Historie astronomie VII.

Vladimír Štefl
Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

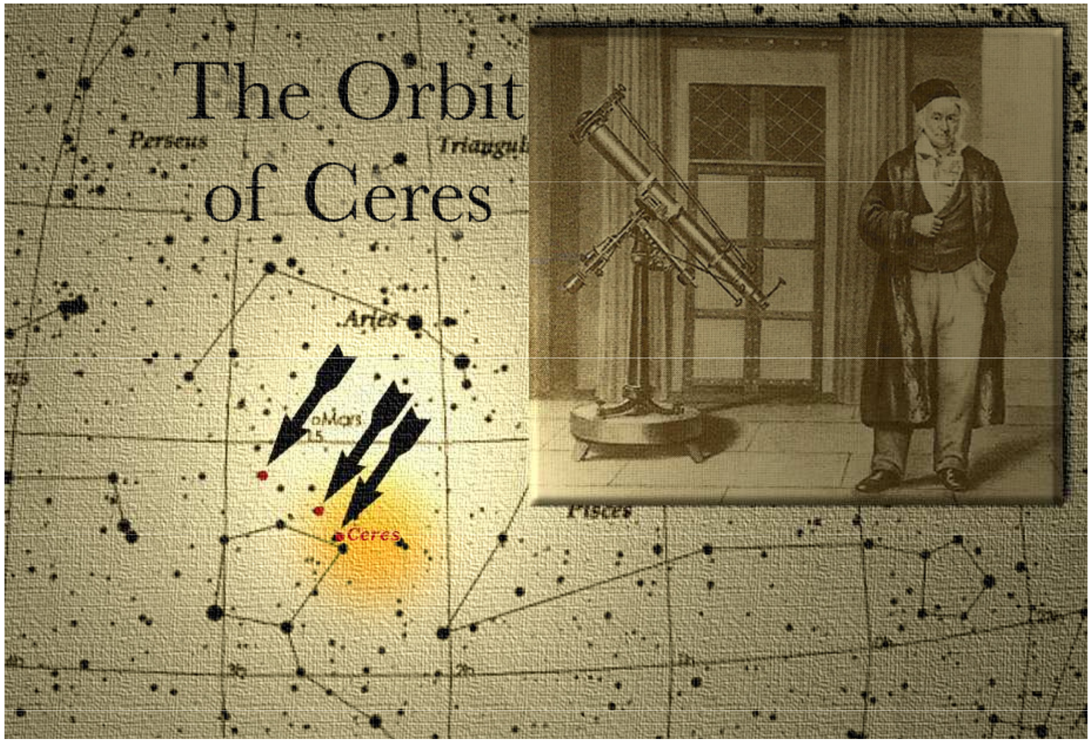
Gaussova metoda výpočtu planety - planetky - trpasličí planety - Ceres

Jak Gauss vypočítal dráhu Ceres?

- B. Marsden †
- A. Abdulle, G. Wanner
- A. Celleti
- M. Fausler
- G. M. Gronchi
- J. Tennenbaum, B. Director
- D. Teets

Gaussova metoda znovunalezení Ceres

K. F. Gauss: **Theoria Motus**:
„Determinare orbitam corporis coelestis, absque omni suppositione hypothetica, ex obseruationibus tempus haud magnum complectentibus neque adeo delectum…“



A. Seydler: *„Určiti dráhu oběžnice bez všelikého hypothetického podkladu a z pozorování v krátkém čase po sobě učiněným.“*

Titiusovo - Bodeovo pravidlo

Slunce, Měsíc, Merkur, Venuše, Mars, Jupiter, Saturn - jejich uspořádání

r. 1766 německý matematik a fyzik J. D. Titius

r. 1772 německý matematik a astronom J. E. Bode

Johann Daniel Tititus (1729 -1796)

Johann Elert Bode (1747 – 1826)

Titiusovo – Bodeovo pravidlo

$a_k = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^{k}$ ($k = -\infty, 0, 1, 2, \ldots$)

Titiusovo - Bodeovo pravidlo - historie

předchůdci: Wolf, Ch. (1679 – 1754)

Kant, I. (1724 – 1804) ***existuje mezera u planet***

Titius, J. D., 1766: Překlad knihy*, umístění poznámky o pravidle → Bonnet pro k = 3… „*Skutečně Stvořitel zanechal toto místo prázdné? V žádném případě!*“

- první zmínka o Ceres!?

Bode, J. E., 1772:* * zřejmě na základě dopisování s Titiusem

*Bonnet, Ch.: Contemplation de la Nature – Pozorování přírody, Amsterodam 1764.

* *Bode J. E.. Anleitung zur Kenntniss des gestirnten Himmels – Příručka ke studiu hvězdné oblohy, Hamburg 1772

Titiusovo – Bodeovo pravidlo

$$a_k = 0{,}4 + 0{,}3 \times 2^k \; (k = -\infty, 0, 1, 2, \ldots)$$

	k	a_k	a observed	*AU*
Mercury	$-\infty$	0.4	0.39	
Venus	0	0.7	0.72	
Earth	1	1.0	1.00	
Mars	2	1.6	1.52	
asteroids	3	2.8	2.90	
Jupiter	4	5.2	5.20	
Saturn	5	10.0	9.55	
Uranus	6	19.6	19.20	

Počátky hledání trpasličí planety

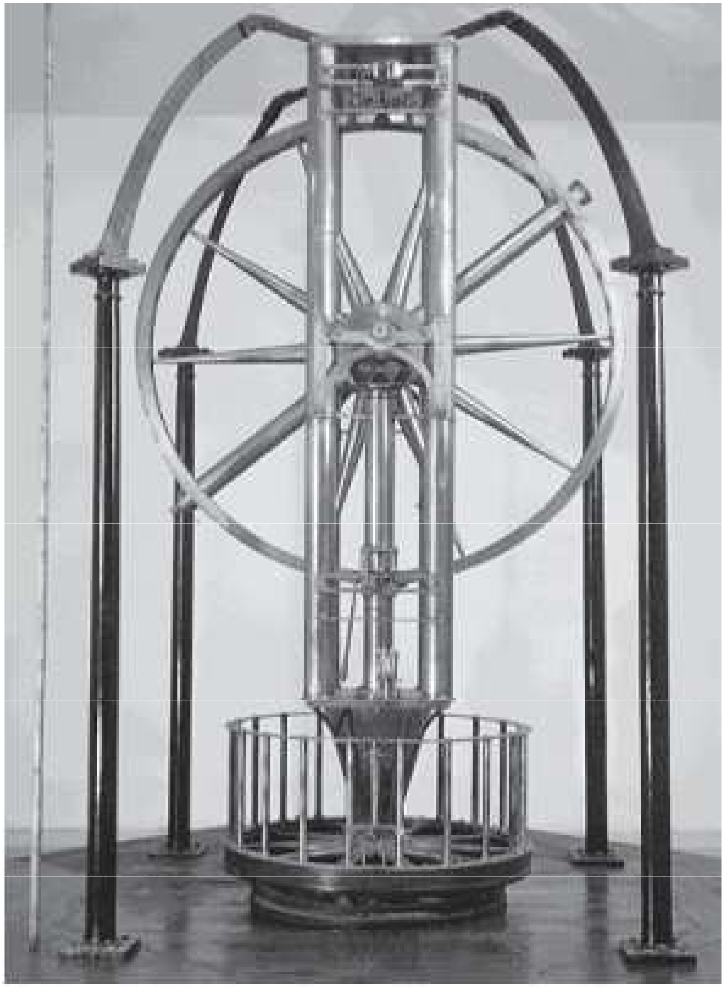
r. 1781 anglický astronom W. Herschel (1738 - 1822)
- objev Uranu pro k = 6
T. B. pravidlo a = 19,6 au,
reálná velká poloosa a = 19,2 au

Franz Xaver von Zach (1754 - 1832), buda**pešťský** rodák,
klíčová osoba příběhu

astronom v Gotha, začal r. 1787 s hledáním planety mezi Marsem a Jupiterem pro k = 3, a = 2,8 au
nebeská policie - J. H. Schröter, H. W. M. Olbers, W. Herschel, N. Maskelyne atd., celkem 24 astronomů - policistů, G. Piazzi původně nebyl členem

Giuseppe Piazzi (1746 – 1826)

objev planety (planetky) Ceres Ferdinandea



Ramsdenův čočkový dalekohled, D objektivu 7,5 cm

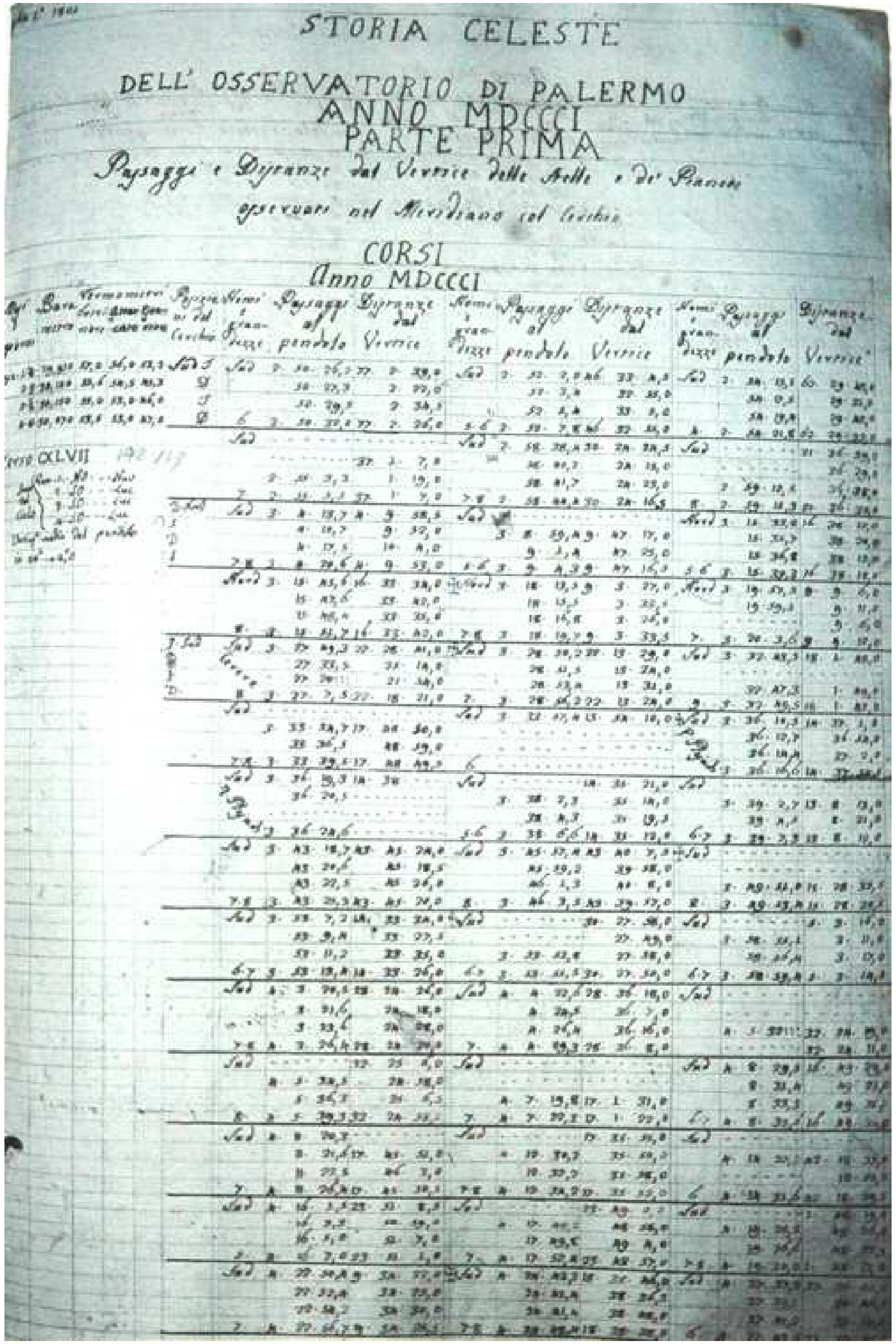
identifikace hvězdy Mayer 87 x Lacaille 87, objev Ceres náhodný

Piazziho pozorování

Piazzi **1. ledna 1801** ve 20 hod 43 min místního času nalezl **objekt**, který se během noci posunul o 4´ k severozápadu. Svůj objev popsal takto: *,,Pozoroval jsem 1. ledna poblíž ramena Býka objekt s hvězdnou velikostí osmé magnitudy, který se dalšího večera 2. ledna posunul o 3´30" přibližně k severu o 4´ ke znamení Berana"...*

Sledování prováděl do **11. února 1801**, kdy se objekt přiblížil ke Slunci a přestal být pozorovatelný. Celkově Piazzi sledoval objekt 41 nocí, získal údaje o 21 úplných pozorováních, v nichž zachytil zhruba 9^{o} jeho dráhy kolem Slunce, předpokládal, že jde o **kometu**....*,,já bych tu hvězdu **označil jako kometu**, avšak nevykazuje žádnou mlhovinu…"*

Záznam Piazziho pozorování


STORIA CELESTE

DELL' OSSERVATORIO DI PALERMO

ANNO MDCCCI

PARTE PRIMA

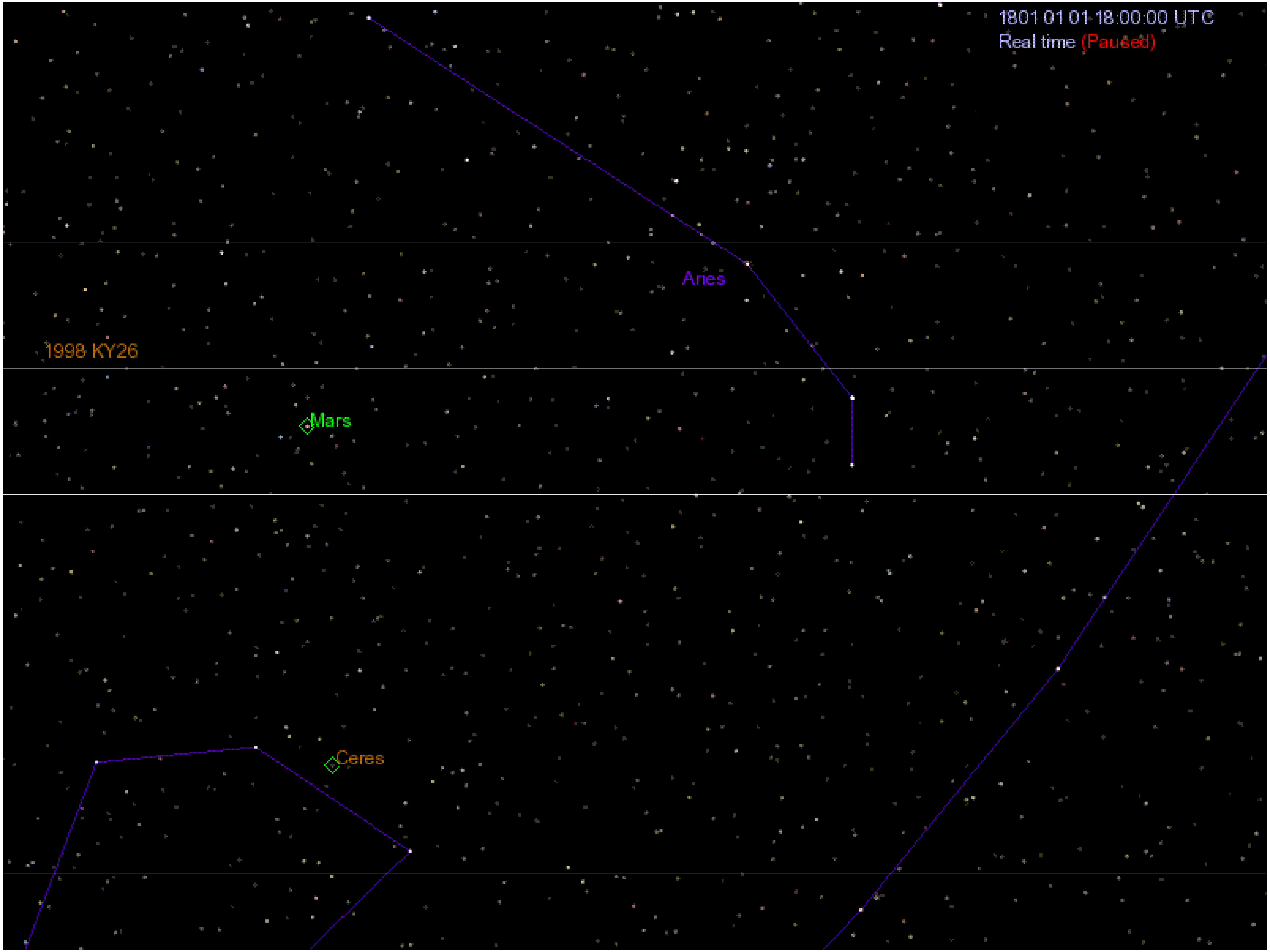
Passaggi e Distanze dal Vertice delle Stelle e de' Pianeti

osservati nel Meridiano col Cerchio

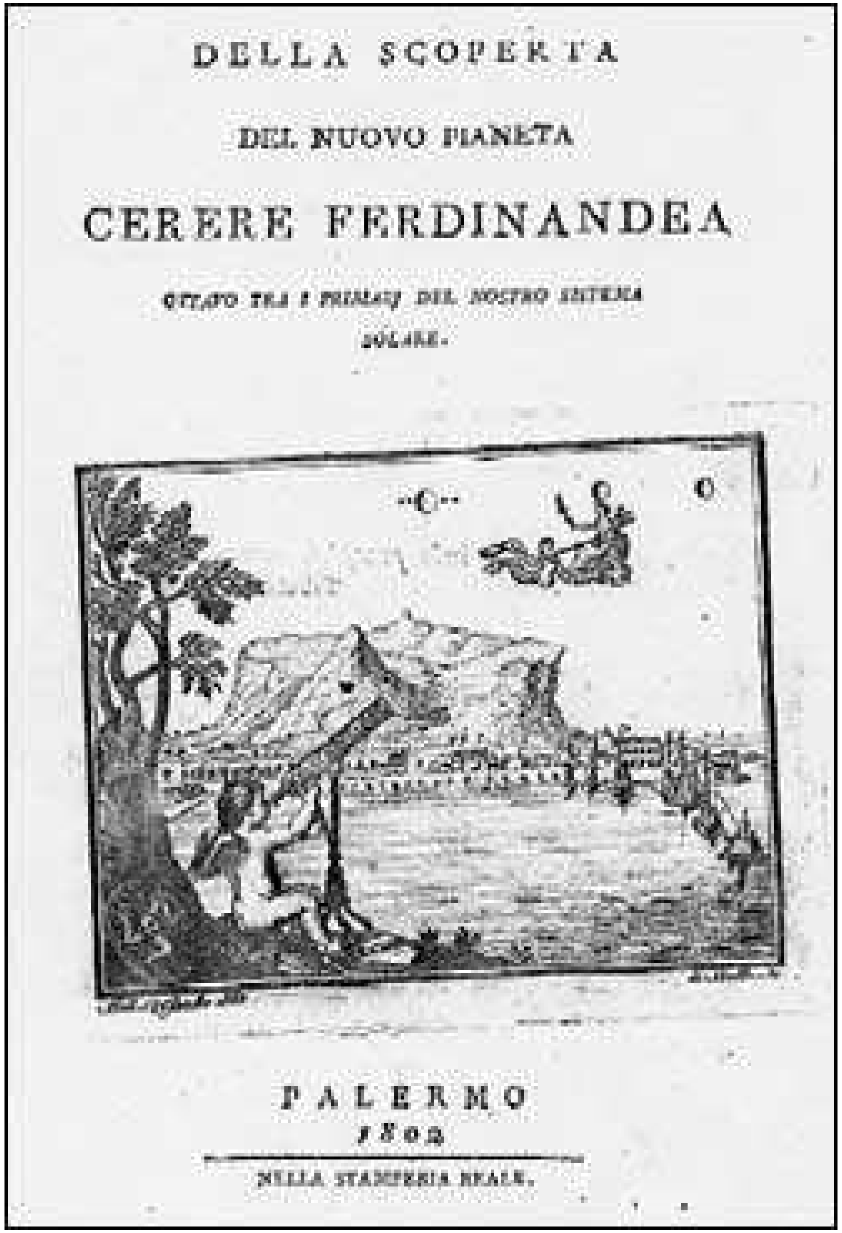
CORSI

Anno MDCCCI

Pohyb Ceres po obloze



Objev planety – planetky Ceres Ferdinandea v publikaci Piazziho



DELLA SCOPERTA

DEL NUOVO PIANETA

CERERE FERDINANDEA

OTTAVO TRA I PRIMARJ DEL NOSTRO SISTEMA SOLARE.

PALERMO

1802

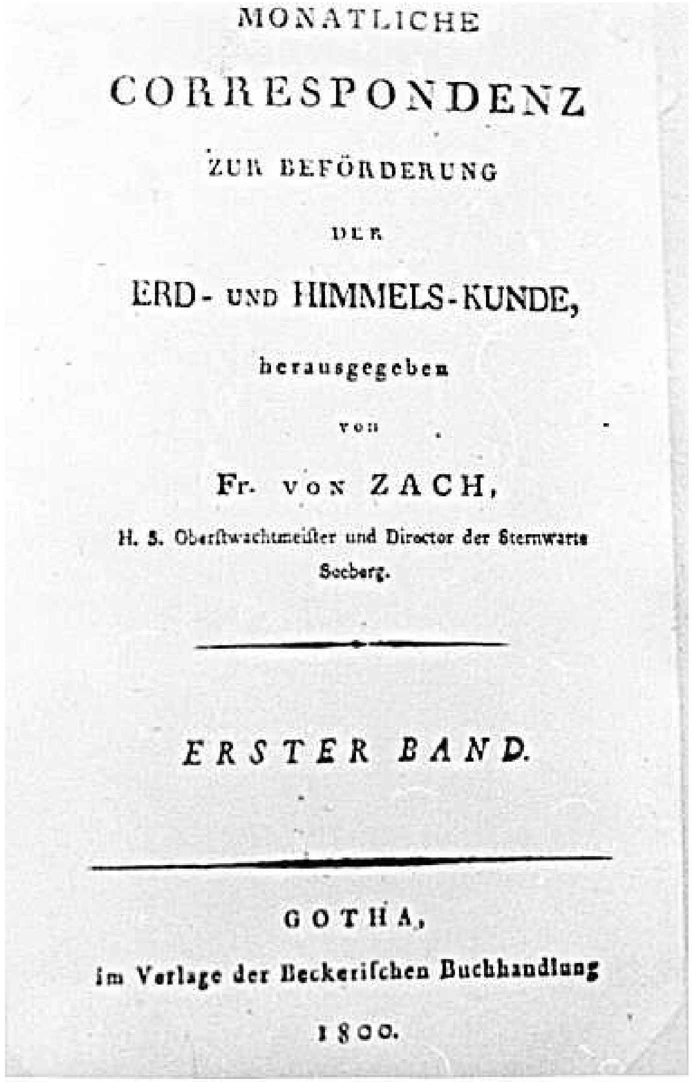
NELLA STAMPERIA REALE.

Franz Xaver von Zach (1754 - 1832)

ředitel observatoře v Gotha*

editor ***Monatliche Correspondenz***

informován o „kometě“ v dubnu



MONATLICHE

CORRESPONDENZ

ZUR BEFÖRDERUNG

DER

ERD- UND HIMMELS-KUNDE,

herausgegeben

von

Fr. VON ZACH,

H. S. Oberstwachtmeister und Director der Sternwarte

Seeberg.

ERSTER BAND.

GOTHA,

im Verlage der Beckerischen Buchhandlung

1800.

Monatliche Correspondenz - 1801

Piazzi - leden 1801 - dopisy → Bodemu, Orianu, Lalandovi
Bode v dubnu → von Zachovi
von Zach - červen rozsáhlá zpráva o objevu v *Mon.Cor.*
Burckhardt v červenci výpočet dráhy v *Mon.Cor.* →
von Zach v září soubor Piazziho pozorování v *Mon.Cor.*
von Zach v říjnu popsal neúspěch při hledání Ceres v *Mon.Cor.*
Gauss v listopadu provádí výpočty
von Zach v prosinci v *Mon.Cor.* předpověd dráhy Ceres
7/8. prosince 1801 von Zach znovunalezl Ceres, přesněji vymezil 4 podezřelé objekty, následné potvrzení 1. ledna 1802, kdy pozoruje již i Olbers

Johann Karl Burckhardt 1773 - 1825

německo – francouzský astronom

léto 1801- neúspěšný výpočet dráhy a polohy Laplaceovou metodou:
oběžná doba 4 roky + 1 ½ měsíce
excentricita 0,0825047
planetka nenalezena, chyba 6°
příčinnou nepřesnosti výpočtů

Moniteur, 24.1.1802: *Sur la nouvelle planete*

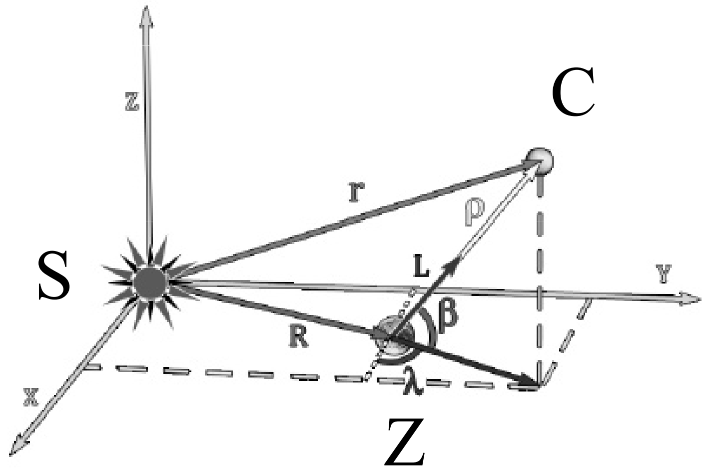
Laplaceova metoda dále rozvíjena:
→ Leuschner, Poincare, Moulton,

Laplaceova klasická metoda

geocentrické délky a šířky

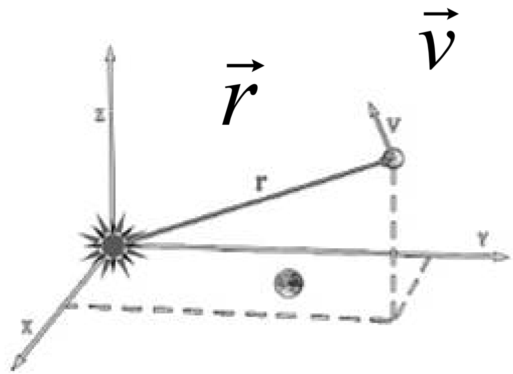
$(\lambda_1, \beta_1), (\lambda_2, \beta_2), (\lambda_3, \beta_3)$

v časech t_1, t_2, t_3



velikost a směr vektoru $\vec{R}$ – známy

směr vektoru $\vec{\rho}$ znám



velikost a směr vektoru $\vec{r}$ neznámy

jednotkový vektor $\vec{L}$ podél vektoru $\vec{\rho}$

Cíl: **výpočet polohového vektoru $\vec{r}$ a vektoru rychlosti $\vec{v}$ v pozorovacím čase t_2**

Monatliche Correspondenz - září 1801
Piazziho pozorování 1.1 – 11.2.1801

Beobachtungen des zu Palermo d. 1 Jan. 1801 von Prof. *Piazzi* neu entdeckten Gestirns.

1801	Mittlere Sonnen-Zeit	Gerade Aufsteig. in Zeit	Gerade Aufsteigung in Graden	Nördl. Abweich.	Geocentrische Länge	Geocentr. Breite	Ort der Sonne + 20" Aberration	Logar. d. Distanz ☉ ♁
	St ′ ″	St ′ ″	° ′ ″	° ′ ″	Z ° ′ ″	° ′ ″	Z ° ′ ″	
Jan. 1	8 43 17,8	3 27 11,25	51 47 48,8	15 37 43,5	1 23 22 58,3	3 6 42,1	9 11 1 30,9	9,9926156
2	8 39 4,6	3 26 53,85	51 43 27,8	15 41 5,5	1 23 19 44,3	3 2 24,9	9 12 2 28,6	9,9926317
3	8 34 53,3	3 26 38,4::	51 39 36,0	15 44 31,6	1 23 16 58,6	2 58 9,9	9 13 3 26,6	9,9926324
4	8 30 42,1	3 26 23,15	51 35 47,3	15 47 57,6	1 23 14 15,5	2 53 55,6	9 14 4 24,9	9,9926418
10	8 6 15,8	3 25 32,1::	51 23 1,5	16 10 32,0	1 23 7 59,1	2 29 0,6	9 20 10 17,5	9,9927641
11	8 2 17,5	3 25 29,73	51 22 26,0	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
13	7 54 26,2	3 25 30,30	51 22 34,5	16 22 49,5	1 23 10 37,6	2 16 59,7	9 23 12 13,8	9,9928490
14	7 50 31,7	3 25 31,72	51 22 55,8	16 27 5,7	1 23 12 1,2	2 12 56,7	9 24 14 13,5	9,9928809
17	. . . . .	. . . .	. . . . . .	16 40 13,0	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
18	7 35 11,3	3 25 55, ::	51 28 45,0	. . . .	. . . .	. . . . .	. . . .	. . . . .
19	7 31 28,5	3 26 8,15	51 32 2,3	16 49 16,1	1 23 25 59,2	1 53 38,2	9 29 19 53,8	9,9930607
21	7 24 2,7	3 26 34,27	51 38 34,1	16 58 35,9	1 23 34 21,3	1 46 6,0	10 1 20 40,3	9,9931434
22	7 20 21,7	3 26 49,42	51 42 21,3	17 3 18,5	1 23 39 1,8	1 42 28,1	10 2 21 32,0	9,9931886
23	7 16 43,5	3 27 6,90	51 46 43,5	17 8 5,5	1 23 44 15,7	1 38 52,1	10 3 22 22,7	9,9932348
28	6 58 51,3	3 28 54,55	52 13 38,3	17 32 54,1	1 24 15 15,7	1 21 6,9	10 8 26 20,1	9,9935062
30	6 51 52,9	3 29 48,14	52 27 2,1	17 43 11,0	1 24 30 9,0	1 14 16,0	10 10 27 46,2	9,9936332
31	6 48 25,4	3 30 17,25	52 34 18,8	17 48 21,5	1 24 38 7,3	1 10 54,6	10 11 28 28,5	9,9937007
Febr. 1	6 44 59,9	3 30 47,2::	52 41 48,0	17 53 36,5	1 24 46 19,3	1 7 30,9	10 12 29 9,6	9,9937703
2	6 41 35,8	3 31 19,06	52 49 45,9	17 58 57,5	1 24 54 57,9	1 4 10,5	10 13 29 49,9	9,9938423
5	6 31 31,5	3 33 2,70	53 15 40,5	18 15 1,0	1 25 22 43,4	0 54 28,9	10 16 31 45,5	9,9940751
8	6 21 39,2	3 34 58,50	53 44 37,5	18 31 23,2	1 25 53 29,5	0 45 5,0	10 19 33 33,3	9,9943276
11	6 11 58,2	3 37 6,54	54 16 38,1	18 47 58,8	1 26 26 40,0	0 36 2,9	10 22 35 11,4	9,9945823

Bis

I. dráha:

střední sluneční čas p.m.		rektascenze	deklinace
8 hod 39 min 4,6 s	2. ledna	51° 47´ 49“	15 ° 41´ 5“
7 hod 20 min 21,7 s	22. ledna	51° 42´ 21“	17 ° 3´ 18“
6 hod 11 min 58,2 s	11. února	54° 10´ 23“	18 ° 47´ 59“

Polohy Ceres zjištěné Piazzim

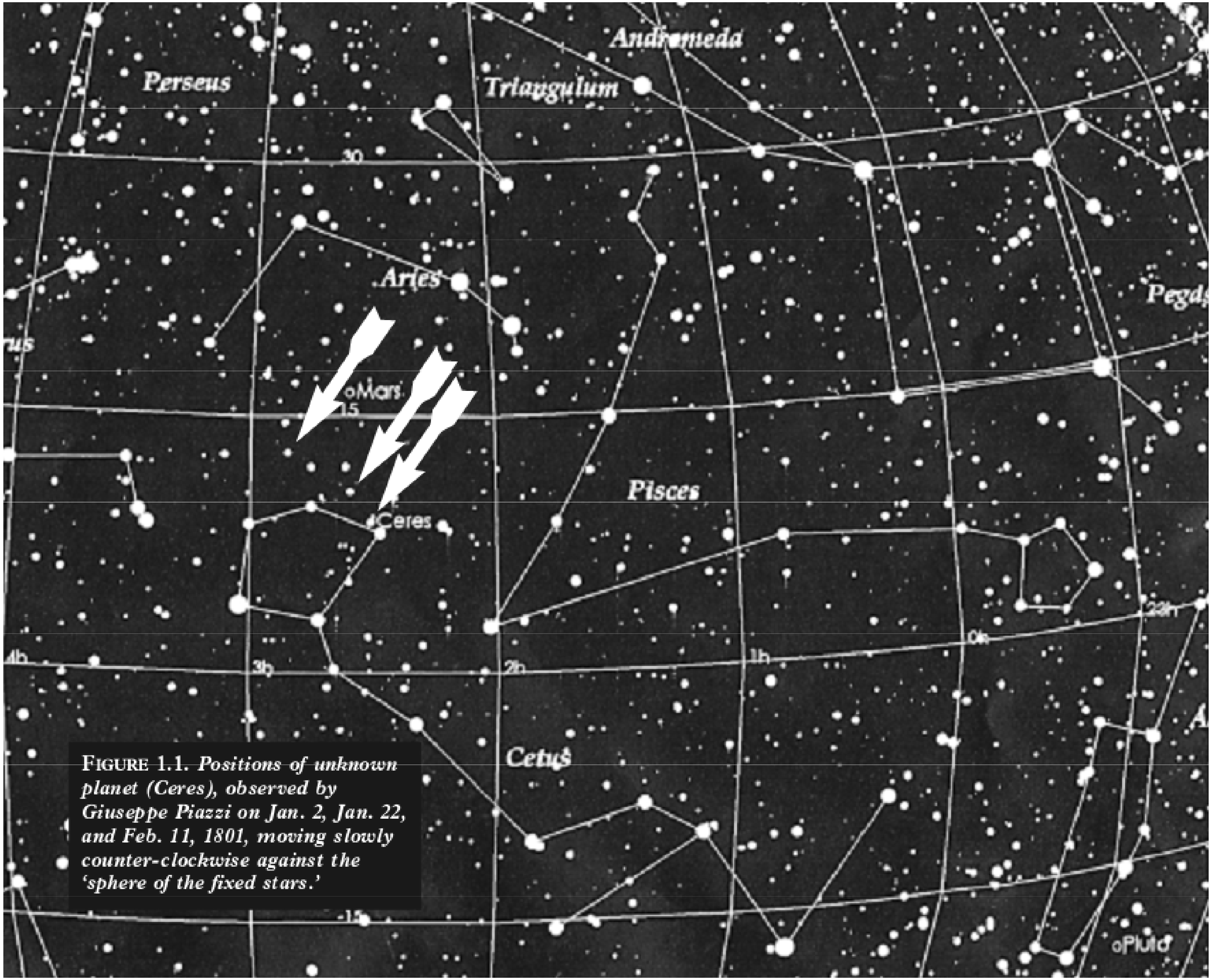


FIGURE 1.1. *Positions of unknown planet (Ceres), observed by Giuseppe Piazzi on Jan. 2, Jan. 22, and Feb. 11, 1801, moving slowly counter-clockwise against the 'sphere of the fixed stars.'*

Gaussovy ekliptikální souřadnice

C – O výpočet

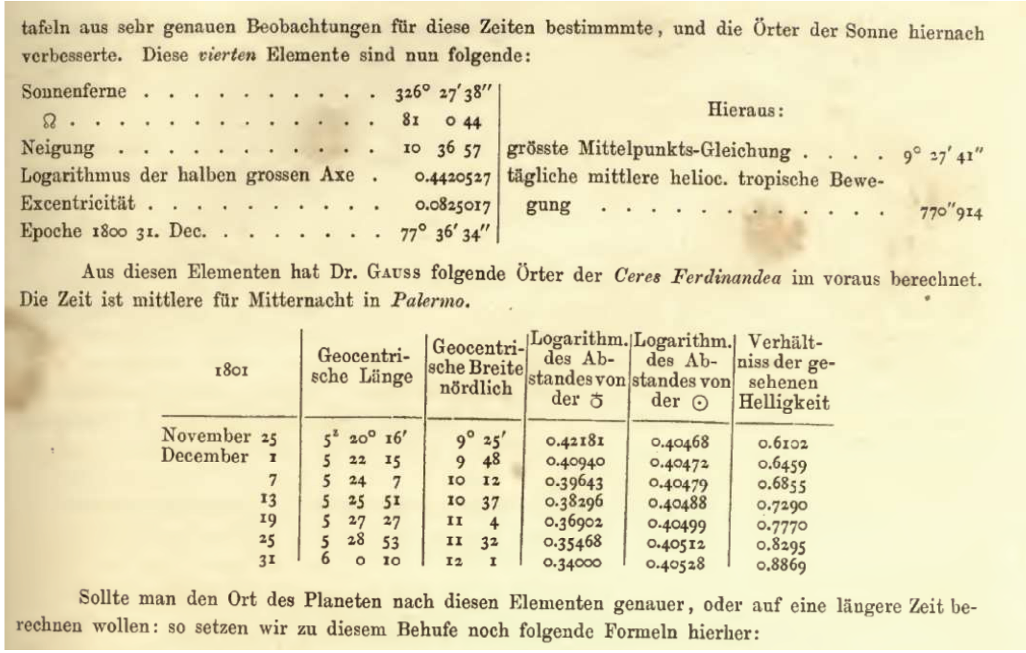
1801	Berechuete Länge	Berechuete Breite	Fehler der Länge	Fehler der Breite
	° ′ ″	° ′ ″	″	″
Jan. 1	53 23 2,34	3 6 43,63	+ 4,04	+1,53
2	53 19 41,24	3 2 25,68	− 3,06	+0,78
* 3	53 16 48,05	2 58 8,97	−10,35	−0,93
4	53 14 18,47	2 53 53,79	+ 2,97	−1,81
10	53 7 58,37	2 28 57,12	− 0,73	−3,48
*13	53 10 21,60	2 16 52,89	−16,00	−6,81
14	53 11 57,70	2 12 55,36	− 3,50	−1,34
19	53 26 0,59	1 53 38,01	+ 1,39	−0,19
21	53 34 21,99	1 46 9,53	+ 0,69	+3,53
22	53 39 6,69	1 42 28,45	+ 4,89	+0,35
23	53 44 14,08	1 38 49,44	− 1,62	−,266
28	54 15 17,11	1 21 5,91	+ 1,41	−0,99
30	54 30 9,76	1 14 15,12	+ 0,76	−0,88
31	54 38 6,44	1 10 52,81	− 0,86	−1,79
Febr. 1	54 46 23,22	1 7 32,74	+ 3,92	+1,64
2	54 54 59,71	1 4 14,30	+ 1,81	+3,80
5	55 22 44,30	0 54 31,72	+ 0,90	+2,82
8	55 53 17,01	0 45 6,65	−12,49	+1,63
11	56 26 34,10	0 35 58,96	− 5,90	−3,94

Piazziho pozorování obsahovalo chyby *, Gauss se snažil je vyloučit → restrinkce

III. dráha: #
1. ledna,
21. ledna,
11. února.

FIG. 1—The ecliptic longitudes and latitudes of Ceres, calculated by Gauss, using his third orbit; and also the residuals, in the sense calculated minus observed. The last column for Jan. 23 should read −2.66 (From *Monatl. Corresp.*, **4**, 644, 1801.) #

Výpočet pozorovacích hodnot Ceres



tafeln aus sehr genauen Beobachtungen für diese Zeiten bestimmmte, und die Örter der Sonne hiernach verbesserte. Diese *vierten* Elemente sind nun folgende:

Sonnenferne	326° 27′ 38″	Hieraus:	
☊	81 0 44		
Neigung	10 36 57	grösste Mittelpunkts-Gleichung	9° 27′ 41″
Logarithmus der halben grossen Axe .	0.4420527	tägliche mittlere helioc. tropische Bewegung	770″914
Excentricität	0.0825017		
Epoche 1800 31. Dec.	77° 36′ 34″		

Aus diesen Elementen hat Dr. Gauss folgende Örter der *Ceres Ferdinandea* im voraus berechnet. Die Zeit ist mittlere für Mitternacht in *Palermo*.

1801	Geocentrische Länge	Geocentrische Breite nördlich	Logarithm. des Abstandes von der ♁	Logarithm. des Abstandes von der ☉	Verhältniss der gesehenen Helligkeit
November 25	5ˢ 20° 16′	9° 25′	0.42181	0.40468	0.6102
December 1	5 22 15	9 48	0.40940	0.40472	0.6459
7	5 24 7	10 12	0.39643	0.40479	0.6855
13	5 25 51	10 37	0.38296	0.40488	0.7290
19	5 27 27	11 4	0.36902	0.40499	0.7770
25	5 28 53	11 32	0.35468	0.40512	0.8295
31	6 0 10	12 1	0.34000	0.40528	0.8869

Sollte man den Ort des Planeten nach diesen Elementen genauer, oder auf eine längere Zeit berechnen wollen: so setzen wir zu diesem Behufe noch folgende Formeln hierher:

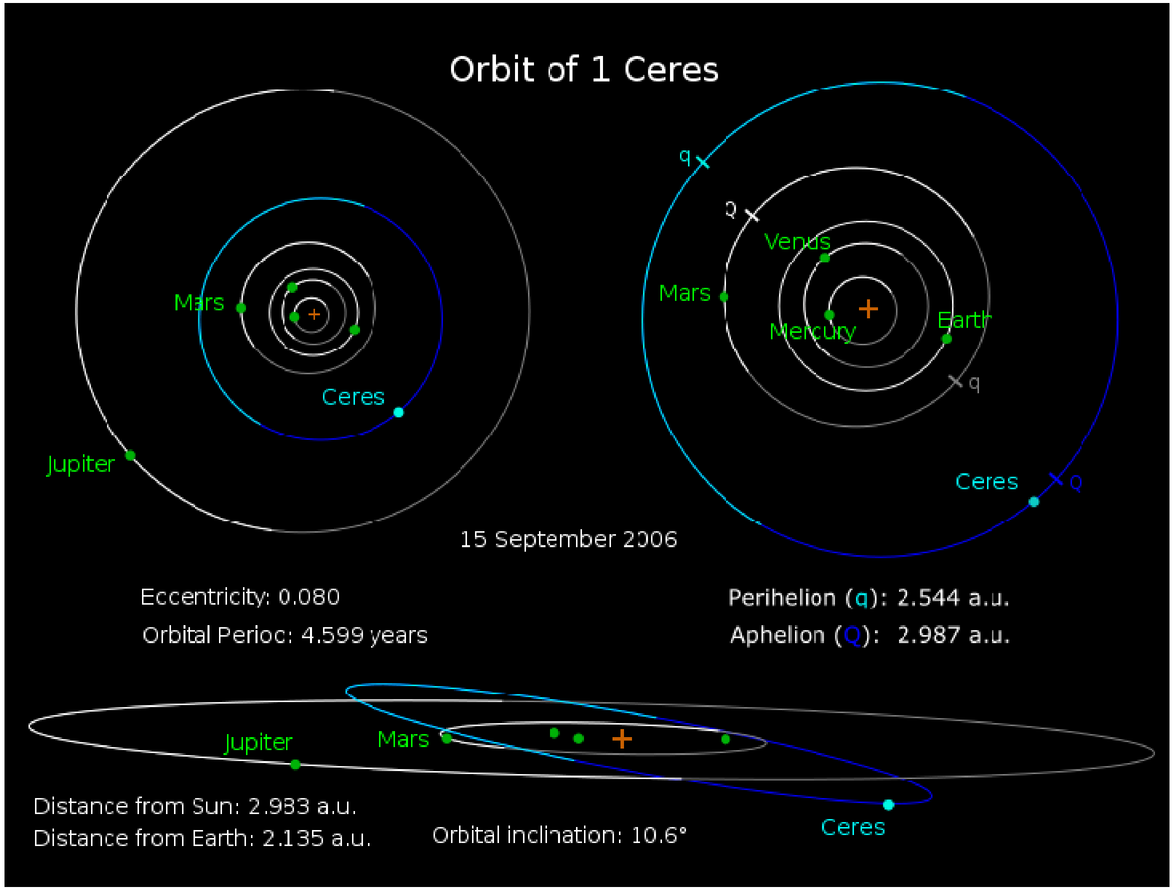
základní myšlenky výpočtu - září, říjen 1801, první aplikace metody listopad 1801,
→ **dráhové elementy, propočet vícekrát opakován**

Gauss stanovil souřadnice pro 25.11. – 31.12.1801 v intervalu po šesti dnech

7/8. prosince 1801 von Zach vymezil 4 podezřelé objekty, jeden z nich Ceres

Dráhové elementy Ceres

listopad 1801		současné hodnoty:	
sklon dráhy *i*	10 ° 36´ 57“	sklon dráhy *i*	10 ° 35´ 10“
excentricita *e*	0,0825	excentricita *e*	0,0800
hlavní poloosa *a*	2,7673 *AU*	hlavní poloosa *a*	2,7660 *AU*
		oběžná doba *T*	1 680,3 dne



Carl Friedrich Gauss 1777 - 1855

Jak vypočítat dráhové elementy eliptické dráhy?

Jak určit efemeridy?

Kolik pozorování ze Země je nezbytných?

Obtíže: rotace Země, oběh kolem Slunce, pozorovací chyby, těsnější pozorovací řada

C. F. Gauss r. 1801
± 24 letý + svobodný!
- Pojednání o aritmetice

Podstata Gaussovy metody

tři polohy planetky ve třech časech, dráhová rovina planetky prochází středem Slunce

aplikovaná matematika – kombinace geometrických a dynamických podmínek

celkové řešení, geometrie situace, prostorový pohyb Země, planetky, více než 80 proměnných ve třech různých souřadných soustavách, jejich transformace, abstraktní matematické myšlení, mnoho algebraických a aritmetických výpočtů,
Gauss nevzal do ruky tužku, pokud nebyl problém vyřešen…

numerické výpočty, k určení dráhy v prostoru je zapotřebí šesti dráhových parametrů, nezbytná tři pozorování – rektascenze, deklinace → šest konstant, časový interval mezi nimi → II. Keplerův zákon

zanedbání gravitačního působení ostatních těles vzhledem k malému časovému intervalu pozorování

Ceres pozorujeme z pohybující se Země, jejíž polohu známe, obě **tělesa** obíhají **v různých dráhových rovinách**

Jak Gauss propočítal dráhu Ceres?

Gauss metodu předběžného určení dráhy Ceres popsal v dopise ze 6. srpna **1802** H. W. Olbersovi (1758 – 1840)
…výměna mnoha dopisů, občas Gauss neplatil poštovné…

vydáno se souhlasem Gausse až r. 1809
Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd – und Himmels-Kunde, C. F. Gauss + Franz Xaver Zach + Lindenau, September 1809, původně Gauss nepředpokládal publikování →
von Lindenau „***s mnoha omluvami za četné nedostatky***“

Summarische Übersicht der Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden …(Ceres, Pallas)

Souhrnný přehled metody užité k určení drah dvou nových planet

C. F. Gauss: Summarische Übersicht der zur Bestimmung der Bahnen - září 1809

SUMMARISCHE ÜBERSICHT DER ZUR BESTIMMUNG DER BAHNEN
DER BEIDEN NEUEN HAUPTPLANETEN ANGEWANDTEN METHODEN*).

Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde,
herausgegeben vom Freiherrn von Zach. September 1809.

1.

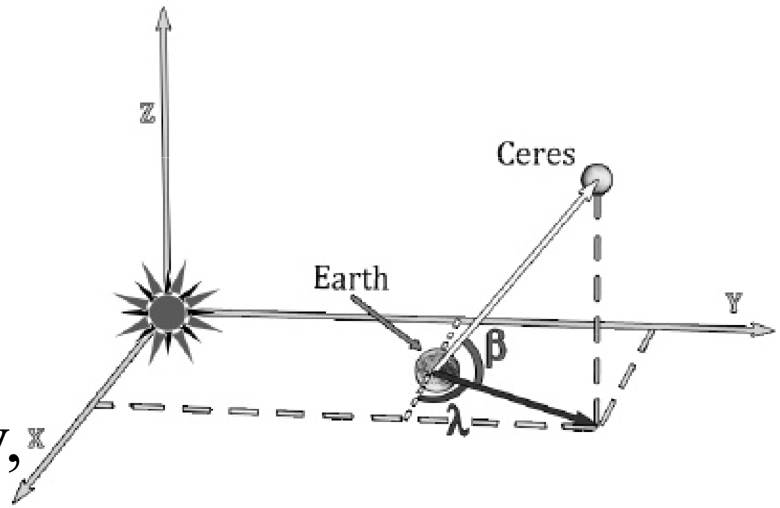
Die von Kreis- und Parabel-Hypothesen unabhängige Bestimmung der Bahn eines Himmelskörpers aus einer kurzen Reihe von Beobachtungen beruht auf zwei Forderungen: I. Muss man Mittel haben, die Bahn zu finden, die drei gegebenen vollständigen Beobachtungen Genüge thut. II. Muss man die so gefundene Bahn so verbessern können, dass die Differenzen der Rechnung von dem ganzen Vorrath der Beobachtungen so gering als möglich werden.

---

*) Als ich vor einiger Zeit die persönliche Bekanntschaft des Hrn Prof. Gauss zu machen das Glück hatte, sah ich unter dessen Papieren den hier folgenden schon vor mehreren Jahren entworfenen und noch nirgends bekannt gemachten Aufsatz, der die frühere Methode des Verfassers zu Bestimmung der Planetenbahnen enthält. Da ich mich bei der flüchtigen Durchsicht dieser summarischen Übersicht bald überzeugte, dass die hier von dem Verfasser entwickelte Methode zu erster genäherter Bestimmung zweier Distanzen des Planeten von der Erde wesentlich von der verschieden sei, die der Verfasser nun in seinem grössern Werk öffentlich dargelegt hat, so bat ich ihn um die Erlaubniss, diesen Aufsatz bekannt machen zu dürfen, in der Voraussetzung, dass es allen Kennern interessant sein muss, die verschiedenen Wege zu kennen, auf denen es dem Verfasser gelungen ist, zu der vollendeten Auflösung zu gelangen, von der wir unsern Lesern im vorigen Hefte eine Übersicht mitgetheilt haben. Ich hatte anfangs die Absicht, den Aufsatz mit einigen Bemerkungen zum Behuf einer Vergleichung der frühern und spätern Methode des Verfassers zu begleiten; allein da diese, hätten sie wirklich erläuternd sein sollen, etwas weitläufig und ohne Hinweisung auf das Werk selbst doch immer undeutlich geblieben wären, so schien es mir zweckmässiger, den ganzen Aufsatz (der denn doch mehr für Kenner bestimmt ist, die das Werk selbst dabei zur Hand haben), so wie er vor sechs Jahren vom Verfasser niedergeschrieben wurde, ohne allen fernern Beisatz, den astronomischen Lesern dieser Zeitschrift mitzutheilen. von Lindenau.

Gaussova metoda - Summarische Übersicht*

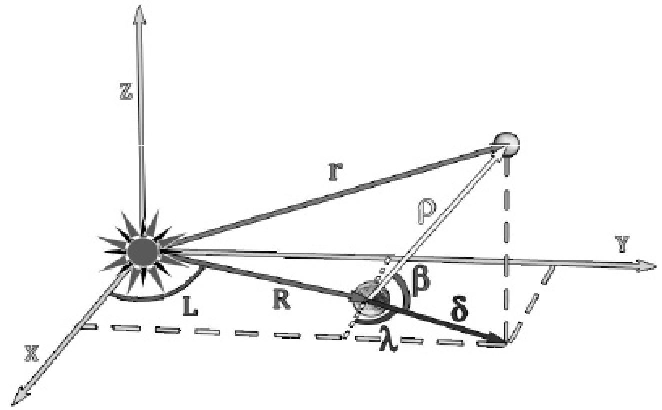
vstupní údaje Gaussovy metody



tři dvojice souřadnic,
geocentrických délek a šířek

$(\lambda_1, \beta_1), (\lambda_2, \beta_2), (\lambda_3, \beta_3) \quad t_1, t_2, t_3$

$\vec{\delta}$ vektor projekce $\vec{\rho}$ na rovinu ekliptiky,
směr dán úhlem λ, velikost neznáma
neznáme vzdálenost Země – Ceres ,
heliocentrická délka Země, úhel L je
měřený od kladné osy X k poloze Země.



Gaussův cíl: **nalezení polohových vektorů $\vec{r}_1$,$\vec{r}_3$ v časech pozorování t_1, t_3**

* Teets D. A., Whitehead, K.: The Discovery of Ceres: How Gauss Became Famous. Mathematics Magazine, vol. 72, (1999), No. 2, p. 83 – 93.
* Teets D. A., Dodd M.: Gauss's and Laplace's Orbit Determination Methods and the Hunt for Least Squares. Rapid City, 2010.

Gaussova metoda

Gauss zavedl veličiny $\pi = \langle \cos\lambda, \sin\lambda, tg\beta \rangle$

$$P = \langle \cos L, \sin L, 0 \rangle$$

dále
$$\delta_1 = \frac{t_3 - t_1}{t_3 - t_2} \frac{\pi_2 x \pi_3}{\pi_1 x \pi_3} \frac{P_2}{P_2} \delta_2 \qquad \delta_3 = \frac{t_3 - t_1}{t_2 - t_1} \frac{\pi_1 x \pi_2}{\pi_1 x \pi_3} \frac{P_2}{P_2} \delta_2$$

což jsou aproximace pro velikosti vektorů $\vec{\delta}_1 \quad \vec{\delta}_3$

Gauss později komentoval možné zlepšení aproximace δ_1, δ_3 , což je však výpočetně velmi obtížné.

Typografické chyby

Dear Dr. Stefl,

You are correct: the denominators should be $(\pi_1 \text{ x } \pi_3)\bullet P_2$.

Your e-mail amazes me! I was very surprised to see that the paper was even available on the internet.

You must be reading the paper very carefully to have found that typographical error. I read it several times, and **it escaped my attention**.

You might be interested in two other sources of information on this subject. The first is an article titled, "The Discovery of Ceres: How Gauss Became Famous," in *Mathematics Magazine*, v.71 n.2, April 1999. This is a paper that I wrote on the subject several years ago. In that article, you will find the formulas that you refer to, but in slightly different notation. Second, you can go straight to the original source. Gauss's paper, Summarische Ubersicht der zur Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden is easily available on the internet. You will find it in the Gauss *Werke*, v. 6 pp. 146-165. It is, of course, in German. My paper in *Mathematics Magazine* is a simplified look at Gauss's original work.

Thanks for your note. It is always nice to see that other people are interested in the same things I am!

By the way, may I ask where you are located?

Don Teets

Gaussova metoda

Gauss obdržel:

$$\left[1-\left(\frac{R_2}{r_2}\right)^3\right]\frac{R_2}{\delta_2}=\frac{-2}{(M_2-M_1)(M_3-M_2)}\frac{tg\beta_2\sin(\lambda_3-\lambda_1)-tg\beta_2\sin(\lambda_2-\lambda_1)}{tg\beta_1\sin(L_2-\lambda_3)-tg\beta_3\sin(L_2-\lambda_1)}$$

$$\frac{R_2}{r_2}=\frac{R_2}{\delta_2}\left[1+tg^2\beta_2+\left(\frac{R_2}{\delta_2}\right)^2+2\frac{R_2}{\delta_2}\cos(\lambda_2-L_2)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

M_1, M_2, M_3 v rovnici označují střední anomálii Země v okamžiku tří zvolených pozorování, R_2, r_2 a δ_2 jsou velikosti vektorů $\vec{R}$ $\vec{r}$ $\vec{\delta}$

pro střední čas pozorování t_2 .

všechny veličiny v obou rovnicích, vyjma r_2, δ_2 jsou známy.

Gaussova metoda

Pro zjednodušení: N – pravá strana první rovnice, vše známe,

Dále zavedeme $a = 1 + tg^2(\beta_2)$ $b = 2\cos(\lambda_2 - L_2)$

$$x = \frac{R_2}{\delta_2} \qquad y = \frac{R_2}{r_2}$$

a, b známé veličiny, *x, y* neznámé .

rovnice transformujeme na $x\left(1 - y^3\right)^2 = N$

$$y = x\left(x^2 + bx + a\right)^{-\frac{1}{2}}$$

úpravou $x^8 - (x - N)^2\left(x^2 + bx + a\right)^3 = 0$

řešíme pro hodnotu $x = \frac{R_2}{\delta_2}$

Gaussova metoda

Odtud obdržíme $\boldsymbol{\delta_2}$, neboť R_2 je známo – vzdálenost SZ
δ_1 , δ_3 jsou dány výše uvedenými rovnicemi.

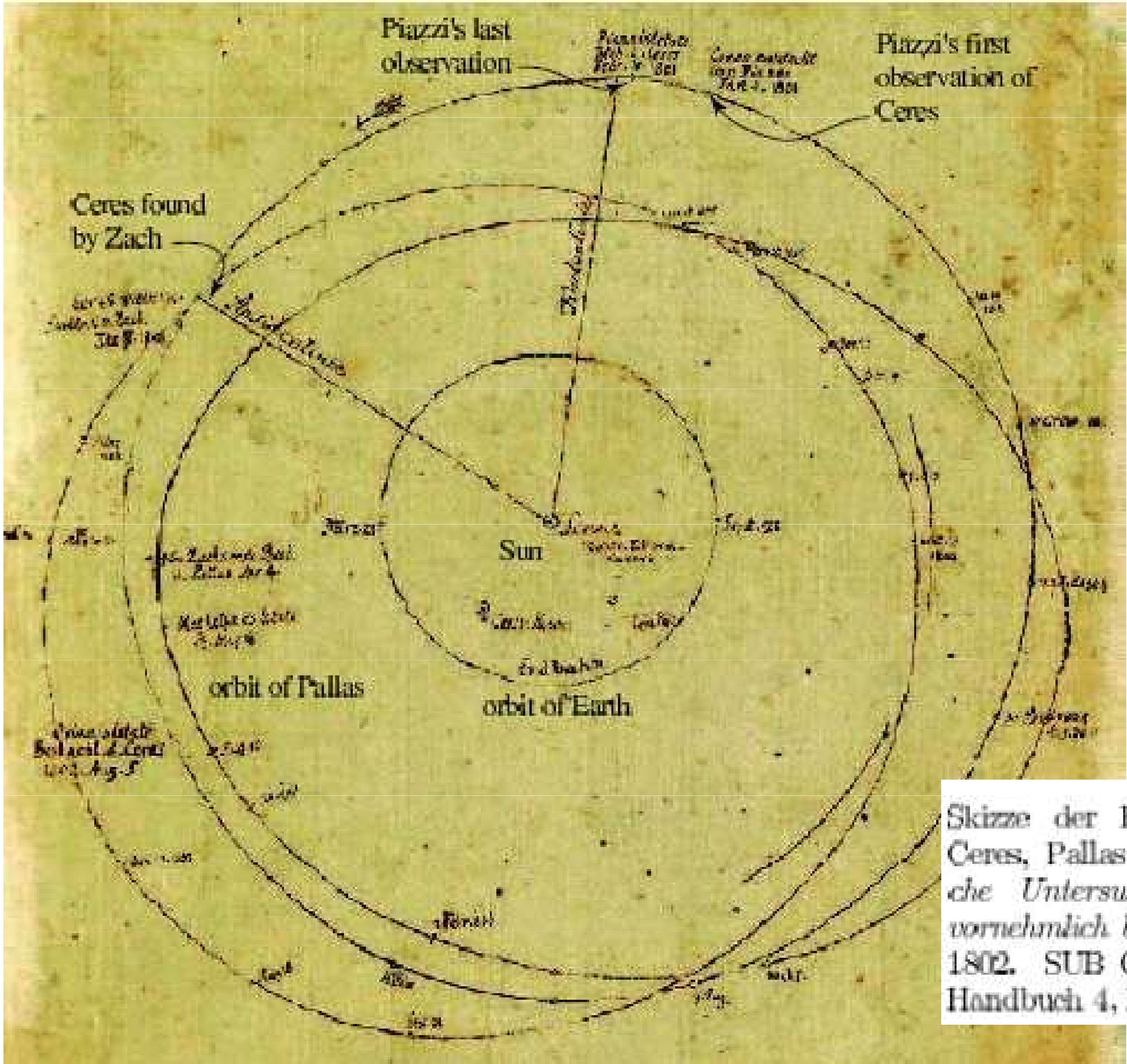
Následně vypočteme vektory $\vec{\rho}_1$, $\vec{\rho}_3$

$\rho_1 = [\ \delta_1 \cos(\lambda_1), \delta_1 \sin(\lambda_1), \delta_1 \operatorname{tg}(\beta_1)]$

$\rho_3 = [\ \delta_3 \cos(\lambda_3), \delta_3 \sin(\lambda_3), \delta_3 \operatorname{tg}(\beta_3)]$

Při platnosti vztahu $\vec{r} + \vec{R} = \vec{\rho}$ můžeme odtud určit $\vec{r}_1$, $\vec{r}_3$ pro jakýkoliv časový okamžik.

Náčrtek drah planetek Ceres, Pallas a Vesta



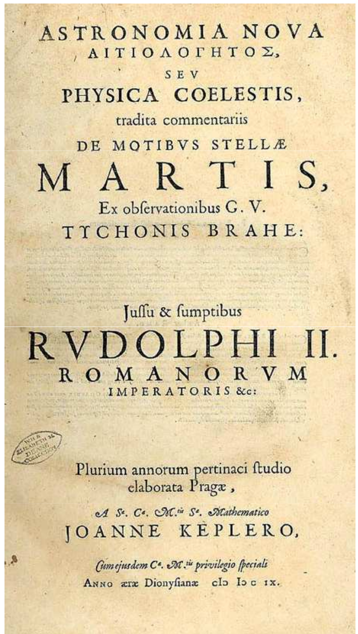
Skizze der Bahnen der Kleinplaneten Ceres, Pallas und Vesta. *"Astronomische Untersuchungen und Rechnungen vornehmlich ber die Ceres Ferdinandea,"* 1802. SUB Göttingen: Cod. Ms. Gauß Handbuch 4, Bl. 1.

C. F. Gauss: Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium 1809

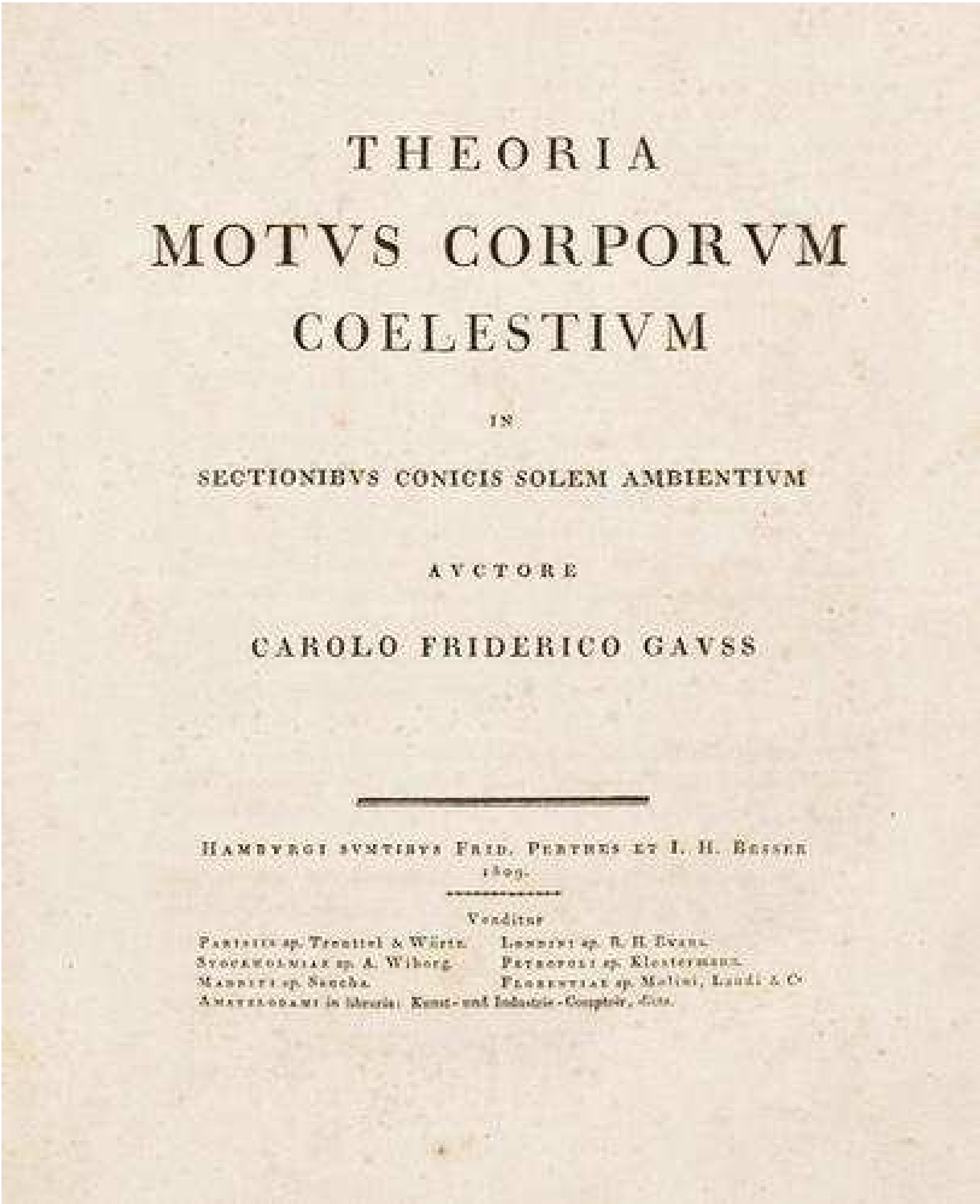
Teorie pohybu nebeských těles pohybujících se kolem Slunce po kuželosečkách

Gauss začal sepisovat r.1805, dokončil v německé verzi r. 1806, následně dílo překládal do latiny, vyšlo až ***r. 1809***

dvě stě roků po **Astronomia nova**, na kterou těsně navazuje


ASTRONOMIA NOVA
ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΤΟΣ,
SEV
PHYSICA COELESTIS,
tradita commentariis
DE MOTIBVS STELLÆ
MARTIS,
Ex obſervationibus G. V.
TYCHONIS BRAHE:
Juſſu & ſumptibus
RVDOLPHI II.
ROMANORVM
IMPERATORIS &c:
Plurium annorum pertinaci ſtudio
elaborata Pragæ,
A S. C. M. S. Mathematico
JOANNE KEPLERO,
Cum ejusdem C. M. privilegio ſpeciali
ANNO æræ Dionyſianæ clɔ Iɔ c ix.

Theoria motus corporum coelestium r. 1809



THEORIA
MOTVS CORPORVM
COELESTIVM
IN
SECTIONIBVS CONICIS SOLEM AMBIENTIVM
AVCTORE
CAROLO FRIDERICO GAVSS

HAMBVRGI SVMTIBVS FRID. PERTHES ET I. H. BESSER
1809.

Venditur
PARISIIS ap. Treuttel & Würtz. LONDINI ap. R. H. Evans.
STOCKHOLMIAE ap. A. Wiborg. PETROPOLI ap. Klostermann.
MADRITI ap. Sancha. FLORENTIAE ap. Molini, Landi & C°
AMSTELODAMI in libraria: Kunst- und Industrie-Comptoir.

První kniha

Obecné vztahy mezi veličinami, kterými jsou pohyby kosmických těles kolem Slunce definovány - *diferenciální rovnice popisující části eliptických drah*

Druhá kniha

Studium drah kosmických těles z geocentrických pozorování - *zpřesňování odhadů drah planet*

Theoria motus corporum coelestium r. 1809

LIBER SECVNDVS

INVESTIGATIO ORBITARVM CORPORVM COELESTIVM EX OBSERVATIONIBVS GEOCENTRICIS.

SECTIO PRIMA

Determinatio orbitae e tribus obseruationibus completis.

115.

Ad determinationem completam motus corporis coelestis in orbita sua requiruntur elementa *septem*, quorum autem numerus vno minor euadit, si corporis massa vel cognita est vel negligitur; haec licentia vix euitari poterit in determinatione orbitae penitus adhuc incognitae, vbi omnes quantitates ordinis perturbationum tantisper seponere oportet, donec massae a quibus pendent aliunde innotuerint. Quamobrem in disquisitione praesente massa corporis neglecta elementorum numerum ad sex reducimus, patetque adeo, ad determinationem orbitae incognitae totidem quantitates ab elementis pendentes ab inuicem vero independentes requiri. Quae quantitates nequeunt esse nisi loca corporis coelestis e terra obseruata, quae singula quum bina data subministrent, puta longitudinem et latitudinem, vel ascensionem rectam et declinationem, simplicissimum vtique erit, *tria loca geocentrica* adoptare, quae generaliter loquendo sex elementis incognitis determinandis sufficient. Hoc problema tamquam grauissimum huius operis spectandum erit, summaque ideo cura in hac sectione pertractabitur.

Verum enim vero in casu speciali, vbi planum orbitae cum ecliptica coincidit, adeoque omnes latitudines tum heliocentricae tum geocentricae natura sua euanescunt, tres latitudines geocentricas euanescentes haud amplius considerare licet tamquam tria data ab inuicem independentia: tunc igitur problema istud indeterminatum maneret, tribusque locis geocentricis per orbitas infinite multas satisfieri posset. In tali itaque casu necessario quatuor longitudines geocentricas datas esse oportet, vt quatuor elementa incognita reliqua (excidentibus inclinatione orbi-

Druhá kniha

První část druhé knihy

čl. 131 - 163,

Gaussova metoda,

odlišná od původní

z roku 1801

Třetí část druhé knihy

čl. 172 - 189

metoda nejmenších

čtverců a rozdělení chyb

Theoria motus corporum coelestium základní předpoklady

1. Pohyb každého kosmického tělesa probíhá ve **stálé rovině**, v níž **leží střed Slunce**.

2. **Dráha** opisovaná kosmickým tělesem je **kuželosečka**, jejíž ohnisko je ve středu Slunce.

3. Pohyb kosmického tělesa po dráze probíhá tak, že plochy sektorů opisované kolem Slunce v různých časových intervalech jsou úměrné těmto intervalům. Jestliže **plochy a časy vyjádříme** pro zvolený sektor **číselně**, vždy je jejich **podíl konstantní**.

4. Pro různá kosmická tělesa obíhající kolem Slunce platí: odpovídající **podíly ploch sektorů a časů** jsou **úměrné odmocninám Gaussových parametrů.**

Výběr z geometrických Gaussových úvah*
Theoria Motus čl. 88 – 105

pozorovaný pohyb planetky Ceres, známe přesnou polohu Země, Palerma, čas pozorování

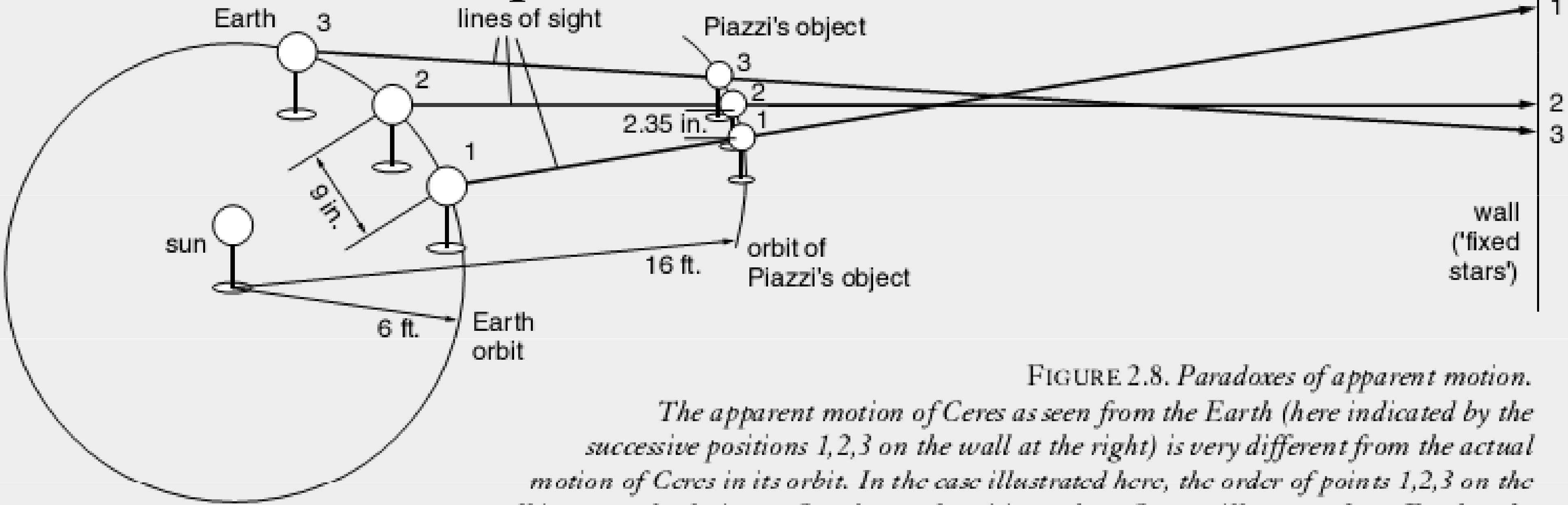
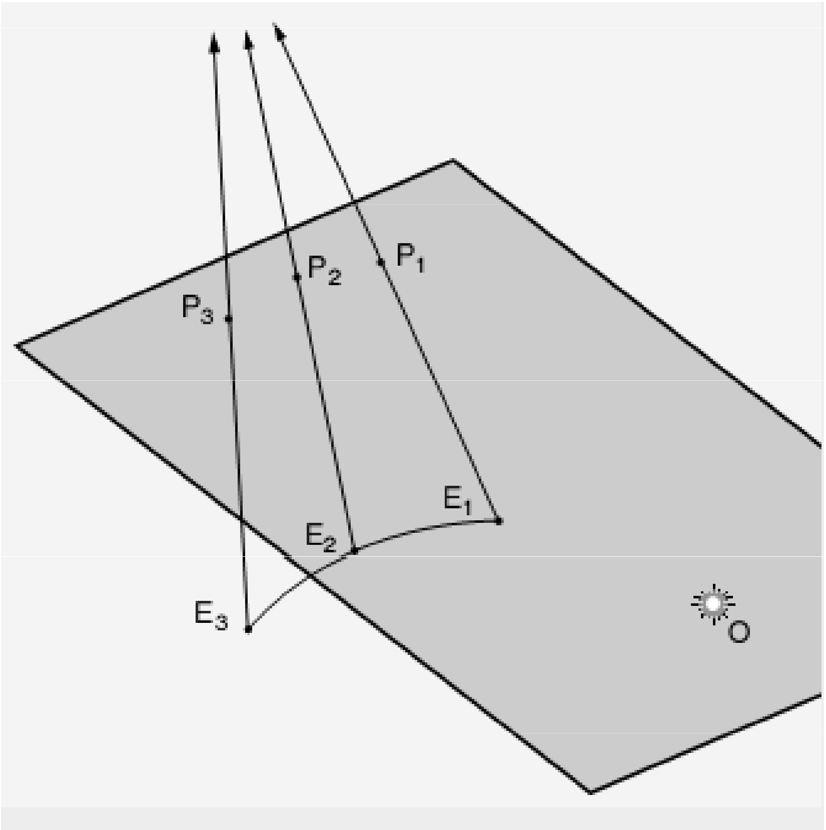
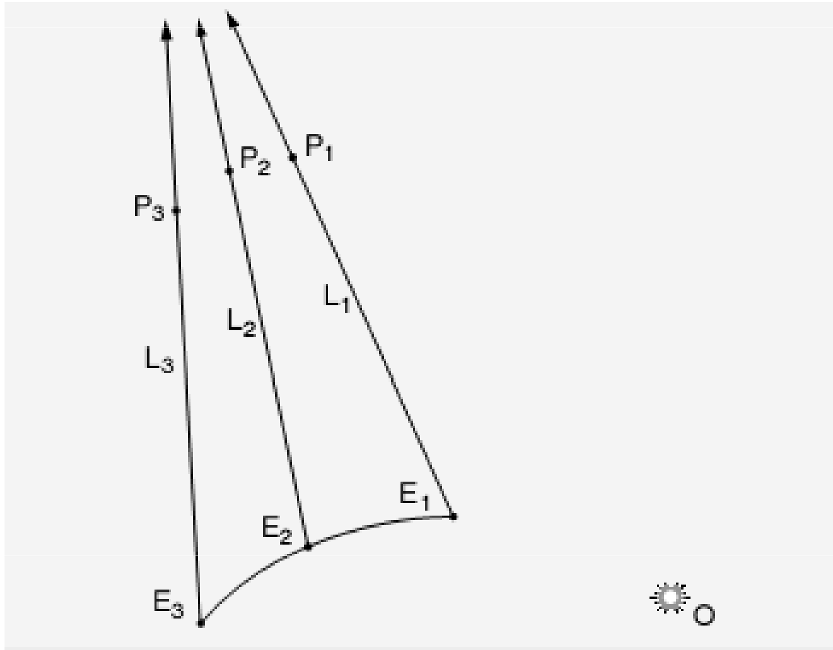


FIGURE 2.8. *Paradoxes of apparent motion. The apparent motion of Ceres as seen from the Earth (here indicated by the successive positions 1,2,3 on the wall at the right) is very different from the actual motion of Ceres in its orbit. In the case illustrated here, the order of points 1,2,3 on the wall is reversed relative to Ceres' actual positions; thus, Ceres will appear from Earth to be moving backwards! The bizarre appearance of retrograde motion and "looping" is due to the differential in motion of Earth and Ceres, combined with their relative configuration in space, Earth's orbital motion being faster than that of Ceres (see Figure 2.9). In reality, the apparent motion is further complicated by the circumstance that the two bodies are orbiting in different planes.*

* Teenenbaum, J., Director, B.: How Gauss Determined The Orbit of Ceres. The American Almanac, December, 1997.

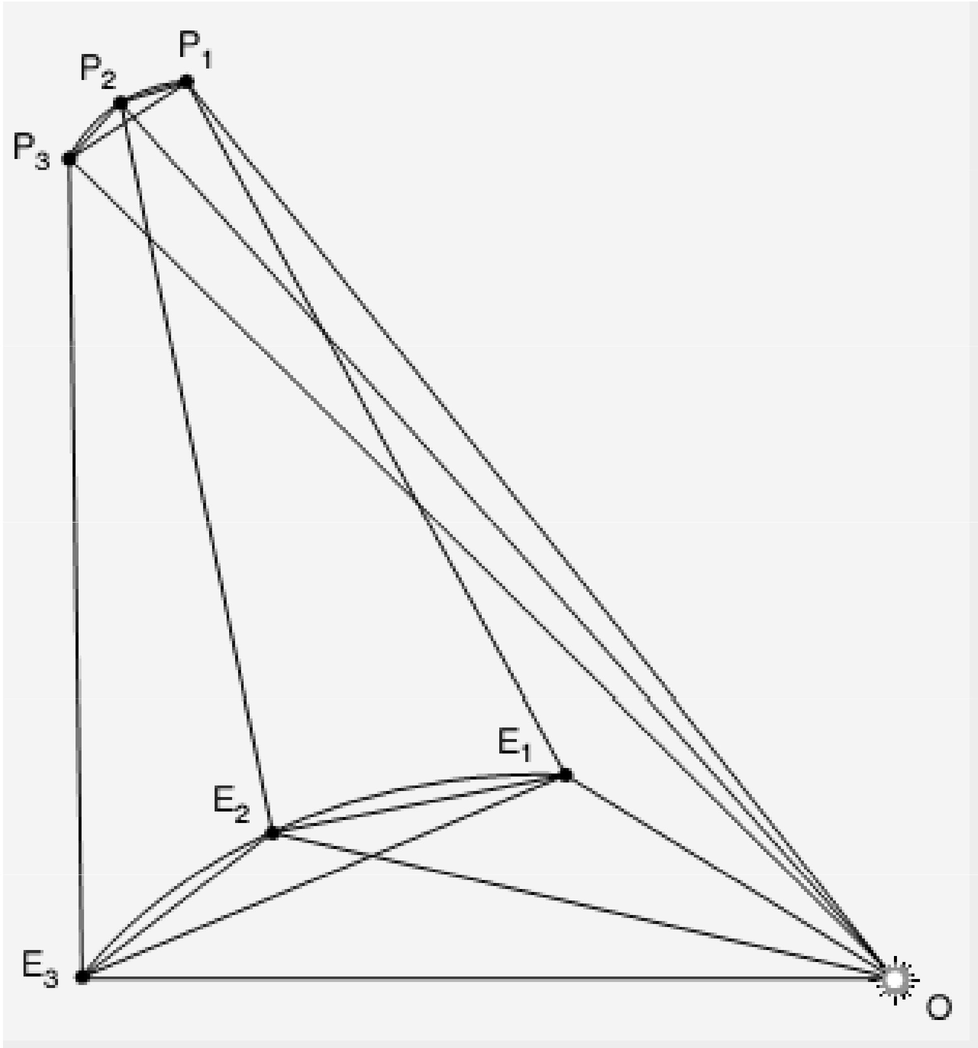
Piazzi určil tři pozorovací směry L_1, L_2, L_3



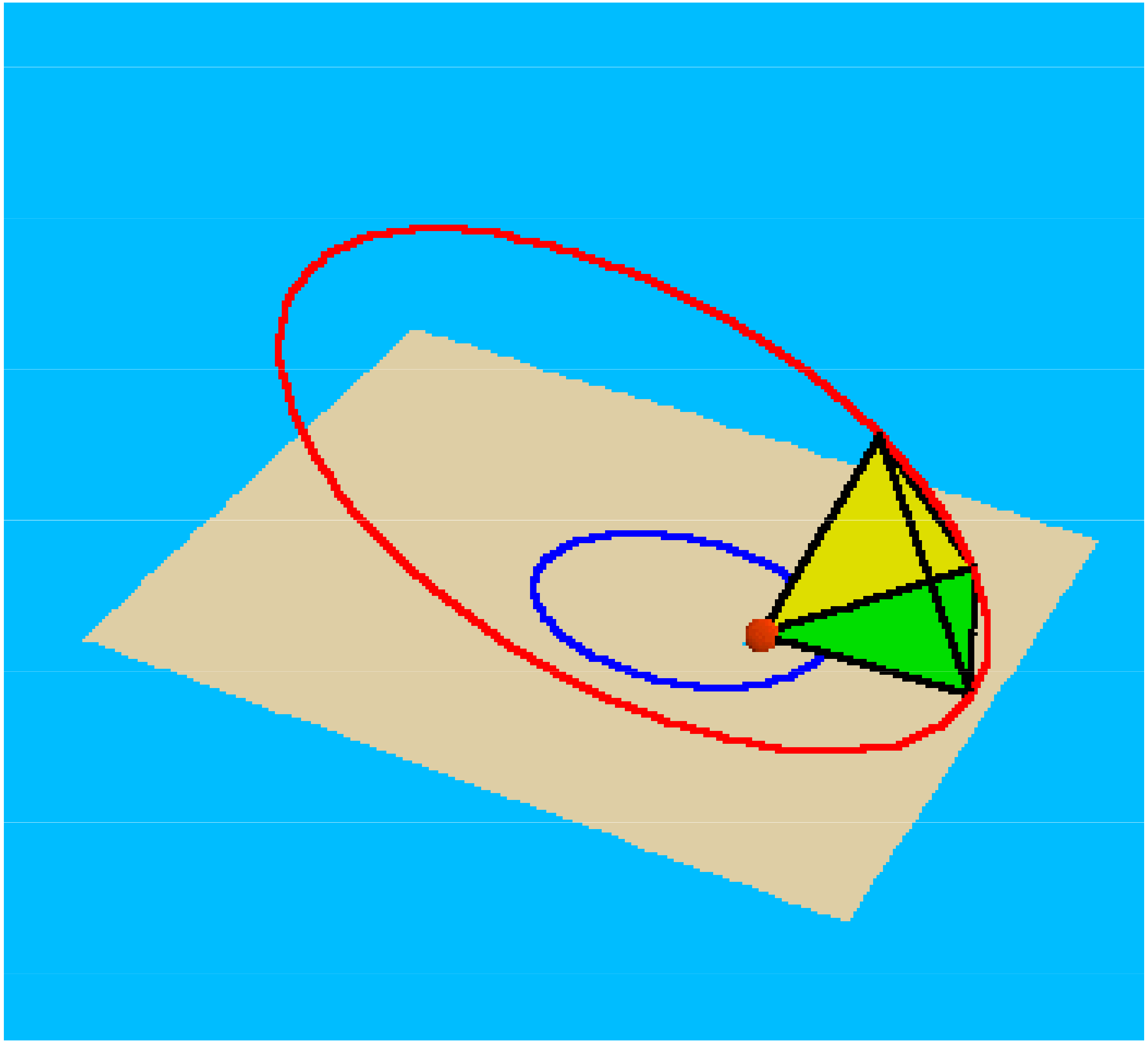


neurčují, kde se sledovaná planetka v prostoru nachází, **neznal** její **vzdálenost** a **dráhovou rovinu**, na které se Ceres pohybuje

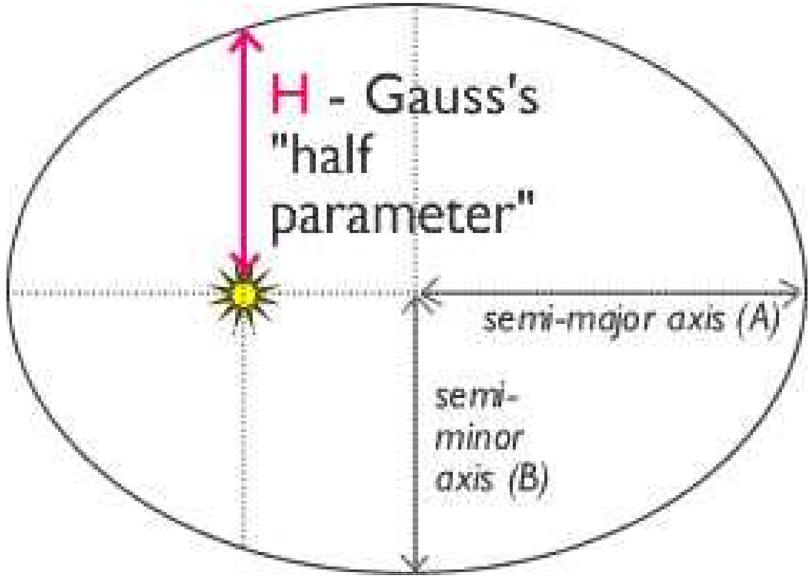
Prostorová geometrie: O - Slunce, E - Země, P - Ceres



Pohyb Ceres



Gaussův poloviční parametr H elipsy

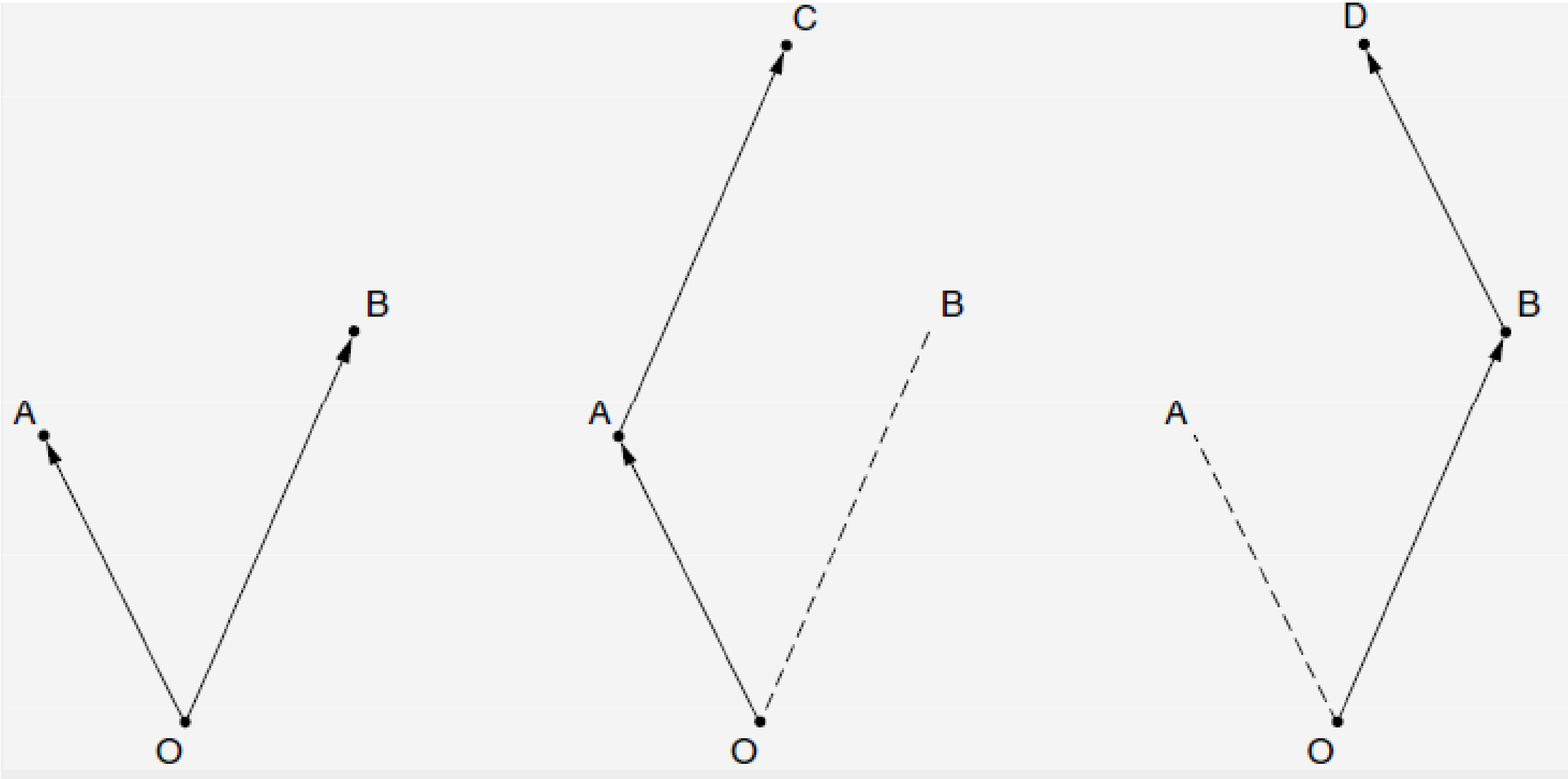


$$\pi AB$$

$$H = \frac{B^2}{A}$$

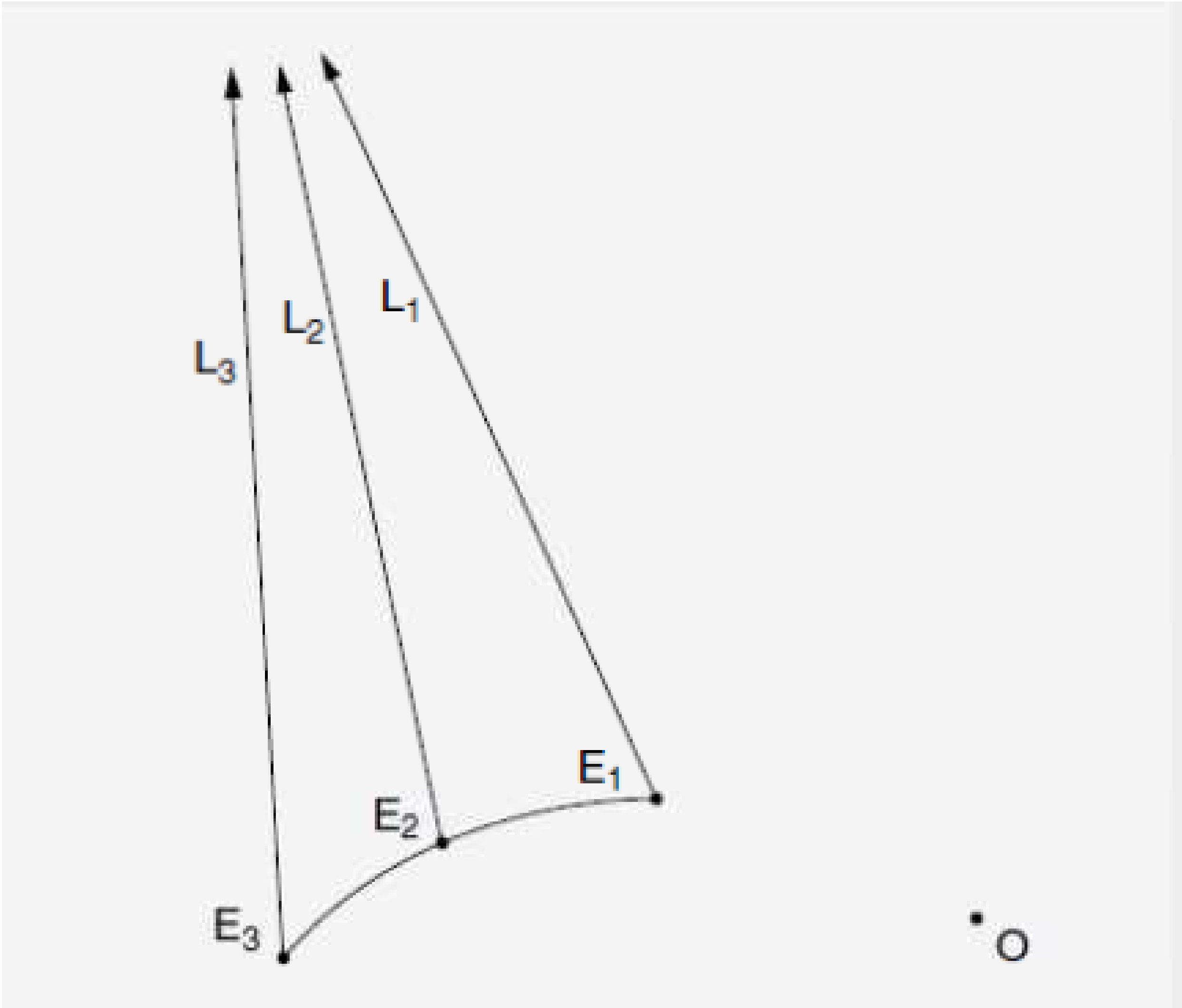
Podíl plochy sektoru a uplynulého času je konst. = $\pi \sqrt{H}$

Rovnoběžníkový zákon



Elementární charakteristikou prostoru je platnost rovnoběžníkového zákona v prostoru, kombinace posunutí C = D, nezávislost na pořadí…

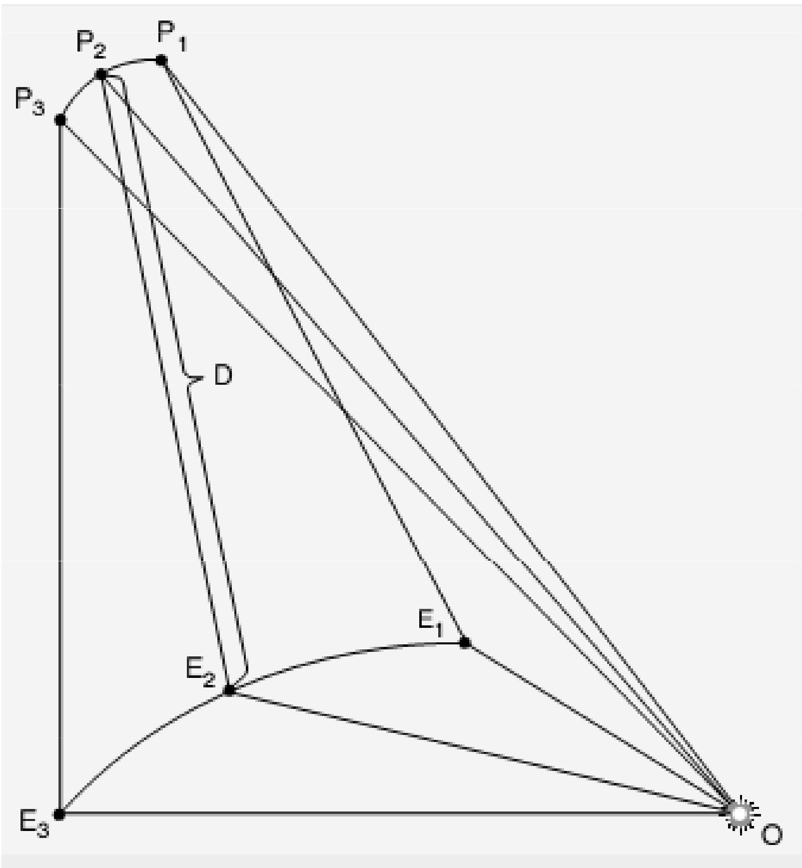
Určení polohy bodů P_1, P_2, P_3

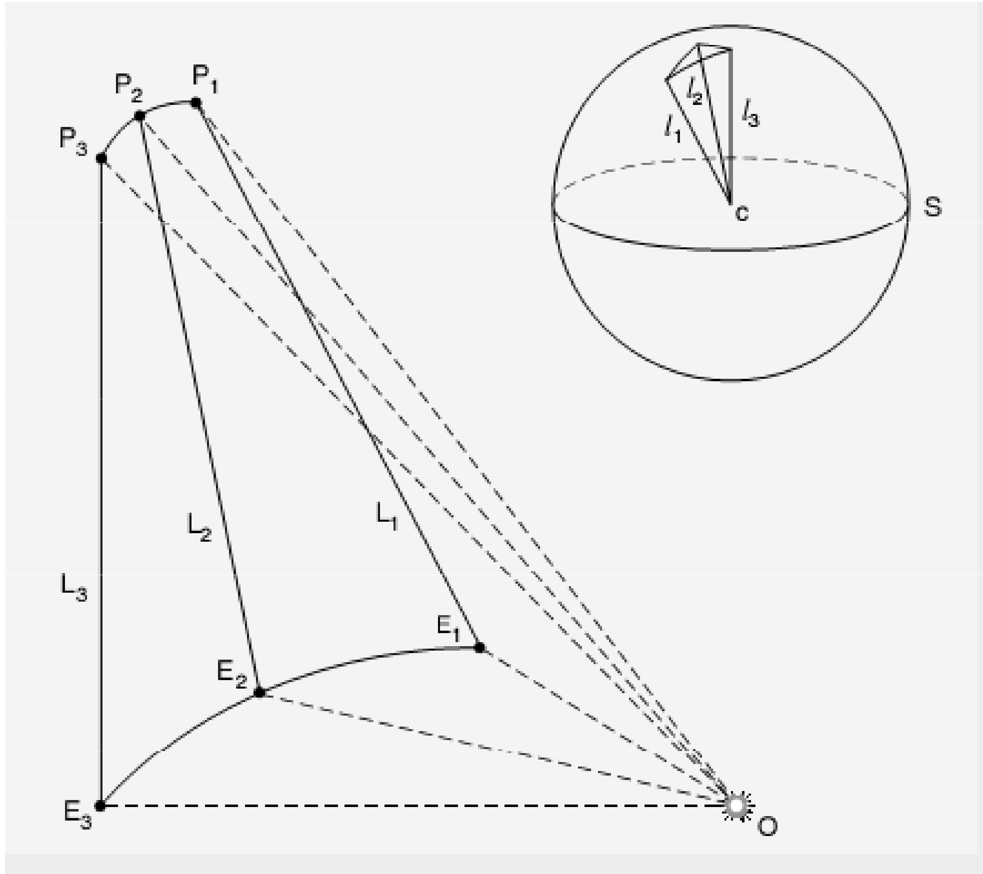


Body P_1, P_2, P_3 leží na L_1, L_2, L_3 ale kde ?

Geometrie metody
D - vzdálenost Země - Ceres

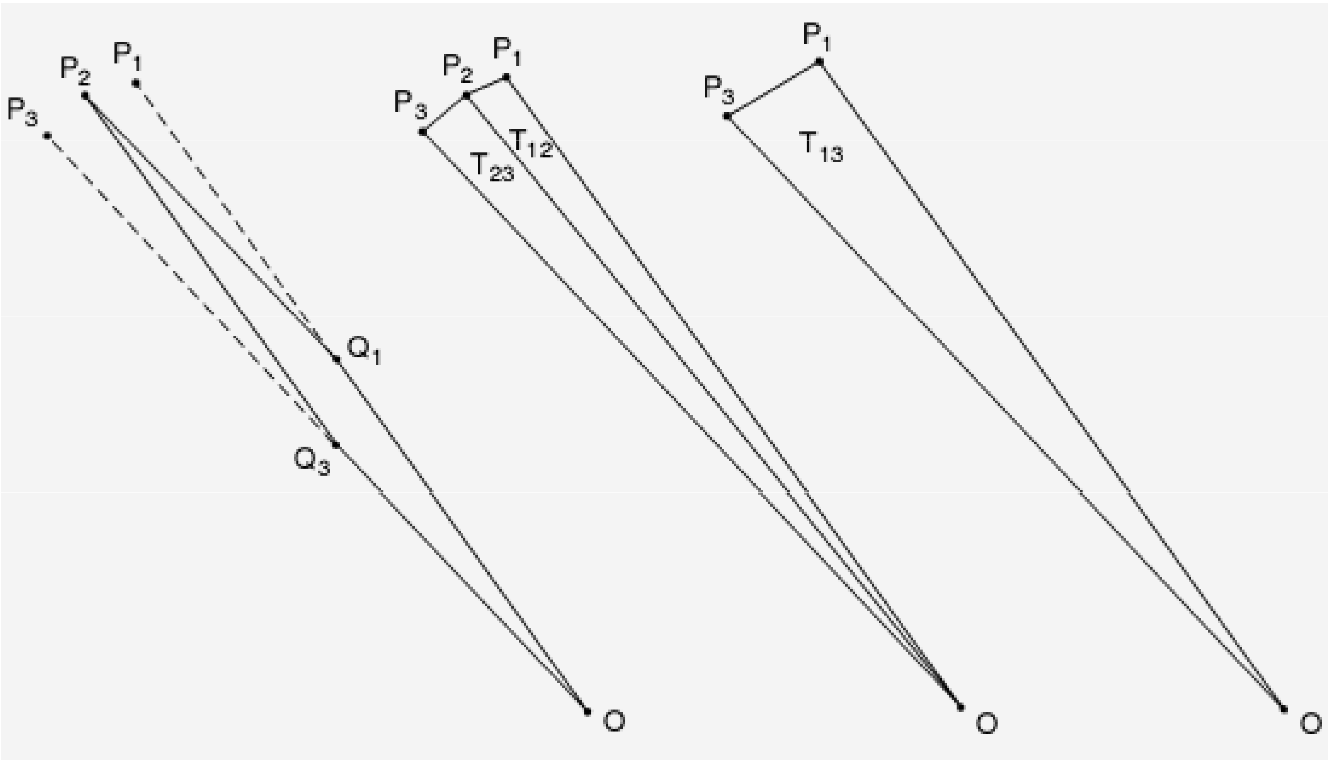
Hledání vztahů mezi plochami ΔOE_1E_2, ΔOE_2E_3, ΔOE_1E_3 respektive ΔOP_1P_2, ΔOP_2P_3, ΔOP_1P_3 a odpovídajícími sektory a časy, referenční koule ke studiu úhlových vztahů, cíl bylo určení vzdálenosti D



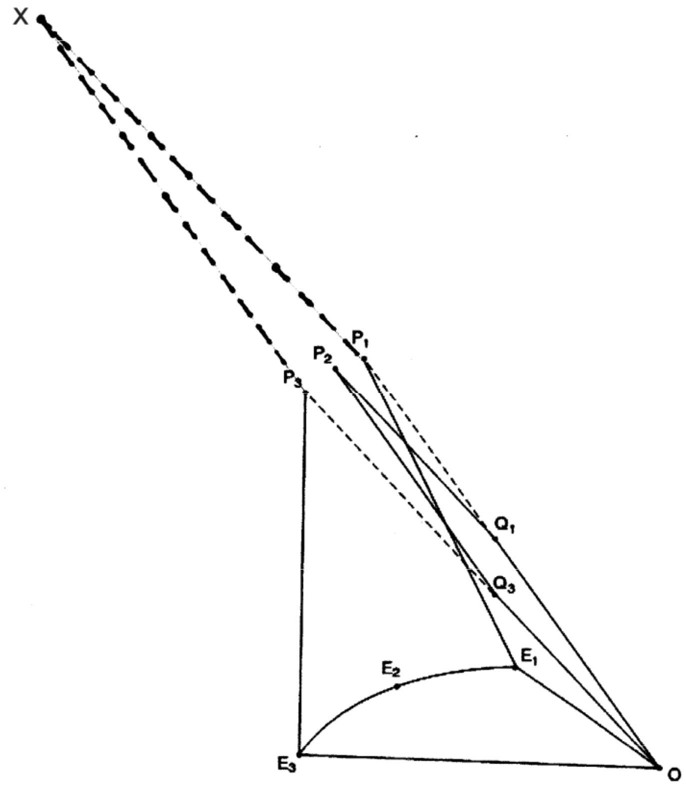


Určení polohy bodu P_2 pomocí P_1 P_3

Polohu bodu P_2 vzhledem k bodům P_1 a P_3 obdržíme pomocí rovnoběžníku vzniklého z posunů OQ_1 a OQ_3 podél přímek OP_1 a OP_3. Body Q_1 a Q_3 rozdělují části OP_1 a OP_3 v poměru, který lze vyjádřit v časech odpovídajících trojúhelníkovým plochám T_{12}, T_{23} a T_{13}. Obdržíme $\frac{OQ_1}{OP_1} = \frac{T_{23}}{T_{13}} \approx \frac{S_{23}}{S_{13}} \approx 0{,}513$ a $\frac{OQ_3}{OP_3} = \frac{T_{12}}{T_{13}} \approx \frac{S_{12}}{S_{13}} \approx 0{,}487$

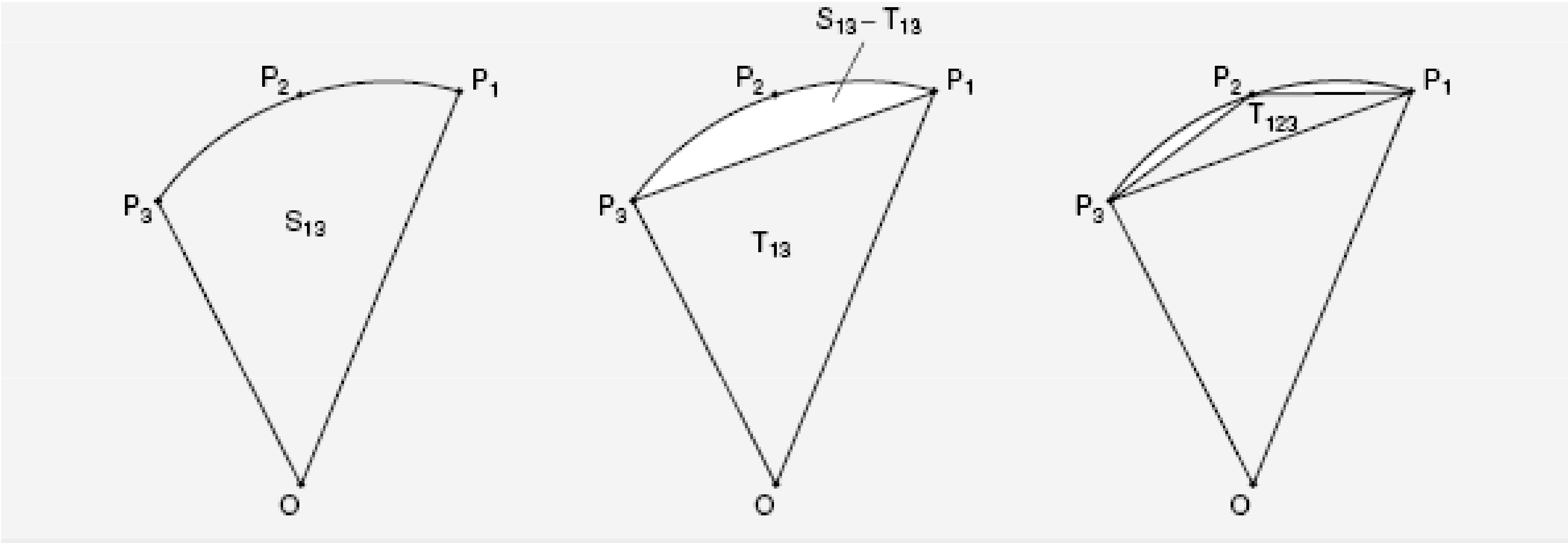


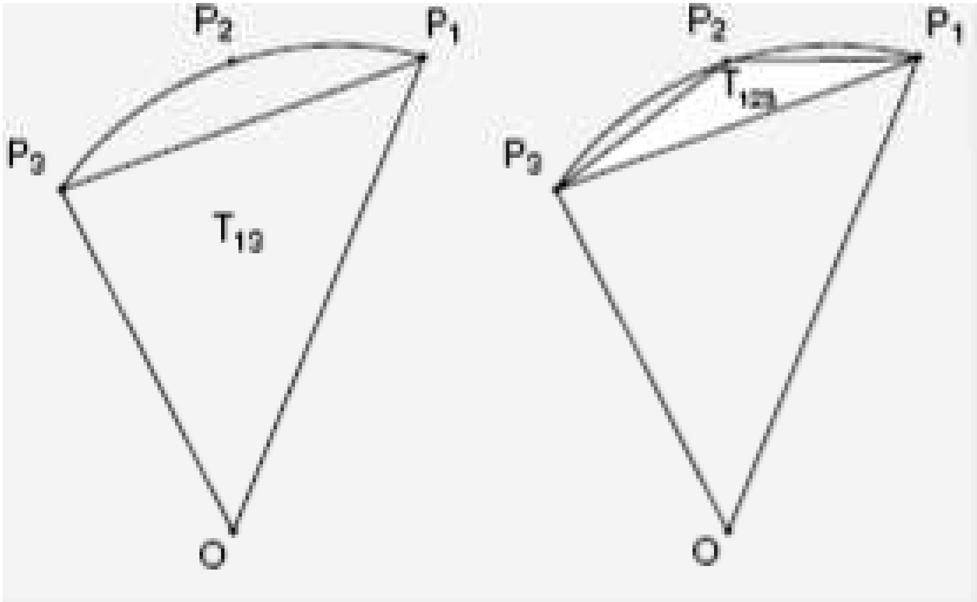
Určení bodu Q_1 pomocí rovnoběžníku OP_3XP_1



Gauss: rovnoběžník OP_3XP_1, **vrchol X je průsečíkem rovnoběžek OP_3 a OP_1 vedených z bodů P_1 a P_3**. Následně vedl rovnoběžku s OP_1 bodem P_2, nalezl polohu bodu Q_1, obdobně rovnoběžka s OP_3 vedená bodem P_2 udává polohu bodu Q_1.

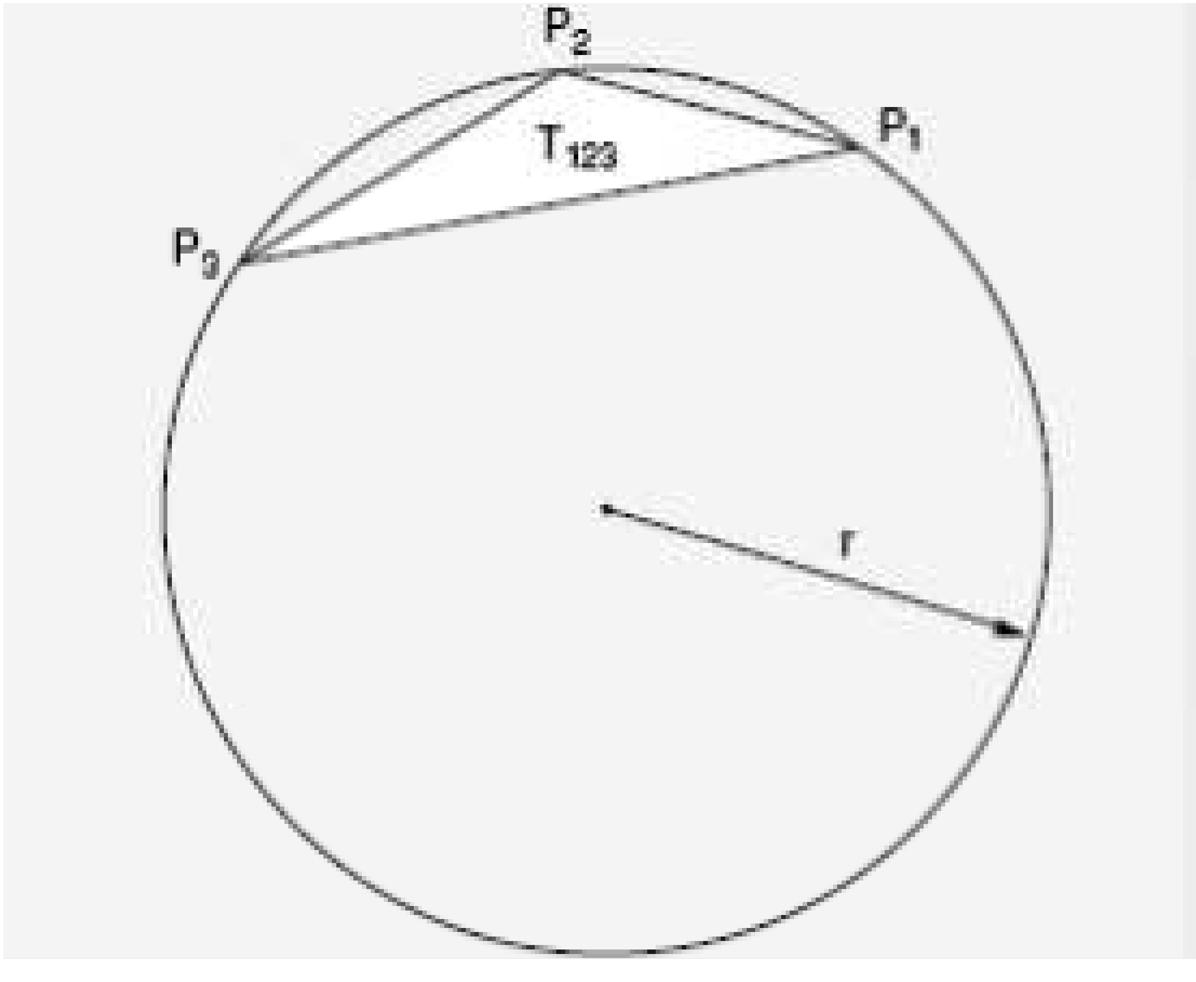
Nahrazování plošných sektorů trojúhelníky, určení plochy $P_1P_2P_3$ pomocí T_{123}





Určení plochy ΔT_{123}

$$\Delta T_{123} = \frac{P_1P_2.P_2P_3.P_1P_3}{4r}$$



První aproximace dráhy Ceres ze tří pozorování

konstrukce polohy P_2 , $\dfrac{T_{12}}{T_{13}}$, $\dfrac{T_{23}}{T_{13}}$

Využití výpočtu odpovídajících plošných sektorů za pomoci poměru uražených časů $\dfrac{S_{12}}{S_{13}}$ $\dfrac{S_{23}}{S_{13}}$

$$\frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \qquad \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1}$$

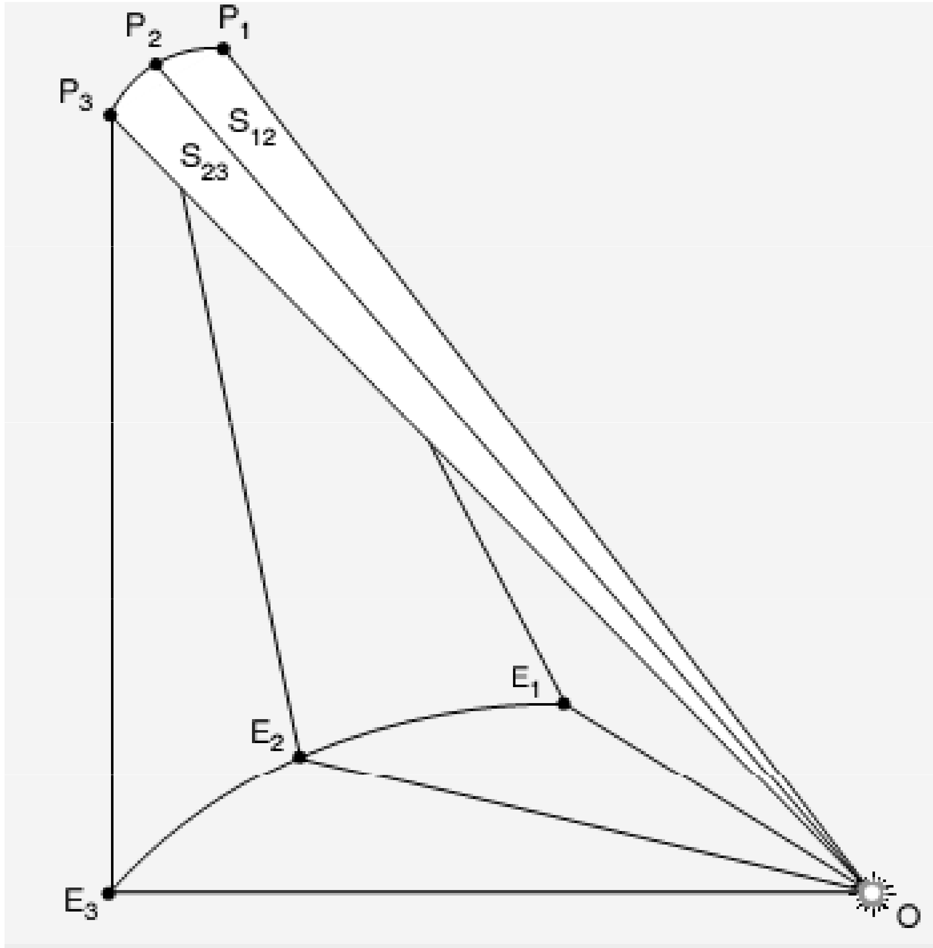
Souvislost ploch trojúhelníků s odpovídajícími sektory pohybu Ceres, vyžití časových údajů, $t \sim a^{\frac{3}{2}}$

Plochy sektorů při pohybu Ceres, podíly ploch a časů

$$\frac{S_{12}}{S_{23}} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} = 0{,}949$$

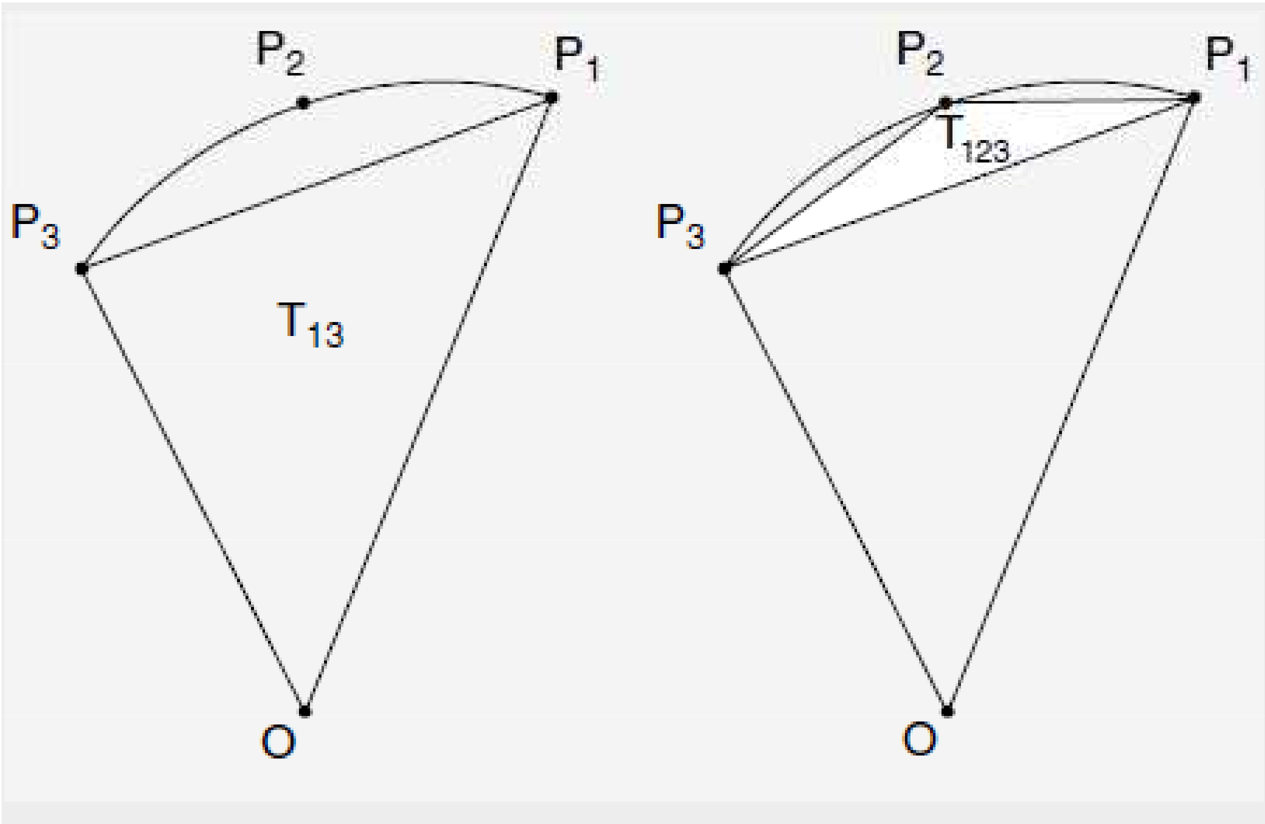
$$\frac{S_{12}}{S_{13}} = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} = 0{,}487$$

$$\frac{S_{23}}{S_{13}} = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} = 0{,}513$$



Geometrická upřesnění

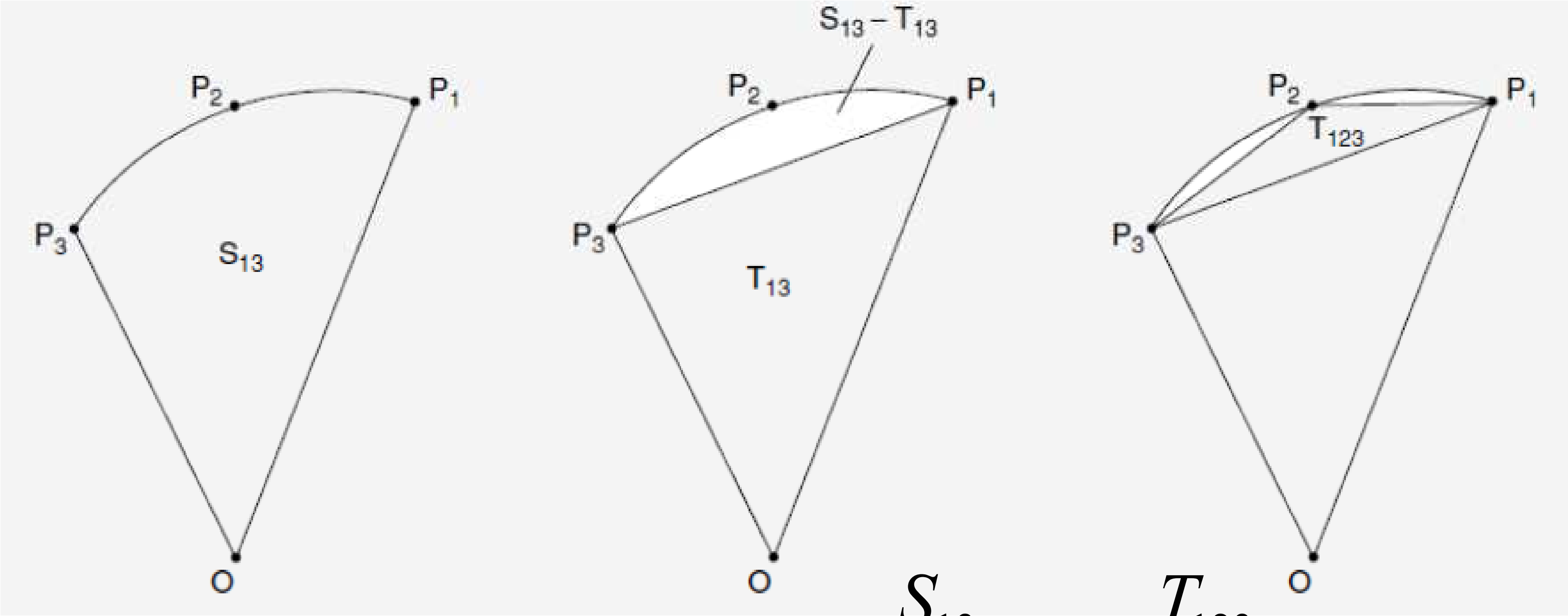
Rozdílnost ploch S_{13} a T_{13} → nutnost zavedení Gaussova korekčního faktoru



$$T_{123} \cong \frac{1}{4r}\left[2\pi r\left(\frac{t_2 - t_1}{r^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\left[2\pi r\left(\frac{t_3 - t_2}{r^{\frac{3}{2}}}\right)\right]\left[2\pi r\left(\frac{t_3 - t_1}{r^{\frac{3}{2}}}\right)\right] = 2\pi^3 \frac{(t_2 - t_1)(t_3 - t_2)(t_3 - t_1)}{r^{\frac{5}{2}}}$$

Gaussův korekční faktor

Hledání korekčních faktorů, k získání vztahu mezi poměry ploch trojúhelníků a časovými poměry, korekční faktor závisí na vzdálenosti Ceres - Slunce



$$S_{13} \cong T_{13} + T_{123}$$

$$\frac{S_{13}}{T_{13}} \cong 1 + \frac{T_{123}}{T_{13}}$$

$$T_{123} \cong 2\frac{\pi^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{r_2^3} T_{13}$$

$$\frac{S_{13}}{T_{13}} \cong 1 + \left[2\frac{\pi^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{r_2^3} \right]$$

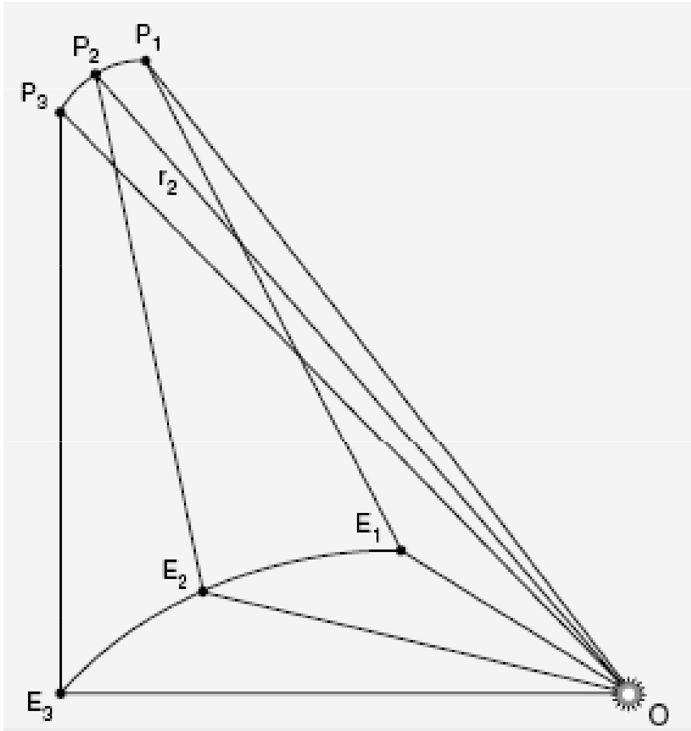
Upřesnění hlavní poloosy a Ceres

Gaussův korekční faktor $G \cong 1 + \left[2 \dfrac{\pi^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{r_2^3} \right]$

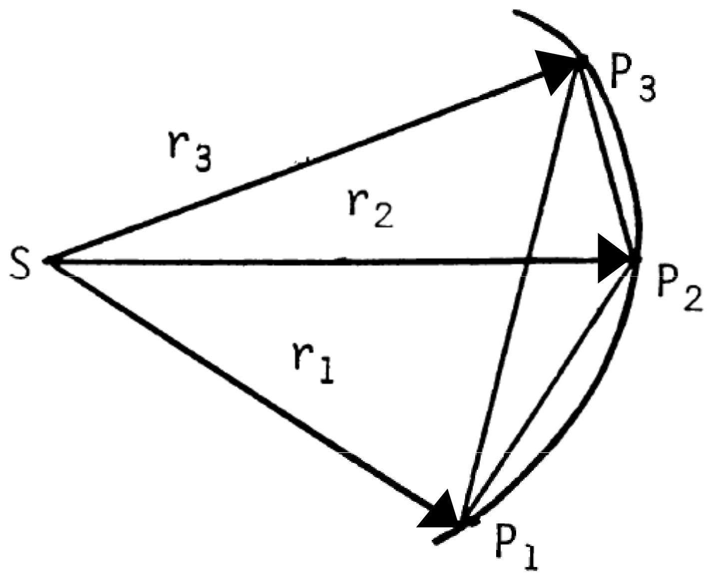
závisí na vzdálenosti Ceres od Slunce – r_2

upřesnění výpočtu $\dfrac{S_{13}}{T_{13}} \cong 1 + \left[2 \dfrac{\pi^2 (t_2 - t_1)(t_3 - t_2)}{r_2^3} \right]$

který je mírně větší než 1,
Zach, Olbers předpokládali
podle T.B. pravidla a = 2,8 *au*.
Gaussův výpočet vedl při hodnotě
G ≈ 1,003 → zpřesnění a = 2,767 *au*.



Podstata Gaussovy metody



heliocentrické poziční vektory v jedné rovině (zanedbáváme poruchy), v časech t_i

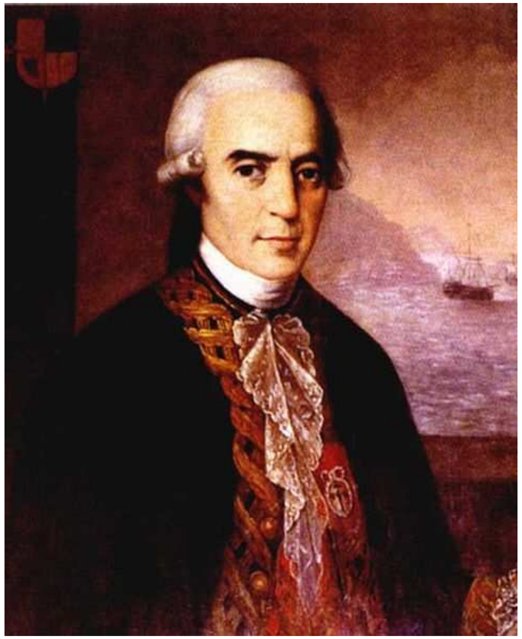
$$\vec{r}_2 = c_1 \vec{r}_1 + c_3 \vec{r}_3$$

$$c_1 = \frac{\Delta S P_2 P_3}{\Delta S P_1 P_3}$$

$$c_3 = \frac{\Delta S P_1 P_2}{\Delta S P_1 P_3}$$

Gauss vycházel z

Pierre Bouguer (1698 – 1758)
výpočet drah komet, rozvoj metod určování drah, zavedl aproximaci*



$$c_1 = \frac{t_3 - t_2}{t_3 - t_1} \qquad c_3 = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \quad \vec{r}_i$$

Platí $\vec{r}_i = \vec{R}_i + \vec{\rho}_i$

heliocentrický vektor Země $\vec{R}_i$
geocentrický vektor Ceres $\vec{\rho}_i$
heliocentrický vektor Ceres $\vec{r}_i$

při znalosti $\vec{\rho}_i$ lze určit $\vec{r}_i$

→ dráhové elementy

metoda méně přesná, malé změny c_1, c_3 → velké změny r_1, r_3

psáno ze soudobého pohledu, vektorový počet ještě nebyl

*Mémoires of the Paris Academy of Sciences, 1773

Gaussova metoda

k řešení Gauss zavádí veličiny P, Q, v prvním přiblížení zachycující plochy trojúhelníků

$$P = \frac{c_3}{c_1} \qquad Q = 2(c_1 + c_3 - 1)r_2^3$$

malé nepřesnosti v hodnotách P, Q vedou k malým chybám heliocentrických poloh, analýza malých změn P, Q v **Theoria Motus** čl. 88 - 105, po dosazení

$$P = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_2} \qquad Q = \mu\left(t_3 - t_2\right)\left(t_2 - t_1\right)$$

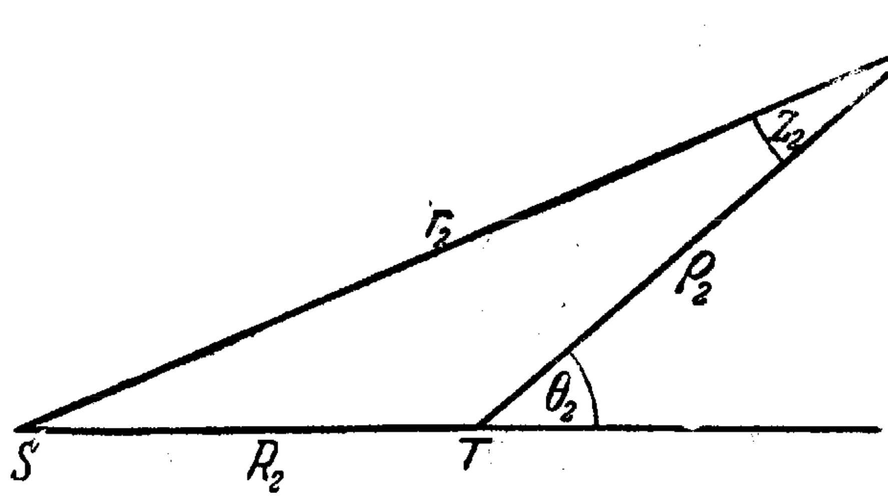
$$\mu = G\left(M + m\right)$$

Gaussovo řešení Δ STP v Theoria Motus*

k určení P a Q - algebraická rovnice osmého řádu, Gaussem transformovaná na tzv. **Gaussovu rovnici**, *q* a *m* jsou známé funkce veličin P a Q
v Δ STP při úhlu z_2 u vrcholu P (Ceres) platí

$$\frac{\rho_2}{\sin(\theta_2 - z_2)} = \frac{r_2}{\sin \theta_2} = \frac{R_2}{\sin z_2}$$

$$\sin(z_2 - q) = m \sin^4 z_2$$



v příloze* řešena

Gauss - metoda nejmenších čtverců

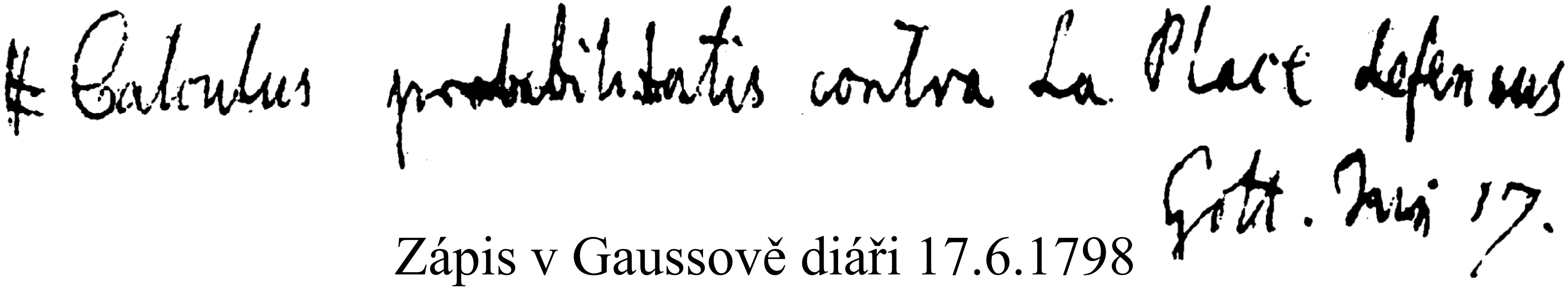
- Jak a kdy při výpočtech použil Gauss metodu nejmenších čtverců?
- Při prvních výpočtech dráhových elementů na podzim r. 1801 nebo posléze při znovuobjevení Ceres?

Dokladem věta v **Summarische Űbersicht** ...*„hat man schon Beobachtungen von der 1 oder mehreren Jahre…,so halte ich den Gebrauch der **Differential -Änderung**, wobei man eine beliebige Zahl von Beobachtungen zum Grunde legen kann, für das beste Mittel“*

*...„jestliže používáme pozorování za 1 nebo více roků...„beru na zřetel metodu **diferenciálních odchylek,** s jejíž pomocí libovolný počet pozorování může být využit jako podklad, je to nejlepší metoda“*

Gauss nesděluje podrobnosti, výklad není v Summarische Űbersicht zdaleka souvislý, všechny kroky výpočtů jakož i hodnoty používaných různých konstant nejsou uváděny, písemně podložené doklady z roku 1801 neexistují. Její použití je však zřejmé.

Gauss – metoda **nejmenších čtverců**


Calculus probabilitatis contra La Place defensus
Gott. Jun. 17.

Zápis v Gaussově diáři 17.6.1798
Calculus probabalitatis contra La Place defensus

Výpočet pravděpodobnosti obhajovaný ve sporu s Laplacem

Druhá kniha **Theoria motus corporum celestium,** třetí část **Určování dráhy z jakéhokoliv počtu pozorování**, čl. 179, Gauss uvádí: "… *the most probable system of values of the quantities…will be that in which the sum of the squares of the differences between the actually observed and computed values multiplied by numbers that measure the degree of precesion, is a minimum.*" *,* dále v čl. 186: "…*Our principle, which we have use of since the year 1795, has lately been published by Legendre in the work …*"
A. M. Legendre: **Nouvelles méthodes pour la determination des orbites des cométes, Paris 1806.**

Gauss Theoria Motus - metoda nejmenších čtverců

 Čl. 179

Ad obseruationes praecisionis *inaequalis* principium nullo iam negotio extendi potest. Scilicet si mensura praecisionis obseruationum, per quas inuentum est $V = M$, $V' = M'$, $V'' = M''$ etc. resp. per h, h', h'' etc. exprimitur, i. e. si supponitur, errores his quantitatibus reciproce proportionales in istis obseruationibus aeque facile committi potuisse, manifesto hoc idem erit, ac si per obseruationes praecisionis aequalis (cuius mensura $= 1$) valores functionum hV, $h'V'$, $h''V''$ etc. immediate inuenti essent $= hM$, $h'M'$, $h''M''$ etc.: quamobrem systema maxime probabile valorum pro quantitatibus p, q, r, s etc. id erit, vbi aggregatum $hhvv + h'h'v'v' + h''h''v''v''$ + etc. i. e. *vbi summa quadratorum differentiarum inter valores reuera obseruatos et computatos per numeros qui praecisionis gradum metiuntur multiplicatarum fit minimum.* Hoc pacto ne necessarium quidem est, vt functio-

Čl. 186

liter summa potestatum exponentis cuiuscunque paris in minimum abit. Sed ex omnibus his principiis nostrum simplicissimum est, dum in reliquis ad calculos complicatissimos deferremur. Ceterum principium nostrum, quo iam inde ab anno 1795 vsi sumus, nuper etiam a clar. Legendre in opere *Nouvelles methodes pour la determination des orbites des cometes, Paris* 1806 prolatum est, vbi plures aliae proprietates huius principii expositae sunt, quas hic breuitatis caussa supprimimus.

Ohlasy Gaussova objevu v Čechách

,,Ale dlouhého trvání neměla radost tato rázu tak ideálního; oběžnička, jíž dáno jméno Ceres, nemohla delší dobu býti sledována a ztratila se konečně na dobro, nemajíc ještě dráhu přesně vyměřenou. Psalo se již 1. prosince 1801 a nově objevená a brzy zase ztracená hvězdička nebyla ještě na obloze nalezena.“

,,Mezi tím však uveřejnil jakýsi Dr. Gauss stručné, ale velmi přesné popsání jejího oběhu, ***pravý to zatykač****, a sice na základě trojího pozorování, jež Piazzi dne 2. a 22. ledna, pak 11. února provedl. Výpočet byl proveden podle zcela nových method a byly výsledky jeho tak správné, že již 7. prosince postihl Zach v této Gaussově dráze* ***nebeského úskoka****...“*

F. J. Studnička: **Na oslavu stoleté památky narození K. B. Gausse**. Čas. pro pěstování matematiky a fysiky, vol. 6 (1877), p. 146 – 148.

Ohlasy Gaussova objevu v Čechách

Podle **Theoria Motus:** *„Zdaž jsem mohl kdy vhodněji zkusiti, mají-li ony myšlénky mé nějakou cenu praktickou, než nyní kdybych jich upotřebil k určení dráhy oběžnice Ceres, kterážto za oněch 41 dní pouze oblouk tří stupňů vzhledem ke středu Země proběhla a po uplynutí roku v části oblohy velmi daleko odtud vzdálené hledána býti mohla?“*

„a první jasná noc, v které oběžnice dle čísel počtem obdržených hledána byla, vrátila uprchlou pozorovatelům.“

…7. prosince 1801 Ceres opět objevena jest Zachem…

A. Seydler: **O Gaussových pracích astronomických**. Čas. pro pěstování matematiky a fysiky, vol. 6 (1877), p. 184 – 191.

Závěr

W. Shakespeare: *Du, Natur, bist meine Gottheit; Deinen Gesetzen diene ich.*
Tvými zákony mé služby jsou poutány.

C. F. Gauss:
Tvým zákonům sloužím.

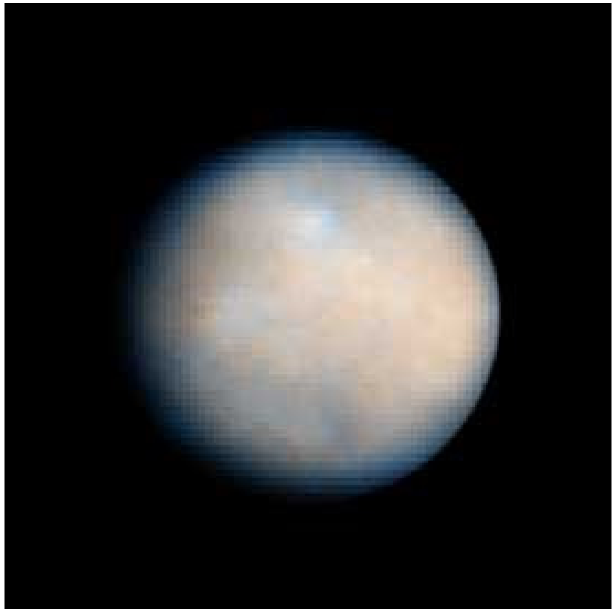
Závěr - význam Gaussovy metody

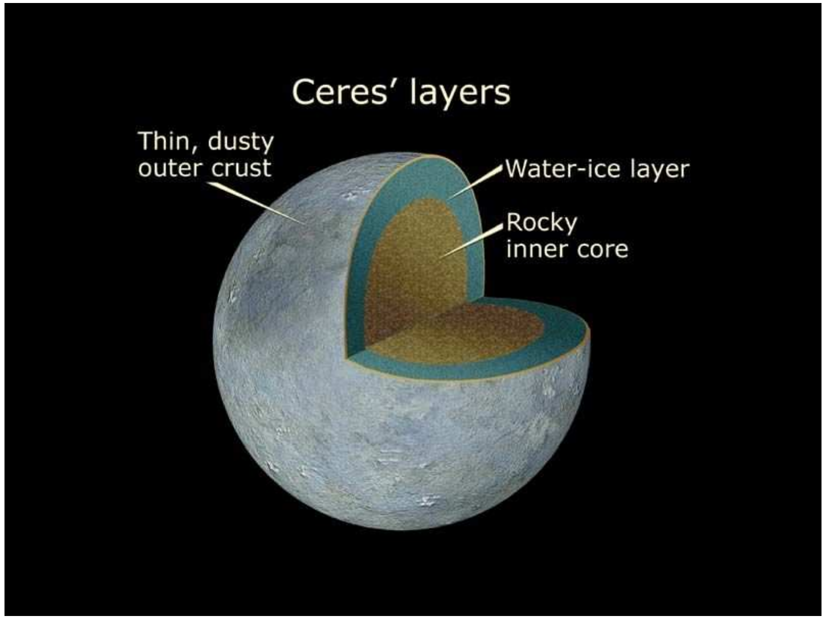
Vzhledem ke své přesnosti a praktické použitelnosti měla Gaussova metoda v historii astronomie zásadní význam pro určování drah planetek Ceres, Palas 1802, Juno 1804, Vesta 1807.

Pozdější matematické zpracování metody aplikací lineární algebry umožnilo podstatné urychlení výpočtů.

Gaussova metoda modernizovaná pro počítače byla používána i v současnosti, například k upřesnění drah umělých družic Země.

Ceres





960 x 932 km, albedo ≈ 0,1, M ≈ 9,5.10 ^{20} kg, ρ ≈ 2.10 ^{3} kg.m^{-3}
voda tvoří asi (20 – 25) % hmotnosti, hydrostatická rovnováha, diferenciace nitra teplem uvolněným při rozpadu ^{26}Al, silikátové horniny - kamenné jádro, plášť ≈ (60 - 120) km, kůra ≈ 10 km – regolit, T ≈ 140 K, T_{max} ≈ 235 K, žádné větší impakty na povrchu, Ceres zřejmě pohybem připutoval na své místo v Sluneční soustavě

Gaussovo řešení

Tři pozorování v časových okamžicích t_1, t_2, t_3 dávají šest nezávislých veličin – geocentrických souřadnic λ_1, β_1, λ_2, β_2, λ_3, β_3.
Geocentrické a heliocentrické souřadnice jsou mezi sebou vázány 9 rovnicemi

$$\rho_i \cos \beta_i \cos \lambda_i = x_i + X_i$$

$$\rho_i \cos \beta_i \cos \lambda_i = y_i + Y_i$$

$$\rho_i \sin \beta_i = z_i + Z_i \quad \text{pro } i = 1, 2, 3$$

kde λ_i, β_i jsou známy z pozorování, X_i, Y_i, Z_i jsou určeny z tabulek pohybu Země (označují polohy Země vzhledem ke Slunci) .

Neznámé jsou ρ_i a dále x_i, y_i, $z_{i,}$ Devět posledních veličin je vyjádřitelných přes šest elementů dráhy *a, e, i, T, ω, Ω,* a známých časových okamžiků $t_{i.}$ Tedy nezávislých neznámých je stejně jako rovnic.

Gaussovy transformace souřadnic

$$
\begin{array}{llcccc}
\text{Dráhové elementy} & & & \text{Heliocentrické souřadnice} & & \text{Geocentrické sférické souřadnice} \\
\omega & \text{argument perihelu} & & & & \\
\Omega & \text{délka výstupného uzlu} & & & & \\
i & \text{sklon oběžné dráhy} & \overset{(A)}{\Longleftrightarrow} & \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \overset{(B)}{\Longleftrightarrow} & \begin{pmatrix} \varrho \\ \lambda \\ \beta \end{pmatrix} \\
a & \text{hlavní poloosa} & & & & \\
e & \text{excentricita} & & & & \\
l_0 & \text{střední heliocentrická délka} & & & &
\end{array}
\tag{2.1}
$$

Měřenými veličinami jsou úhly λ a β (vzdálenost ϱ je samozřejmě neznámá) pro několik hodnot času, vypočítávanými veličinami jsou dráhové elementy. Potřebujeme tedy vzorce pro kroky (A) a (B).

Gaussův postup. V době objevení planetky Ceres bylo dobře známo, jak vypočítat šest dráhových elementů planety pomocí dvou souborů *heliocentrických* souřadnic x, y, z. Metoda spočívala ve vyřešení 2×3 nelineárních rovnic o šesti neznámých. Velkým problémem však bylo, že existovaly pouze *dvě pozorované geocentrické* hodnoty λ_i, β_i pro každý den. Po dlouhé manipulaci s výše uvedenými vztahy byl Gauss schopen zredukovat výpočet *jednoho* souboru heliocentrických souřadnic x, y, z na znalost *dvou* souborů pozorovaných hodnot λ_i, β_i tím, že vyřešil komplikovanou transcendentní

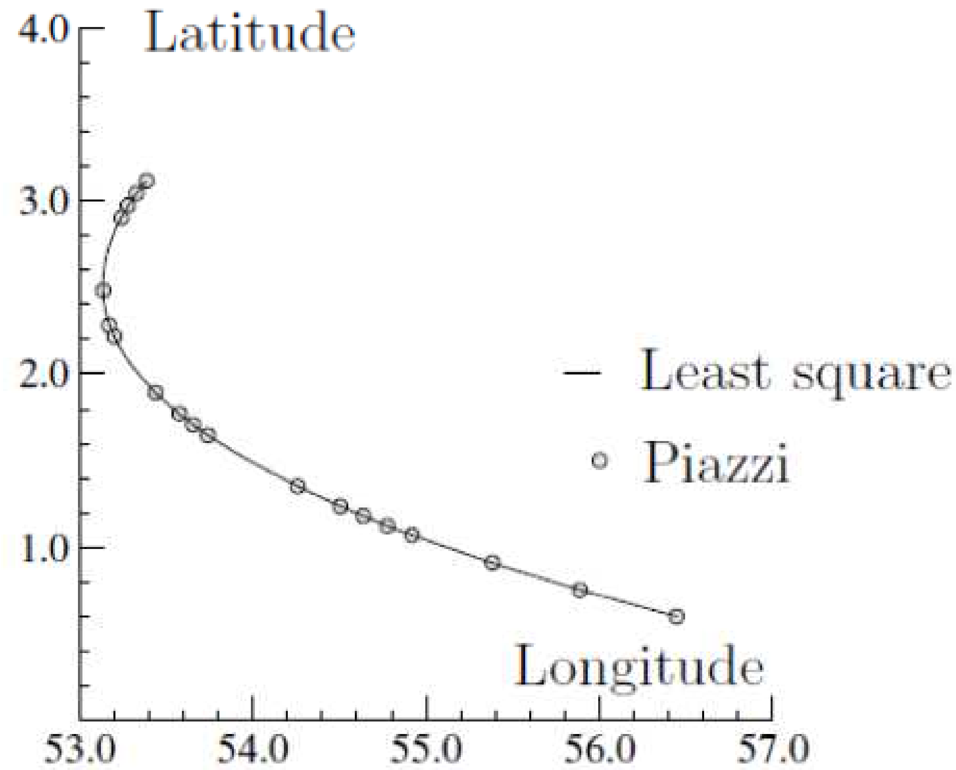
Theoria motus corporum coelestium čl. 84

Gauss sděluje čtenáři ke starému problému: „*Od doby, kdy je možné určovat celou dráhu s použitím dvou rádius vektorů stanovených velikostí a polohou společně s jedním elementem dráhy, časem v kterém kosmické těleso se pohybuje od jednoho rádius vektoru k druhému, může být dráha určována, jestliže buď zanedbáme hmotnost tělesa nebo ji považujeme za známou….*

…„Je zřejmé, že dva rádius vektory, určené velikostí a polohou, současně s časem, ve kterém kosmické těleso popisuje střední časový úsek, určují celou dráhu…“

Gauss - metoda nejmenších čtverců

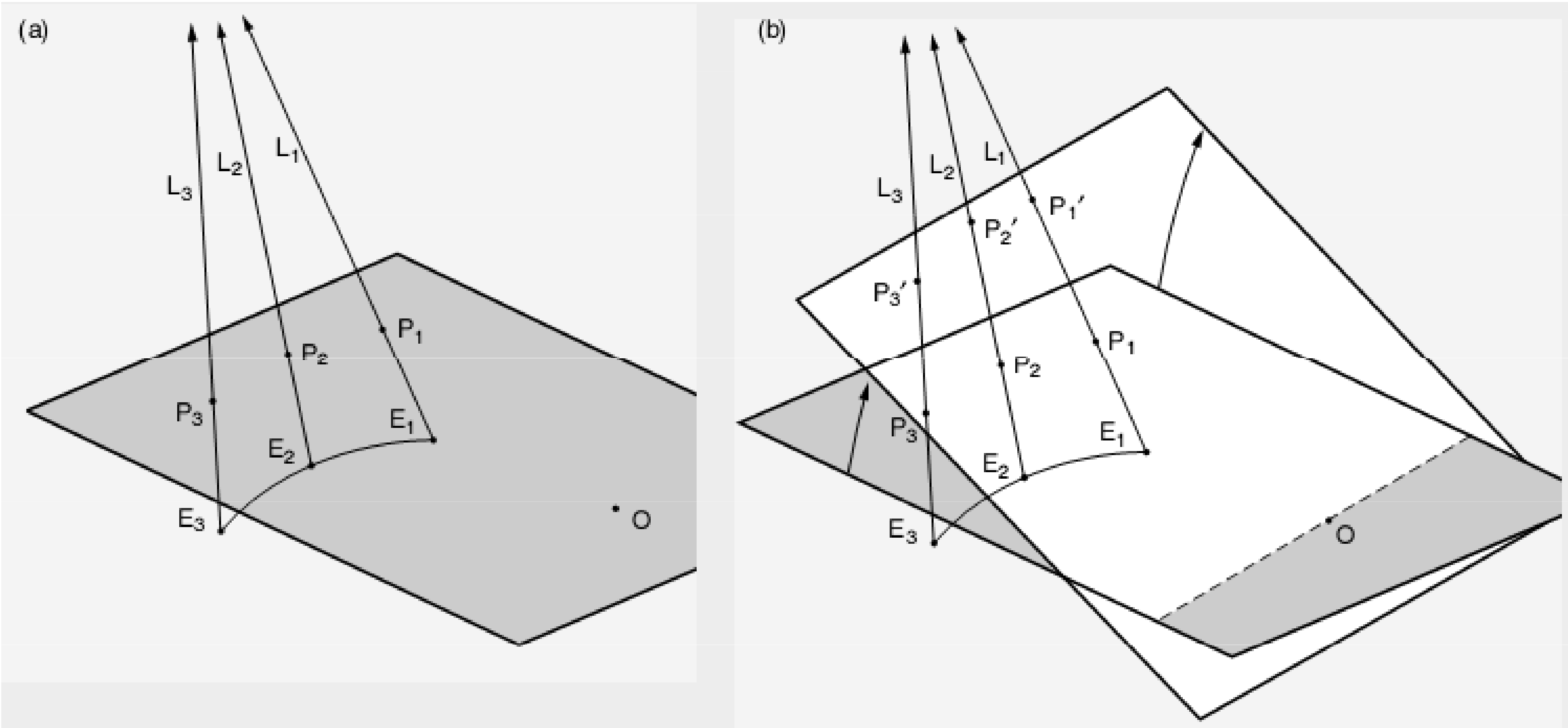
t_1	$\lambda = 53.38$	$\beta = 3.11$
t_2	$\lambda = 53.33$	$\beta = 3.04$
t_3	$\lambda = 53.28$	$\beta = 2.97$
t_4	$\lambda = 53.24$	$\beta = 2.90$
t_5	$\lambda = 53.13$	$\beta = 2.48$
t_6	$\lambda = 53.17$	$\beta = 2.28$
t_7	$\lambda = 53.20$	$\beta = 2.21$
t_8	$\lambda = 53.44$	$\beta = 1.89$
t_9	$\lambda = 53.57$	$\beta = 1.77$
t_{10}	$\lambda = 53.65$	$\beta = 1.71$
t_{11}	$\lambda = 53.74$	$\beta = 1.65$
t_{12}	$\lambda = 54.26$	$\beta = 1.35$
t_{13}	$\lambda = 54.50$	$\beta = 1.24$
t_{14}	$\lambda = 54.64$	$\beta = 1.18$
t_{15}	$\lambda = 54.77$	$\beta = 1.13$
t_{16}	$\lambda = 54.92$	$\beta = 1.07$
t_{17}	$\lambda = 55.38$	$\beta = 0.91$
t_{18}	$\lambda = 55.89$	$\beta = 0.75$
t_{19}	$\lambda = 56.44$	$\beta = 0.60$



Obr. 3.3. Vypočítané a pozorované polohy planetky Ceres.

Porovnání Piazziho pozorovacích hodnot a pozdějších výpočtů souřadnic, které lépe vyhovují Piazziho pozorováním než původní Gaussovy hodnoty. Piazziho pozorování obsahovaly menší chyby, ovlivňující řešení, což Gauss věděl, viz. Mon.Cor.

Dráhové roviny Země a Ceres



Gaussovo řešení

Geometricky řešení je vedeno tak, že ze tří zadaných bodů – poloh Země (určovaných X_i, Y_i, Z_i) vedeme tři směry, odpovídající pozorovaným α_i, δ_i , následně hledáme průsečík s rovinou, procházející přes střed Slunce tak, aby (úloha je plně určena, neboť kónický řez je jednoznačně stanoven třemi svými body a polohou ohniska).

Tak, aby dvojnásobek plošných sektorů mezi prvním a druhým rádius vektorem (r_1, r_2) a současně mezi druhým a třetím (r_2, r_3) byly v souladu s I. a III. Keplerovým zákonem.

$$(r_1 r_2) = k\sqrt{p}\,(t_2 - t_1) \qquad (r_2 r_3) = k\sqrt{p}\,(t_3 - t_2)$$

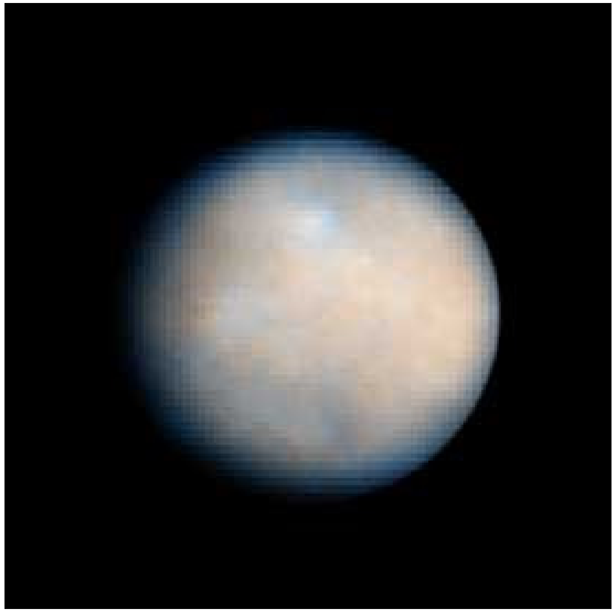
Gaussova metoda

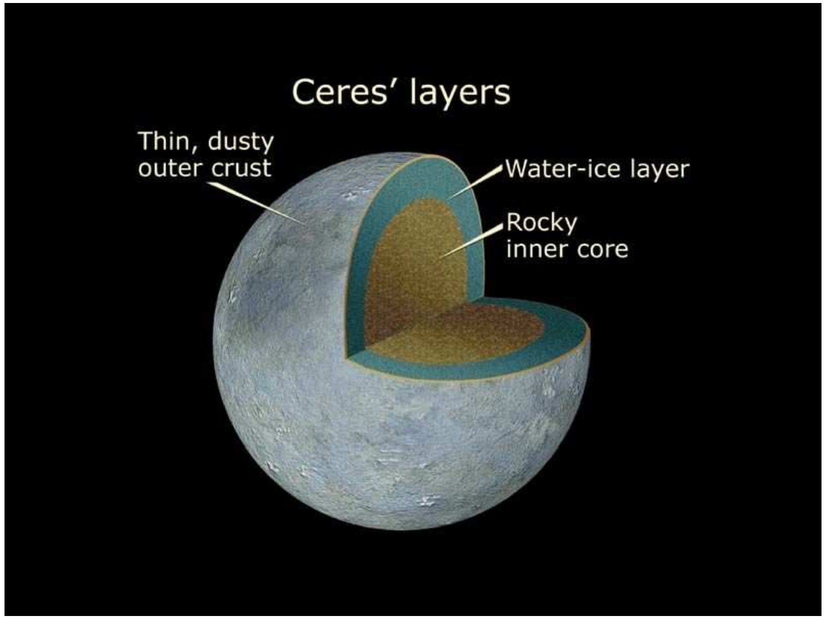
Uvedené dvě rovnice jsou těmi podmínkami, s jejichž pomocí může být určena poloha dráhové roviny, neboť k jejímu stanovení postačují dva parametry, např. sklon dráhové roviny a délka výstupného uzlu. Následně lze určit body – průsečíky pozorovaných směrů na planetku s její dráhovou rovinou, to je nalézt souřadnice x_i, y_i, z_i (z prvně uvedených rovnic) a současně i $\rho_{i.}$ To lze realizovat metodou postupných přiblížení. V rovnicích je parametr dráhy *p* neznámý.

Metoda uzpůsobena ke zvláštnostem logaritmického výpočtu. Místo pozorovaných rovníkových souřadnic planetky zavedl Gauss ekliptikální, v kterých je šířka Slunce nulová, což zjednodušuje výpočty.

od 1802 započítání poruch od Jupitera, rezonance s Ceres 2 : 5, TC = 4,6 r., TJ = 11,8 r.

Ceres





960 x 932 km, albedo ≈ 0,1, M ≈ 9,5.10 ^{20} kg, ρ ≈ 2.10 ^{3} kg.m^{-3}
voda tvoří asi (20 – 25) % hmotnosti, hydrostatická rovnováha, diferenciace nitra teplem uvolněným při rozpadu ^{26}Al, silikátové horniny - kamenné jádro, plášť ≈ (60 - 120) km, kůra ≈ 10 km – regolit, T ≈ 140 K, T_{max} ≈ 235 K, žádné větší impakty na povrchu, Ceres zřejmě pohybem připutoval na své místo v Sluneční soustavě

Literatura:

[1] Piazzi, G.: Risultati delle Osservazioni della Nuova Stella. Palermo, 1801.

[2] Director, B., Tennenbaum, J.: http://www.schillerinstitute.org/fid_97-01/982_orbit_ceres.pdf

[3] Gauss, C. F.: Theory of the Motion of the Heavenly Bodies Moving about the Sun in Conic Sections.
Dover Publications, Inc. Mineola, New York 2004.

[4] Zach, F. X.: Monatliche Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmels-Kunde. 1809. Gauss, K. F.: Summary Overview of the Method Used To Determine the Orbits of the Two New Planets.

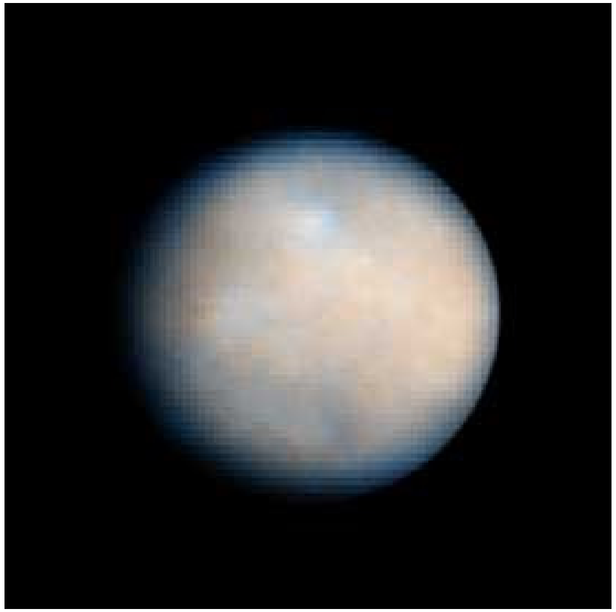
[5] Gauss, C. F.: Summarische Übersicht der Bestimmung der Bahnen der beiden neuen Hauptplaneten angewandten Methoden – 1802.

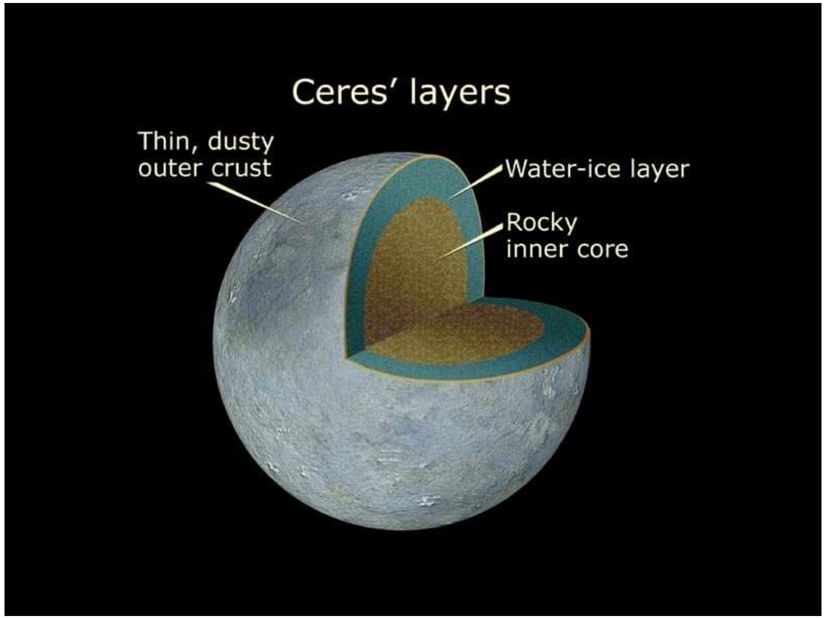
[6] Forbes, E. G.: Gauss and the Discovery of Ceres. Journal for the History of Astronomy 1971, No. 2, p. 195 - 199.

[7] Foderá, S. G., Manara, A., Sicoli, P.: Giuseppe Piazzi and the Discovery of Ceres. www.lpi.usra.edu/

http:www.physics.muni.cz/astrohistorie

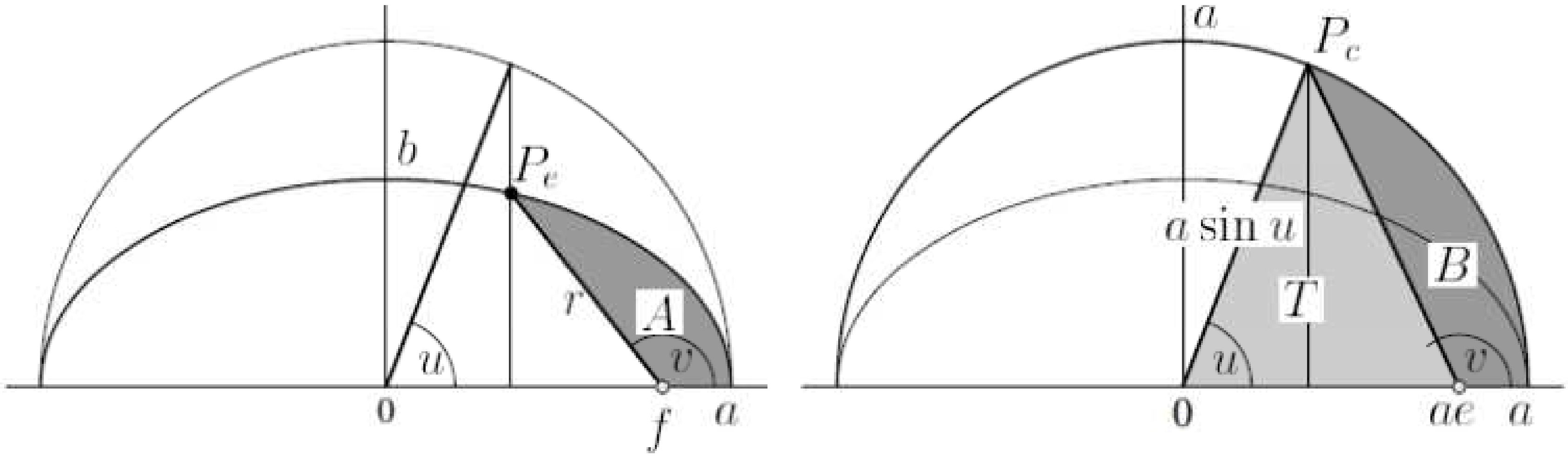
Ceres





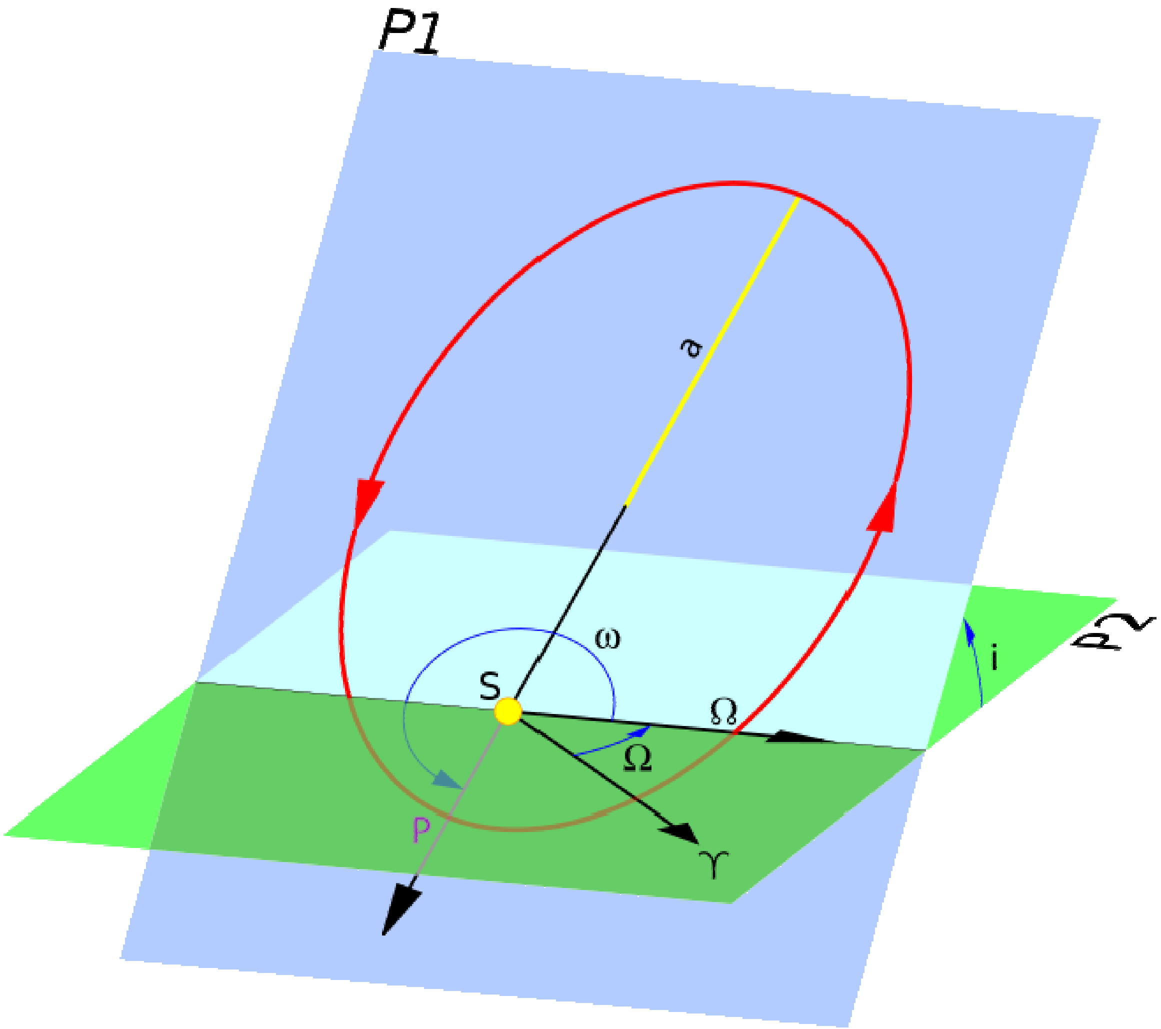
960 x 932 km, albedo ≈ 0,1, M ≈ 9,5.10 ^{20} kg, ρ ≈ 2.10 ^{3} kg.m^{-3} Voda tvoří asi (20 – 25) % hmotnosti, hydrostatická rovnováha, diferenciace nitra teplem uvolněným při rozpadu ^{26}Al, silikátové horniny – kamenné jádro, plášť ≈ (60 – 120) km, kůra ≈ 10 km – regolit, T ≈ 140 K, T_{max} ≈ 235 K, žádné větší impakty na povrchu, Ceres zřejmě pohybem připutoval na své místo ve sluneční soustavě

Pravá anomálie



Obr. 2.1. Keplerova oběžná dráha; P_e planeta, f ohnisko, u excentrická anomálie, v pravá anomálie, a hlavní poloosa, e číselná excentricita.

Dráhové elementy



a, e, i, ω, Ω, T

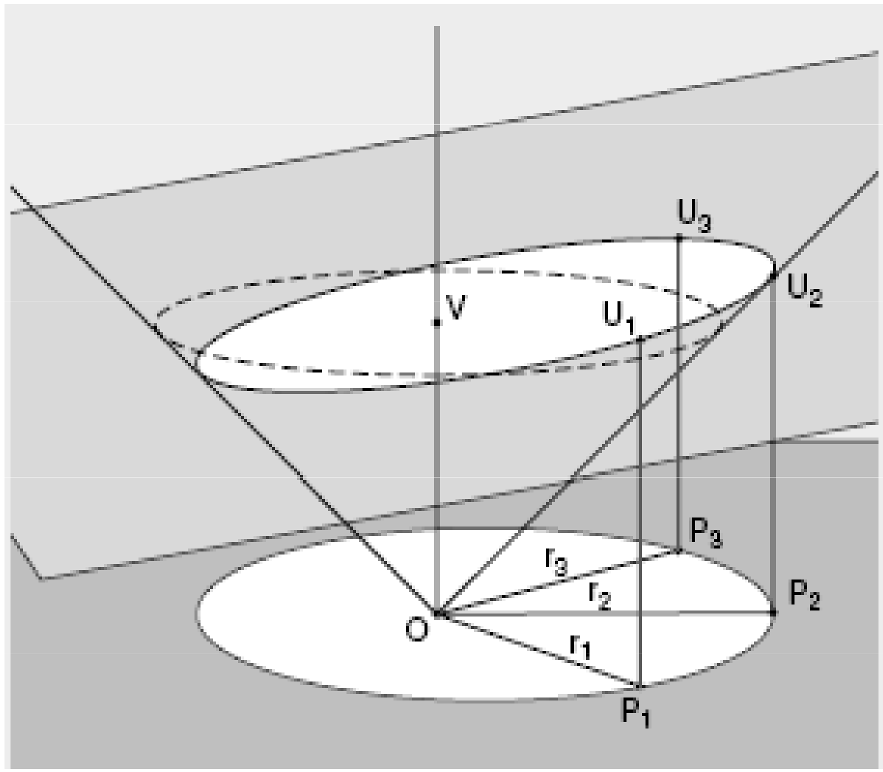
Gaussova metoda

byly nalezeny tři pozice P_1, P_2, P_3

hledáme elipsu, jejíž rovina prochází středem Slunce

hodnotu polovičního parametru H určíme ze

$$S_{13} = (t_3 - t_1)\pi\sqrt{H}$$



Větší chyby, jestliže

P_1, P_2, P_3 jsou blízko

Gaussova metoda