + Ydy + Zdz}{F}$$

**„Vida, obdrželi jsme velmi jednoduchý vztah pro určování změn velké poloosy 2a eliptické dráhy tělesa podrobeného působení centrální síly a poruchových sil X, Y, Z.“*

Změny velké poloosy *2a* eliptické dráhy rušené planety **vyvolány gravitačním působením rušících planet.**

*J. L. Lagrange: Sur l’ altération des moyens mouvements des planétes, Nouveaux Mémoires de l´Académie royale des Sciences et Belles - Lettres de Berlin, anné 1776, p. 255 - 271.

Lagrangeův - vztah

$$d\,\frac{1}{2a} = \frac{X\,dx + Y\,dy + Z\,dz}{F}.$$

8. Voilà donc, comme l'on voit, une formule fort simple pour déterminer les altérations du grand axe $2a$ de l'orbite elliptique d'un corps animé par une force centrale $\frac{F}{r^2}$, et dérangé par des forces perturbatrices quelconques X, Y, Z.

Pour appliquer cette formule à la solution de la question qui fait l'objet de ce Mémoire, il est clair qu'il faut commencer par déterminer les forces

*J. L. Lagrange: Sur l’ altération des moyens mouvements des planétes, Nouveaux Mémoires de l´Académie royale des Sciences et Belles - Lettres de Berlin, anné 1776, p. 255 - 271.

Jean Louis Lagrange

THÉORIE

DES VARIATIONS SÉCULAIRES

DES ÉLÉMENTS DES PLANÈTES.

PREMIÈRE PARTIE

CONTENANT LES PRINCIPES ET LES FORMULES GÉNÉRALES
POUR DÉTERMINER CES VARIATIONS.

(*Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin*, année 1781.)

Obr. 8 Titulní list Lagrangeova spisu *Théorie des variations séculaires des élémentes des planétes. Première partie contenant les principes et les formules générales pour déterminer ces variations*. Noueaux mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin, 1781.

Jean Louis Lagrange

Ve spisu [20] Laplace konstatuje: *„Je tudíž velmi pravděpodobné, že pozorované změny v pohybech Ju-*

de Saturne est $\frac{1}{3358,40}$, on trouve que le retardement de Saturne doit être à l'accélération de Jupiter, à très peu près, comme 7 est à 3; ainsi l'équation séculaire de Saturne étant supposée de 9°16', celle de Jupiter doit être de 3°58', ce qui ne diffère que de 9 minutes du résultat de Halley. Il est donc fort probable que les variations observées dans les mouvements de Jupiter et de Saturne sont un effet de leur action mutuelle, et puisqu'il est constant que cette action ne peut y produire aucune inégalité, soit constamment croissante, soit pério-

Obr. 9 Ukázka z Laplaceova spisu *Mémoire sur les inégalités séculaires des planétes*. Paris, 1784. s. 52.

Laplace: pohyb Saturn ↔ Jupiter

Z integrálu živých sil, při zanedbání všech členů druhého a třetího řádu v hmotnostech m^2 a m^3, které buď periodické nebo konstantní → vztah

$$\frac{m}{a} + \frac{m'}{a'} + \frac{m''}{a''} + \ldots = konst._1$$

kde *m, m´, m“* … jsou hmotnosti planet, *a, a´, a“* … velikosti velkých poloos jejich drah. Větší hmotnosti Jupiteru a Saturnu oproti ostatním planetám, proto

$$\frac{m_J}{a_J} + \frac{m_S}{a_S} = konst._2$$

→ zmenšování velké poloosy Jupiterovy dráhy → zvětšování velké poloosy dráhy Saturnu. Nechť n_J, n_S označují střední pohyby Jupiteru a Saturnu, při vyjádření III. Keplerova zákona

$$a_J^{-1} = n_J^{\frac{2}{3}} \qquad a_S^{-1} = n_S^{\frac{2}{3}} \qquad m_J n_J^{\frac{2}{3}} + m_S n_S^{\frac{2}{3}} = konst._3$$

*P. S. Laplace: Théorie de Jupiter et de Saturne. Mémoires de l´Academie royale des Sciences, 1785, p. 95 - 207.

Laplace:
decelerace Saturnu, akcelerace Jupiteru

Vzájemná interakce obou planet ovlivňuje střední pohyb, což popsal vztahem

$$\delta n_S = -\frac{m_J}{m_S}\left(\frac{n_S}{n_J}\right)^{\frac{1}{3}}\delta n_J$$

respektive $\delta n_S = -\frac{m_J}{m_S}\left(\frac{a_J}{a_S}\right)^{\frac{1}{2}}\delta n_J$

Použité hodnoty $m_J = \frac{1}{1067{,}2}$ $m_S = \frac{1}{3358{,}4}$ a_J*=5,20279 au* a_S*=9,53877 au* dosazení ke vztahu

$$\delta n_S = -2{,}33 \quad \delta n_J$$

Poměr **decelerace Saturnu k akceleraci Jupiteru 7 : 3**, viz věta v textu spisu str. 52*, poměr odpovídal zjištěným historickým hodnotám.

*P. S. Laplace: Mémoire sur les inégalités séculaires des planétes et des satellites, Mémoires de l´Academie royale des Sciences, 1784, p. 49 - 92.

Pierre Simon de Laplace

THÉORIE

DE JUPITER ET DE SATURNE.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1785; 1788.

Obr. 10 Titulní list Laplaceova spisu *Théorie de Jupiter et de Saturne*. Mémoires de l´Academie royale des Science, 1785.

piteru a Saturnu jsou výsledkem jejich vzájemných interakcí, a je prokázáno, že toto působení může vyvolávat nerovnosti, které buď nepřetržitě narůstají, nebo se vyznačují dlouhými periodami" ... „je přirozené se domnívat, že existují teorie a velký počet nerovností tohoto typu, jejichž perioda je velmi dlouhá."

Pierre Simon de Laplace

Tedy pozorované zrychlení Jupiteru a zpomalení Saturnu jsou výsledkem poruch vyvolaných vzájemným působením obou planet. Laplace prokázal, že jde o dlouhoperiodické variace odpovědné za změny rychlosti středního pohybu, které vyjadřoval lineární aproximací. Periodu propočetl na přibližně 900 roků. Planetární dráhy podléhají dvěma pohybům, precesi perihélia (pomalá rotace dráhy v rovině) a precesi uzlové přímky (způsobující rotaci dráhové roviny v prostoru). Jejich výpočet u Laplacea tak byl složitější než v případě jednoduchých nehybných eliptických drah vyplývajících z Keplerových zákonů, které předpokládal ještě Newton.

Laplace - úvaha o poruchách

THÉORIE

DE JUPITER ET DE SATURNE.

Mémoires de l'Académie royale des Sciences de Paris, année 1785 : 1788.

Ve spisu * Laplace konstatuje:„ *Je tudíž velmi pravděpodobné, že pozorované změny v pohybech Jupiteru a Saturnu jsou výsledkem jejich vzájemných interakcí a je prokázáno, že toto působení může vyvolávat nerovnosti, které buď nepřetržitě narůstají nebo se vyznačují dlouhými periodami ...“ ...„ je přirozené se domnívat, že existují teorie a velký počet nerovností tohoto typu, jejichž perioda je velmi dlouhá.“*

*P. S. Laplace: Théorie de Jupiter et de Saturne. Mémoires de l´Academie royale des Sciences, 1785, p. 95 - 207.

Laplace - stabilita Sluneční soustavy

1. Pozorované **zrychlení Jupiteru, zpomalení Saturnu** - výsledek vzájemných poruch obou planet. Dlouhoperiodické variace - změny rychlosti středního pohybu, (vyjadřované lineární aproximací), perioda přibližně 900 r.

2. Planetární dráhy vykonávají **dva pohyby**
   - **precesi perihélia** (pomalá rotace dráhy v rovině)
   - **precesi uzlové přímky** (rotace dráhové roviny v prostoru).

3. Vývoj dráhových elementů planet vyjádřen prostřednictvím dvou vět, zachycující kinematické vlastnosti planet sluneční soustavy.

$$\sum_i m_i \sqrt{a_i}\, e_i^2 = konst._4 \qquad \sum_i m_i \sqrt{a_i}\, i_i^2 = konst._5$$

* P. S. Laplace: Théorie de Jupiter et de Saturne. Mémoires de l´Academie royale des Science, 1786, p. 211 - 239.

Stabilita Sluneční soustavy

Při rozboru stability planetárních drah tak byly studovány změny dráhových elementů a, e, i. Roku 1784 Laplace dokázal platnost dvou vět:

1. $m_1\sqrt{a_1}e_1^2 + m_2\sqrt{a_2}e_2^2 + \cdots + m_n\sqrt{a_n}e_n^2 = c_1$, kde c_1 je konstanta, m hmotnost planety, a velká polosa, e excentricita příslušné dráhy.
2. $m_1\sqrt{a_1}\,\mathrm{tg}^2 i_1 + m_2\sqrt{a_2}\,\mathrm{tg}^2 i_2 + \cdots + m_n\sqrt{a_n}\,\mathrm{tg}^2 i_n = c_2$, kde c_2 je konstanta i označuje úhel sklonu příslušné dráhy.

V obou větách součty výrazů pro planety jsou stálé. Věty byly odvozeny za omezujícího předpokladu, že velké poloosy drah se podrobují pouze malým periodickým změnám, tudíž platí pro ohraničené změny e a i. Jak vyplývá z vět, jestliže excentricita jedné dráhy narůstá, excentricita druhé dráhy se zmenšuje Obdobnou úvahu lze provést i pro sklon drah. Dalším předpokladem bylo, že hmotnosti planet jsou zhruba stejného řádu.

Závěry z obou vět lze shrnout slovně: Jestliže pohyb planet probíhá jedním směrem, jejich hmotnosti jsou stejného řádu, excentricity a sklony drah malé, velké poloosy jsou podrobovány pouze nevelkým změnám vzhledem ke střední hodnotě, pak excentricity a sklony drah budou malé ve zkoumaném časovém intervalu.

Uvedenými větami byla prokázána stabilita sluneční soustavy. Výpočet ukázal, že jde o dlouhoperiodické poruchy, jejichž perioda činí přibližně 930 roků.

Později roku 1839 Leverrier propočítal celou soustavu matematických vztahů charakterizujících stabilitu drah planet, včetně započtení poruch od Uranu. Výsledky v mezích přesnosti vedly k existenci horní hranice změn excentricity a úhlu sklonu dráhy při zachování stability sluneční soustavy.

Lagrange ↔ Laplace

Nadšený Laplace ocenil Lagrangeův spis* a odvození vztahu slovy:

…„*výstižná aplikace nádherné metody, kterou jste vysvětlil na začátku vašich memoárů“*…„*neobyčejně jednoduchý vztah obdržený pro změnu velké poloosy“*…

Korespondence Lagrange → Laplace

Berlin, 10 avril 1775.

Monsieur et très illustre Confrère, j'ai reçu vos Mémoires, et je vous suis obligé de m'avoir anticipé le plaisir de les lire. Je me hâte de vous en remercier, et de vous marquer la satisfaction que leur lecture m'a donnée. Ce qui m'a le plus intéressé, ce sont vos recherches sur les inégalités séculaires. Je m'étais proposé depuis longtemps de reprendre mon ancien travail sur la théorie de Jupiter et de Saturne, de le pousser plus loin et de l'appliquer aux autres planètes ; j'avais même dessein d'envoyer à l'Académie un deuxième Mémoire sur les inégalités séculaires du mouvement de l'aphélie et de l'excentricité des planètes, dans lequel cette matière serait traitée d'une manière analogue à celle dont

Lagrange píše Laplaceovi 10. dubna 1775:„ *Co mne nejvíce zaujalo, byl výzkum sekulárních nerovností. Vzpomněl jsem si na svou starší práci o teorii Jupiteru a Saturnu, budu usilovat o její aplikaci na další planety. Zamýšlím dále zaslat do spisů Akademie druhé pojednání o nerovnostech sekulárního pohybu afélia a výstředností planet, v kterých je problematika interpretována podobným způsobem .*“

Korespondence Laplace → Lagrange

Paris, 10 février 1783.

MONSIEUR ET TRÈS ILLUSTRE CONFRÈRE,

Voici un exemplaire de mon Mémoire sur les comètes, que vous connaissez en partie par l'extrait que j'ai eu l'honneur de vous en envoyer.
tirerez probablement sans beaucoup de difficulté de votre belle méthode sur les moyens mouvements des planètes. Ce théorème est que *si l'on suppose deux planètes dont les orbites soient inclinées l'une à l'autre d'une manière quelconque, leur inclinaison moyenne ne change pas en vertu de l'action réciproque des deux planètes*. Je m'étais proposé d'en chercher

Laplace → Lagrange 10. února 1783:*„ jestliže předpokládáme dvě planety mající velmi podobný dráhový sklon, potom se na základě vzájemné interakce nemění…“*

Vzájemná korespondence nebyla zdvořilostně formální, nýbrž **věcná i s matematickými vztahy...** Oba považujeme za architekty důkazu stability Sluneční soustavy, proto Lagrangeova - Laplaceova teorie...

Stabilita Sluneční soustavy

Při rozboru stability planetárních drah tak byly studovány změny dráhových elementů a, e, i. Roku 1784 Laplace dokázal platnost dvou vět:

1. $m_1\sqrt{a_1}e_1^2 + m_2\sqrt{a_2}e_2^2 + \cdots + m_n\sqrt{a_n}e_n^2 = c_1$, kde c_1 je konstanta, m hmotnost planety, a velká polosa, e excentricita příslušné dráhy.
2. $m_1\sqrt{a_1}\,\mathrm{tg}^2 i_1 + m_2\sqrt{a_2}\,\mathrm{tg}^2 i_2 + \cdots + m_n\sqrt{a_n}\,\mathrm{tg}^2 i_n = c_2$, kde c_2 je konstanta i označuje úhel sklonu příslušné dráhy.

V obou větách součty výrazů pro planety jsou stálé. Věty byly odvozeny za omezujícího předpokladu, že velké poloosy drah se podrobují pouze malým periodickým změnám, tudíž platí pro ohraničené změny e a i. Jak vyplývá z vět, jestliže excentricita jedné dráhy narůstá, excentricita druhé dráhy se zmenšuje Obdobnou úvahu lze provést i pro sklon drah. Dalším předpokladem bylo, že hmotnosti planet jsou zhruba stejného řádu.

Závěry z obou vět lze shrnout slovně: Jestliže pohyb planet probíhá jedním směrem, jejich hmotnosti jsou stejného řádu, excentricity a sklony drah malé, velké poloosy jsou podrobovány pouze nevelkým změnám vzhledem ke střední hodnotě, pak excentricity a sklony drah budou malé ve zkoumaném časovém intervalu.

Uvedenými větami byla prokázána stabilita sluneční soustavy. Výpočet ukázal, že jde o dlouhoperiodické poruchy, jejichž perioda činí přibližně 930 roků.

Později roku 1839 Leverrier propočítal celou soustavu matematických vztahů charakterizujících stabilitu drah planet, včetně započtení poruch od Uranu. Výsledky v mezích přesnosti vedly k existenci horní hranice změn excentricity a úhlu sklonu dráhy při zachování stability sluneční soustavy.