

Základy fyziky hvězdných atmosfér

Jiří Kubát

Poslední úprava: 19. května 2024

Obsah

1	Úvod	10
I	Interakce hmoty se zářením	14
2	Popis záření	15
2.1	Specifická intenzita	15
2.2	Rozdělovací funkce záření	17
2.3	Střední intenzita	19
2.4	Tok	19
2.5	Tenzor tlaku záření	20
2.6	Momenty specifické intenzity	21
2.7	Některé speciální případy popisu záření	22
2.7.1	Planparalelní atmosféra	22
2.7.2	Sféricky symetrická atmosféra	25
2.7.3	Eddingtonův činitel a Eddingtonovo přiblížení	26
2.7.4	Záření ze vzdálené hvězdy	26
2.8	Elektromagnetický popis záření	29
2.8.1	Šíření rovinné monochromatické vlny, mikroskopická polarizace	30
2.8.2	Statistický popis, makroskopická polarizace	31
3	Přenos záření	34
3.1	Absorpce, emise a rozptyl záření hmotou	34
3.1.1	Absorpční koeficient	35
3.1.2	Emisní koeficient	36
3.2	Rovnice přenosu záření	36
3.2.1	Planparalelní přiblížení v rovinné geometrii	38
3.2.2	Sféricky symetrické přiblížení	39
3.3	Optická hloubka	40
3.4	Vydatnost	41

3.5	Typické okrajové podmínky rovnice přenosu	42
3.6	Momenty rovnice přenosu záření	44
3.6.1	Momentové rovnice pro jednorozměrnou časově nezávislou atmosféru	46
3.7	Rovnice přenosu pro polarizované záření	48
4	Termodynamická rovnováha	50
4.1	Excitační rovnováha	50
4.2	Rovnovážné rozdělení rychlostí částic	52
4.3	Ionizační rovnováha	53
4.3.1	Určení elektronové hustoty	56
4.4	Disociační rovnováha molekul	58
4.5	Záření v termodynamické rovnováze	59
4.5.1	Rovnovážné rozdělení energie	60
4.5.2	Absorpce a emise v termodynamické rovnováze	61
4.6	Lokální termodynamická rovnováha	61
5	Opacita, emisivita a rozptyl	65
5.1	Obecné absorpční a emisní koeficienty	65
5.1.1	Einsteinovy koeficienty pro vázaně-vázané přechody	66
5.1.2	Milneho vztahy pro kontinuum	69
5.2	Struktura atomů	71
5.2.1	Struktura a přechody vodíku a vodíkupodobných iontů	72
5.2.2	Jemná struktura hladin vodíku	73
5.2.3	Struktura mnohoelektronových atomů	77
5.2.4	<i>LS</i> vazba	77
5.2.5	Termy a hladiny v <i>LS</i> aproximaci	78
5.2.6	Rydbergova korekce	81
5.2.7	Dvojexcitované stavy	81
5.2.8	Složitější struktura atomů	83
5.2.9	Výběrová pravidla	83
5.2.10	Zakázané čáry v přírodě	85
5.2.11	<i>jj</i> vazba	86
5.2.12	Ostatní typy vazeb	88
5.2.13	Vliv izotopů	89
5.2.14	Hladiny v magnetickém poli	89
5.3	Absorpce a emise ve spektrálních čarách	90
5.3.1	Přírozené rozšíření spektrálních čar	91
5.3.2	Dopplerovské (tepelné) rozšíření spektrálních čar	92
5.3.2.1	Turbulentní rozšíření spektrálních čar	94
5.3.3	Srážkové rozšíření spektrálních čar	95

5.4	Ionizace a rekombinace	96
5.4.1	Fotoionizační účinný průřez	98
5.5	Volně-volné přechody	100
5.6	Interakce záření s molekulami	102
5.7	Rozptyl v kontinuu	108
5.7.1	Rozptyl na volných elektronech	108
5.7.2	Rozptyl na elektronech vázaných v atomu	109
5.8	Rozptyl ve spektrálních čarách	111
6	Formální řešení rovnice přenosu záření	113
6.1	Difúzní přiblížení	115
6.2	Schwarzschildova rovnice (Λ operátor)	117
6.3	Numerické řešení rovnice přenosu záření	120
6.3.1	Diskretizace rovnice přenosu záření	121
6.3.1.1	Prostorová diskretizace	121
6.3.1.2	Úhlová diskretizace	122
6.3.1.3	Frekvenční diskretizace	123
6.3.2	Dlouhé a krátké charakteristiky	124
6.3.3	Integrální metody	125
6.3.4	Feautrierova metoda	126
6.3.5	Sféricky symetrická rovnice přenosu záření	127
7	Přenos záření s obecnou vydatností	130
7.1	Vydatnost spektrální čáry	130
7.2	Vydatnost s rozptylem	131
7.2.1	Planparalelní rovnice přenosu záření s koherentním roz- ptylem	134
7.3	Termalizační délka	136
7.4	Přímé metody řešení rovnice přenosu záření s rozptylem	137
7.5	Iterační metody řešení rovnice přenosu záření s rozptylem	138
7.5.1	Λ iterace	138
7.5.2	Metoda proměnných Eddingtonových faktorů	140
8	Srážkové procesy	143
8.1	Srážková excitace a deexcitace	143
8.2	Srážková ionizace a rekombinace	147
8.3	Další srážkové procesy	148
8.4	Augerovy procesy	149

9	Obsazení energetických hladin atomů	151
9.1	Lokální termodynamická rovnováha	151
9.1.1	Podmínky pro lokální termodynamickou rovnováhu a jejich porušení vlivem záření	152
9.2	Rovnice kinetické rovnováhy	156
9.3	Četnost zářivých přechodů	157
9.3.1	Vázaně-vázané přechody	158
9.3.2	Vázaně-volné přechody	160
9.3.3	Celková četnost zářivých přechodů	162
9.4	Četnost srážkových přechodů	162
9.5	Soustava rovnic kinetické rovnováhy	165
9.5.1	Některé speciální případy	167
10	Řešení NLTE problému	175
10.1	Dvuhladinový atom	175
10.1.1	Termalizační hloubka ve spektrálních čarách	176
10.1.2	Rovnice pro dvuhladinový atom	179
10.2	Iterační řešení dvuhladinového atomu	181
10.2.1	Λ iterace	181
10.2.2	Urychlená Λ iterace	182
10.3	Mnohohladinový atom	183
10.3.1	Řešení mnohohladinového atomu metodou úplné linearizace	184
10.3.2	Řešení pomocí urychlené Λ -iterace	186
10.4	Základní NLTE efekty v polonekonečné atmosféře	187
10.4.1	NLTE efekty v čarách	188
10.4.2	NLTE efekty pro kontinua	191
11	Přenos záření v pohybujícím se prostředí	195
11.1	Sobolevova aproximace	196
12	Přenos záření metodou Monte Carlo	201
II	Modely hvězdných atmosfér	203
13	Základní rovnice modelů atmosfér	204
13.1	Zářivá hybnost a zářivá energie	206
13.2	Hydrodynamické rovnice	208
13.2.1	Rovnice kontinuity	208
13.2.2	Pohybová rovnice	208
13.2.3	Energiová rovnice	210

13.2.4	Shrnutí rovnic, proměnných a okrajových podmínek	211
13.3	Jednorozměrné hydrodynamické rovnice	213
13.3.1	Jednorozměrné proudění	213
13.3.2	Jednorozměrné stacionární proudění	216
13.3.3	Jednorozměrná stacionární statická atmosféra	217
14	Jednoduché statické atmosféry	219
14.1	Šedá statická planparalelní atmosféra v LTE	219
14.2	Šedá atmosféra se skokem opacity	223
14.3	Střední opacity	226
15	Hydrostatické modely atmosfér	230
15.1	Rovnice hydrostatické rovnováhy	230
15.2	Energetická rovnováha	232
15.2.1	Zářivá rovnováha	233
15.2.2	Unsöldova-Lucyho metoda korekce teplot	234
15.3	Konvekce	236
15.3.1	Modelování konvekce	239
15.4	Rovnice přenosu záření	242
15.5	Rovnice pro obsazení energetických hladin	244
15.6	Rovnice pro hustotu	245
15.7	Diskretizace	246
15.7.1	Diskretizace rovnice přenosu záření	247
15.7.2	Diskretizace rovnice hydrostatické rovnováhy	248
15.7.3	Diskretizace rovnice zářivé rovnováhy	249
15.7.4	Diskretizace rovnic kinetické rovnováhy	250
15.8	Metoda úplné linearizace	250
15.8.1	Užití urychlené Λ iterace	252
15.8.2	Některé podrobnosti výpočetní procedury	253
15.9	Sféricky symetrické modely atmosfér	254
15.10	NLTE ohřev	254
15.11	Zářivá difúze ve statických hvězdných atmosférách	256
16	Opacita v modelech atmosfér	258
16.1	Pokryvkový efekt spektrálních čar	260
16.1.1	NLTE line blanketing	263
17	Užití jednorozměrných modelů atmosfér	269
17.1	Programy pro výpočet statických 1-D modelů	269
17.2	Některá užití jednorozměrných modelů atmosfér	269
17.3	Užití modelů atmosfér v analýze	272

17.4 Klasifikace hvězdných spekter	272
18 Zobecněné jednorozměrné modely atmosfér	273
18.1 Rotace hvězd	273
18.2 Jednorozměrné modely okolohvězdných disků	278
19 Hvězdný vítr	280
19.1 Izotermické větry	282
19.1.1 Izotermický vítr bez přidané síly	282
19.1.2 Izotermický vítr s přidanou silou	287
20 Základní mechanismy urychlování větru	292
20.1 Koronální vítr	292
20.2 Urychlování hvězdného větru zářením	294
20.2.1 Hybnost větru získaná od záření	296
21 Vítr urychlovaný prachem	298
22 Vítr urychlovaný čarami	305
22.1 Urychlování větru pomocí interakce hmoty a záření	305
22.2 Urychlování pasivní složky	309
22.3 Zářivá síla čar	312
22.3.1 Limitní případy Sobolevovy optické hloubky	313
22.3.2 Zářivá síla souboru čar	313
22.4 Řešení hydrodynamických rovnic	316
22.4.1 CAK řešení	317
22.4.2 Korekce na nebodový zdroj záření	320
22.4.3 Hybnost větru získaná od záření	321
22.4.4 Jednonásobný a vícenásobný rozptyl	322
22.4.5 Rotující zářením urychlovaný vítr	322
22.5 Modelování větrů urychlovaných čarami	324
22.6 Použití modelů větrů urychlovaných čarami	329
22.6.1 Určování koncové rychlosti větru a míry ztráty hmoty	329
22.6.2 Vztah mezi hybností větru a zářivostí hvězdy	330
22.6.3 Oblast bistability parametrů větru	331
22.7 Nestabilita větru urychlovaného čarami	331
22.8 Nehomogenní čarami urychlované větry	334
23 Vícerozměrné modely hvězdných atmosfér	341
23.1 Hydrodynamické modely s LTE přenosem záření	341
23.1.1 LTE modely chladných hvězd	341
23.1.2 LTE modely horkých hvězd	342

23.2	Modely s NLTE přenosem záření	343
23.3	Monte Carlo modely	344
23.3.1	Modely záření obálek supernov	344
23.3.2	Modely hvězdných větrů	345
23.3.3	2-D modely disků	345
III Přílohy		347
A Speciální matematické funkce		348
A.1	Exponenciální integrální funkce	348
A.2	Gaussova funkce	349
A.2.1	Některé integrály Gaussovy funkce	349
B Doplnky k atomární fyzice		350
B.1	Rydbergovy konstanty a jednotky energie	350
B.2	Klasický oscilátor	351
B.3	Fotoionizační příčný průřez	353
B.3.1	Vodíkupodobné ionty	353
B.4	Interakce atomů s vnějším magnetickým polem	353
B.5	Poznámky ke struktuře jednotlivých atomů	355
B.5.1	He II	355
B.5.2	Struktura alkalických atomů	355
B.5.3	Struktura kovů alkalických zemin	356
B.5.4	Struktura prvků s částečně zaplněnými p -slupkami	358
B.5.5	Struktura vzácných plynů	368
B.5.6	Struktura prvků s nezaplňnými d a f slupkami	371
B.6	Poznámky ke struktuře molekul	371
B.6.1	Energetické stavy molekul	372
B.6.2	Přechody v molekulách	376
B.7	Rozptyl ve spektrálních čarách	378
C Numerické řešení rovnice přenosu záření		383
C.1	Diskretizace Feautrierova řešení rovnice přenosu záření	383
C.1.1	Diferenční rovnice	383
C.1.2	Matice koeficientů diferenční rovnice	385
C.1.3	Eliminační schéma	387
C.1.4	Monochromatická rovnice přenosu záření s rozptylem	387
C.2	Diskretizace momentové rovnice přenosu záření	388
C.2.1	Koeficienty diferenční rovnice	389

D	Abundance chemických prvků a metalicita	390
E	Linearizace	392
E.1	Metoda linearizace planparalelního LTE modelu atmosféry podrobněji	393
E.1.1	Linearizované rovnice a jejich řešení	393
E.2	Linearizace s ALI	398
F	Ostatní doplňky	400
F.1	Boltzmannova kinetická rovnice	400
F.2	Odvození hydrodynamických rovnic	400
F.3	Specifická tepla a adiabatické indexy	402
IV	Cvičení	403
G	Cvičení	404

Předmluva

Tato kniha vznikala a stále ještě vzniká¹ během mého přednášení předmětů F7600 „Fyzika hvězdných atmosfér“ a F8601 „Modelování hvězdných atmosfér“ v Brně na Ústavu teoretické fyziky a astrofyziky Přírodovědecké fakulty Masarykovy Univerzity. Protože ještě neexistuje její konečná verze, vyskytují se v některých částech textu pouze heslovité poznámky, které budou časem přepracovány do souvislého textu. Rovněž ve velké většině chybějí v knize obrázky. Kniha do značné míry vychází z druhého vydání dnes už klasické učebnice „*Stellar Atmospheres*“ Dimitriho Mihalase (1978) a z jejího třetího vydání (Hubeny and Mihalas, 2014), které vyšlo ve spolupráci s Ivanem Hubeným a pod novým názvem „*Theory of Stellar Atmospheres*“. Jsou využity i jiné základní učebnice, například „*Radiative Processes in Astrophysics*“ (Rybicki and Lightman, 1979), „*Atomic Physics and Spectroscopy*“ (Pradhan and Nahar, 2011), „*Introduction to Stellar Winds*“ (Lamers and Cassinelli, 1999), „*Polarization in Spectral Lines*“ (Landi Degl’Innocenti and Landolfi, 2004) a i další literatura.

Základním cílem této knihy je poskytnout čtenářům úvod do studia vzájemného působení hmoty a záření a tím i vlivu záření na hmotu ve vesmíru. Kniha je rozdělena do dvou základních částí, první (Interakce hmoty se zářením) se zabývá přímou interakcí hmoty a záření a druhá (Modely hvězdných atmosfér) stavbou hvězdných atmosfér a hvězdných větrů.

V první části je podrobně rozebrán vliv hmoty na záření, který je popsán rovnicí přenosu záření a jejím formálním řešením. Velká pozornost je věnována vlivu záření na mikroskopický stav hmoty a obsazení energetických hladin atomů, které nemusí odpovídat termodynamické rovnováze (tzv. NLTE fyzika). Druhá část se zabývá kromě základních zákonů stavby hvězdných atmosfér zejména vlivem záření na globální vlastnosti hmoty, konkrétně na teplotu (přenos energie) a dynamiku (přenos hybnosti) prostředí.

¹Datum poslední aktualizace celého textu je šedě přetištěno přes jednotlivé stránky.

Kapitola 1

Úvod

Záření je i přes úspěšnou detekci gravitačních vln prakticky jediným prostředkem ke studiu vzdálených astronomických objektů. Proto teorie přenosu záření v astronomii patří mezi její nejdůležitější součásti. Zářetí vycházející z astronomických objektů je těmito objekty formováno a přenáší k nám informaci o těchto objektech. Na své cestě k nám se však mění při průchodu různými prostředími, která mu stojí v cestě, mezihvězdným, mezigalaktickým a nakonec i atmosférou naší Země. Kromě toho záření hmotu, kterou prochází, také ovlivňuje. Jeho absorpcí dochází k excitaci a ionizaci prostředí, jeho energie může způsobit ohřev prostředí a jeho hybnost je schopna urychlit hmotu. Studium všeho tohoto vzájemného působení je komplikováno faktem, že v astronomii a astrofyzice jsme převážně odkázáni na pozorování. Možnost provádět astronomické experimenty je dost omezená. Existuje ale také rozvíjející se experimentální směr zvaný laboratorní astrofyzika. Zářetí je jednou ze základních součástí vesmíru. Proto je pochopení procesů spojených s jeho šířením fundamentální znalostí potřebnou v celé řadě astrofyzikálních oborů.

Astrofyzikální záření zahrnuje záření pro energie prakticky z celého energetického spektra záření (γ , rentgenovské, UV, viditelné, infračervené, radiové). Schopnost rozložit pomocí přístrojů záření podle vlnových délek a zaznamenat lidským okem neviditelnou část energetického spektra záření přináší ohromné množství informace. Této informaci umíme porozumět s využitím znalostí struktury atomů a molekul a mechanismu vzájemného působení hmoty a záření.

Na své cestě záření interaguje s hmotou, je pohlcováno, vyzařováno a rozptylováno. Díky charakteristickým vlastnostem jednotlivých atomů, iontů a molekul zanechávají tyto v záření otisk ve formě absorpčních nebo emisních čar, pásů a ionizačních hran. Studium těchto spektrálních jevů můžeme zjistit řadu jinak skrytých informací o hmotě, která záření vypouští a s níž poté záření také interaguje. Pomáhá nám k tomu rozpracovaná teorie struktury částic a jejich interakce se zářením, která předpovídá řadu detailních vlivů na spektrum. V procesu formování

zářivého spektra hraje významnou úlohu i teorie srážkových procesů.

Astrofyzikální prostředí poskytuje možnost studovat atomy v podmínkách, které na Zemi lze jen těžko vytvořit. Bílí trpaslíci mají extrémně široké spektrální čáry, což je způsobeno Starkovým rozšířením pro velmi vysoké hustoty jejich atmosfér. Velmi řídké prostředí mlhovin a HI oblastí umožňuje vznik silných emisních čar zakázaných atomárních přechodů. Astronomická pozorování dokonce vedla k objevům ve fyzice atomů. V některých případech jsou pozorovány atomární přechody, které sice teorie atomů předpovídá, ale na Zemi jsou jen velmi těžko experimentálně ověřitelné. Historickým příkladem je objev helia, které bylo nejdříve zjištěno ve slunečním spektru a až poté bylo nalezeno i na Zemi. Zajímavou historickou událostí byl objev čar nového vodíkupodobného prvku, který byl nazván protovodíkem. Teprve až s rozvojem kvantové teorie atomu se ukázalo, že se jedná o ionizované helium. Také podobná interpretace emisních čar mlhovin jako čar nového prvku s názvem nebulium se nakonec ukázala jako mylná. Tyto čáry se podařilo vysvětlit jako čáry zakázaných přechodů již známých prvků. Některé nejasnosti přetrvávají do současnosti, například není spolehlivě znám původce difúzních mezihvězdných pásů (DIB), i když se rýsuje jistá spojitost s fulereny nebo s polycyklickými aromatickými uhlovodíky.

Klíčem k pochopení spekter přicházejících z vesmíru je přenos záření, který se zabývá vzájemným působením záření a hmoty během jeho cesty k pozorovateli. Matematicky je přenos záření popsán rovnicí přenosu záření, která se při zahrnutí všech závislostí mezi hmotou a zářením stává nelineární integrodiferenciální rovnicí. Není divu, že se astronomové snaží problém přenosu záření co nejvíce zjednodušit a získat tak rychlý nástroj pro předpovědi záření z vesmíru. V některých případech to je možné, ale častěji přílišné zjednodušení zanáší výsledek systematickými nepřesnostmi. Přenos záření ve hvězdných nitrech a v oblastech mezi hvězdnými nitry a povrchem hvězd může být dobře popsán zjednodušenou formou pomocí difúze záření, což je aproximace platná pro velké hustoty hmoty s velmi krátkou střední volnou drahou fotonů. Naopak v mezihvězdném prostředí a v planetárních mlhovinách se jedná o přenos záření v průhledném (opticky tenkém) prostředí, kdy za jistých podmínek můžeme zanedbat některé interakce mezi hmotou a zářením. V případě prostředí s velkými rychlostními gradienty, což jsou například hvězdné větry nebo výbuchy supernov, můžeme pro řešení rovnice přenosu záření použít Sobolevovou aproximaci. Často používaným předpokladem při řešení rovnice přenosu záření je předpoklad lokální termodynamické rovnováhy (LTE), kdy absorpční a emisní koeficienty nezávisí na poli záření. Tento předpoklad odstraňuje nelinearitu rovnice přenosu záření, v řadě případů ale vede k systematicky chybným výsledkům. Správné, ale výpočetně náročnější je opuštění předpokladu LTE, kdy zahrneme vliv záření na excitační a ionizační rovnováhu a tím i na absorpční a emisní vlastnosti hmoty. Toto přiblížení, které se označuje non-LTE nebo NLTE, je hlavním sdělením první části této knihy.

1. ÚVOD

Hvězdná atmosféra je oblast přechodu mezi hvězdou a mezihvězdným prostředím. Tato oblast obsahuje ve srovnání se samotnou hvězdou jen zanedbatelnou část její hmoty (asi 10^{-10}), je to v podstatě pouze „horní okrajová podmínka“ pro studium hvězdné struktury a vývoje. Je to však oblast, která je pro studium hvězd nesmírně důležitá. Veškeré záření, které z hvězd dopadá na Zemi, musí projít hvězdnou atmosférou. Jelikož záření s hmotou interaguje, je hvězdná atmosféra oblastí formování vystupujícího záření a tím i hvězdného spektra. Je to jediná část hvězdy, kterou na Zemi vidíme.

Měření záření dopadajícího z hvězd je podstatou činnosti astronomických observatoří na Zemi i okolo ní. Měří se buď záření pro dané intervaly vlnových délek vymezené filtry v různých oborech záření (např. $U, B, V, R, I, J, K, L, \dots$) nebo podrobné profily spektrálních čar přes celé energetické spektrum. Tyto čáry jsou často rébusem skrývajícím řadu cenných informací. Právě pro rozluštění tohoto rébusu bylo nutné sáhnout po přesnějším fyzikálním popisu hvězdných atmosfér. Můžeme říci, že významným podnětem pro rozvoj teorie hvězdných atmosfér bylo vyvinutí nových detektorů a spektrografů s vysokou rozlišovací schopností. Z vystupujícího záření pak zjišťujeme vlastnosti hvězd.

Podrobná znalost fyziky hvězdných atmosfér je pro velkou část astronomických výzkumů významná. Například hvězdné nitro je skryto pod atmosférou. Proto veškeré znalosti, které o nitru a procesech v něm probíhajících získáme, závisejí do značné míry na tom, jak pochopíme vrstvy nad ním. Tam patří i hvězdná atmosféra. Vliv hvězdných atmosfér však sahá i mimo hvězdy. Z hvězdných atmosfér vychází záření, které ionizuje mezihvězdnou hmotu, proto znalost fyziky hvězdných atmosfér ovlivňuje i poznání mezihvězdné hmoty. Kromě ionizujícího záření uniká z hvězdných atmosfér i hmota. Tomuto produktu hmoty se říká hvězdný vítr. Ten má přímý vliv na vývoj hvězdy i na složení mezihvězdného prostředí. Záření a ztráta hmoty prvních hvězd ve vesmíru (hvězd Populace III) je důležitá pro jejich vývoj a pro pochopení vývoje vesmíru v jeho počátcích, neboť tyto hvězdy byly významným zdrojem ionizujícího záření a konec jejich života výbuchem supernov obohatil mezihvězdné prostředí o prvky těžší než vodík a helium.

Záření vystupující z galaxií je vlastně tvořeno zářením ohromného množství hvězd. Dominantní postavení mají hmotné horké hvězdy, které z celých galaxií září nejvíce. Naše schopnost předpovědět záření vystupující z hvězd přímo ovlivňuje předpovědi záření vystupujícího z galaxií.

Fyzika hvězdných atmosfér je také provázána s jinými fyzikálními disciplínami, využívá jejich metody a výsledky. Nejdůležitější součástí fyziky hvězdných atmosfér je teorie přenosu záření, která kromě vlivu hmoty na záření zahrnuje i vliv záření na hmotu. Další významnou fyzikální disciplínou popisu hvězdných atmosfér je hydrodynamika a její obecnější varianta zahrnující i makroskopické efekty elektromagnetického pole – magnetohydrodynamika. Vliv záření na hydrodynamické rovnice pak studuje zářivá hydrodynamika. Významné je i studium

konvekce v obálkách chladných hvězd a vlivu hvězdné rotace na profily spektrálních čar. Pro strukturu hvězdné atmosféry a její tepelnou rovnováhu má význam termodynamika. Znalosti těchto fyzikálních disciplín usnadňují pochopení dějů ve hvězdných atmosférách.

Oblast fyziky hvězdných atmosfér je poměrně široká, zahrnuje hvězdné atmosféry všech spektrálních typů od nejteplejších k nejchladnějším. V závislosti na teplotě atmosfér se mění jejich složení. V nejteplejších horkých hvězdách jsou převážně ionizované atomy, s klesající teplotou se postupně objevují neutrální atomy, molekuly a prachová zrna. Různá teplota a složení tak způsobují různé spektroskopické vlastnosti hvězdných atmosfér.

Hvězdné atmosféry představují ideální laboratoř pro studium profilů spektrálních čar, dopplerovské rozšíření můžeme studovat nejlépe v astrofyzikálním prostředí. Podobné je to u Starkova rozšíření, kde vysoké hustoty v atmosférách bílých trpaslíků vytvářejí podmínky na Zemi nerealizovatelné. Hvězdné atmosféry a i jiná prostředí jsou reprezentanty termodynamicky nerovnovážného rozdělení obsazení energetických hladin atomů. Projevují se v nich i efekty parciální redistribuce záření při rozptylových procesech.

Zajímavé jsou také různé fyzikální jevy ve hvězdných atmosférách. Například v atmosférách horkých hvězd vzniká silný a rychlý hvězdný vítr urychlovaný tlakem záření ve spektrálních čarách. Tento mechanismus nachází uplatnění i v jiných astronomických objektech, například v kvazarech, aktivních galaktických jádrech nebo akrečních discích. Ve hvězdách slunečního typu a chladnějších dochází v atmosférách ke konvekci, pro chladné veleobry je typický také hvězdný vítr, ale hustý a pomalý, převážně urychlovaný prachem. Tento ilustrační výčet zajímavých atmosférických jevů není zdaleka úplný.

V druhé části této knihy popíšeme základní rovnice struktury hvězdných atmosfér a jejich použití v modelování hvězdných atmosfér a hvězdných větrů.

Část I

Interakce hmoty se zářením

Kapitola 2

Popis záření

V této kapitole zavedeme základní fyzikální veličiny popisující pole záření, což je fundamentální pojem nejen pro studium hvězdných atmosfér, ale i pro celou astrofyziku.

Světlo je elektromagnetické vlnění. K jeho popisu můžeme použít několik způsobů. V astrofyzice se nejvíce používá fenomenologický makroskopický popis pomocí intenzity záření. Tento popis je přijatelný, pokud charakteristický rozměr systému je mnohem větší než vlnová délka záření (příkladem může sloužit světlo procházející klíčovou dírkou, viz Rybicki and Lightman, 1979, kapitola 1.2). Kinetický popis využívá k popisu rozdělovací funkci fotonů. Popis pomocí vektorů elektrického nebo magnetického pole dovoluje brát v úvahu vlnové vlastnosti světla, což umožňuje studovat polarizované záření a případnou foton-fotonovou interakci. V další části této kapitoly zavedeme základní veličiny makroskopického popisu a uvedeme je do souvislostí s částicovým a elektromagnetickým popisem.

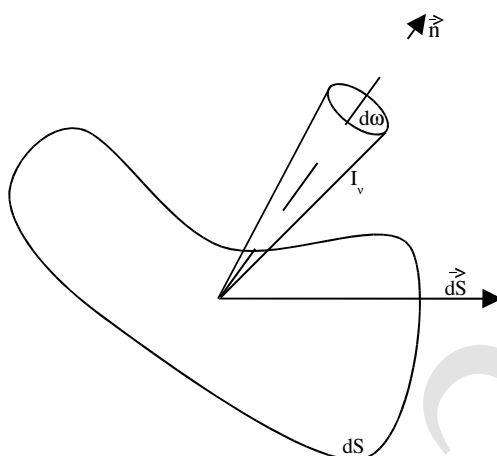
2.1 Specifická intenzita

Vyjádříme množství energie $\delta\mathcal{E}$ přenášené zářením šířícím se ve směru \mathbf{n} o frekvencích z intervalu $\langle\nu; \nu + d\nu\rangle$ skrz orientovaný plošný element $d\mathbf{S}$ do prostorového úhlu $d\varpi$ za čas dt (viz obr. 2.1). Množství energie je dáno vztahem

$$\delta\mathcal{E} = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) (\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}) d\varpi d\nu dt. \quad (2.1)$$

Veličina $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$ je *specifická intenzita záření* o frekvenci ν v místě \mathbf{r} a čase t šířícího se směrem \mathbf{n} do elementu prostorového úhlu $d\varpi$. Její rozměr je $[I] = \text{erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$. Úhel mezi normálou k elementu plochy $d\mathbf{S}$ a směrem šíření záření \mathbf{n} se obvykle značí θ . Platí $\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S} = dS \cos \theta$.

Specifická intenzita nezávisí na vzdálenosti od zdroje záření. Důkaz je patrný z obrázku 2.2. V místě \mathbf{r} je procházející energie dána vztahem (2.1), v místě \mathbf{r}'



Obrázek 2.1: Zavedení specifické intenzity záření $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$. Záření se šíří ve směru \mathbf{n} do prostorového úhlu $d\varpi$ skrz elementární orientovanou plošku $d\mathbf{S}$, která svírá se směrem šíření úhel θ .

vztahem $\delta\mathcal{E}' = I'(\mathbf{r}', \mathbf{n}, \nu, t) dS' \cos\theta' d\varpi' d\nu dt$. Vzdálenost mezi \mathbf{r}' a \mathbf{r} je $d = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$. Místo \mathbf{r}' je vidět z místa \mathbf{r} pod úhlem $d\varpi = (dS'/d^2) \cos\theta'$, podobný vztah platí i pro \mathbf{r} . Místo \mathbf{r} je vidět z místa \mathbf{r}' pod úhlem $d\varpi' = (dS/d^2) \cos\theta$. Z podmínky zachování energie $\delta\mathcal{E}' = \delta\mathcal{E}$ dostaneme rovnost $I = I'$.

Specifická intenzita záření (a i její momenty, které budeme zavádět dále v této kapitole) se někdy zavádí jako funkce vlnové délky λ . Z porovnání odpovídající alternativní definice $\delta\mathcal{E} = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \lambda, t)(\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}) d\varpi d\lambda dt$ s definicí (2.1) dostáváme

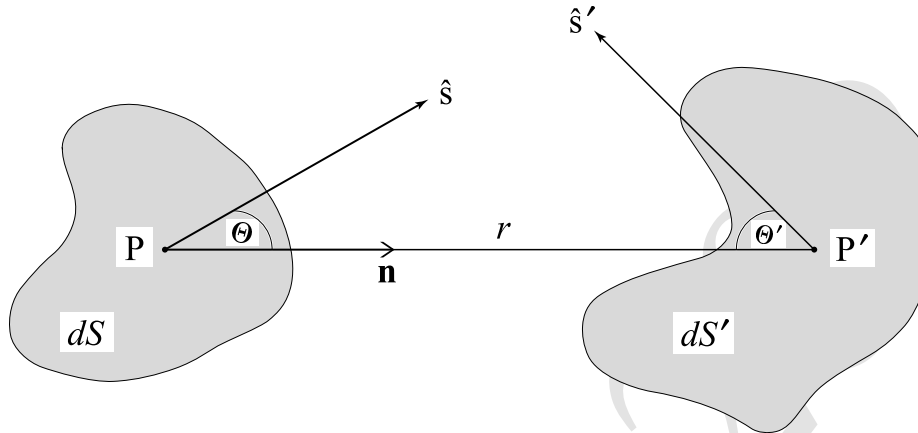
$$I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \lambda, t) d\lambda = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\nu. \quad (2.2)$$

Intenzity $I(\nu)$ a $I(\lambda)$ se tedy liší o faktor $d\nu/d\lambda$. Odpovídajícím způsobem se liší i jejich rozměr.

Číselná hustota fotonů

Výrazem $f_N(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\varpi d\nu$ vyjádříme počet fotonů v místě \mathbf{r} o frekvenci $(\nu; \nu + d\nu)$ pohybujících se ve směru \mathbf{n} do úhlu $d\varpi$, veličina $f_N(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$ je **číselná hustota fotonů**. Přes plošku $d\mathbf{S}$ za čas dt projde $f_N(c dt)(\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S})(d\varpi d\nu)$ fotonů (pohybují se rychlostí světla c). Prošlou energii dostaneme vynásobením výrazu energií fotonu ($h\nu$),

$$\delta\mathcal{E} = (h\nu)f_N(c dt)(\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S})(d\varpi d\nu). \quad (2.3)$$



Obrázek 2.2: Ozařování elementů plochy dS a dS' pro důkaz neměnnosti specifické intenzity podél paprsku. Obrázek z Hubeny and Mihalas (2014, str. 64) (zkopírováno 2).

Odtud porovnáním s (2.1) dostaneme vztah mezi specifickou intenzitou I a číselnou hustotou fotonů f_N ,

$$ch\nu f_N = I. \quad (2.4)$$

Číselná hustota fotonů f_N je definována v souřadnicovém prostoru.

2.2 Rozdělovací funkce záření

Ve statistické mechanice můžeme zavést rozdělovací funkci fotonů ve fázovém prostoru. Vektorová hybnost jednotlivého fotonu je

$$\mathbf{p} = \frac{h\nu}{c} \mathbf{n}. \quad (2.5)$$

Rozdělovací funkci fotonů ve fázovém prostoru označíme $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. Potom

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p$$

označuje počet fotonů daného spinu α v elementárním objemu fázového prostoru $d^3p d^3r$ v čase t . Jelikož fotony patří mezi bosony, jejich spin je roven 1 a projekce spinu do směru šíření záření $m_s = -1, 0, 1$. Vzhledem k nulové klidové hmotnosti fotonů nemá hodnota $m_s = 0$ fyzikální smysl, významné jsou jen projekce ve směru a proti směru šíření záření. Tyto dvě projekce odpovídají polarizaci

2. POPIS ZÁŘENÍ

fotonu, hodnota $m_s = -1$ pravotočivé, hodnota $m_s = 1$ levotočivé (viz například Landi Degl'Innocenti and Landolfi, 2004, Appendix A3).

Celkovou energii fotonů v elementu fázového prostoru můžeme vyjádřit pomocí rozdělovací funkce fotonů jako (viz také Shu, 1991, str. 5)

$$\delta\mathcal{E} = \sum_{\alpha=1}^2 h\nu f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p. \quad (2.6)$$

Paprsek fotonů letících ve směru \mathbf{n} přes elementární plošku $d\mathbf{S}$ rychlostí c zaujímá elementární objem

$$d^3r = (\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S})(c dt).$$

S využitím (2.5) vyjádříme ještě objemový element impulsového prostoru

$$d^3p = p^2 dp d\varpi = (h^3\nu^2/c^3) d\varpi d\nu$$

a dosadíme za $d^3p d^3r$ do (2.6),

$$\delta\mathcal{E} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h^4\nu^3}{c^3} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) (\mathbf{n} \cdot d\mathbf{S}) d\varpi d\nu (c dt). \quad (2.7)$$

Porovnáním s definicí specifické intenzity (2.1) dostaneme vztah mezi rozdělovací funkcí fotonů f_{α} fotonů a specifickou intenzitou záření I ,

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h^4\nu^3}{c^2} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (2.8)$$

Hustotu fotonů se spinem α v jednotkovém objemu fázového prostoru n_{α} dostaneme jako součin rozdělovací funkce fotonů ve fázovém prostoru f_{α} a objemu elementární buňky fázového prostoru h^3 (objem nejmenší buňky fázového prostoru vyplývá z relací neurčitosti, $\Delta x \Delta p_x \geq h$),

$$n_{\alpha} \equiv h^3 f_{\alpha} \quad (2.9)$$

Získáme tak vztah mezi koncentrací fotonů ve fázovém prostoru a specifickou intenzitou záření

$$I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{h\nu^3}{c^2} n_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (2.10)$$

Rozdělovací funkce záření ve fázovém prostoru $f_{\mathbf{R}}$ bude součtem f_{α} přes všechny spiny,

$$f_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p \equiv \sum_{\alpha=1}^2 f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p. \quad (2.11)$$

Pro nepolarizované záření je $f_1 = f_2$, proto

$$f_R(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 2f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (2.12)$$

Rozdělovací funkce záření f_R je relativisticky invariantní veličina (viz například Hubeny and Mihalas, 2014, Appendix B).

2.3 Střední intenzita

Střední intenzitu záření J zavedeme jako průměrnou hodnotu specifické intenzity I přes všechny prostorové úhly

$$J(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{1}{4\pi} \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\varpi \quad (2.13)$$

Je to skalární veličina a její rozměr je $[J] = \text{erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$.

Číselná hustota fotonů frekvence ν v daném místě f_N (viz 2.3) vynásobená energií fotonu $h\nu$ a integrovaná přes všechny směry šíření záření vyjadřuje **monochromatickou hustotu zářivé energie**

$$E_R(\mathbf{r}, \nu, t) = h\nu \oint f_N(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\varpi. \quad (2.14)$$

S využitím vztahu (2.4) dostaneme vztah mezi monochromatickou hustotou zářivé energie a střední intenzitou záření,

$$E_R(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{1}{c} \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\varpi = \frac{4\pi}{c} J(\mathbf{r}, \nu, t). \quad (2.15)$$

Rozměr monochromatické hustoty zářivé energie je $[E_R] = \text{erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$. Integrací $E_R(\mathbf{r}, \nu, t)$ přes frekvence dostaneme **celkovou hustotu zářivé energie**

$$\mathcal{E}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty J(\mathbf{r}, \nu, t) d\nu = \frac{4\pi}{c} J(\mathbf{r}, t) \quad (2.16)$$

s rozměrem $[\mathcal{E}_R] = \text{erg} \cdot \text{cm}^{-3}$.

2.4 Tok

Uvažujme fotony procházející procházející přes plošku $d\mathbf{S}$ v místě \mathbf{r} (viz obrázek 2.1). Bude nás zajímat jejich čistý počet za jednotku času. Čistý počet znamená, že fotony letící proti sobě se odečtou. Necht' $N(\mathbf{r}, \nu, t)$ je zde čistý počet fotonů

o frekvenci ν procházející přes plošku $d\mathbf{S}$ v místě \mathbf{r} za jednotku času. Ten můžeme pomocí číselné hustoty fotonů f_N napsat jako

$$N(\mathbf{r}, \nu, t) = \left(\oint f_N(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) c \mathbf{n} d\varpi \right) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.17)$$

Každý z fotonů má energii $h\nu$. Veličina $Nh\nu$ pak vyjadřuje čistý tok zářivé energie o frekvenci ν přes plošku $d\mathbf{S}$,

$$N(\mathbf{r}, \nu, t) h\nu = \left(ch\nu \oint f_N(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n} d\varpi \right) \cdot d\mathbf{S} = \mathcal{F}(\mathbf{r}, \nu, t) \cdot d\mathbf{S}. \quad (2.18)$$

Veličinu v závorce jsme označili \mathcal{F} a nazveme ji *monochromatickým zářivým tokem*. Je to vektorová veličina. Skalární součin $\mathcal{F} \cdot d\mathbf{S}$ pak vyjadřuje čistý tok energie přes libovolně orientovanou plošku $d\mathbf{S}$. S využitím vztahu (2.4) můžeme monochromatický zářivý tok vyjádřit pomocí specifické intenzity záření I jako

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}, \nu, t) = \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n} d\varpi. \quad (2.19)$$

Rozměr toku je $[\mathcal{F}] = \text{erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$. Integrací přes všechny frekvence získáme *celkový zářivý tok*

$$\mathfrak{F}(\mathbf{r}, t) = \int_0^\infty \mathcal{F}(\mathbf{r}, \nu, t) d\nu. \quad (2.20)$$

s rozměrem $[\mathfrak{F}] = \text{erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$.

2.5 Tenzor tlaku záření

Fotony letící ve směru \mathbf{n} mají složky hybnosti $(h\nu/c)n_j$. Tyto fotony procházejí ploškou kolmou k souřadnici i (ve směru n_i). Počet fotonů prošlých touto ploškou za jednotku času vyjádříme pomocí číselné hustoty fotonů jako $f_N(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)cn_i$. Prošlou hybnost dostaneme jako součin uvedených výrazů. Celkový čistý tok složek hybnosti fotonů přes jednotlivé plošky (tenzor napětí záření) dostaneme integrací přes všechny směry,

$$P_{R_{ij}}(\mathbf{r}, \nu, t) = \oint [f_N(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)cn_i] \left(\frac{h\nu n_j}{c} \right) d\varpi. \quad (2.21)$$

Tato definice odpovídá definici tenzoru napětí v libovolném mechanickém kontinuu. S využitím vztahu (2.4) přepíšeme (2.21) jako

$$P_{R_{ij}}(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{1}{c} \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)n_i n_j d\varpi, \quad (2.22)$$

případně

$$P_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{1}{c} \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n} \mathbf{n} d\varpi, \quad (2.23)$$

kde $\mathbf{n} \mathbf{n}$ znamená dyadický součin vektorů¹. Vztahem (2.23) jsme zavedli **tenzor tlaku záření**. Rozměr tenzoru tlaku záření je $[P_{\mathbf{R}}] = \text{erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{Hz}^{-1}$. Je to symetrický tenzor (protože je dyadický, má 6 nezávislých složek) a platí $P_{\mathbf{R}ij} = P_{\mathbf{R}ji}$.

Protože pro složky jednotkového vektoru \mathbf{n} platí $n_x^2 + n_y^2 + n_z^2 = 1$, stopa tenzoru tlaku záření odpovídá monochromatické zářivé energii (2.15)

$$\text{Tr} P_{\mathbf{R}} = \sum_i P_{\mathbf{R}ii} = \frac{1}{c} \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\varpi = E_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, \nu, t), \quad (2.24)$$

V případě *izotropního záření* je tenzor $P_{\mathbf{R}}$ diagonální s $P_{\mathbf{R}11} = P_{\mathbf{R}22} = P_{\mathbf{R}33}$. Veličinu $\frac{1}{3} \text{Tr} P_{\mathbf{R}}$ (Tr značí stopu tenzoru) můžeme ztotožnit se skalárním **tlakem záření**, který označíme $p_{\mathbf{R}}$. Mezi skalárním tlakem záření a zářivou energií platí v izotropním prostředí vztah

$$p_{\mathbf{R}} = \frac{1}{3} E_{\mathbf{R}}. \quad (2.25)$$

Poměr tenzoru tlaku záření (2.23) a hustoty energie záření (2.15)

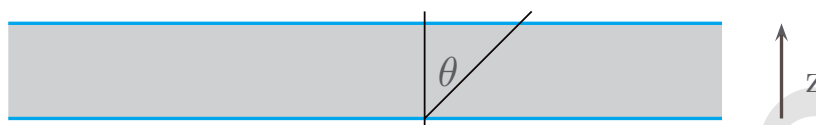
$$\mathbf{f}(\mathbf{r}, \nu, t) = \frac{P_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, \nu, t)}{E_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}, \nu, t)} \quad (2.26)$$

nazveme **Eddingtonovým tenzorem**. Využijeme jej později při řešení momentových rovnic přenosu záření.

2.6 Momenty specifické intenzity

Základní veličinou makroskopického popisu záření je specifická intenzita záření I (viz 2.1). Integrací této veličiny přes všechny směry jsme zavedli střední intenzitu záření J (2.13) úměrnou zářivé energii $E_{\mathbf{R}}$ (2.15), integrací specifické intenzity vynásobené vektorem směru šíření záření \mathbf{n} jsme zavedli tok \mathcal{F} (2.19), integrací specifické intenzity vynásobené vnějším součinem dvou vektorů směru šíření záření $\mathbf{n} \mathbf{n}$ jsme zavedli tenzor tlaku záření $P_{\mathbf{R}}$ (2.23). Tímto postupem jsme zavedli **momenty specifické intenzity záření**. Střední intenzita je moment nultého řádu (říká se jí i nultý moment), tok je moment prvního řádu (první moment – vektor)

¹Někdy se také používá názvu vnější nebo tenzorový součin a označení $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$.



Obrázek 2.3: Schematický náčrt planoparalelní atmosféry. Obrázek z Kubát (2010, obrázek 1) (zkopírováno 4).

a tenzor tlaku záření je moment druhého řádu (druhý moment). Je možné zavést i momenty vyšších řádů, avšak nepoužívají se příliš často.

Pro veličiny energie, toku a tlaku záření vycházející z definice momentů specifické intenzity můžeme souhrnně psát

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) d\varpi &= \frac{1}{4\pi} cE_{\text{R}}(\mathbf{r}, \nu, t) \\ \frac{1}{4\pi} \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n} d\varpi &= \frac{1}{4\pi} \mathcal{F}(\mathbf{r}, \nu, t) \\ \frac{1}{4\pi} \oint I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) \mathbf{n}\mathbf{n} d\varpi &= \frac{1}{4\pi} c\mathcal{P}_{\text{R}}(\mathbf{r}, \nu, t) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Momenty specifické intenzity záření jsou jednak propojeny s veličinami popisujícími zářivou energii, tlak a tok zářivé energie, také ovšem vstupují do momentových rovnic přenosu záření, které uvedeme později (v kapitole 3.6).

2.7 Některé speciální případy popisu záření

Pro popis přenosu záření můžeme pochopitelně používat libolné souřadné soustavy. Bývá však výhodné využít takovou soustavu, v níž rovnice nezískají příliš složitý tvar. Nejčastěji se používá kartézský souřadný systém, častý je i popis ve sférických souřadnicích, případně někdy i v cylindrických souřadnicích.

2.7.1 Planoparalelní atmosféra

Planoparalelní aproximace znamená, že fyzikální veličiny závisejí pouze na jedné souřadnici kartézského systému. Bývá zvykem za tuto souřadnici zvolit z . Záření se ale uvažuje přicházející z celého prostoru. Směr šíření záření svírá s osou z úhel θ , který může nabývat hodnot v intervalu $(0; \pi)$. Jeho kosinus

$$\mu = \cos \theta \quad (2.28)$$

2. POPIS ZÁŘENÍ

se často používá k popisu směru šíření záření místo úhlu samotného. Díky symetrii dané závislostí pouze na jedné souřadnici je třeba uvažovat pouze různé směry podle úhlu θ . Záření nezávisí na azimutu ϕ , který se měří v rovině (x, y) a nabývá hodnot v intervalu $\langle 0; 2\pi \rangle$. Závislost specifické intenzity a jejích momentů na poloze se změní následujícím způsobem:

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) &\rightarrow I(z, \mu, \nu, t) \\ J(\mathbf{r}, \nu, t) &\rightarrow J(z, \nu, t) \\ \mathcal{F}(\mathbf{r}, \nu, t) &\rightarrow \mathcal{F}(z, \nu, t) \\ P_R(\mathbf{r}, \nu, t) &\rightarrow P_R(z, \nu, t) \end{aligned} \quad (2.29)$$

Napišeme si postupně vztahy pro výše uvedené momenty specifické intenzity záření v planparalelním jednorozměrném přiblížení. Element prostorového úhlu je dán vztahem

$$d\varpi = \sin \theta d\theta d\phi = -d\mu d\phi. \quad (2.30)$$

Ve vztahu pro střední intenzitu (2.13) nahradíme integrál přes prostorový úhel $\oint d\varpi$ integrály přes jednotlivé úhly, $\int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta$, proměnnou θ zaměníme za μ a vztah přepíšeme

$$J(z, \nu, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu I(z, \mu, \nu, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu I(z, \mu, \nu, t). \quad (2.31)$$

Pro vyjádření vyšších momentů budeme potřebovat jednotkový vektor ve směru šíření záření $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$, jehož složky jsou

$$\begin{aligned} n_x &= \sqrt{1 - \mu^2} \cos \phi, \\ n_y &= \sqrt{1 - \mu^2} \sin \phi, \\ n_z &= \mu. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Dosazením do rovnice (2.19) dostaneme pro složky vektoru toku v planparalelním přiblížení

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_x &= \mathcal{F}_y = 0, \\ \mathcal{F}_z(z, \nu, t) &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \mu I(z, \mu, \nu, t) = 2\pi \int_{-1}^1 d\mu \mu I(z, \mu, \nu, t). \end{aligned} \quad (2.33)$$

Vidíme, že jediná nenulová složka vektoru toku záření je ve směru osy z . Tato složka vektoru toku vydělená 4π se nazývá **Eddingtonův tok** a označuje se H ,

$$H(z, \nu, t) = \frac{1}{4\pi} \mathcal{F}_z(z, \nu, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \mu I(z, \mu, \nu, t). \quad (2.34)$$

2. POPIS ZÁŘENÍ

Pro složky tenzoru tlaku záření v planparalelní geometrii z definice (2.23) a s využitím (2.32) vyplývá

$$\begin{aligned} P_R(z, \nu, t) = & \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} K(z, \nu, t) & 0 & 0 \\ 0 & K(z, \nu, t) & 0 \\ 0 & 0 & K(z, \nu, t) \end{pmatrix} \\ & - \frac{2\pi}{c} \begin{pmatrix} 3K(z, \nu, t) - J(z, \nu, t) & 0 & 0 \\ 0 & 3K(z, \nu, t) - J(z, \nu, t) & 0 \\ 0 & 0 & 3K(z, \nu, t) - J(z, \nu, t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (2.35)$$

kde střední intenzita záření $J(z, \nu, t)$ je dána vztahem (2.31), Veličina $K(z, \nu, t)$ se někdy nazývá ***K-integrál*** a je dán vztahem

$$K(z, \nu, t) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-1}^1 d\mu \mu^2 I(z, \mu, \nu, t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 d\mu \mu^2 I(z, \mu, \nu, t). \quad (2.36)$$

Zavedeme-li (srovnej s 2.24)

$$p_R(z, \nu, t) = \frac{4\pi}{c} K(z, \nu, t), \quad (2.37)$$

můžeme s využitím definice hustoty zářivé energie E_R (2.15) psát

$$\begin{aligned} P_R(z, \nu, t) = & \begin{pmatrix} p_R(z, \nu, t) & 0 & 0 \\ 0 & p_R(z, \nu, t) & 0 \\ 0 & 0 & p_R(z, \nu, t) \end{pmatrix} \\ & - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3p_R(z, \nu, t) - E_R(z, \nu, t) & 0 & 0 \\ 0 & 3p_R(z, \nu, t) - E_R(z, \nu, t) & 0 \\ 0 & 0 & 3p_R(z, \nu, t) - E_R(z, \nu, t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Divergence tenzoru tlaku P_R má jedinou nenulovou složku ve směru osy z ,

$$(\nabla \cdot P_R)_z = \frac{dp_R(z, \nu, t)}{dz}. \quad (2.39)$$

Pokud je záření *izotropní*, nezávisí specifická intenzita záření I na směru (tedy na μ) a ze vztahů (2.31) a (2.36) dostaneme

$$K(z, \nu, t) = \frac{J(z, \nu, t)}{3}, \quad (2.40)$$

čímž se tenzor (2.35) zjednoduší na diagonální,

2. POPIS ZÁŘENÍ

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{R}}(z, \nu, t) &= \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} K(z, \nu, t) & 0 & 0 \\ 0 & K(z, \nu, t) & 0 \\ 0 & 0 & K(z, \nu, t) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} J(z, \nu, t) & 0 & 0 \\ 0 & J(z, \nu, t) & 0 \\ 0 & 0 & J(z, \nu, t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Tenzor tlaku můžeme v tomto případě nahradit jedinou veličinou, skalárním tlakem záření $p_{\mathbf{R}}(z, \nu, t)$, zavedeném vztahem (2.37).

Opačným extrémem je *maximální anizotropie záření* popsaná vztahem

$$I(z, \mu, \nu, t) = I(z, \nu, t)\delta(\mu - 1), \quad (2.42)$$

což popisuje záření šířící se pouze jedním směrem. Potom jsou si všechny momenty rovny a ze vztahů (2.31) a (2.36) dostaneme

$$J(z, \nu, t) = K(z, \nu, t). \quad (2.43)$$

Tenzor tlaku (2.35) přejde na jednoduchý tvar

$$P_{\mathbf{R}}(z, \nu, t) = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K(z, \nu, t) \end{pmatrix} = \frac{4\pi}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & J(z, \nu, t) \end{pmatrix}. \quad (2.44)$$

Takovéto silně anizotropní záření je například záření od vzdálené hvězdy, kdy tuto hvězdu můžeme považovat za bodový zdroj.

2.7.2 Sféricky symetrická atmosféra

Jako sférických souřadnic se využívá radiální vzdálenosti r , polárního úhlu θ a azimutu ϕ . Sféricky symetrická aproximace využívá k popisu prostorové závislosti fyzikálních veličin souřadnici r , což je vzdálenost od středu symetrie. Na ostatních dvou souřadnicích (θ a ϕ) fyzikální veličiny nezávisí. Ve sférické symetrické atmosféře úhel θ popisuje úhel mezi směrem šíření záření a radiálním směrem. Podobně jako v planoparalelní atmosféře se často používá jeho kosinus, $\mu = \cos \theta$.

Vztahy pro střední intenzitu záření J (2.31), tok $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_\theta, \mathcal{F}_\phi, \mathcal{F}_r)$ (2.33, složce \mathcal{F}_z odpovídá složka \mathcal{F}_r) a tenzor tlaku záření $P_{\mathbf{R}}$ (2.35, souřadnici r odpovídá poslední řádek a poslední sloupec) jsou stejné jako v planoparalelním případě.

Pro radiální složku divergence libovolného tenzoru \mathbf{T} ve sférických souřadnicích platí (např. Mihalas and Weibel-Mihalas, 1984, rovnice A3.91a)

$$(\nabla \cdot \mathbf{T})_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 T_{rr})}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta T_{r\theta})}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{1}{r} (T_{\theta\theta} + T_{\phi\phi})$$

Divergence tenzoru tlaku ve směru r má ve sférické geometrii při sférické symetrii tvar

$$(\nabla \cdot \mathbf{P}_R)_r = \frac{dp_R(r, \nu, t)}{dr} + \frac{3p_R(r, \nu, t) - E_R(r, \nu, t)}{r}. \quad (2.45)$$

Ostatní vztahy uvedené v předcházející kapitole 2.7.1 platí i pro sféricky symetrický případ po záměně $z \rightarrow r$.

2.7.3 Eddingtonův činitel a Eddingtonovo přiblížení

Pro planparalelní i sféricky symetrický případ můžeme místo Eddingtonova tenzoru (2.26) použít skalární veličinu

$$f^K(z, \nu, t) = \frac{K(z, \nu, t)}{J(z, \nu, t)} \quad (2.46)$$

(ve sféricky symetrickém případě použijeme místo z proměnnou r), kterou nazveme **Eddingtonův činitel (faktor)**. Pro izotropní záření je

$$f^K = \frac{1}{3}. \quad (2.47)$$

Často se tato hodnota předpokládá i pro případ, kdy záření izotropní není. Tomuto přiblížení se říká **Eddingtonova aproximace**. Naopak pro extrémně anizotropní záření (2.42) je

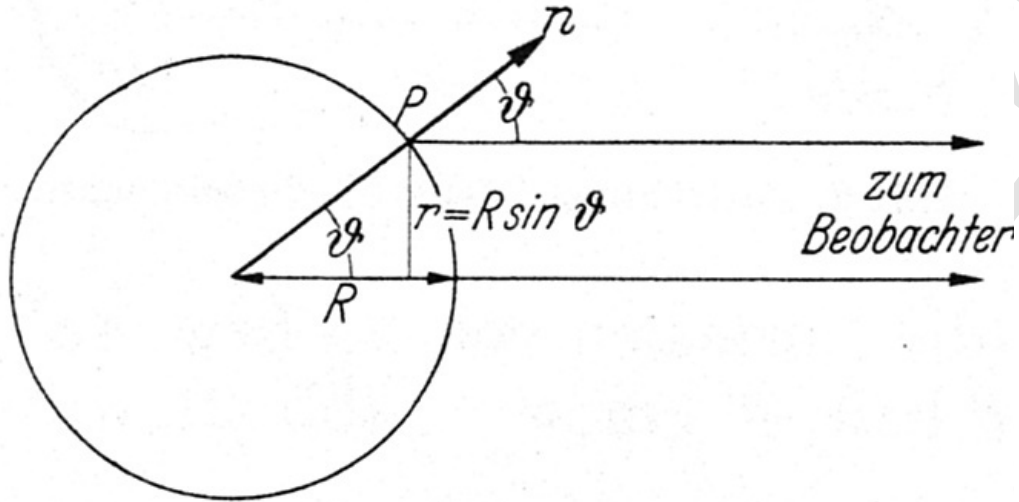
$$f^K \rightarrow 1.$$

Eddingtonův činitel se často používá v iteračních metodách řešení rovnice přenosu záření. Protože se během iteračního procesu mění, označujeme ho často jako **proměnný Eddingtonův činitel**. S praktickým použitím proměnného Eddingtonova činitele se setkáme později (v kapitole 7.5.2).

2.7.4 Záření ze vzdálené hvězdy

Pro popis intenzity dopadajícího záření z hvězd, které vidíme jen jako bodové zdroje záření, se používá tok, i když se jedná o fyzikálně odlišnou veličinu. Ukážeme si proč. Spočítáme celkovou intenzitu záření vycházející ze sféricky symetrické hvězdy směrem ke vzdálenému pozorovateli. Přidržíme se postupu uvedeného v knize Unsöld (1955, str. 2). Vzdálený pozorovatel vidí kulovou hvězdu o poloměru R_* jako kruhový disk. Záření vychází z hvězdy směrem k pozorovateli pod úhly θ závisujícími na vzdálenosti od středu disku. Z obrázku 2.4 vyplývá,

2. POPIS ZÁŘENÍ



Obrázek 2.4: Záření z hvězdy. Z Unsöld (1955, str. 2), R v obrázku je R_* v textu, ϑ v obrázku je θ v textu (zkopírováno 6).

že vzdálenost r od středu pozorovaného disku můžeme svázat s hvězdným poloměrem vztahem

$$r = R_* \sin \theta. \quad (2.48)$$

Element plochy pozorovaného hvězdného disku můžeme dosazením za r z (2.48) vyjádřit jako

$$dS = r dr d\phi = R_*^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi, \quad (2.49)$$

kde $\phi \in \langle 0; 2\pi \rangle$ a $\theta \in \langle 0; \pi/2 \rangle$. Z bodu na povrchu hvězdy o souřadnicích $[r, \phi]$, který můžeme s využitím (2.48) reprezentovat souřadnicemi $[\theta, \phi]$, odchází záření o specifické intenzitě $I(R_*, \nu, \theta, \phi)$. Integrací této specifické intenzity přes celý pozorovaný disk s využitím (2.49) dostaneme

$$\begin{aligned} \pi R_*^2 \bar{I}(R_*, \nu) &= \iint_S I(R_*, \nu, \theta, \phi) dS \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} I(R_*, \nu, \theta, \phi) R_*^2 \sin \theta \cos \theta d\theta d\phi, \end{aligned} \quad (2.50)$$

kde jsme zavedli střední specifickou intenzitu $\bar{I}(R_*, \nu)$, která popisuje střední záření přicházejícího z hvězdného disku k pozorovateli.

2. POPIS ZÁŘENÍ

Pomocí definičního vztahu (2.19) vyjádříme tok na povrchu hvězdy za předpokladu, že osa z je orientována směrem k pozorovateli, dosadíme za element prostorového úhlu z (2.30) a za n_z z (2.32),

$$\mathcal{F}_z(R_*, \nu) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi I(R_*, \mathbf{n}, \nu) \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\phi.$$

Tento výraz vyjadřuje velikost toku v libovolném bodu na povrchu hvězdy, vektor toku je vždy orientován směrem ven z hvězdy (složky \mathcal{F}_x a \mathcal{F}_y vektoru toku jsou nulové).

Pokud se omezíme jen na záření, které z hvězdy odchází, budeme přes úhel θ integrovat jen v intervalu $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$.

$$\mathcal{F}_z^+(R_*, \nu) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(R_*, \mathbf{n}, \nu) \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\phi. \quad (2.51)$$

Vzhledem ke sférické symetrii hvězdy bude takový integrál stejný, jako integrál vystupující intenzity odcházející z hvězdy jedním směrem (k vzdálenému pozorovateli) z viditelného povrchu hvězdy. Každému směru \mathbf{n} můžeme přiřadit místo na zdánlivém hvězdném disku, kde bude záření opouštět atmosféru pod stejným úhlem jako je úhel, který svírá směr \mathbf{n} s radiálním směrem. S využitím tohoto přiřazení můžeme integrál (2.51) zapsat jako

$$\mathcal{F}_z^+(R_*, \nu) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} I(R_*, \theta, \phi, \nu) \sin \theta \cos \theta \, d\theta \, d\phi.$$

Tento výraz je formálně stejný jako výraz pro $\bar{I}(R_*, \nu)$ vyplývající z (2.50). Střední specifická intenzita záření vystupujícího z hvězdy je tedy vyjádřena formálně stejným výrazem jako velikost vektoru toku záření, bereme-li v úvahu pouze záření odcházející z hvězdy.

Za předpokladu, že na hvězdu nedopadá žádné záření z mezihvězdného prostoru, můžeme výše uvedené tvrzení zjednodušit na často používanou větu, že z hvězd pozorujeme tok. Záření přicházející ze vzdálené hvězdy (z bodového zdroje záření) lze pak vyjádřit veličinou²

$$\frac{\mathcal{F}(R_*, \nu)}{\pi} = \bar{I}(R_*, \nu). \quad (2.52)$$

Pokud hvězdu vidíme jako bodový zdroj záření (což je případ vzdálených objektů), pozorované záření je popsáno radiální složkou toku na povrchu hvězdy vyděleného π .

²Veličina $F = \mathcal{F}/\pi$ se někdy nazývá astrofyzikální tok a bývá používána místo \mathcal{F} .

2.8 Elektromagnetický popis záření

V elektromagnetickém popisu záření se využívá vektor intenzity elektrického pole \mathbf{E} . Z Maxwellových rovnic elektromagnetického pole lze odvodit vlnovou rovnici pro \mathbf{E} (viz Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 3.27),

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = 0. \quad (2.53)$$

Stejnou rovnici můžeme napsat i pro vektor intenzity magnetického pole \mathbf{H} , ale pro elektromagnetický popis záření se většinou používá \mathbf{E} . Vektory \mathbf{E} a \mathbf{H} jsou navzájem kolmé a oba jsou kolmé i ke směru šíření záření \mathbf{n} . Řešení rovnice (2.53) ve tvaru monochromatické rovinné vlny šířící se v místě \mathbf{r} rychlostí c můžeme napsat jako

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t), \quad (2.54)$$

kde \mathbf{E}_0 je amplituda vektoru elektrického pole, $\mathbf{k} = (2\pi/\lambda) \mathbf{n}$ je vlnový vektor a $\omega = 2\pi\nu$ je kruhová frekvence.

Vztah k makroskopickému popisu Pro časovou střední hodnotu hustoty energie elektromagnetického pole $\langle E_{\text{EM}} \rangle$ monochromatické vlny platí (viz Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 3.40)

$$\langle E_{\text{EM}} \rangle = \frac{1}{4\pi} \langle E_0^2 \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{E_0^2}{8\pi}, \quad (2.55)$$

kde $E_0 = |\mathbf{E}_0|$. Rovinná monochromatická vlna se šíří pouze ve směru \mathbf{n} , její specifickou intenzitu můžeme zapsat jako

$$I(\nu) = I(\nu_0) \delta(\nu - \nu_0) \delta(\mathbf{n} - \mathbf{n}_0). \quad (2.56)$$

Dosazením do (2.15) dostaneme monochromatickou zářivou energii této rovinné vlny

$$E_R(\nu_0) = \frac{I(\nu_0)}{c}. \quad (2.57)$$

Z rovnosti energií (2.55) a (2.57) plyne vztah mezi specifickou intenzitou záření a amplitudou intenzity elektromagnetického pole

$$I = \frac{c}{8\pi} E_0^2. \quad (2.58)$$

Tento vztah dává do souvislosti popis záření pomocí elektromagnetického pole s makroskopickým popisem.

2.8.1 Šíření rovinné monochromatické vlny, mikroskopická polarizace

Zvolíme-li směr šíření ve směru osy z , budou složky vektoru $\mathbf{E} = (E_x, E_y, 0)$ a řešení můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} E_x(z, t) &= E_1 \cos(kz - \omega t + \phi_1) \\ E_y(z, t) &= E_2 \cos(kz - \omega t + \phi_2) \end{aligned} \quad (2.59)$$

kde E_1 a E_2 tvoří složky vektoru \mathbf{E}_0 , $\mathbf{E}_0 = (E_1, E_2, 0)$. Zafixujeme-li rovinu kmitů elektrického vektoru (například $z = 0$), rovnice (2.59) přejde na tvar

$$\begin{aligned} E_x(t) &= E_1 \cos(\omega t - \phi_1) \\ E_y(t) &= E_2 \cos(\omega t - \phi_2) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Při pohybu elektromagnetické vlny se v takto zavedené rovině (x, y) vektor \mathbf{E} otáčí a jeho konec opisuje elipsu, kterou bývá zvykem nazývat **polarizační elipsou**.

Zavedeme veličiny kombinující amplitudu a fázi složek elektrického vektoru (podrobnější diskusi lze nalézt například v Landi Degl'Innocenti, 2014, kapitola 2.5)

$$\begin{aligned} P_I &= E_1^2 + E_2^2, \\ P_Q &= E_1^2 - E_2^2, \\ P_U &= 2E_1E_2 \cos(\phi_1 - \phi_2), \\ P_V &= 2E_1E_2 \sin(\phi_1 - \phi_2), \end{aligned} \quad (2.61)$$

s jejichž pomocí můžeme popsat vlastnosti polarizační elipsy. Veličiny (2.61) nejsou nezávislé, platí mezi nimi vztah

$$P_I^2 = P_Q^2 + P_V^2 + P_U^2. \quad (2.62)$$

Pomocí veličin (2.61) můžeme také popsat **mikroskopickou polarizaci** záření. Pro $P_Q = P_U = 0$ (P_I a P_V jsou nenulové) je $E_1 = E_2$ a $\phi_1 - \phi_2 = \pm\pi/2$, záření je **kruhově polarizováno**, \mathbf{E} opisuje kružnici, která se pro $P_V = P_I$ otáčí doprava a pro $P_V = -P_I$ doleva. V případě $P_V = 0$ (a nenulových P_I, P_Q, P_U) je buď jedna z E_1 a E_2 nulová nebo $\phi_1 - \phi_2 = n\pi$ ($n = -1, 0, 1$), záření je **lineárně polarizováno**, \mathbf{E} kmitá podél čáry, jejíž sklon α vzhledem k ose x je určen hodnotami P_Q a P_U ($P_U/P_Q = \tan 2\alpha$). Pokud nejsou splněny uvedené speciální podmínky, jedná se o obecný případ, kdy \mathbf{E} opisuje elipsu a hovoříme o **eliptické polarizaci** záření.

Alternativně můžeme rovnice (2.60) přepsat v komplexním formalismu

$$\begin{aligned} E_x(t) &= \operatorname{Re} (E_1 e^{i(\phi_1 - \omega t)}) = \operatorname{Re} (\mathcal{E}_1 e^{-i\omega t}) \\ E_y(t) &= \operatorname{Re} (E_2 e^{i(\phi_2 - \omega t)}) = \operatorname{Re} (\mathcal{E}_2 e^{-i\omega t}) \end{aligned} \quad (2.63)$$

kde

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 &= E_1 e^{i\phi_1}, \\ \mathcal{E}_2 &= E_2 e^{i\phi_2}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Pak veličiny (2.61) můžeme vyjádřit jako

$$\begin{aligned} P_I &= \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 \\ P_Q &= \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 \\ P_U &= \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_1 \\ P_V &= i (\mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_1) \end{aligned} \quad (2.65)$$

2.8.2 Statistický popis, makroskopická polarizace

Rovinná monochromatická vlna je abstraktní pojem. Realističtější popis dostaneme, budeme-li záření považovat za statistickou superpozici vlnových balíčků, z nichž každý je časově a prostorově omezený. Tím dostaneme kvazimonochromatickou vlnu. Pokud navíc nebudou mít jednotlivé balíčky stejné polarizační vlastnosti, bude se i polarizační elipsa měnit statisticky s časem. Definici veličin (2.61) zobecníme pomocí středních hodnot (*makroskopická polarizace*)

$$\begin{aligned} P_I &= \langle E_1^2 + E_2^2 \rangle = \langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \rangle + \langle \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 \rangle \\ P_Q &= \langle E_1^2 - E_2^2 \rangle = \langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_1 \rangle - \langle \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_2 \rangle \\ P_U &= \langle 2E_1 E_2 \cos(\phi_1 - \phi_2) \rangle = \langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \rangle + \langle \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_1 \rangle \\ P_V &= \langle 2E_1 E_2 \sin(\phi_1 - \phi_2) \rangle = i (\langle \mathcal{E}_1^* \mathcal{E}_2 \rangle - \langle \mathcal{E}_2^* \mathcal{E}_1 \rangle) \end{aligned} \quad (2.66)$$

Odvození těchto vztahů za použití Fourierovy transformace lze nalézt v knize Landi Degl'Innocenti (2014, kapitola 2.6).

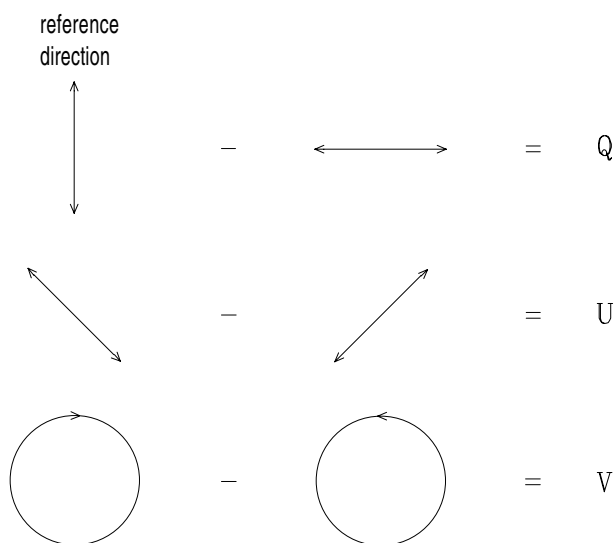
Lze ukázat (Landi Degl'Innocenti and Landolfi, 2004, kapitola 1.4), že na rozdíl od vztahu (2.62) platícího pro mikroskopickou polarizaci platí pro makroskopickou polarizaci nerovnost

$$P_I^2 \geq P_Q^2 + P_V^2 + P_U^2. \quad (2.67)$$

Speciální případ (možný na rozdíl od mikroskopické polarizace)

$$P_Q = P_U = P_V = 0$$

2. POPIS ZÁŘENÍ



Obrázek 2.5: Schematická reprezentace Stokesových parametrů Q , U , V . Obrázek z Landi Degl'Innocenti and Landolfi (2004, obr. 1.8) (zkopírováno 8).

znamená, že obě složky vektoru \mathbf{E} mají stejnou střední hodnotu amplitudy (z $P_Q = 0$) a náhodný fázový posun (z $P_U = P_V = 0$). Jinými slovy jsou kmity vektoru \mathbf{E} podél os x a y stejné a nekorelované. Takové záření nazýváme **nepolarizovaným**.

Veličina

$$p = \frac{\sqrt{P_Q^2 + P_U^2 + P_V^2}}{P_I} \quad (2.68)$$

se nazývá **stupeň polarizace**. Pro nepolarizované záření je $p = 0$. Pokud ve vztahu (2.67) platí rovnost, je $p = 1$ a záření je **úplně polarizované**. Pro $0 < p < 1$ je záření **částečně polarizované**. S využitím (2.58) zavedeme veličiny popisující **makroskopickou polarizaci** záření

$$\begin{aligned} I &\equiv kP_I \\ Q &\equiv kP_Q \\ U &\equiv kP_U \\ V &\equiv kP_V \end{aligned} \quad (2.69)$$

kde $k = c/(8\pi)$. Veličiny I, Q, U, V jsou **Stokesovy parametry**, které používáme k makroskopickému popisu polarizovaného záření. Veličiny pro popis polarizovaného záření zavedl Stokes (1852), avšak označil je A, B, C, D . Značení I, Q, U, V bylo zavedeno později, používá ho Chandrasekhar (1947, 1950) i Walker (1954).

2. POPIS ZÁŘENÍ

Používala se i jiná značení, například P, Q, R, S (Walker, 1904) nebo I, M, C, S (Perrin, 1942).

Veličina I ve vztahu (2.69) je specifická intenzita záření, která byla zavedena v kapitole 2.1. Zavedeme **ideální polarizační filtry** vybírající pouze lineárně polarizované záření nebo kruhově polarizované záření (pravotočivé nebo levotočivé). Použijeme označení I_{0° pro záření lineárně polarizované ve směru osy y , I_{90° ve směru osy x , I_{45° a I_{135° pro záření lineárně polarizované v navzájem kolmých diagonálních směrech mezi osami x a y , I_{\circ} pro kladně kruhově polarizované záření a I_{\ominus} pro záporně kruhově polarizované záření. Pak můžeme veličiny I, Q, U, V ze vztahu (2.69) interpretovat s jejich pomocí (viz obrázek 2.5),

$$\begin{aligned} I &= I_{0^\circ} + I_{90^\circ} = I_{45^\circ} + I_{135^\circ} = I_{\circ} + I_{\ominus} \\ Q &= I_{0^\circ} - I_{90^\circ} \\ U &= I_{45^\circ} - I_{135^\circ} \\ V &= I_{\circ} - I_{\ominus}. \end{aligned} \tag{2.70}$$

Veličina I udává součet intenzit v navzájem kolmých směrech lineární polarizace nebo součet intenzit opačných kruhových polarizací, měří nepolarizované záření. Veličina Q udává rozdíl intenzit ve směrech x a y , měří lineární polarizaci. Veličina U udává rozdíl intenzit v diagonálních směrech, rovněž měří lineární polarizaci. Veličina V udává rozdíl intenzit získaných ideálními kruhově polarizačními filtry, měří tedy kruhovou polarizaci.

Kapitola 3

Přenos záření

V kapitole 2.1 jsme zmínili neměnnost specifické intenzity podél směru šíření záření. Přenos záření ve vakuu znamená tedy zachování záření, žádné fotony nevznikají ani nemizí. Jiná situace nastane, pokud záření cestou potká hmotu. Při vzájemném působení hmoty a záření dochází k přeměně zářivé energie na vnitřní nebo kinetickou energii a naopak, k přeměně vnitřní a kinetické energie na zářivou energii. V této kapitole rozebereme základní typy interakcí a zformulujeme rovnici přenosu záření.

3.1 Absorpce, emise a rozptyl záření hmotou

Interakci záření s hmotou můžeme popsat pomocí srážek fotonů s atomy nebo molekulami. Během těchto interakcí může dojít k absorpci fotonu, emisi fotonu nebo k jeho rozptylu. Kvantově mechanický popis těchto tří základních procesů se poněkud liší od toho, co pod těmito procesy rozumíme v astrofyzice (viz Mihalas, 1978, section 2.1). Pro zjednodušení vysvětlíme rozdíly na interakci fotonů s atomy.

Ve fyzice chápeme absorpci fotonu atomem jako kvantově mechanický proces prvního řádu, který způsobí jeden ze tří atomárních přechodů: (i) přeskok elektronu na vyšší energetickou hladinu atomu, (ii) oddělení elektronu od atomu do kontinua, kde má elektron konečnou kinetickou energii, (iii) zvýšení kinetické energie volného elektronu pohybujícího se v poli atomu. Podobně emise fotonu atomem je kvantově mechanický proces prvního řádu, který je způsoben jedním ze tří atomárních přechodů: (i) spontánním přechodem elektronu do stavu atomu s nižší energií, (ii) rekombinací elektronu z kontinua do vázaného stavu, (iii) převodem části kinetické energie volného elektronu v poli atomu do záření. Rozptyl fotonu je potom kvantově mechanický proces vyššího řádu s definovaným centrem rozptylu.

Zde chybí obrázek

Obrázek 3.1: Ilustrace absorpce, emise a rozptylu ve spektrálních čarách

V astrofyzice se používá pojem *pravé absorpce* (*true absorption*) fotonu, který znamená přeměnu jeho energie na tepelnou energii. Toto nastává, když (i) foton ionizuje atom, (ii) foton je absorbován elektronem pohybujícím se v poli atomu (volně-volná absorpce), (iii) atom je excitován fotonem a tato absorpce fotonu je následována srážkou s jinou částicí, během níž dojde k deexcitaci (foton je srážkově zničen – termalizován). Tento proces pravé absorpce se liší od jiného procesu, kdy je atom místo srážkové deexcitace deexcitován zářivě. Tomuto procesu se pak říká *rozptyl záření v čáře* (*line scattering*), i když to není rozptyl v kvantově mechanickém smyslu. Podobným rozptylovým procesem (absorpce záření následovaná emisí) je rozptyl na vázaných elektronech (Rayleighův nebo Ramanův). Dalším rozptylovým procesem je například rozptyl na volných elektronech (Thomsonův nebo Comptonův). Tento rozptyl je rozptylem i v kvantověmechanickém smyslu.

K absorpčním procesům existují opačné procesy, kdy se foton uvolňuje (emisní procesy), (i) foton vzniká při rekombinaci elektronu, (ii) foton je vyzářen elektronem pohybujícím se v poli atomu (volně-volná emise známá též jako brzdné záření), (iii) foton je vyzářen po srážkové excitaci (na úkor termální energie prostředí – tepelná emise).

Při tomto (astrofyzikálním) popisu, kdy formálně slučujeme různé formy excitace a deexcitace, vzniká řada nejasně klasifikovatelných procesů, například v mnohohladinovém atomu, kdy je absorpce fotonu následována kombinací několika emisních procesů, z nichž některé mohou být srážkové a jiné zářivé. Tyto procesy je pak vhodnější popisovat pomocí soustavy rovnic kinetické (statistické) rovnováhy, které jsou popsány v kapitole 9 (podkapitola 9.2 a následující).

Kromě uvedených procesů může docházet i k jiným procesům, při nichž je vyzářováno nebo pohlcováno záření, například urychlování nabitých částic v coulombickém poli jiné nabitě částice (nejen elektronu), záření pohybujících se nabitých částic buď nerelativisticky (cyklotronové záření) nebo relativisticky (synchrotronové) záření (více viz Rybicki and Lightman, 1979).

V popisu přenosu záření pomocí jeho intenzity, který jsme zavedli v kapitole 2, popisujeme interakci záření s hmotou pomocí makroskopických veličin.

3.1.1 Absorpční koeficient

Pro popis procesů, kdy je během interakce záření s hmotou záření pohlceno, zavedeme *makroskopický absorpční koeficient* $\chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$. Pro tuto veličinu se

3. PŘENOS ZÁŘENÍ

někdy (často) používají i jiné názvy, jako například extinkční koeficient, extinkce nebo *opacita*. Záření o intenzitě $I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$ ve frekvenčním intervalu $\langle \nu; \nu + d\nu \rangle$ se šíří podél paprsku ve směru \mathbf{n} do prostorového úhlu $d\varpi$. Dopadá kolmo na plošku dS objemového elementu délky ds . Při průchodu tímto elementem je za čas dt pohlcena energie δE , která je daná vztahem

$$\delta E = \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) dS ds d\varpi d\nu dt. \quad (3.1)$$

V tomto koeficientu jsou formálně zahrnuty všechny možné absorpční i rozptylové procesy. Podrobněji se jimi budeme zabývat v kapitole 5. Rozměr absorpčního koeficientu $[\chi] = \text{cm}^{-1}$. Převrácená hodnota absorpčního koeficientu $(1/\chi)$ je *střední volná dráha fotonu*. Ve statickém prostředí můžeme často považovat absorpční koeficient za izotropní.

Často se používá i *hmotnostní absorpční koeficient* (*mass absorption coefficient*), který zde označíme \varkappa ,

$$\varkappa(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) = \frac{\chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)}{\rho(\mathbf{r})}, \quad (3.2)$$

což je v podstatě účinný průřez na jednotku hmotnosti. Jeho rozměr je $[\varkappa] = \text{cm}^2 \text{g}^{-1}$. Často se mu říká opacita, což je vzhledem k definici opacity (3.1) matoucí i vzhledem k tomu, že značení není vždy jednotné (používají se symboly χ , κ , \varkappa i k). Jeho výhodou je fakt, že nezávisí na hustotě prostředí. Proto i v prostředí, kde se hustota mění řádově (například hvězdná atmosféra), se $\varkappa(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$ jako funkce \mathbf{r} mění jen málo.

3.1.2 Emisní koeficient

Pro popis emise zavedeme *makroskopický emisní koeficient* $\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)$. Pro tuto veličinu se také používá název *emisivita*. Z objemového elementu ohraničeného ploškou dS a délkou ds vychází během doby dt záření ve frekvenčním intervalu $\langle \nu; \nu + d\nu \rangle$, které se šíří podél paprsku ve směru \mathbf{n} do prostorového úhlu $d\varpi$. Vyzářená energie je dána vztahem

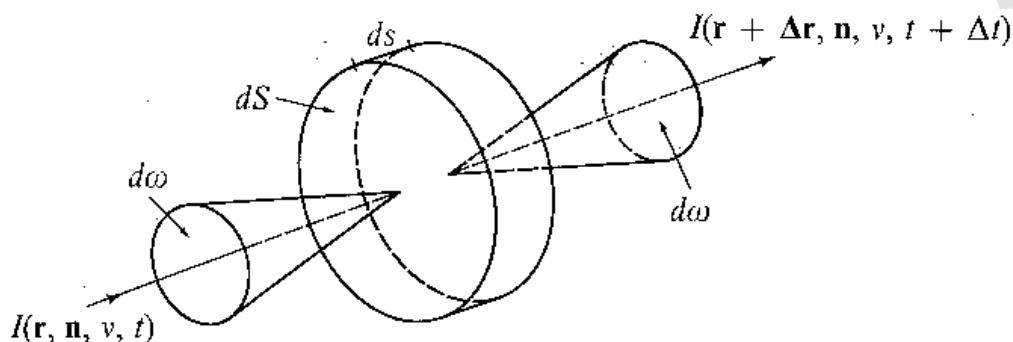
$$\delta E = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) dS ds d\varpi d\nu dt \quad (3.3)$$

V tomto koeficientu jsou formálně zahrnuty všechny možné emisní procesy, jak termální, tak i rozptylové. Podrobněji se jimi budeme zabývat v kapitole 5. Rozměr emisního koeficientu je $[\eta] = \text{erg} \cdot \text{cm}^{-3} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$.

3.2 Rovnice přenosu záření

Rovnici přenosu záření lze bez nadsázky považovat za jednu z nejdůležitějších astronomických rovnic. Odvodíme ji na základě úvah o energetické rovnováze v ob-

3. PŘENOS ZÁŘENÍ



Obrázek 3.2: Odvození rovnice přenosu záření. Z (Mihalas, 1978, obr. 2-1, str. 31) (zkopírováno 10).

jemovém elementu ds dS . Necht' na plošku dS dopadá za čas dt kolmo zářivá energie z frekvenčního intervalu $\langle \nu; \nu + d\nu \rangle$ ve směru \mathbf{n} z prostorového úhlu $d\omega$ (viz obrázek 3.2). Tato energie je dána vztahem (2.1), $\delta\mathcal{E} = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) dS d\omega d\nu dt$. Po průchodu elementární vzdáleností ds se tato energie změní na $\delta\mathcal{E}' = I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t + \Delta t) dS d\omega d\nu dt$. Na elementární vzdálenosti ds je absorbována energie daná vztahem (3.1), $\delta\mathcal{E}_a = \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) dS ds d\omega d\nu dt$ a emitována energie daná vztahem (3.3), $\delta\mathcal{E}_e = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) dS ds d\omega d\nu dt$. Pro tyto energie platí

$$\delta\mathcal{E}' - \delta\mathcal{E} = -\delta\mathcal{E}_a + \delta\mathcal{E}_e. \quad (3.4)$$

Po dosazení do tohoto vztahu dostaneme

$$\begin{aligned} & [I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t + \Delta t) - I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] dS d\omega d\nu dt = \\ & = [\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)] ds dS d\omega d\nu dt. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Rovnice (3.5) vyjadřuje, že rozdíl mezi množstvím energie v místě $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ a čase $t + \Delta t$ a v místě \mathbf{r} a čase t (levá strana) je stejný jako množství energie absorbované a emitované hmotou mezi místy \mathbf{r} a $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$.

Označme $\Delta t = \Delta s/c$, kde Δs je vzdálenost, kterou urazí paprsek za čas Δt z místa \mathbf{r} , kde byl v čase t . Pro intenzitu záření v místě $\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$ a čase $t + \Delta t$ můžeme pomocí derivace ve směru a po záměně $\Delta s \rightarrow ds$ psát

$$I(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t + \Delta t) = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) + \left[\frac{1}{c} \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial I}{\partial s} \right] ds. \quad (3.6)$$

Dosazením z (3.6) do (3.5) dostaneme

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} \right] I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t), \quad (3.7)$$

což můžeme vyjádřit pomocí směru paprsku \mathbf{n} a operátoru ∇ jako

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{n} \cdot \nabla) \right] I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t)I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu, t). \quad (3.8)$$

Často se používá rovnice přenosu záření pro časově nezávislý problém

$$\mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu)I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu), \quad (3.9)$$

případně pomocí derivace ve směru

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu)}{ds} = \eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) - \chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu)I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu). \quad (3.10)$$

I když rovnice přenosu záření obsahuje explicitně pouze časové a prostorové derivace, je to ve své podstatě integrodiferenciální rovnice, protože opacita χ a emisivita η obecně závisejí na střední intenzitě záření, jak uvidíme v kapitole 9.2.

Rovnice přenosu záření jako Boltzmannova rovnice – Napíšeme Boltzmannovu kinetickou rovnici (F.1) pro fotony. Pro fotonový plyn bez obecně relativistických efektů je vnější síla $\mathbf{f}^{\text{ext}} = 0$, foton se v inerciálním systému pohybuje po přímce s rychlostí $\mathbf{v}_p = c\mathbf{n}$, přičemž frekvence zůstává konstantní. Distribuční funkce fotonů f_{R} je se specifickou intenzitou svázána vztahem $f_{\text{R}} = c^2/(h^4\nu^3)I$, číselná hustota fotonů vztahem (2.4), $f_{\text{N}} = I/(ch\nu)$. Dosadíme do (F.1) $f = f_{\text{R}}$. Srážkový člen bude vyjadřovat rozdíl počtu absorbovaných a emitovaných fotonů, dostaneme ho jako rozdíl emitované a absorbované energie poděleného energií fotonu $h\nu$. Dostáváme (Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 11.27)

$$\frac{1}{ch\nu} \left[\frac{\partial I}{\partial t} + c(\mathbf{n} \cdot \nabla) I \right] = \frac{\eta - \chi I}{h\nu} \quad (3.11)$$

Rovnice přenosu záření je Boltzmannova rovnice relativistického plynu neinteragujícího s vnějšími silami, ale silně interagujícího s hmotou.

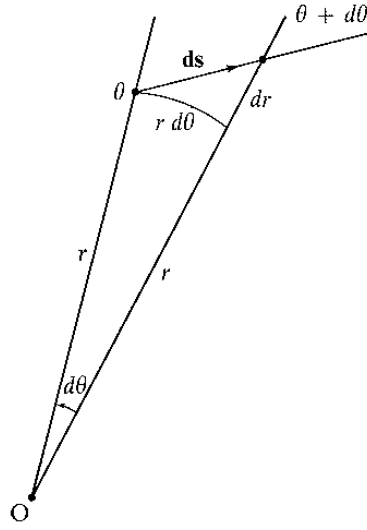
3.2.1 Planparalelní přiblížení v rovinné geometrii

V případě jednorozměrné planparalelní atmosféry zavedené v kapitole 2.7.1 jsou derivace všech veličin podle souřadnic x a y nulové,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} = 0 \quad (3.12)$$

a pro složku jednotkového vektoru ve směru osy z platí

$$n_z = \frac{dz}{ds} = \cos \theta = \mu. \quad (3.13)$$



Obrázek 3.3: Geometrické vztahy mezi souřadnicemi v lokální sférické geometrii (obrázek Mihalas, 1978, Fig.2-2, (zkopírováno 12)).

Z rovnice (3.8) tak dostaneme

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial z} \right] I(z, \mu, \nu, t) = \eta(z, \mu, \nu, t) - \chi(z, \mu, \nu, t) I(z, \mu, \nu, t), \quad (3.14)$$

pro případ časově nezávislé ($\partial/\partial t = 0$) atmosféry se rovnice zjednoduší na

$$\mu \frac{dI(z, \mu, \nu)}{dz} = \eta(z, \mu, \nu) - \chi(z, \mu, \nu) I(z, \mu, \nu). \quad (3.15)$$

3.2.2 Sféricky symetrické přiblížení

V daném bodě sféricky symetrické atmosféry označuje θ úhel mezi radiálním směrem a směrem šíření záření \mathbf{n} . Lokální azimut označíme ϕ . Vzhledem ke sférické symetrii platí

$$\frac{\partial}{\partial \phi} = 0. \quad (3.16)$$

Z obrázku 3.3 vidíme, že pro element délky platí $d\mathbf{s} = dr\mathbf{r}_0 + r d\theta\boldsymbol{\theta}_0$, přičemž $dr = \cos\theta ds$, $r d\theta = -\sin\theta ds$ (při posunu směrem od středu symetrie pro $\forall ds$ platí $d\theta < 0$), \mathbf{r}_0 a $\boldsymbol{\theta}_0$ jsou jednotkové vektory v odpovídajících směrech. Derivace ve směru ds přejde na tvar

$$\frac{\partial}{\partial s} \rightarrow \frac{dr}{ds} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{d\theta}{ds} \frac{\partial}{\partial \theta} = \cos\theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu}. \quad (3.17)$$

Z rovnice (3.7) dostaneme

$$\left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} \right] I(r, \mu, \nu, t) = \eta(r, \mu, \nu, t) - \chi(r, \mu, \nu, t) I(r, \mu, \nu, t), \quad (3.18)$$

pro časově nezávislý případ ($\partial/\partial t = 0$) je

$$\mu \frac{\partial I(r, \mu, \nu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I(r, \mu, \nu)}{\partial \mu} = \eta(r, \mu, \nu) - \chi(r, \mu, \nu) I(r, \mu, \nu). \quad (3.19)$$

3.3 Optická hloubka

Veličinu τ_s popisující průhlednost hmoty pro záření o frekvenci ν v místě \mathbf{r} zavedeme diferenciálním vztahem

$$d\tau_s(\mathbf{r}, \nu) \equiv \chi(\mathbf{r}, \nu) ds, \quad (3.20)$$

a nazveme ji **optická hloubka** podél paprsku s . V této definici je ds elementární geometrická vzdálenost. Integrací této rovnice získáme optickou vzdálenost z místa s_1 do místa s_2 ,

$$\tau_s(\mathbf{r}, \nu) = \int_{s_1}^{s_2} \chi(\mathbf{r}, \nu) ds, \quad (3.21)$$

kteřá je různá pro různá místa s_1 a s_2 , tím i pro různé paprsky, podél nichž se šíří světlo. Protože převrácená hodnota opacity ($1/\chi$) odpovídá střední volné dráze fotonu, udává optická hloubka (3.23) počet volných drah fotonu mezi místy s_1 a s_2 . Jinými slovy optická hloubka měří vzdálenost mezi dvěma místy v jednotkách střední volné dráhy fotonu. Prostředí, jehož optická hloubka je velká, $\tau(\nu) \gg 1$, je prakticky neprůhledné, říkáme mu **opticky tlusté**. Naopak pokud platí, že $\tau(\nu) \ll 1$, je takové prostředí průhledné a běžně se nazývá **opticky tenké**. Jak je patrné ze vztahu (3.21), optická hloubka závisí na frekvenci. Pro každou frekvenci může být optická vzdálenost mezi dvěma body různá. Prostředí opticky tenké na jedné frekvenci může být na jiné frekvenci opticky tlusté. To může platit i pro různé frekvence jedné spektrální čáry.

Pro případ rovinné geometrie můžeme zavést směrově nezávislou veličinu

$$d\tau(z, \nu) \equiv -\chi(z, \nu) dz. \quad (3.22)$$

kde záporné znaménko je důsledkem konvence, že v planparalelní hvězdné atmosféře optická hloubka klesá s rostoucím z . Tento vztah definuje škálu optických

hloubek $\tau(z, \nu)$. Integrací této rovnice podél paprsku dostaneme

$$\tau(z, \nu) = \int_z^{z_{\max}} \chi(z', \nu) dz'. \quad (3.23)$$

Pro paprsky svírající s osou z nenulový úhel θ ($\mu = \cos \theta$) je optická hloubka podél paprsku dána vztahem

$$\tau_s(z, \nu, \mu) = \frac{\tau(z, \nu)}{\mu}. \quad (3.24)$$

Optická hloubka v planoparalelním prostředí roste se sklonem paprsku.

3.4 Vydatnost

Vydatnost (zdrojová funkce, funkce zdroje) je definována jako poměr emisivity a opacity,

$$S(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) = \frac{\eta(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu)}{\chi(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu)}. \quad (3.25)$$

Rovnici přenosu nezávislou na čase (3.9) můžeme pomocí vydatnosti (3.25) a optické hloubky (3.20) přepsat jako

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu)}{d\tau_s(\mathbf{r}, \nu)} = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) - S(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) \quad (3.26)$$

Planoparalelní rovnici přenosu (3.15) můžeme zapsat pomocí optické hloubky $\tau_\nu \equiv \tau(\nu)$ (rovnice 3.22) a vydatnosti (3.25) jako

$$\mu \frac{dI(\tau, \nu, \mu)}{d\tau(\nu)} = I(\tau, \nu, \mu) - S(\tau, \nu, \mu). \quad (3.27)$$

kde intenzita $I(\tau, \nu, \mu)$ a vydatnost $S(\tau, \nu, \mu)$ jsou nyní funkcí optické hloubky $\tau(\nu)$. Rovnici (3.27) můžeme alternativně zapsat způsobem běžným v astrofyzikálním přenosu záření

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} = I_{\nu\mu} - S_{\nu\mu}, \quad (3.28)$$

kde jsme použili označení závislosti veličin na proměnných pomocí indexu místo závorek. Toto označení budeme v následujícím textu používat často.

3. PŘENOS ZÁŘENÍ

Ukážeme si fyzikální význam vydatnosti S (viz Hubeny, 1997). Z definice emisivity (3.3) získáme její integraci přes všechny úhly a vydělením energií fotonu $h\nu$ počet emitovaných fotonů δN_ν^{em} .

$$\delta N_\nu^{\text{em}} = \eta_\nu \frac{4\pi}{h\nu} dS ds d\nu dt. \quad (3.29)$$

S využitím $\eta_\nu ds = (\eta_\nu/\chi_\nu) \chi_\nu ds = S_\nu d\tau_\nu$ vztah přepíšeme

$$\delta N_\nu^{\text{em}} = (S_\nu(\tau_\nu) d\tau_\nu) \left(\frac{4\pi}{h\nu} d\nu dt dS \right) \quad (3.30)$$

Z (3.30) dostáváme, že vydatnost je úměrná počtu fotonů emitovaných na jednotkovou optickou hloubku. Podobně z definice absorpčního koeficientu (3.1) je počet absorbovaných fotonů $\delta N_\nu^{\text{abs}}$

$$\delta N_\nu^{\text{abs}} = (J_\nu(\tau_\nu) d\tau_\nu) \left(\frac{4\pi}{h\nu} d\nu dt dS \right), \quad (3.31)$$

tedy počet fotonů absorbovaných jednotkovou optickou hloubkou je úměrný střední intenzitě záření.

3.5 Typické okrajové podmínky rovnice přenosu

Řešení rovnice přenosu záření (3.10) pro zadanou frekvenci ν a směr šíření záření n vyžaduje jednu okrajovou podmínku specifikující záření na počátku jeho šíření. K úplnému řešení problému přenosu záření v typickém astrofyzikálním prostředí (například hvězdné atmosféře nebo oblasti s mezihvězdným plynem) ve všech směrech potřebujeme okrajových podmínek podstatně více, v podstatě tolik, kolik rovnic přenosu záření potřebujeme vyřešit. Situaci komplikuje provázanost fyzikálních procesů při přenosu záření. Pro řadu astronomických problémů potřebujeme v daném místě najednou znát záření ze všech směrů, ať už pro započtení rozptylu (kapitoly 5.7, 5.8) nebo například pro řešení rovnic kinetické rovnováhy (kapitola 9.2). Situace se naopak zjednoduší, pokud můžeme vyjádřit dopadající intenzitu záření pomocí nějaké závislosti, například pomocí Planckovy funkce. Další významné zjednodušení přinášejí různé symetrie při řešení, jako je například jednorozměrný problém, rovinný i sféricky symetrický.

Ukážeme si několik typických typů okrajových podmínek pro jednorozměrný případ. Zobecnění pro více rozměrů je pak přímočaré. Konkrétní okrajové podmínky je třeba vždy volit s ohledem na konkrétní problém, který řešíme. Zde uvedeme jen několik jednoduchých typických příkladů.

Konečná vrstva, sférická slupka Přiblížení konečné vrstvy (planparalelní atmosféra) můžeme použít například ke studiu slunečních protuberancí nebo planetárních mlhovin, sférická slupka (část sféricky symetrické atmosféry) zase může dobře vystihnout okolohvězdnou obálku.

Budeme používat označení horní a spodní okrajová podmínka, i když pro některé specifické případy (například sluneční protuberance) nelze rozumně stanovit, kde je „nahore“ a kde je „dole“. Za horní okrajovou podmínku budeme považovat okrajovou podmínku pro větší hodnotu souřadnice z . V případě konečné vrstvy nebo sférické slupky můžeme horní okrajovou podmínku pro záření o frekvenci ν ve směru μ zapsat v místě s optickou hloubkou τ_{\min} jako

$$I(\tau_\nu = \tau_{\min}, \mu, \nu) = I^-(\mu, \nu) \quad (-1 \leq \mu \leq 0), \quad (3.32a)$$

kde I^- označuje specifickou intenzitu záření dopadající na horní okraj atmosféry, čemuž odpovídají i záporné směrové kosiny paprsků. Spodní okrajovou podmínku v místě s optickou hloubkou τ_{\max} zapíšeme jako

$$I(\tau_\nu = \tau_{\max}, \mu, \nu) = I^+(\mu, \nu) \quad (0 \leq \mu \leq 1), \quad (3.32b)$$

kde I^+ označuje specifickou intenzitu záření dopadající na spodní okraj atmosféry.

Symetrická vrstva Speciálním případem konečné vrstvy je symetrická vrstva, kterou lze použít pro popis například akrečního disku nebo i sluneční protuberance v případě, že je ozařována na obou okrajích stejně a pokud můžeme předpokládat, že její fyzikální vlastnosti jsou symetrické podle roviny ve středu mezi oběma okraji. Za horní okrajovou podmínku můžeme použít vztah (3.32a), druhou okrajovou podmínku v místě τ_{\max} zvolíme ve středu symetrické vrstvy a bude vyjadřovat fakt, že záření z obou protichůdných směrů je stejné,

$$I(\tau_\nu = \tau_{\max}(\nu), \mu, \nu) = I(\tau_\nu = \tau_{\max}(\nu), -\mu, \nu). \quad (3.33)$$

Polonekonečné prostředí (*semi-infinite medium*) Zvláštní případem konečné vrstvy je vrstva, kde je spodní okrajová podmínka formulována pro optickou hloubku $\tau \gg 1$. Tímto modelem bývají popisovány hvězdné atmosféry. V případě osamocené hvězdy na ni nedopadá žádné záření, případně můžeme dopadající záření zanedbat. V tom případě můžeme horní okrajovou podmínku vyjádřit vztahem (3.32a) s $I^- = 0$,

$$I(\tau_\nu = \tau_{\min}, \mu, \nu) = 0 \quad (-1 \leq \mu \leq 0) \quad (3.34a)$$

Na spodním okraji pro velké optické hloubky můžeme použít například vyjádření dopadající intenzity pomocí rozvoje vydatnosti (podrobněji později v kapitole 6.1),

$$I(\tau_\nu = \tau_{\max}(\nu), \mu, \nu) = I^+(\mu, \nu) = S(\mu, \nu) + \frac{dS(\mu, \nu)}{d\tau_\nu} \quad (0 \leq \mu \leq 1) \quad (3.34b)$$

kteří vyplývá z difúzního přiblížení (kapitola 6.1). Alternativně můžeme spodní okrajovou podmínku nahradit analytickým výrazem (viz Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 11.84) vyjadřujícím omezenost specifické intenzity,

$$\lim_{\tau_\nu \rightarrow \infty} I(\tau_\nu, \mu, \nu) e^{-\tau_\nu/\mu} = 0, \quad (3.34c)$$

který je vhodný pro analytické výpočty.

3.6 Momenty rovnice přenosu záření

Momentové rovnice přenosu záření dostaneme vynásobením rovnice přenosu pro specifickou intenzitu (3.8) mocninami vektoru směru šíření záření \mathbf{n} a následnou integrací přes všechny směry (podobně jako v kapitole 2.6). Použití momentů v rovnici přenosu záření odstraní explicitní úhlovou závislost této rovnice.

Integrací rovnice (3.8) přes ϖ (všechny směry) dostaneme s využitím definic (2.13) a (2.19) **momentovou rovnici přenosu záření nultého řádu**

$$\frac{4\pi}{c} \frac{\partial J_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_\nu = \oint [\eta_\nu(\mathbf{n}) - \chi_\nu(\mathbf{n}) I_\nu(\mathbf{n})] d\varpi.$$

Pro zjednodušení zápisu neuvádíme explicitně závislost na \mathbf{r} a t . S využitím definice (2.15) dostaneme **rovnici pro monochromatickou zářivou energii**

$$\frac{\partial E_{R\nu}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_\nu = \oint [\eta_\nu(\mathbf{n}) - \chi_\nu(\mathbf{n}) I_\nu(\mathbf{n})] d\varpi. \quad (3.35a)$$

Vynásobením rovnice (3.8) \mathbf{n}/c a poté její integrací přes ϖ dostaneme **momentovou rovnici přenosu záření prvního řádu**, což je v podstatě **rovnice monochromatické hybnosti záření**,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{P}_{R\nu} = \frac{1}{c} \oint \mathbf{n} [\eta_\nu(\mathbf{n}) - \chi_\nu(\mathbf{n}) I_\nu(\mathbf{n})] d\varpi. \quad (3.35b)$$

V momentových rovnicích přenosu záření, podobně jako v hydrodynamických momentových rovnicích, vystupují najednou momenty různých řádů. Rovnice

3. PŘENOS ZÁŘENÍ

nultého řádu svazuje momenty nultého a prvního řádu, rovnice prvního řádu svazuje momenty prvního a druhého řádu. Pokud budeme chtít řešit problém přenosu záření pomocí momentů, budeme mít vždy o jednu neznámou více než rovnic. Proto je nutné systém momentových rovnic doplnit nějakou další rovnicí svazující použité momenty. Při řešení problému přenosu záření pomocí momentových rovnic nultého a prvního řádu se používá vztah (2.26), kterým jsme zavedli Eddingtonův tenzor, za předpokladu, že hodnotu Eddingtonova tenzoru známe.

Integrací rovnice (3.35a) přes všechny frekvence dostaneme rovnici pro **celkovou zářivou energii**, kterou označíme cG^0 (stejně jako Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 11.49),

$$\frac{\partial \mathcal{E}_R}{\partial t} + \nabla \cdot \mathfrak{F} = \int_0^\infty d\nu \oint [\eta_\nu(\mathbf{n}) - \chi_\nu(\mathbf{n})I_\nu(\mathbf{n})] d\varpi \equiv -cG^0, \quad (3.36a)$$

kde cG^0 označuje celkovou míru přenosu energie mezi hmotou a zářením (*net rate of radiative energy deposition*). Podobně integrací rovnice (3.35b) přes frekvence dostaneme **rovnici celkové hybnosti záření**

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{P}_R = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint \mathbf{n} [\eta_\nu(\mathbf{n}) - \chi_\nu(\mathbf{n})I_\nu(\mathbf{n})] d\varpi \equiv -\mathbf{G}. \quad (3.36b)$$

Veličina \mathbf{G} v rovnici (3.36b) je **hustota čisté zářivé síly**. Obě veličiny, cG^0 a \mathbf{G} , se využívají v zářivé hydrodynamice.

Často se využívají zjednodušené tvary momentových rovnic pro různé speciální případy. Ve statickém prostředí je opacita $\chi_\nu(\mathbf{n})$ izotropní. Pokud budeme navíc předpokládat, že všechny rozptylové procesy jsou izotropní, bude i emisivita $\eta_\nu(\mathbf{n})$ izotropní. V tomto případě můžeme rovnice (3.35) zjednodušit

$$\frac{\partial E_{R\nu}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{F}_\nu = 4\pi (\eta_\nu - \chi_\nu J_\nu), \quad (3.37a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathcal{F}_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{P}_{R\nu} = -\frac{1}{c} \chi_\nu \mathcal{F}_\nu. \quad (3.37b)$$

Integrací rovnic (3.37) přes frekvence od 0 do ∞ dostaneme analogii vztahů (3.36) pro izotropní opacitu a emisivitu,

$$\frac{\partial \mathcal{E}_R}{\partial t} + \nabla \cdot \mathfrak{F} = 4\pi \int_0^\infty (\eta_\nu - \chi_\nu J_\nu) d\nu, \quad (3.38a)$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{P}_R = -\frac{1}{c} \int_0^\infty \chi_\nu \mathcal{F}_\nu d\nu. \quad (3.38b)$$

V časově nezávislém prostředí platí vztahy (3.37) a (3.38) bez časových derivací.

3.6.1 Momentové rovnice pro jednorozměrnou časově nezávislou atmosféru

Dalšího zjednodušení můžeme dosáhnout pro případ prostředí, jehož vlastnosti závisí jen na jedné prostorové souřadnici. Nadále předpokládáme statické časově nezávislé prostředí.

Planparalelní atmosféra V případě planparalelního časově nezávislého prostředí (kapitola 2.7.1) přejdou rovnice (3.37) na tvar (podle 2.33 je divergence toku $(\nabla \cdot \mathcal{F})_z = d\mathcal{F}_z/dz = 4\pi dH/dz$, divergence tenzoru tlaku je vyjádřena vztahem 2.39)

$$\frac{dH_\nu(z)}{dz} = \eta_\nu(z) - \chi_\nu(z)J_\nu(z) \quad (3.39a)$$

$$\frac{dK_\nu(z)}{dz} = -\chi_\nu(z)H_\nu(z) \quad (3.39b)$$

kde jsme využili definice (2.34) a rovnice (2.37). K uzavření systému momentových rovnic použijeme rovnici definující Eddingtonův faktor (2.46), ale bez časové závislosti,

$$f_\nu^K(z) = \frac{K_\nu(z)}{J_\nu(z)}. \quad (3.40)$$

Pomocí tohoto vztahu můžeme rovnice (3.39a) a (3.39b) sloučit do jedné rovnice druhého řádu

$$\frac{d^2 (f_\nu^K(z)J_\nu(z))}{d\tau_\nu^2(z)} = J_\nu(z) - S_\nu(z). \quad (3.41)$$

Rovnici doplníme o vhodné okrajové podmínky pro J_ν na obou okrajích analogicky postupu v kapitole 3.5.

Sféricky symetrická atmosféra V případě sféricky symetrické atmosféry (kapitola 2.7.2) dostaneme (divergence toku je $(\nabla \cdot \mathcal{F})_r = (1/r^2) d(r^2\mathcal{F})/dr$, divergence tenzoru tlaku je vyjádřena vztahem 2.45)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d[r^2 H_\nu(r)]}{dr} = \eta_\nu(r) - \chi_\nu(r)J_\nu(r) \quad (3.42a)$$

$$\frac{dK_\nu(r)}{dr} + \frac{3K_\nu(r) - J_\nu(r)}{r} = -\chi_\nu(r)H_\nu(r). \quad (3.42b)$$

3. PŘENOS ZÁŘENÍ

Soustavu momentových rovnic uzavřeme podobně jako v planparalelním případě. Zavedeme-li kromě Eddingtonova faktoru $f_\nu^K(r)$ ještě i **funkci sféřičnosti** $q_\nu(r)$ vztahem (viz Auer, 1971)

$$\frac{dq_\nu(r)}{dr} \frac{1}{q_\nu(r)} = \frac{3 - [f_\nu^K(r)]^{-1}}{r} \quad (3.43)$$

můžeme rovnici (3.42b) přepsat jako

$$\frac{1}{q_\nu(r)} \frac{d[q_\nu(r)K_\nu(r)]}{dr} = -\chi_\nu(r)H_\nu(r) \quad (3.44)$$

Odtud po zavedení proměnné X_ν vztahem

$$dX_\nu(r) = -\frac{q_\nu(r)\chi_\nu(r)}{r^2} dr \quad (3.45)$$

dostaneme

$$\frac{d[q_\nu(r)f_\nu^K(r)J_\nu(r)]}{dX_\nu(r)} = r^2 H_\nu(r). \quad (3.46a)$$

Derivaci podle r nahradíme derivací podle X_ν i v rovnici (3.42a),

$$\frac{d(r^2 H_\nu(r))}{dX_\nu(r)} = \frac{r^4}{q_\nu(r)} [J_\nu(r) - S_\nu(r)]. \quad (3.46b)$$

Rovnice (3.46) zkombinujeme a tím můžeme soustavu rovnic (3.42) přepsat jako jednu rovnici druhého řádu (viz Auer, 1971)

$$\frac{d^2 [f_\nu^K q_\nu(r) J_\nu(r)]}{dX_\nu^2(r)} = \frac{r^4}{q_\nu(r)} [J_\nu(r) - S_\nu(r)]. \quad (3.47)$$

Rovnici doplníme podobně jako v planparalelním případě o vhodné okrajové podmínky pro J_ν na obou okrajích.

Alternativně můžeme funkci sféřičnosti zavést vztahem (podle Hummer and Rybicki, 1971)

$$\frac{dq_\nu(r)}{dr} \frac{1}{q_\nu(r)} = \frac{1 - [f_\nu^K(r)]^{-1}}{r} \quad (3.48)$$

Momentová rovnice druhého řádu pro střední intenzitu dostane s takto definovanou proměnnou tvar

$$\frac{d^2 [r^2 f_\nu^K q_\nu(r) J_\nu(r)]}{dX_\nu^2(r)} = \frac{r^2}{q_\nu(r)} [J_\nu(r) - S_\nu(r)], \quad (3.49)$$

kde proměnná X_ν má trochu jinou definici, $dX_\nu = -q_\nu \chi_\nu dr$.

Uzavření momentových rovnic v jednorozměrném případě

Uzavření systému momentových rovnic dosáhneme pomocí Eddingtonova faktoru (3.40), ve sféricky symetrické případě navíc s pomocí funkce sférickosti (3.43), která je však na Eddingtonově faktoru závislá. Je-li $f_\nu^K(r)$ dané, je systém rovnic uzavřen a lze jej snadno vyřešit. Jednoduchou uzavírací aproximací je Eddingtonova aproximace (kapitola 2.7.3), kdy pokládáme $f_\nu^K(r) = 1/3$. Přesnějších výsledků však dosáhneme iterativním určením Eddingtonova faktoru $f_\nu^K(r)$, kterým se budeme zabývat v kapitole 7.5.2.

3.7 Rovnice přenosu pro polarizované záření

rovnice pro Stokesovy parametry, η z kvantovky

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \chi_I & \chi_Q & \chi_U & \chi_V \\ \chi_Q & \chi_I & \rho_V & -\rho_U \\ \chi_U & -\rho_V & \chi_I & \rho_Q \\ \chi_V & \rho_U & -\rho_Q & \chi_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_I \\ \eta_Q \\ \eta_U \\ \eta_V \end{pmatrix} \quad (3.50)$$

χ_I – běžný absorpční koeficient

χ_Q, χ_U, χ_V – absorpční koeficienty polarizačních stavů (obecně vzájemně různé)

ρ_Q, ρ_U, ρ_V – mění fáze polarizačních stavů

formálně

$$\frac{d\mathbf{I}}{ds} = -\mathbf{K} \cdot \mathbf{I} + \boldsymbol{\eta} \quad (3.51)$$

propagační matice $\mathbf{K} = \mathbf{K}^{(A)} - \mathbf{K}^{(S)}$ (část je symetrická a část antisymetrická)

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \chi_I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \chi_I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \chi_I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \chi_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_V & -\rho_U \\ 0 & -\rho_V & 0 & \rho_Q \\ 0 & \rho_U & -\rho_Q & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_I \\ \eta_Q \\ \eta_U \\ \eta_V \end{pmatrix} \quad (3.52)$$

na pravé straně rovnice (3.52) zleva:

3. PŘENOS ZÁŘENÍ

absorpční matice absorpce (zeslabení) záření – zobecnění absorpčního koeficientu pro polarizované záření

dichroická matice diferenciální absorpce různých polarizačních stavů; absorpční vlastnosti závisí na směru elektrického pole (polarizaci)
(χ_Q, χ_U, χ_V)

disperzní matice rozfázování složek vektoru elektrického pole
anomální disperze
(ρ_Q, ρ_U, ρ_V)
příklad: ρ_V způsobuje rotaci směru lineární polarizace

Kapitola 4

Termodynamická rovnováha

Termodynamická rovnováha je udržována náhodnými srážkami mezi částicemi. V této kapitole si uvedeme základní rovnovážná rozdělení, která v rovnováze popisují situaci ve hvězdných atmosférách. Shrňeme základní výsledky statistické mechaniky klasických (rozlišitelných) částic, které budeme v dalších částech potřebovat (Boltzmannova statistika). Z Boltzmannova zákona $S = k \ln W$ svazující entropii ideálního plynu S s termodynamickou pravděpodobností makrostavu W (která je úměrná počtu mikrostavů) dostaneme (viz například Kvasnica 1983, kapitola III.2 nebo Hubeny and Mihalas 2014, Section 4.2) pro rovnovážné rozdělení stavů $\tilde{w}_i^* = n_i^*/\mathcal{N}$ (kde \tilde{w}_i^* je pravděpodobnost nalezení částice ve stavu i , n_i^* je počet částic ve stavu i a \mathcal{N} je celkový počet částic) vztah¹

$$\tilde{w}_i^* = \frac{n_i^*}{\mathcal{N}} = \frac{g_i}{U} \exp(-\beta\epsilon_i), \quad (4.1)$$

kde $U = \sum_i g_i \exp(-\beta\epsilon_i)$ je kanonická partiční funkce, g_i je statistická váha stavu i , β je termodynamický parametr, který je roven $1/(kT)$, T je teplota a ϵ_i je energie stavu i . Tomuto rozdělení se říká Gibbsovo nebo také Boltzmannovo rozdělení.

4.1 Excitační rovnováha

Rovnovážné rozdělení vnitřních stupňů volnosti dostaneme z Gibbsova rozdělení. Pro systémy v rovnováze platí rozdělovací funkce, kterou zde budeme nazývat Boltzmannovou. Pomocí rovnice (4.1) můžeme vyjádřit rozdělení excitačních

¹Hvězdičkou v horním indexu (n_i^*) budeme označovat rovnovážné hodnoty obsazení stavů (koncentrací).

4. TERMODYNAMICKÁ ROVNOVÁHA

stavů i pro daný libovolný iont j ,

$$\frac{n_{ij}^*}{N_j^*} = \frac{g_{ij}}{U_j(T)} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{ij}}{kT}\right). \quad (4.2)$$

Zde \mathcal{E}_{ij} je excitační energie stavu i iontu j , g_{ij} je statistická váha tohoto stavu, n_{ij}^* je jeho rovnovážná koncentrace, N_j^* označuje rovnovážnou koncentraci iontů j a

$$U_j(T) = \sum_i g_{ij} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{ij}}{kT}\right) \quad (4.3)$$

je partiční funkce iontu j . Pro poměr n_i^* (rovnovážná koncentrace stavu i) k n_0^* (rovnovážná koncentrace základního stavu) můžeme při vynechání indexu iontu j psát

$$\frac{n_i^*}{n_0^*} = \frac{g_i}{g_0} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_i}{kT}\right), \quad (4.4)$$

kde g_0 a g_i jsou odpovídající statistické váhy a \mathcal{E}_i je excitační energie stavu i . Vztah (4.4) můžeme snadno zobecnit pro poměr obsazení libovolných stavů l a m ,

$$\frac{n_m^*}{n_l^*} = \frac{g_m}{g_l} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_m - \mathcal{E}_l}{kT}\right) = \frac{g_m}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{lm}}{kT}\right), \quad (4.5)$$

kde ν_{lm} je frekvence přechodu mezi stavy l a m . Rovnice (4.4) nebo (4.5) nazýváme **Boltzmannovou excitační rovnicí**, případně **Boltzmannovým rozdělením excitačních stavů**.

Definice partiční funkce (4.3) je přímočará, součet se provádí přes všechny energetické stavy atomu či iontu. Součet ve vztahu (4.3) diverguje, ale to platí pouze pro izolovaný atom nebo iont (ve vakuu). V reálném prostředí je atom či ion obklopen jinými částicemi, které svým působením způsobují snížení ionizační energie. Tím se stane, že ne všechny vázané stavy existují. Pro snížení ionizační energie iontu j můžeme přibližně psát (viz Mihalas, 1978, rovnice 9-106)

$$\Delta\mathcal{E}_{Ij} = \frac{Z_j e^2}{D} \quad (4.6)$$

kde (Z_j je náboj iontu j) a

$$D = \sqrt{\frac{\frac{kT}{4\pi e^2}}{n_e + \sum_j Z_j^2 n_j}} \quad (4.7)$$

je Debyeova délka (viz Mihalas 1978, rovnice 9-99; Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 8.79)². Vztah (4.6) znamená, že ionizační energie se sníží u všech částic daného druhu stejně. Fyzikálně přesnější je statistické zahrnutí snížení ionizační energie pomocí pravděpodobností obsazení energetických hladin w_{ij} (Däppen et al., 1987; Hummer and Mihalas, 1988), neboť lze těžko předpokládat, že vliv okolních částic bude na každou částici zcela identický. Partiční funkci pak vyjádříme ve tvaru

$$U_j(T) = \sum_i w_{ij} g_{ij} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{ij}}{kT}\right) \quad (4.8)$$

Pravděpodobnosti obsazení energetických stavů w_{ij} nabývají hodnot z intervalu $\langle 0, 1 \rangle$.

4.2 Rovnovážné rozdělení rychlostí částic

Rychlosti pohybu všech částic mají v rovnovážném stavu hodnoty odpovídající Maxwellovu rozdělení. Uvedeme si jeho odvození využívající Gibbsovo rozdělení (4.1). Objemový element fázového prostoru částic můžeme vyjádřit jako

$$dp_x dp_y dp_z dV = m^3 dv_x dv_y dv_z dV = 4\pi m^3 v^2 dv dV, \quad (4.9)$$

kde m je hmotnost uvažovaných částic. Počet stavů v elementu fázového prostoru (statistickou váhu) dostaneme podělením objemového elementu (4.9) objemem elementární buňky fázového prostoru (h^3)

$$g_{\text{trans}} = \frac{4\pi m^3 v^2 dv dV}{h^3} \quad (4.10)$$

Do rovnice (4.1) dosadíme za energii kinetickou energii částic $\frac{1}{2}mv^2$ a statistickou váhu z rovnice (4.10). Pro pravděpodobnost $d\tilde{w}_6$ nalezení částice v objemovém elementu (4.9) dostaneme

$$d\tilde{w}_6 = \frac{d^6 n^*(\mathbf{x}, v)}{N} = \frac{4\pi m^3}{h^3} \frac{1}{U_{\text{trans}}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) v^2 dv dV \quad (4.11)$$

Partiční funkce translačních pohybů U_{trans} je (McQuarrie, 1976, rovnice 5-5 nebo 5-8)

$$U_{\text{trans}} = \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V \quad (4.12)$$

²Ve fyzice plazmatu se Debyeova délka často značí λ_D . Toto označení si ponecháme pro Dopplerovskou pološířku spektrálních čar (5.51) vyjádřenou ve vlnových délkách.

Integrací (4.11) přes prostor (dV) a dosazením za U_{trans} z (4.12) dostaneme pravděpodobnost $dw(v)$, že rychlost částice leží v intervalu $(v, v + dv)$,

$$dw(v) = \frac{d^3n^*(v)}{N} = f(v) dv = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 dv, \quad (4.13)$$

což je **Maxwellovo rozdělení rychlostí**. Nejpravděpodobnější rychlost částice je

$$v_{\text{th}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (4.14)$$

kteřá se často nazývá termální nebo **tepelná rychlost** daného druhu částic. Kromě toho můžeme zavést **střední kvadratickou rychlost** $\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{(3kT)/m}$ (v termodynamické rovnováze mají všechny částice stejnou kinetickou energii $\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}kT$) a pro střední kvadratickou rychlost ve směru pohledu (line-of-sight) můžeme psát $\sqrt{\langle v_x^2 \rangle} = \sqrt{(kT)/m}$.

Částice s translační i vnitřní energií. Pohybující se atomy nebo ionty jsou příkladem takových částic. Jejich partiční funkce musí zohledňovat obě energetická rozdělení,

$$U(T) = \sum_i \sum_t g_i g_t \exp\left(-\frac{\epsilon_i + \epsilon_t}{kT}\right). \quad (4.15)$$

V případě řídkých plynů jsou jednotlivé partiční funkce nezávislé a můžeme vztah zjednodušit. Partiční funkci můžeme rozdělit na součin jednotlivých partičních funkcí,

$$U(T) = \sum_i g_i \exp\left(-\frac{\epsilon_i}{kT}\right) \sum_t g_t \exp\left(-\frac{\epsilon_t}{kT}\right) = U_{\text{trans}} U_{\text{exc}} \quad (4.16)$$

Tuto příjemnou vlastnost použijeme v dalším odvozování.

4.3 Ionizační rovnováha

Vztah pro ionizační rovnováhu dostaneme stejně jako Mihalas (1978, kapitola 5-1) aplikací Boltzmannovy excitační rovnice na proces ionizace ze základního stavu neutrálního atomu $n_{0,0}$ do základního stavu iontu $n_{0,1}$. Symbolem $n_{0,1}(v)$ označíme počet iontů v základním stavu, kolem kterých je volný elektron s rychlostí v intervalu $(v, v + dv)$. Statistická váha základní hladiny neutrálního atomu je $g_{0,0}$, statistická váha stavu „volný elektron + iont v základním stavu“ v souladu s (4.16) je $g(v) = g_{0,1} g_{\text{electron}}$, kde $g_{0,1}$ je statistická váha základní hladiny iontu

4. TERMODYNAMICKÁ ROVNOVÁHA

a g_{electron} je statistická váha volného elektronu. Použitím (4.5) na výše uvedené stavy dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{n_{0,1}^*(v)}{n_{0,0}^*} &= \frac{g(v)}{g_{0,0}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{I0} + \frac{1}{2}m_e v^2}{kT}\right) \\ &= \frac{g_{0,1}g_{\text{electron}}}{g_{0,0}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{I0} + \frac{1}{2}m_e v^2}{kT}\right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

kde \mathcal{E}_{I0} označuje energii potřebnou pro ionizaci ze základního stavu neutrálního atomu a $\frac{1}{2}m_e v^2$ je kinetická energie elektronu uvolněného ionizací. Z kvantové statistiky dostáváme pro statistickou váhu volného elektronu ($dx dy dz dp_x dp_y dp_z$ je element fázového prostoru, h^3 je elementární objem fázového prostoru a číslo 2 započítává dvě možné orientace spinu elektronu)

$$g_{\text{electron}} = 2 \frac{dx dy dz dp_x dp_y dp_z}{h^3} = 2 \frac{n_e^{-1} (4\pi m_e^3 v^2 dv)}{h^3}, \quad (4.18)$$

kde jsme využili $dp_x dp_y dp_z = 4\pi p^2 dp = 4\pi m_e^3 v^2 dv$ a platnosti $dx dy dz = n_e^{-1}$, pokud vybereme objemový element tak, aby obsahoval právě jeden volný elektron. Tento vztah dosadíme do (4.17),

$$\frac{n_{0,1}^*(v)}{n_{0,0}^*} = \frac{8\pi m_e^3 g_{0,1}}{h^3} \frac{1}{g_{0,0} n_e} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{I0} + \frac{1}{2}m_e v^2}{kT}\right) v^2 dv. \quad (4.19)$$

Integrací přes rychlosti elektronů v (s využitím Maxwellova rozdělení) dostaneme

$$\frac{n_{0,1}^*}{n_{0,0}^*} = \frac{8\pi m_e^3 g_{0,1}}{h^3} \frac{1}{g_{0,0} n_e} \left(\frac{2kT}{m_e}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{I0}}{kT}\right) \int_0^\infty \exp(-x^2) x^2 dx.$$

Poslední integrál je roven (s využitím A.7) $\sqrt{\pi}/4$, po úpravě dostaneme

$$\frac{n_{0,1}^*}{n_{0,0}^*} = \frac{2g_{0,1}}{g_{0,0}} \frac{1}{n_e} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{I0}}{kT}\right), \quad (4.20)$$

což je **Sahova ionizační formule** pro ionizaci ze základní hladiny atomu³. Vidíme, že ionizační rovnováha v termodynamické rovnováze je funkcí teploty T a elektronové hustoty n_e . Tento vztah můžeme snadno zobecnit na ionizační rovnováhu

³Vztah svazující ionizační stupně různých iontů zformulovali John Eggert (1919) a Megh Nad Saha (1920), ale v jiném tvaru, než je uveden zde.

4. TERMODYNAMICKÁ ROVNOVÁHA

mezi základními stavy j -tého a $j+1$. ionizačního stupně (j je obecně celočíselné),

$$\frac{n_{0,j+1}^*}{n_{0,j}^*} = \frac{2g_{0,j+1}}{g_{0,j}} \frac{1}{n_e} \left(\frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{Ij}}{kT}\right), \quad (4.21)$$

kde \mathcal{E}_{Ij} je ionizační energie potřebná pro ionizaci ze základního stavu j -tého iontu. Kombinací této rovnice a Boltzmannovy rovnice (4.4) můžeme napsat vztah

$$n_{ij}^* = n_{0,j+1}^* n_e \frac{g_{ij}}{g_{0,j+1}} \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{2\pi m_e k} \right)^{\frac{3}{2}}}_{C_I = 2.07 \cdot 10^{-16}} T^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_{Ij} - \mathcal{E}_{ij}}{kT}\right) \quad (4.22)$$

který vyjadřuje obsazení energetické hladiny i iontu j v závislosti na obsazení základní hladiny nejbližšího vyššího iontu (iontu $j+1$). Pravou stranu rovnice (4.22) můžeme přepsat

$$n_{ij}^* = n_{0,j+1}^* n_e \Phi_{ij}(T), \quad (4.23)$$

kde jsme zavedli veličinu

$$\Phi_{ij}(T) = \frac{g_{ij}}{g_{0,j+1}} C_I T^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_{Ij} - \mathcal{E}_{ij}}{kT}\right), \quad (4.24)$$

které říkáme **Sahův-Boltzmannův faktor**. Sečteme-li v rovnici (4.22) všechny stavy nižšího stupně ionizace a použijeme-li rovnici (4.2) pro $n_{0,j+1}^*/N_{j+1}^*$, můžeme pro poměr koncentrací dvou po sobě následujících iontů

$$\frac{N_j^*}{N_{j+1}^*} = n_e \frac{U_j(T)}{U_{j+1}(T)} C_I T^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_{Ij}}{kT}\right) = n_e \tilde{\Phi}_j(T), \quad (4.25)$$

kde

$$\tilde{\Phi}_j(T) = \frac{U_j(T)}{U_{j+1}(T)} C_I T^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_{Ij}}{kT}\right) \quad (4.26)$$

je Sahův-Boltzmannův faktor pro ionty. Můžeme definovat **ionizační podíl** iontu j atomu k k celkovému zastoupení atomu k jako

$$f_{jk}(n_e, T) = \frac{N_{jk}}{N_k}. \quad (4.27)$$

Pro atom k vyjádříme poměr koncentrace iontu j ke koncentraci nejvyššího iontu J (nejvyšší iont je iont bez vázaných elektronů) pomocí součinů poměrů koncentrací po sobě následujících iontů jako

$$\frac{N_{jk}}{N_{Jk}} = \left(\frac{N_{J-1,k}}{N_{Jk}} \right) \times \dots \times \left(\frac{N_{jk}}{N_{j+1,k}} \right) = \prod_{l=j}^{J-1} \frac{N_{lk}}{N_{l+1,k}}. \quad (4.28)$$

V případě rovnovážného rozdělení ionizací můžeme tento vztah zapsat pomocí rovnice (4.25),

$$\frac{N_{jk}^*}{N_{Jk}^*} = \prod_{l=j}^{J-1} \left[n_e \tilde{\Phi}_l(T) \right]. \quad (4.29)$$

Rovnovážný ionizační podíl iontu j je potom

$$f_{jk}^*(n_e, T) = \frac{N_{jk}^*}{N_k} = \frac{\left(\frac{N_{jk}^*}{N_{Jk}^*} \right)}{\sum_{m=0}^J \left(\frac{N_{mk}^*}{N_{Jk}^*} \right)} = \frac{\prod_{l=j}^{J-1} \left[n_e \tilde{\Phi}_l(T) \right]}{\sum_{m=0}^J \prod_{l=m}^{J-1} \left[n_e \tilde{\Phi}_l(T) \right]} \quad (4.30)$$

Pokud známe elektronovou hustotu n_e a teplotu T , je určení ionizační rovnováhy všech iontů v termodynamické rovnováze pomocí vztahu (4.30) přímočaré.

4.3.1 Určení elektronové hustoty

Označíme N koncentraci *všech* částic a \tilde{N}_N celkovou koncentraci atomů a iontů všech typů. Pro koncentraci všech částic platí

$$N = \tilde{N}_N + n_e. \quad (4.31)$$

Zavedeme **relativní abundanci** $\tilde{\alpha}_k$ prvku k vzhledem k celkovému počtu atomů a iontů⁴ vztahem

$$N_k = \tilde{\alpha}_k \tilde{N}_N \quad (4.32)$$

(platí, že součet relativních abundancí přes všechny prvky $\sum_{k=1}^K \tilde{\alpha}_k = 1$, K je celkový počet prvků). Pro koncentraci atomů k můžeme psát

$$N_k = \tilde{\alpha}_k (N - n_e), \quad (4.33)$$

⁴Abundance se často vyjadřuje i vzhledem k vodíku (viz Příloha D).

přičemž platí zachování počtu částic

$$\sum_{k=1}^K N_k = \tilde{N}_N. \quad (4.34)$$

Současně platí i podmínka elektrické neutrality. Za předpokladu, že se hmota skládá z neutrálních částic, elektronů a z kladně nabitých iontů (záporné ionty v tuto chvíli neuvažujeme, jejich zahrnutí však není obtížné), můžeme s využitím (4.27) psát (sčítáme koncentrace N_{jk} přes všechny kladně nabitě ionty ($j \geq 1$) všech prvků, prvků je celkem K , každý prvek k má J_k kladně nabitých iontů)

$$\begin{aligned} n_e &= \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^{J_k} j N_{jk} = \sum_{k=1}^K N_k \sum_{j=1}^{J_k} j f_{jk}(n_e, T) = \tilde{N}_N \sum_{k=1}^K \tilde{\alpha}_k \sum_{j=1}^{J_k} j f_{jk}(n_e, T) \\ &= (N - n_e) \sum_{k=1}^K \tilde{\alpha}_k \sum_{j=1}^{J_k} j f_{jk}(n_e, T) \quad (4.35) \end{aligned}$$

Pokud jsou elektronová hustota n_e a teplota T známé, celkovou hustotu N a ionizační podíly f_{jk} spočteme snadno. Pokud však budeme řešit úlohu určení elektronové hustoty n_e pro zadanou teplotu T a celkovou koncentraci N , musíme řešit nelineární rovnici.

Numerické řešení takovéto rovnice snadno získáme metodou linearizace (Newtonovou-Raphsonovou metodou). Označíme

$$\tilde{F}(n_e) = \sum_{k=1}^K \tilde{\alpha}_k \sum_{j=1}^{J_k} j f_{jk}(n_e, T) \quad (4.36)$$

a rovnici (4.35) přepíšeme

$$n_e = (N - n_e) \tilde{F}(n_e), \quad (4.37a)$$

případně jako

$$N - n_e \left[1 + \frac{1}{\tilde{F}(n_e)} \right] = 0. \quad (4.37b)$$

Tuto rovnici budeme řešit linearizací. Předpokládejme, že máme nějaký odhad $n_e^{(\text{old})}$ řešení této rovnice, který je však nepřesný. Řešením bude hodnota opravená o nějaký člen δn_e . Nahradíme $n_e \rightarrow n_e^{(\text{old})} + \delta n_e$

$$N - (n_e^{(\text{old})} + \delta n_e) \left[1 + \frac{1}{\tilde{F}(n_e^{(\text{old})} + \delta n_e)} \right] = 0 \quad (4.38)$$

Zlomek na pravé straně rozvineme do prvního řádu,

$$\frac{1}{\tilde{F}(n_e^{(\text{old})} + \delta n_e)} = \frac{1}{\tilde{F}(n_e^{(\text{old})})} - \frac{1}{\tilde{F}^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial n_e} \delta n_e,$$

dosadíme do (4.38), zanedbáme členy s $(\delta n_e)^2$, vyjádříme

$$\delta n_e = \frac{N - n_e^{(\text{old})} \left(1 + \frac{1}{\tilde{F}}\right)}{1 + \frac{1}{\tilde{F}} - \frac{n_e^{(\text{old})}}{\tilde{F}^2} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial n_e}}. \quad (4.39)$$

a spočteme novou hodnotu elektronové hustoty $n_e^{(\text{new})} = n_e^{(\text{old})} + \delta n_e$. Pokud δn_e není “dostatečně malé”, řešíme znovu rovnici (4.38) s $n_e^{(\text{old})} = n_e^{(\text{new})}$. Iterační proces končíme, když je δn_e “dostatečně malé”. Otázkou samozřejmě zůstává, kolik je “dostatečně malé”. V praxi bývají hodnoty řádu 10^{-3} uspokojivé, pro vyšší přesnost výpočtu je ale vhodnější volit řádově menší hodnoty (například 10^{-7}).

4.4 Disociační rovnováha molekul

V termodynamické rovnováze můžeme použít Boltzmannovu excitační rovnici i na chemické reakce. Pro jednoduchost budeme uvažovat obecnou dvouatomovou molekulu AB s disociační energií D_0 , která se bude disociovat na jednotlivé atomy A a B . Na disociaci molekul lze použít postup užitý při odvození Sahovy ionizační rovnice (viz také Schadee, 1964; Tatum, 1966). Analogicky rovnici (4.17) můžeme psát (\tilde{N}_X^* , $X = A, B, AB$ značí počet částic A, B, AB v nějakém objemu V , podobně U_X jsou odpovídající celkové partiční funkce)

$$\frac{\tilde{N}_A^* \tilde{N}_B^*}{\tilde{N}_{AB}^*} = \frac{U_A U_B}{U_{AB}} \exp\left(-\frac{D_0}{kT}\right). \quad (4.40)$$

Celkové partiční funkce lze podle rovnice (4.16) rozdělit na translační a vnitřní část (například $U_{AB} = (U_{AB})_{\text{trans}}(U_{AB})_{\text{int}}$), translační část je dána vztahem (4.12), vnitřní část popisuje excitaci, rotaci a vibraci molekul. Po dosazení za translační partiční funkce dostaneme disociační rovnici

$$\frac{N_A^* N_B^*}{N_{AB}^*} = \left(\frac{2\pi m_{\text{red}} kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{U_A U_B}{U_{AB}}\right)_{\text{int}} \exp\left(-\frac{D_0}{kT}\right), \quad (4.41)$$

kde N_A^* , N_B^* a N_{AB}^* jsou koncentrace částic, $m_{\text{red}} = m_A m_B / (m_A + m_B)$ je redukovaná hmotnost a indexem int označujeme vnitřní partiční funkce. Vnitřní

partiční funkci molekul lze *přibližně* rozdělit

$$(U_{AB})_{\text{int}} = (U_{AB})_{\text{exc}}(U_{AB})_{\text{rot}}(U_{AB})_{\text{vib}} \quad (4.42)$$

kde $(U_{AB})_{\text{exc}}$ značí excitační (elektronickou) partiční funkci, $(U_{AB})_{\text{rot}}$ je rotační partiční funkce a $(U_{AB})_{\text{vib}}$ je- vibrační partiční funkce.

4.5 Záření v termodynamické rovnováze

Pro specifickou intenzitu můžeme s využitím vztahu mezi specifickou intenzitou záření a koncentrací fotonů ve fázovém prostoru (2.10) a rovnosti rozdělovacích funkcí fotonů pro nepolarizované záření (2.12) psát

$$I(\nu) = \frac{h^4\nu^3}{c^2} f_{\text{R}} = \frac{2h^4\nu^3}{c^2} f_{\alpha} = \frac{2h\nu^3}{c^2} n_{\alpha}. \quad (4.43)$$

Jelikož fotony patří mezi bosony, pro rovnovážnou hodnotu číselné hustoty n_{α} použijeme ze statistické fyziky vztah Boseho-Einsteinova rozdělení (viz například Kvasnica 1983, kapitola VIII.1)

$$n_{\alpha} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT}\right) - 1}. \quad (4.44)$$

Pro specifický případ fotonů platí, že energie $\varepsilon = h\nu$, chemický potenciál $\mu = 0$ a s využitím vztahu (4.43) dostaneme pro rovnovážné rozdělení fotonů při teplotě T vztah

$$B_{\nu}(T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1}, \quad (4.45)$$

což je **Planckova funkce**⁵. Uvedeme i její limitní případy.

Pro vysoké energie záření ($h\nu/(kT) \gg 1$) můžeme psát zjednodušený vztah

$$B_{\nu}(T) \approx \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right), \quad (4.46)$$

který se nazývá **Wienův rozdělovací zákon** nebo také **Wienova limita**⁶. Naopak pro nízké energie záření ($h\nu/(kT) \ll 1$) můžeme psát vztah

$$B_{\nu}(T) \approx \frac{2\nu^2 kT}{c^2}, \quad (4.47)$$

⁵Tvar funkce (4.45) přednesl Max Planck 19. října 1900 na zasedání Německé fyzikální společnosti (Planck, 1900a) jako vylepšení Wienova zákona (4.46), v další přednášce 14. prosince 1900 (Planck, 1900b) zavedl i konstantu úměrnosti energie a frekvence záření (h). Souhrn těchto výsledků je v často citované práci Planck (1901).

⁶Wien (1896) jej formuloval jako závislost na vlnové délce ($\sim \lambda^{-5}$), ale bez Planckovy konstanty h , která v té době ještě nebyla zavedena.

který se nazývá **Rayleighův-Jeansův zákon**⁷.

Integrací Planckovy funkce (4.45) přes frekvence dostaneme (viz také Unsöld, 1955, rovnice 7.33)

$$B(T) = \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu = \frac{2h}{c^2} \left(\frac{kT}{h} \right)^4 \int_0^\infty \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\sigma_R}{\pi} T^4, \quad (4.48)$$

kde jsme využili vztahu

$$\int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \zeta(4)\Gamma(4) = \frac{\pi^4}{15} \quad (4.49)$$

(zde ζ je Riemannova funkce zeta a Γ je gamma funkce) a kde

$$\sigma_R = \frac{2\pi^5 k^4}{15c^2 h^3} = 5.67 \cdot 10^{-5} \text{ erg cm}^{-1} \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-4} \quad (4.50)$$

se dnes nazývá **Stefanova-Boltzmannova konstanta**.

Pro vlnovou délku, na které se nachází maximum Planckovy funkce, platí **Wienův posunovací zákon**

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T}, \quad (4.51)$$

který odvodil Wien (1893) pomocí termodynamických argumentů. Lze jej také odvodit z derivace Planckovy funkce podle vlnové délky a následného vyřešení transcendentní rovnice. Konstanta $b = 0.2898 \text{ cm} \cdot \text{K}$ (Wienova posunovací konstanta) je dána vztahem $b = hc/(xk)$, kde $x \approx 4.965$ je řešením rovnice $xe^x/(e^x - 1) = 5$.

4.5.1 Rovnovážné rozdělení energie

Rovnovážnou hodnotu monochromatické hustoty zářivé energie $E_R^*(\nu)$ dostaneme dosazením Planckovy funkce (4.45) za střední intenzitu záření do (2.15),

$$E_R^*(\nu) = \frac{4\pi}{c} B_\nu(T). \quad (4.52)$$

Rovnovážnou hodnotu celkové hustoty zářivé energie E_R^* dostaneme integrací rovnice (4.52) přes frekvence. Podobným postupem, který jsme použili při odvození rovnice (4.48), dostaneme

$$E_R^* = \frac{8\pi h}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^3}{\exp\left(\frac{h\nu}{kT}\right) - 1} d\nu = \frac{8\pi^5 k^4}{15c^3 h^3} T^4 = \frac{4\sigma_R}{c} T^4 = a_R T^4, \quad (4.53)$$

⁷Rayleigh (1900) zformuloval závislost $B_\lambda \sim \lambda^{-4}$, výsledky pozdější diskuse mezi Rayleighem a Jeansem v časopise Nature shrnul Jeans (1905). Historii odvození Rayleighova-Jeansova zákona, Jeansovu roli a jeho vztah k Planckovu zákonu podrobněji rozebrali McCaughan (1980) a Gorham (1991).

což je *Stefanův zákon*⁸, který vyjadřuje, že hustota energie záření černého tělesa je úměrná čtvrté mocnině teploty. Konstanta úměrnosti $a_R = 4\pi\sigma_R/c$ se nazývá *zářivá konstanta* (*radiation constant*), někdy také *Stefanova konstanta*, $a_R = 7.56 \cdot 10^{-15} \text{erg cm}^{-3}\text{K}^{-4}$.

4.5.2 Absorpce a emise v termodynamické rovnováze

Z termodynamiky víme, že pro systém v tepelné rovnováze je záření izotropní, intenzita záření je závislá jen na frekvenci a teplotě a systém je v ustáleném stavu. To znamená, že množství pohlcené energie a množství vyzářené energie musí být stejné. Tuto vlastnost vyjadřuje *Kirchhoffův zákon*⁹ (viz např. Unsöld 1955, str. 5, Hubeny and Mihalas 2014, kapitola 4.3),

$$\eta(\nu) = \kappa(\nu)J^*(\nu), \quad (4.54)$$

kde $J^*(\nu)$ je rovnovážná hodnota střední intenzity záření. Tato rovnice udává vztah mezi opacitou a emisivitou v případě *termodynamické rovnováhy*. Rovnovážnou hodnotu střední intenzity záření popisuje Planckova funkce $B(\nu)$ (4.45).

4.6 Lokální termodynamická rovnováha

V termodynamické rovnováze jsou všechny procesy v rovnováze se svými inverzními procesy (například excitace je v rovnováze s deexcitací). Této důležité vlastnosti se říká *detailní rovnováha*.

V termodynamické rovnováze mají jednotlivá rozdělení fyzikálních veličin rovnovážná rozdělení. Pole záření má Planckovo rozdělení, které jsme shrnuli v kapitole 4.5. Rovnovážné rozdělení excitačních stavů je popsáno Boltzmannovým rozdělením uvedeným v kapitole 4.1. Rovnovážné rozdělení ionizačních stavů je dáno Sahovým rozdělením popsaným v kapitole 4.3. Rychlosti částic mají Maxwellovo rozdělení popsané v kapitole 4.2. Ve všech rovnovážných rozděleních vystupuje stejná termodynamická teplota.

Z pozorování je patrné, že záření, které dopadá na Zemi z hvězd, rovnovážné rozdělení nemá. Už samotný fakt, že vidíme hvězdy, znamená, že hvězdné záření není izotropní a tudíž ani rovnovážné. Silnější argument získáme pohledem na

⁸Stefanův zákon byl nejdříve odvozen na základě empirických dat (Stefan, 1879), poté Boltzmann (1884) přidal jeho teoretické vysvětlení na základě termodynamických úvah (Planckův zákon 4.45 nebyl v té době ještě znám). Termodynamické odvození Stefanova zákona je uvedeno i v knize Chandrasekhar (1958, kapitola II.11.).

⁹Kirchhoffův zákon formuloval nejen Gustav Kirchhoff (1860b,a), ale ve stejné době také Balfour Stewart (1858, 1859, 1860).

hvězdné spektrum. Ve spektru můžeme vidět ostré ionizační hrany a úzké spektrální čáry, ani rozdělení energie ve spektru neodpovídá rovnovážnému (Planckovu) rozdělení. Je tedy třeba najít nějaký vhodný jednoduchý model, který by byl schopen popsat pozorované rozdělení hvězdného záření.

Tomuto modelu se říká **lokální termodynamická rovnováha** (*local thermodynamic equilibrium*, zkráceně **LTE**). Předpokládejme, že rovnovážná rozdělení kromě rozdělení záření platí pro každý bod prostředí, ale dovolme, aby se jednotlivá místa od sebe lišila. Pro každé místo popsané polohovým vektorem \mathbf{r} budeme mít obecně jiné hodnoty termodynamické teploty $T(\mathbf{r})$ a koncentrace elektronů $n_e(\mathbf{r})$. Teplota $T(\mathbf{r})$ bude parametrem jednotlivých rozdělení, Maxwellovského pro rychlosti (rovnice 4.13), Sahaova pro ionizační rovnováhu (4.21) a Boltzmannova pro rovnováhu excitačních stavů (4.5). Lokálně také bude platit rovnováha mezi pohlceným a vyzářeným zářením, kterou známe pod názvem Kirchhoffův zákon (4.54). Tento zákon říká, že poměr emisivity k opacitě je v termodynamické rovnováze roven Planckově funkci. Poměr emisivity a opacity je ale vydatnost (3.25), v aproximaci lokální termodynamické rovnováhy ji položíme rovnu Planckově funkci. Nerovnovážné pole záření pak určíme řešením rovnice přenosu záření (s je vzdálenost měřená podél směru šíření záření \mathbf{n})

$$\frac{dI(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu)}{d\tau_s(\mathbf{r}, \nu)} = I(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu) - B(\mathbf{r}, \mathbf{n}, \nu). \quad (4.55)$$

Řešením této rovnice přenosu záření s vydatností $S_\nu = B_\nu$ dostaneme specifickou intenzitu záření pro prostředí v lokální termodynamické rovnováze. Tomuto rozdělení záření říkáme **tepelné záření** (*thermal radiation*), které se liší od záření černého tělesa ($I_\nu = B_\nu$).

Mikroskopické procesy V termodynamické rovnováze platí detailní rovnováha zmíněná na začátku kapitoly 4.6. V lokální termodynamické rovnováze bude detailní rovnováha platit lokálně. Podívejme se nyní podrobněji na rovnováhu mikroskopických procesů, které jsou zodpovědné za zachování rovnovážných rozdělení.

Při **pružných srážkách** se zachovává celková kinetická energie srážejících se částic. Zjednodušeně řečeno, pružné srážky mezi částicemi přerozdělují hybnosti mezi částicemi. Podrobný rozbor problematiky lze nalézt například v Spitzer (1956, Chapter 5). Pružné srážky vedou k rovnovážnému rozdělení rychlostí srážejících se částic.

Při **nepružných srážkách** se přeměňuje kinetická energie srážejících se částic na jejich vnitřní energii a také naopak. Příkladem nepružných srážek jsou srážkové excitace a ionizace (a jejich inverzní procesy srážkové deexcitace a rekombinace). Tyto srážky narušují rovnovážné rozdělení rychlostí srážejících se částic. Naopak

pokud je rozdělení rychlostí rovnovážné, nepružnými srážkami se ustavuje excitační a ionizační rovnováha.

Při **zářivých procesech** (interakci hmoty se zářením) se přeměňuje zářivá energie na vnitřní nebo kinetickou energii částic. Mezi tyto procesy řadíme zářivou excitaci a deexcitaci, fotoionizaci a fotorekombinaci. Pokud není pole záření rovnovážné, zářivé procesy *nejsou* v detailní rovnováze. V tom případě narušují ionizační a excitační rovnováhu. Zvláštní místo mezi zářivými procesy má fotorekombinace. K tomu, aby k procesu došlo, je třeba, aby se k iontu přiblížil elektron, takže se prakticky jedná i o srážkový proces, který ustavuje ionizační rovnováhu.

Podmínky pro LTE a jejich porušení Aby bylo rozdělení rychlostí rovnovážné, je třeba aby ustavující interakce (pružné srážky) byly častější než narušující interakce (nepružné srážky). Označíme-li čas mezi pružnými srážkami t_{elastic} a čas mezi nepružnými srážkami $t_{\text{nonelastic}}$, pro zachování rovnovážného rozdělení je třeba, aby platilo

$$t_{\text{elastic}} \ll t_{\text{nonelastic}}$$

K pružným srážkám musí docházet podstatně častěji než ke srážkám nepružným. Pokud je to splněno (což například v prostředí hvězdných atmosfér je), tak nepružné srážky mají tendenci ustavovat rovnovážné rozdělení excitačních a ionizačních stavů. Kromě toho pro rovnovážné rozdělení rychlostí jsou i nepružné srážky v detailní rovnováze.

Nerovnovážné rozdělení záření, které může vzniknout řešením rovnice (4.55), naopak způsobuje, že zářivé přechody už nemusejí být v detailní rovnováze. Označíme $t_{\text{radiative}}$ čas mezi interakcemi záření s hmotou, pro splnění podmínek LTE musí platit

$$t_{\text{nonelastic}} \ll t_{\text{radiative}}$$

pro každý proces. Všechny procesy musejí být v detailní rovnováze. Nerovnovážné rozdělení záření však porušuje podmínku detailní rovnováhy pro zářivé přechody. Pro zachování LTE je tedy nutné, aby zářivé přechody byly méně četné než přechody srážkové. Pokud by však záření mělo rovnovážné rozdělení, splnění podmínky detailní rovnováhy zářivých přechodů by nezničilo.

Užití LTE Přiblížení lokální termodynamické rovnováhy v rovnici přenosu záření (rovnici 4.55) použil již Milne (1921). S pomocí tohoto přiblížení se podařilo sestavit poměrně zdařilé modely hvězdných atmosfér a předpovědět hvězdná spektra, pro řešení rovnice přenosu záření stačí znát opacitu, emisivita je dána pomocí Planckovy funkce. Problematika LTE modelování hvězdných atmosfér je pěkně shrnuta v knize Unsöld (1955).

4. TERMODYNAMICKÁ ROVNOVÁHA

Jak jsme již uvedli, přiblížení LTE systematicky zanedbává vliv záření na obsazení energetických hladin, čímž je vnitřně nekonzistentní. Pokud je ve skutečnosti vliv záření na ionizační a excitační rovnováhu nezanedbatelný, LTE přiblížení selhává a vede k chybným výsledkům. Více se k této problematice vrátíme v kapitole 9.1.

Kapitola 5

Opacita, emisivita a rozptyl

Opacita (3.1), emisivita (3.3) a také rozptylový koeficient závisejí na hustotě absorbujících částic a na jejich vlastnostech. V kapitole 4 jsme si odvodili vztahy pro koncentraci iontů a jednotlivých hladin za předpokladu termodynamické rovnováhy, obecnější závislosti uvedeme v kapitole 9. V této kapitole se budeme zabývat vlastnostmi různých absorbujících částic, uvedeme základní informace pro popis různých interakcí se zářením, které vyplývají ze znalostí struktury atomů a molekul. Energetická struktura částic vyplývá z kvantové teorie. Interakce záření s částicemi způsobuje přeskoky mezi vázanými nebo volnými energetickými hladinami částice (atomu, iontu, molekuly). Podle typu přeskočů dělíme přechody na *vázaně-vázané* (*bound-bound transitions*), *vázaně-volné* (*bound-free*), *volně-vázané* (*free-bound*), *volně-volné* (*free-free*) a rozptylové procesy.

V následujících podkapitolách zavedeme nejprve obecné koeficienty pro absorpci a emisi a odvodíme vztahy, které mezi nimi platí. Dále se budeme zabývat interakcí atomů a jejich iontů se zářením. Probereme základní jejich strukturu (kapitola 5.2), podrobnosti absorpce a emise ve spektrálních čarách (kapitola 5.3), fotoionizaci a fotorekombinaci (kapitola 5.4) a volně-volné přechody (kapitola 5.5). Následovat bude interakce záření s molekulami (kapitola 5.6), rozptyl záření na elektronech (kapitola 5.7) a ve spektrálních čarách (kapitola 5.8).

5.1 Obecné absorpční a emisní koeficienty

Nejprve se budeme zabývat přechody mezi obecnými stavy částic bez bližší specifikace, o kterou částici se jedná. Zavedeme základní koeficienty pro popis procesů absorpce a emise záření, odvodíme vztahy mezi koeficienty procesů absorpce a emise záření pro excitační a deexcitační procesy (vázaně-vázané přechody, kapitola 5.1.1) a pro ionizační a rekombinační procesy (vázaně-volné přechody a volně-vázané přechody, kapitola 5.1.2). Vztahy odvodíme za předpokladu detailní

rovnováhy (viz kapitola 4.6).

5.1.1 Einsteinovy koeficienty pro vázaně-vázané přechody

Koeficienty A pro vyzařování (*Ausstrahlung*) a B pro ozařování (*Einstrahlung*) molekul navrhl Einstein (1916a,b) a poukázal na jejich souvislost s Planckovou funkcí při využití Boltzmannova rozdělovacího zákona excitačních stavů. Zde se přidržíme výkladu z knihy Hubeny and Mihalas (2014), který odpovídá úvahám v práci Einstein (1916b).

Pro atom v termodynamické rovnováze s polem záření budeme uvažovat přechody mezi vázanými stavy atomu (hladinami) l a u , přičemž hladina l má nižší energii než hladina u . Einsteinovy koeficienty jsou používány pro popis zářivých přechodů mezi vázanými hladinami. Koeficient B_{lu} označuje absorpci (přechod $l \rightarrow u$), pro opačný přechod ($u \rightarrow l$) označují koeficient A_{ul} spontánní emise a koeficient B_{ul} stimulovanou emisi. Pomocí Einsteinova koeficientu pro absorpci můžeme četnost (počet za jednotku času) absorpcí fotonů ze svazku záření o frekvenci z intervalu $(\nu, \nu + d\nu)$ putujícího ve směru \mathbf{n} do jednotkového prostorového úhlu $d\varpi/(4\pi)$ zapsat jako

$$r_{lu}(\mathbf{n}, \nu) d\nu \frac{d\varpi}{4\pi} \equiv n_l B_{lu} I(\mathbf{n}, \nu) d\nu \frac{d\varpi}{4\pi}, \quad (5.1)$$

kde n_l je koncentrace částic ve stavu l . Četnost stimulované emise do svazku záření lze vyjádřit analogicky vztahem

$$r_{ul}^{\text{stim}}(\mathbf{n}, \nu) d\nu \frac{d\varpi}{4\pi} \equiv n_u B_{ul} I(\mathbf{n}, \nu) d\nu \frac{d\varpi}{4\pi}, \quad (5.2)$$

kde n_u je koncentrace částic ve stavu u . Četnost spontánní emise do svazku záření je

$$r_{ul}^{\text{spont}}(\mathbf{n}, \nu) d\nu \frac{d\varpi}{4\pi} \equiv n_u A_{ul} d\nu \frac{d\varpi}{4\pi}. \quad (5.3)$$

V rovnici (5.3) nevystupuje intenzita záření, protože spontánní emise na poli záření nezávisí.

Vztah mezi Einsteinovými koeficienty A_{ul} , B_{ul} a B_{lu} určíme pro případ termodynamické rovnováhy. V termodynamické rovnováze musí být procesy přechodu mezi stavy l a u v detailní rovnováze (kapitola 4.6). Z rovnic (5.1), (5.2) a (5.3) dostaneme pro počet přechodů $l \rightarrow u$ (levá strana) a $u \rightarrow l$ (pravá strana)

$$r_{lu}(\mathbf{n}, \nu) = r_{ul}^{\text{spont}}(\mathbf{n}, \nu) + r_{ul}^{\text{stim}}(\mathbf{n}, \nu) \quad (5.4)$$

Předpokládejme nyní termodynamickou rovnováhu. V ní je $I_\nu = B_\nu$. Rovnice (5.4) tak přejde na tvar

$$n_l^* B_{lu} B_\nu = n_u^* B_{ul} B_\nu + n_u^* A_{ul}. \quad (5.5)$$

Odtud vyjádříme Planckovu funkci B_ν ,

$$B_\nu = \frac{n_u^* A_{ul}}{n_l^* B_{lu} - n_u^* B_{ul}}. \quad (5.6)$$

S využitím Boltzmannovy excitační rovnice (4.5) dostaneme

$$B_\nu = \frac{A_{ul}}{B_{ul}} \frac{1}{\frac{g_l B_{lu}}{g_u B_{ul}} \exp\left(\frac{h\nu_{lu}}{kT}\right) - 1}. \quad (5.7)$$

Porovnáním s výrazem pro Planckovu funkci (4.45) dostaneme pro **vztahy mezi Einsteinovými koeficienty**

$$A_{ul} = \frac{2h\nu^3}{c^2} B_{ul} \quad (5.8a)$$

$$g_l B_{lu} = g_u B_{ul}. \quad (5.8b)$$

Ačkoli byly vztahy odvozeny pro případ termodynamické rovnováhy, ve výsledku se jedná o vlastnosti atomů nezávislé na poli záření, proto vztahy (5.8) platí obecně.

Střední doba života hladiny

Ukážeme si ještě další význam Einsteinova koeficientu A_{ul} (viz například Pradhan and Nahar, 2011, cvičení 4.2). Rovnice (5.4) vyjadřuje rovnovážný stav. Pokud rovnováha není, vztahem

$$\frac{dn_l}{dt} = -\frac{dn_u}{dt} = A_{ul}n_u + B_{ul}I_\nu n_u - B_{lu}I_\nu n_l$$

vyjádříme časovou změnu koncentrací hladin n_u a n_l . V prostředí bez záření platí pro změnu koncentrace horní hladiny

$$-\frac{dn_u}{dt} = A_{ul}n_u,$$

odkud

$$n_u(t) = n_{0u} e^{-A_{ul}t}, \quad (5.9)$$

kde n_{0u} je počáteční hodnota koncentrace horní hladiny. Z toho vyplývá, že A_{ul}^{-1} má význam střední doby života (*lifetime*) hladiny u . Rozměr Einsteinova koeficientu $[A] = s^{-1}$.

Účinný průřez absorpce a síla oscilátoru

Energii pohlcenou při absorpci záření v přechodu $l \rightarrow u$ můžeme zapsat pomocí četnosti ze vztahu (5.1) vynásobením energií daného přechodu $h\nu_{lu}$.

$$\delta\mathcal{E} = n_l B_{lu} h\nu_{lu} I(\mathbf{n}, \nu_{lu}) \frac{d\varpi}{4\pi} = n_l \left(B_{lu} \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} \right) I(\mathbf{n}, \nu_{lu}) d\varpi. \quad (5.10)$$

Veličina

$$\alpha_{lu} = B_{lu} \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} \quad (5.11)$$

vyjadřuje **celkový účinný průřez** α_{lu} **přechodu mezi hladinami** l a u . Rozměr Einsteina koeficientu $[B] = \text{cm}^2 \text{erg}^{-1} \text{s}^{-1}$.

Další důležitou veličinu zavedeme pomocí analogie s klasickým harmonickým oscilátorem. Uvažujeme-li, že oscilátor v elektromagnetickém poli má hmotnost m_e , můžeme v této aproximaci pro celkový účinný průřez σ_{cl} dipólového přechodu mezi dvěma blíže nespecifikovanými hladinami psát (viz Příloha B.2)

$$\sigma_{cl} = \frac{\pi e^2}{m_e c}. \quad (5.12)$$

Zavedeme často používanou bezrozměrnou veličinu f_{lu} zvanou **síla oscilátoru**, která vyjádří celkový účinný průřez (5.11) v jednotkách účinného průřezu klasického harmonického oscilátoru vztahem

$$\alpha_{lu} = f_{lu} \sigma_{cl} = f_{lu} \frac{\pi e^2}{m_e c} = \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} B_{lu}. \quad (5.13)$$

Pro označení účinného průřezu se někdy místo α_{lu} používá σ_{lu} .

Tabelované údaje pro vázaně-vázané přechody

Pro většinu přechodů uvedených v různých přehledech a databázích¹ se pro vyjádření účinného průřezu interakce se zářením nejčastěji používá buď Einsteina koeficient A_{ul} nebo síla oscilátoru f_{lu} . Často také můžeme nalézt hodnotu logaritmu síly oscilátoru vynásobené statistickou vahou dolní hladiny přechodu, $\log(g_l f_{lu})$.

¹Například databáze NIST (https://physics.nist.gov/PhysRefData/ASD/lines_form.html), existují ale i další.

5.1.2 Milneho vztahy pro kontinuum

Uvažujme pro jednoduchost fotoionizaci neutrálního atomu, při které vznikne jednou ionizovaný iont. Necht' $p_\nu d\nu$ je pravděpodobnost této fotoionizace fotonem o frekvenci z intervalu $(\nu, \nu + d\nu)$. Označíme (jako Milne, 1924) $F(\nu)$ pravděpodobnost spontánního zachycení elektronu s rychlostí v intervalu $(v, v + dv)$ a $G(\nu)$ pravděpodobnost vynuceného zachycení takového elektronu. Dále označíme n_0 číselnou hustotu atomů v základním stavu, n_1 číselnou hustotu iontů v základním stavu a $n_e(v) dv$ číselnou hustotu elektronů s rychlostmi v intervalu $(v, v + dv)$. Rozměr n_0, n_1 i $n_e(v) dv$ je cm^{-3} .

Četnost (počet za jednotku času) fotoionizací můžeme vyjádřit (index bf označuje *bound-free* přechod, tj. z vázaného stavu do volného)

$$r_{\text{bf}}(\mathbf{n}, \nu) = n_0 p_\nu I(\mathbf{n}, \nu) d\nu. \quad (5.14)$$

Četnost rekombinací $r_{\text{fb}}(\mathbf{n}, \nu)$ je dána součtem stimulovaných rekombinací $r_{\text{fb}}^{\text{stim}}(\mathbf{n}, \nu)$ a spontánních rekombinací $r_{\text{fb}}^{\text{spont}}(\mathbf{n}, \nu)$,

$$r_{\text{fb}}(\mathbf{n}, \nu) = r_{\text{fb}}^{\text{spont}}(\mathbf{n}, \nu) + r_{\text{fb}}^{\text{stim}}(\mathbf{n}, \nu). \quad (5.15)$$

Počet elektronů letících kolem iontu je úměrný $v dt$, četnost zachycení je tedy úměrná rychlosti elektronů v , vztahy pro četnosti spontánních a stimulovaných rekombinací budou

$$r_{\text{fb}}^{\text{spont}}(\mathbf{n}, \nu) = n_1 n_e(v) F(\nu) v dv, \quad (5.16a)$$

$$r_{\text{fb}}^{\text{stim}}(\mathbf{n}, \nu) = n_1 n_e(v) G(\nu) I(\mathbf{n}, \nu) v dv. \quad (5.16b)$$

V termodynamické rovnováze platí $I_\nu = B_\nu$, $n_0 = n_0^*$, $n_1 = n_1^*$ a detailní rovnováha $r_{\text{bf}}(\mathbf{n}, \nu) = r_{\text{fb}}(\mathbf{n}, \nu)$. Při fotoionizaci se část energie fotonu použije na ionizaci a část na kinetickou energii vyraženého elektronu, $h\nu = \mathcal{E}_I + m_e v^2/2$. Diferenciací dostaneme $h d\nu = m_e v dv$. Potom z rovnic (5.15) a (5.16) získáme vztah

$$n_0^* p_\nu B_\nu = n_1^* n_e^*(v) [F(\nu) + G(\nu) B_\nu] \frac{h}{m_e}. \quad (5.17)$$

Odtud dostaneme **Milneho vztahy mezi koeficienty vázaně-volných přechodů**,

$$F(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} G(\nu), \quad (5.18a)$$

$$G(\nu) = \frac{m_e}{h} \left[\frac{n_0^*}{n_1^* n_e^*(v)} \right] p_\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right). \quad (5.18b)$$

S využitím vztahu $n_e(v) = n_e f(v)$, kde $f(v)$ je dáno vztahem pro Maxwellovo rozdělení (4.13), a s pomocí Sahovy ionizační formule můžeme odvodit vztahy

$$F(v) = \frac{2h\nu^3}{c^2} G(v), \quad (5.19a)$$

$$p_\nu = \frac{8\pi m_e^2 v^2}{h^2} \frac{g_1}{g_0} G(v). \quad (5.19b)$$

Vztahy (5.18) jsou analogií vztahů mezi Einsteinovými koeficienty (5.8) a podobně závisejí pouze na struktuře atomu. Platí tedy i bez předpokladu termodynamické rovnováhy.

Makroskopický koeficient spontánní rekombinace

Pomocí vztahů (5.18) můžeme odvodit *vztah pro makroskopický koeficient spontánní emise při rekombinaci*. Emitovaná energie je dána četností (5.16a) vynásobenou energií fotonu $h\nu$,

$$\begin{aligned} \eta_{\text{fb}}^{\text{S}} d\nu &= [n_1 n_e(v) F(v) v d\nu] h\nu \\ &= n_1 n_e(v) \underbrace{\left(\frac{n_0}{n_1 n_e(v)} \right)^*}_{\tilde{n}_0^*} \left(\frac{m_e}{h} \right) \left(\frac{h}{m_e} \right) \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} \right) e^{-\frac{h\nu}{kT}} \underbrace{p_\nu h\nu}_{\alpha_{\text{bf}}(\nu)} d\nu \\ &= \tilde{n}_0^* \alpha_{\text{bf}}(\nu) \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} \right) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu \\ &= \tilde{n}_0^* \alpha_{\text{bf}}(\nu) \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] B_\nu(T) d\nu \end{aligned} \quad (5.20)$$

kde jsme zavedli fotoionizační účinný průřez $\alpha_{\text{bf}} = h\nu p_\nu$ a pomocí

$$\tilde{n}_0^* \equiv n_1 n_e(v) \left(\frac{n_0}{n_1 n_e(v)} \right)^* \quad (5.21)$$

jsme označili LTE obsazení hladiny 0 spočítané z aktuálních (obecně nerovnovážných) hodnot koncentrace elektronů $n_e(v)$ a obsazení n_1 . Pro maxwellovské rozdělení rychlostí elektronů je $n_e(v) = n_e^*(v)$ a rovnice (5.21) se zjednoduší

$$\tilde{n}_0^* = n_1 \left(\frac{n_0}{n_1} \right)^* . \quad (5.22)$$

Obsazení n_1 rovnovážné být nemusí. Vztah (5.22) je ekvivalentní vztahu (4.22).

Makroskopický koeficient ionizace

Makroskopický koeficient opacity pro ionizaci ze základní hladiny (značené indexem 0) s odečtením stimulované emise získáme pomocí četností (5.14) a (5.16b) po vynásobení energií $h\nu$,

$$\kappa_{\text{bf}} I(\mathbf{n}, \nu) d\nu = n_0 p_\nu I(\mathbf{n}, \nu) d\nu h\nu - n_1 n_e(v) G(v) I(\mathbf{n}, \nu) v d\nu \quad (5.23)$$

Podobným postupem jako při odvozování rovnice (5.20) dostaneme s využitím vztahů (5.18b) a (5.21)

$$\kappa_{\text{bf}}(\nu) \equiv \left[n_0 - \tilde{n}_0^* \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \alpha_{\text{bf}}(\nu), \quad (5.24)$$

kde $\alpha_{\text{bf}}(\nu)$ je účinný průřez daného přechodu a \tilde{n}_0^* je rovnovážné obsazení hladiny 0 dané vztahem (5.21). V případě termodynamické rovnováhy (TE) se vztah zjednoduší ($n_0 = n_0^* = \tilde{n}_0^*$)

$$\kappa_\nu^* = n_0^* \alpha_{\text{bf}}(\nu) \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right]. \quad (5.25)$$

Tabelované údaje pro vázaně-volné přechody

Fotoionizační účinný průřez $\alpha_{\text{bf}}(\nu)$ není jen jedno číslo, ale závisí na frekvenci. Proto ho databáze atomárních dat² uvádějí ve formě funkční závislosti. Funkční závislost je poměrně složitá, většinou bývá k dispozici ve formě tabulky.

5.2 Struktura atomů

Pro každý čárový přechod, který chceme zahrnout do výpočtu opacity, potřebujeme znát jeho základní vlastnosti, což je účinný průřez včetně jeho frekvenční závislosti (profilu), jeho spodní a horní hladinu a jejich energie. Tím známe i frekvenci daného přechodu. Určení těchto základních parametrů je úkolem atomární fyziky.

V analytickém tvaru je možné jen pro nejjednodušší ionty, neutrální vodík (H I) a vodíkupodobné ionty (He II, Li III, Be IV, atd.). Stacionární stavy těchto atomů získáme řešením Schrödingerovy rovnice pro vodíkupodobné ionty

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi - \frac{Ze^2}{r} \psi = E\psi \quad (5.26)$$

²Například TOPbase (<https://cdsweb.u-strasbg.fr/topbase/xsections.html>).

V této rovnici je μ redukovaná hmota elektronu, $1/\mu = 1/m_e + 1/m_{\text{atom}}$, která je různá pro každý atom i izotop. Hladiny (stavy) atomu vodíku nebo vodíkpodobného iontu s atomovým číslem Z jsou popsány kvantovými čísly.

řešení ve sférických souřadnicích ve tvaru

$$\psi(r, \vartheta, \varphi) = R_{nl}(r)Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

hlavní kvantové číslo $n = 1, 2, 3, \dots$, **slupky** zvané K, L, M, \dots

vedlejší (orbitální) kvantové číslo $l = 0, 1, 2, 3, \dots$; (odpovídá značení $s, p, d, f, g, h, i, k, \dots$ – dále podle abecedy, pouze j je vynecháno)

s – “sharp”, p – “principal”, d – “diffuse”, f – “fundamental”
(původní označení sérií spekter sodíku - Příloha B.5.2)

nabývá hodnot v intervalu $\langle 0; n - 1 \rangle$

orbitální impulsmoment nabývá hodnot $\sqrt{l(l+1)}\hbar$

magnetické kvantové číslo z -složka orbitálního impulsmomentu m_l může nabývat celkem $2l + 1$ celočíselných hodnot v intervalu $\langle -l; l \rangle$

spin má hodnotu $s = \frac{1}{2}$,

spinový impulsmoment má hodnotu $\sqrt{s(s+1)}\hbar = \frac{3}{2}\hbar$

z -složka spinu m_s může nabývat hodnot $-\frac{1}{2}$ a $\frac{1}{2}$

pro dané n je celkem $2n^2$ kombinací l a m_l a m_s

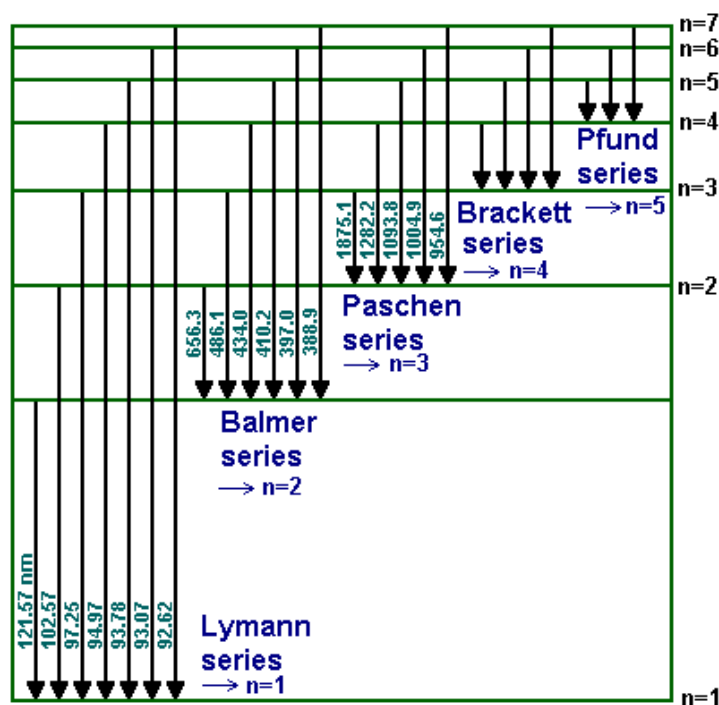
stav elektronu v atomu je popsán čtveřicí kvantových čísel (n, l, m_l, m_s)

5.2.1 Struktura a přechody vodíku a vodíkpodobných iontů

Energie vázaného stavu vodíku nebo vodíkpodobného iontu závisí na atomovém čísle Z , na jejím hlavním kvantovém čísle n a také na hmotnosti jádra atomu vztahem (B.6)

$$E_n = -\frac{Z^2\bar{\mathcal{R}}_Z}{n^2}, \quad (5.27)$$

kde $\bar{\mathcal{R}}_Z$ je Rydbergova konstanta daného atomu (viz Příloha B.1 a rovnice B.5). Závislost energií hladin na n^{-2} způsobuje vzájemný častý překryv hladin vodíkpodobných iontů. Spektrální série vodíku (Lymanova, Balmerova, atd.) se vždy překrývají s čarami vodíkpodobných iontů, nicméně díky závislosti energie hladin na hmotnosti atomového jádra (jiné $\bar{\mathcal{R}}_Z$) jsou jejich vlnové délky vždy trochu



Obrázek 5.1: Struktura vodíkového atomu. Obrázek zkopírován z <http://skullsinthestars.com>. Hlavní kvantová čísla jsou pro $n \geq 2$ v popisu os posunuta.

vzájemně posunuty. Statistická váha n -té hladiny je dána vztahem

$$g_n = 2 \sum_{l=0}^{n-1} (2l + 1) = 2n^2. \quad (5.28)$$

Sílu oscilátoru pro přechod mezi hladinami s hlavními kvantovými čísly n a n' lze vyjádřit pomocí

$$g_n f_{nn'} = \frac{32}{3\pi\sqrt{3}} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right)^{-3} \frac{1}{n^3 n'^3} g(n, n') \quad (5.29)$$

kde $g(n, n')$ je Gauntův faktor, veličina řádu 1. Výsledky prvních výpočtů atomárních dat pro vodík zveřejnili Menzel and Pekeris (1935).

5.2.2 Jemná struktura hladin vodíku

Vztah (5.27) udává jednu hodnotu energie pro celou slupku s kvantovým číslem n . Z relativistické rovnice však vyplývá, že pro různá orbitální kvantová čísla l

dostáváme různé hodnoty energie. Stavů charakterizovanému kvantovými čísly n a l říkáme *term*. Změna energie oproti vztahu (5.27) je dána rovnicí

$$\Delta E_{nl} = \frac{E_n (Z\alpha)^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right) = \frac{Z^4 \alpha^2 \bar{R}_Z}{n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{l + \frac{1}{2}} \right) \quad (5.30)$$

kde $\alpha = e^2/(\hbar c) = 1/137.036$ je bezrozměrná *konstanta jemné struktury*. Změna energie daná rovnicí (5.30) je vždy záporná, proto stavy s nejmenším l mají pro dané n nejnižší energii.

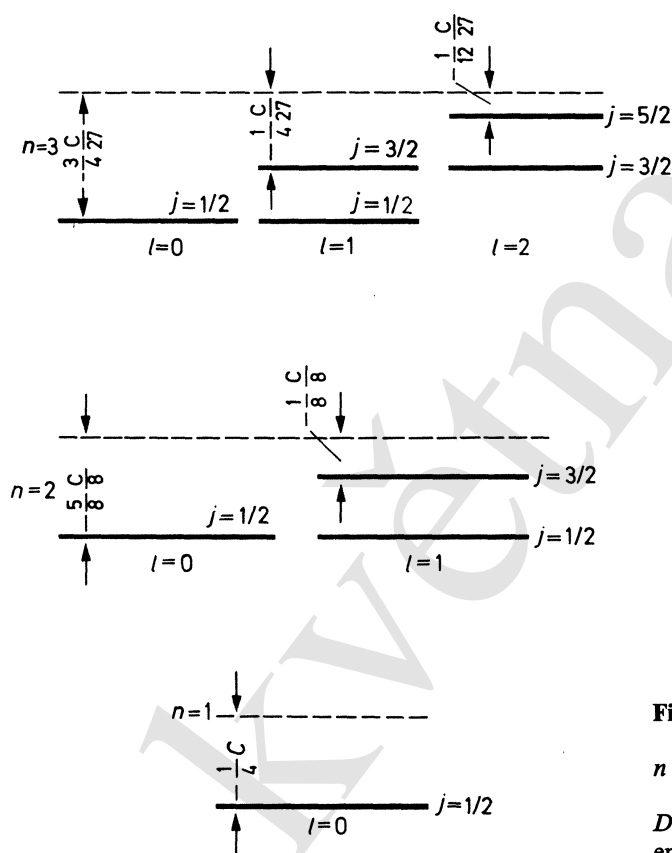
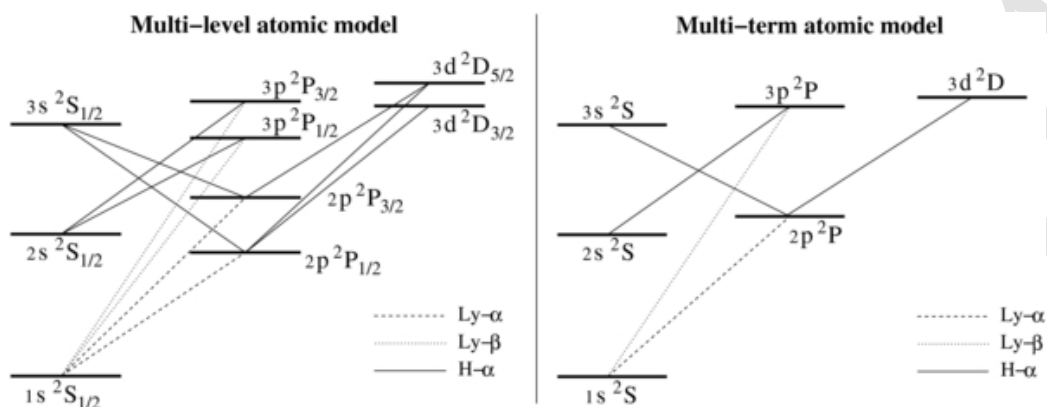


Fig. 1.3. Fine structure of levels $n = 1, 2, 3$. $C = 1/2 a^3 Z^4 \left(\frac{m e^4}{\hbar^2} \right)$. Dashed lines correspond to the energy given by (1.6)

Obrázek 5.2: Jemná struktura vodíkového atomu. Obrázek ze Sobelman (1992, Fig. 1.3).

Další změny stavů dostaneme, když kromě orbitálního kvantového čísla l vezmeme v úvahu ještě spin elektronu s . Stavů popsanému kvantovými čísly n , l a s říkáme *hladina*. Každé hladině charakterizované těmito kvantovými čísly můžeme přiřadit kvantové číslo celkového impulsmomentu j , které získáme vektro-



Obrázek 5.3: Jemná struktura vodíkového atomu. Obrázek z Belluzzi and Trujillo Bueno (2011).

rovým složením l a s ,

$$j = l + s.$$

Kvantové číslo j je proto z intervalu $\langle |l - s|, l + s \rangle$, přičemž v případě vodíku $s = \frac{1}{2}$ (má jeden elektron). Pro orbitální kvantové číslo $l = 0$ dostáváme jen jednu hodnotu $j = \frac{1}{2}$. Pro $l = 1$ dostáváme dvě hodnoty $j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$, pro $l = 2$ dostáváme dvě hodnoty $j = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$, pro vyšší hodnoty l je postup analogický. Hladina tak může být ekvivalentně popsána také kvantovými čísly n, l a j .

Započtení spinu způsobí další posun energie stavů,

$$\Delta E_{so} = \alpha^2 \bar{R}_Z \left[\frac{j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)}{2l(l + \frac{1}{2})(l+1)} \right] \frac{Z^4}{n^3}. \quad (5.31)$$

Celkový posun energií vyplývající z rovnic (5.30) a (5.31) je

$$\begin{aligned} \Delta E_{nlj} &= \Delta E_{nl} + \Delta E_{so} \\ &= \frac{E_n (Z\alpha)^2}{n} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right) = \frac{Z^4 \alpha^2 \bar{R}_Z}{n^3} \left(\frac{3}{4n} - \frac{1}{j + \frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (5.32)$$

Zajímavé je, že výsledný vztah pro energie nezávisí na kvantovém čísle l . Pro dané hlavní kvantové číslo n jsou energie stavů s různým l a stejným j stejné. Ve skutečnosti energie pro různá l stejné nejsou, jak vyplývá z přesnějších vztahů kvantové elektrodynamiky (viz Sobelman, 1992, kapitola 10.3.5). Experimentálně tento rozdíl energií pro hladiny vodíku $2s_{\frac{1}{2}}$ a $2p_{\frac{1}{2}}$ pozorovali Lamb and Retherford (1947), říká se mu Lambův posuv.

Výběrová pravidla pro dipólové přechody

výběrová pravidla: přechod mezi stavy nlm_l a $n'l'm'_l$ dovolen pro

$$\begin{aligned} \Delta n & \text{ jakékoli} \\ \Delta l & = l' - l = \pm 1 \\ \Delta s & = 0 \end{aligned} \quad \text{pro vodík splněno vždy, má jen 1 elektron} \quad (5.33a)$$

jinak vyjádřeno

$$\Delta j = 0, \pm 1 \quad \text{kromě} \quad j = 0 \leftrightarrow j' = 0 \quad (5.33b)$$

pro přechody mezi podhladinami

$$\Delta m_l = m'_l - m_l = 0, \pm 1 \quad \text{pro přechody mezi složkami hladin} \quad (5.33c)$$

dvoufotonový proces –

- přechod $1s_{\frac{1}{2}} \leftrightarrow 2s_{\frac{1}{2}}$ – není dovolen podle výběrových pravidel
- možný jako dvoufotonový (Dopita and Sutherland, 2005, kapitola 6.4)³ absorpce nebo emise dvou fotonů s $\nu_1 + \nu_2 = \nu_{L\alpha}$
- pravděpodobnost vyzáření fotonu maximální uprostřed (pro $\nu = \nu_{L\alpha}/2$, což odpovídá 1550Å) maximum emisivity není ve středu (protože je váhovaná frekvencí), ale na 2403Å
- integrací přes frekvence dostaneme Einsteinův koeficient $A_{2s_{\frac{1}{2}}1s} = 8.2249s^{-1}$ možný i zakázaný magnetický dipólový přechod, pro něj je $A_{2s_{\frac{1}{2}}1s} = 2.495 \cdot 10^{-6}$, méně pravděpodobný
- dvoufotonový přechod významný v mezihvězdném prostředí (poprvé použili Spitzer and Greenstein, 1951)

Hyperjemná struktura hladin vodíku

- vzniká interakcí se spinem jádra atomu
- základní hladina vodíku $1s_{\frac{1}{2}}$
 - kvantové číslo hladiny $j = l + s = \frac{1}{2}$

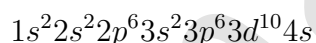
³Teorii dvoufotonových procesů rozvinuli Breit and Teller (1940).

- spin atomového jádra $i = \frac{1}{2}$
- $f = j + i$, 2 hladiny, $f = 0, f = 1$
- u vodíku přechod mezi hladinami na vlnové délce 21.106 cm (1420.40575MHz)
- doba života excitovaného stavu $\sim 10^7$ let ($A = 2.87 \cdot 10^{-15} s^{-1}$, Dopita and Sutherland, 2005)

5.2.3 Struktura mnohoelektronových atomů

analytické řešení víceelektronového systému není možné, třeba řešit numericky
základní předpoklad – aproximace centrálního pole (viz například Sobelman, 1992, kapitola 2)

elektronová konfigurace příklad: elektronová konfigurace základního stavu mědi Cu



každý elektron má orbitální (l) a spinový (s) impulsmoment, ty spolu interagují

existuje několik způsobů, jak vektory l a s jednotlivých elektronů sečíst a získat tak celkový impulsmoment

LS vazba silnější vazba mezi všemi l elektronů; mezi všemi s elektronů nejdříve sečteme všechna l do L , všechna s do S , pak zkombinujeme do J

jj vazba silnější vazba mezi l a s \forall elektron, zkombinujeme do j , pak sečteme všechna j do J

něco mezi intermediate coupling

Grotrianovy diagramy – schémata energetických hladin atomů (Grotrian, 1928)

5.2.4 LS vazba

(Russellova-Saundersova)

- pro lehké prvky $Z \lesssim 18$

- v případě, že jsou všechny orbitální impulsmomenty silně navzájem vázány, tvoří potom celkový orbitální impulsmoment atomu

$$L = \sum l \quad (5.34)$$

velikost $|\mathbf{L}| = \sqrt{L(L+1)}\hbar$; $L = 0, 1, 2, 3, \dots$

- také všechny spinové momenty jsou spolu silně svázány, celkový spin atomu je

$$S = \sum s \quad (5.35)$$

- velikost $|\mathbf{S}| = \sqrt{S(S+1)}\hbar$;
- pro sudý počet elektronů v obalu – $S = 0, 1, 2, 3, \dots$
- pro lichý počet elektronů v obalu – $S = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$

- celkový elektronový impulsmoment atomu vznikne slabou vazbou orbitálního a spinového

$$\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \quad (5.36)$$

- velikost $|\mathbf{J}| = \sqrt{J(J+1)}\hbar$;
- $J \in \langle |L - S|; |L + S| \rangle$,
- celkem $2 \min(L, S) + 1$ nezáporných čísel (multiplicita),
- pro sudý počet elektronů v obalu – celá čísla,
- pro lichý počet elektronů v obalu – poločíslna ($\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$)
- z složka \mathbf{J} je $M\hbar$; $M \in \langle -J; J \rangle$, celkem $2J + 1$ čísel

5.2.5 Termy a hladiny v LS aproximaci

pravidla značení – zavedli Russell and Saunders (1925), použil a upravil Hund (1927), konečnou podobu včetně označení parity zformulovali Russell et al. (1929)

term podle hodnot L se term značí (J vynecháno, aby se nepletlo s $J = L + S$)

L	0	1	2	3	4	5	6	7	...
označení	S	P	D	F	G	H	I	K	...

hladina množina stavů se stejným L, S, J se nazývá hladina

parita vyplývá ze symetrie vlnové funkce

$$\pi = (-1)^{\sum_i l_i} \quad (5.37)$$

$\pi = +1 \Rightarrow$ sudá (*even*) parita, $\pi = -1 \Rightarrow$ lichá (*odd*) parita

pravidlo: je-li součet všech l v hladině sudý, je parita sudá

zápis hladiny

- zapíšeme písmeno odpovídající hodnotě L
- hodnota $2S + 1$ se napíše do levého horního indexu
- hodnota J se napíše do pravého dolního indexu
- lichá parita se zapíše do pravého horního indexu jako o , sudá se nezapíše nikam
- výsledek $^{2S+1}L_J$ nebo $^{2S+1}L_J^o$

zápis termu

- jako zápis hladiny s vynecháním J
- výsledek ^{2S+1}L nebo $^{2S+1}L^o$

statistická váha hladiny

$$g = 2J + 1 = (2L + 1)(2S + 1)$$

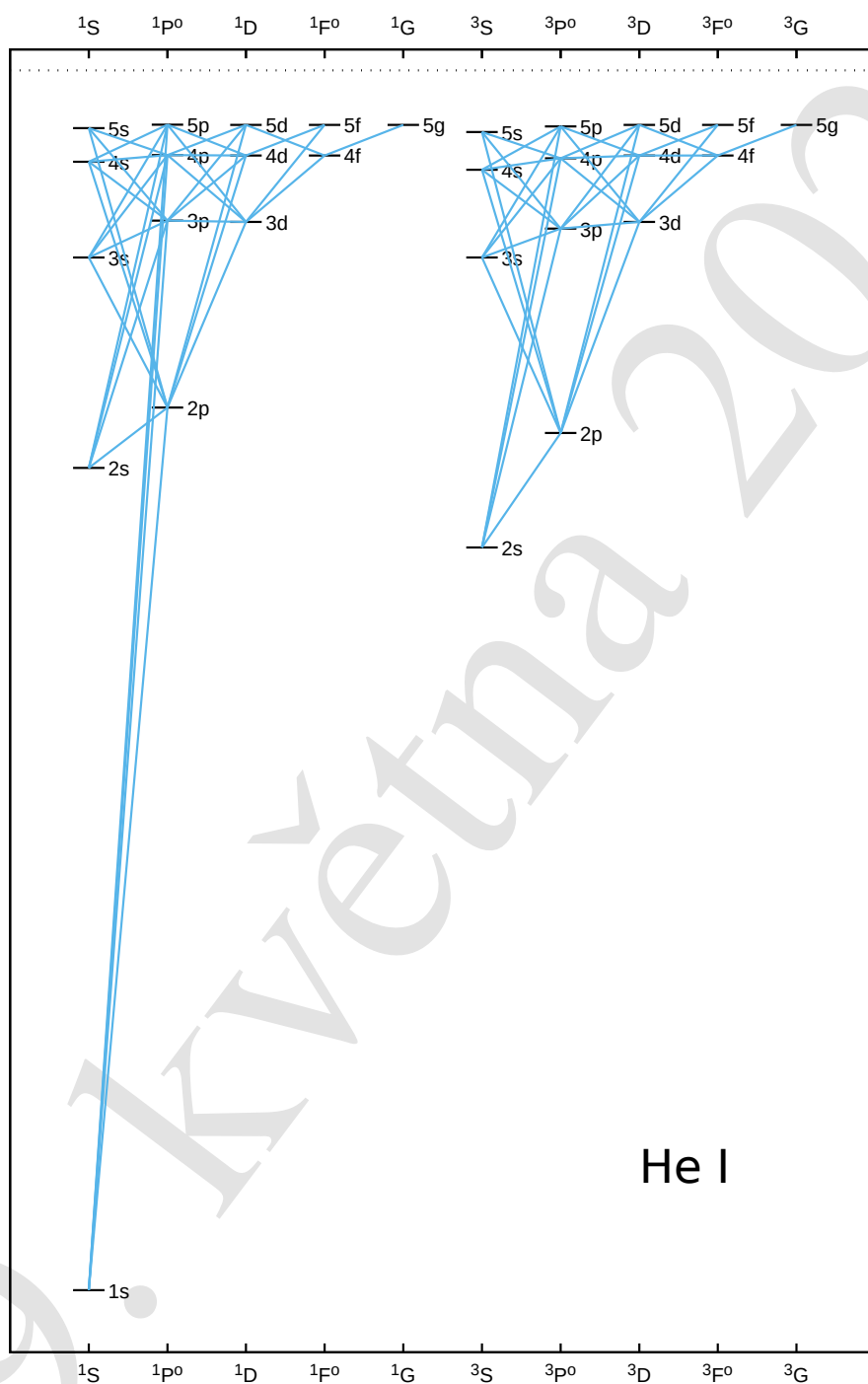
stav (podhladina) – každá hladina má $2J + 1$ stavů o stejné energii, v magnetickém poli se rozštěpí na stavy s různou energií

Příklad - neutrální helium (He I)

- nejjednodušší atom s více elektrony – dva elektrony
- základní hladina $1s^2 \ ^1S_0$ (oba elektrony mají stejné l a $n \rightarrow$ **ekvivalentní elektrony**)
- excitované stavy – elektrony mají různá n – **nekvivalentní elektrony** (tabulka 5.1 a obrázek 5.4)

další příklad C I (Příloha B.5.4)

5. OPACITA, EMISIVITA A ROZPTYL



Obrázek 5.4: Schematický Grotrianův diagram termů He I. Termy s $n \geq 6$ nejsou zobrazeny.

Tabulka 5.1: Hladiny neutrálního helia He I.

konfigurace	singlety		triplety		
	term	hladina	term	hladiny	
$1s^2$	1S	1S_0			
$1s2s$	1S	1S_0	3S	3S_1	
$1s2p$	$^1P^o$	$^1P_1^o$	$^3P^o$	$^3P_0^o$	$^3P_1^o$ $^3P_2^o$
$1s3s$	1S	1S_0	3S	3S_1	
$1s3p$	$^1P^o$	$^1P_1^o$	$^3P^o$	$^3P_0^o$	$^3P_1^o$ $^3P_2^o$
$1s3d$	1D	1D_2	3D	3D_1	3D_2 3D_3
$1s4s$	1S	1S_0	3S	3S_1	
$1s4p$	$^1P^o$	$^1P_1^o$	$^3P^o$	$^3P_0^o$	$^3P_1^o$ $^3P_2^o$
$1s4d$	1D	1D_2	3D	3D_1	3D_2 3D_3
$1s4f$	$^1F^o$	$^1F_4^o$	$^3F^o$	$^3F_2^o$	$^3F_3^o$ $^3F_4^o$

5.2.6 Rydbergova korekce

například Pradhan and Nahar (2011, kapitola 2.9), Sobelman (1992, kapitola 3.2.1)

- modifikovaný vztah (5.27) pro energie hladin těžších prvků (například Tenyson, 2005, rovnice 6.1, ale v ní je použita konstanta \mathcal{R}_∞)⁴

$$E_{nl} = -\bar{\mathcal{R}}_Z \frac{Z_{\text{eff}}^2}{(n - \mu_{nl})^2} \quad (5.38)$$

Z_{eff} – efektivní náboj,
například pro sodík 1 (náboj ostatních elektronů se vyruší s nábojem jádra), pro jiné prvky může být jiný, záleží na struktuře atomu

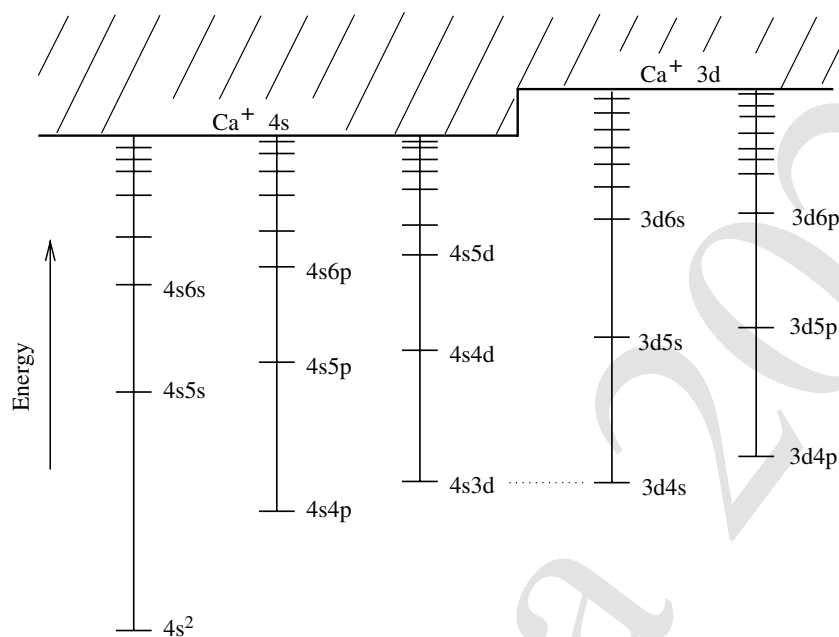
μ_{nl} – **kvantový defekt** (*quantum defect*), pro každé l jiné číslo, snižuje se pro rostoucí l
příklad: sodík Na I – pro podslupku f a vyšší je $\mu_{nl} = 0$, \Rightarrow vztah jako pro vodík

- vztah (5.38) velmi dobře použitelný například pro spektra alkalických prvků (sodík, ...), kapitola B.5.2

5.2.7 Dvojexcitované stavy

- mohou být excitovány dva i více elektronů

⁴Tento vztah poprvé formuloval Rydberg (1890), v té době ještě bez kvantové mechaniky.



Obrázek 5.5: Zjednodušený diagram dvouexcitovaných hladin Ca I. Zkopírováno z Tennyson (2005, obr. 7.9).

- u všech atomů a iontů, které mají více elektronů v obalu než jeden
- příklad Ca I – obrázek 5.5
 - základní hladina $4s^2 \ ^1S_0$
 - normální systém konfigurací $4sns$, $4snp$, $4snd$, atd. vytváří singletní a tripletní termy (obrázek B.2)
 - z hladin excitovaných termů $4s3d \ ^1D$ a $4s3d \ ^3D$ může být snadno excitován nejen $3d$ elektron, ale i $4s$ elektron, vzniknou stavy $3d \ (^2D)ns' \ ^1D$, $3d \ (^2D)ns' \ ^3D$, $3d \ (^2D)np' \ ^1P^o$, $3d \ (^2D)np' \ ^3P^o$, atd. (obrázek B.3) některé z nich mají vyšší energii než je ionizační energie z hladiny $4s^2$ (ze základní hladiny) tyto stavy se ionizují do hladiny Ca II $3d \ ^2D$ (viz obr. B.4) systém stavů s jedním excitovaným elektronem značíme $4s \ (^2S)nl \ ^1,3L$
- z dvou- a víceexcitovaných stavů s energií vyšší než nejnižší ionizační energie může dojít k autoionizaci

5.2.8 Složitější struktura atomů

rod (parentage), rodič, prarodič

příklad: VI, 6D termy, $L = 2, S = 5/2$, multiplicita=5, hodnoty $J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, \frac{9}{2}$, základní konfigurace V I: $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 3d^3 4s^2$, zkráceně $3d^3 4s^2$; konfigurace $3d^4$ (5D) $4s$, $3d^3 4s$ (5F) $4p$, $3d^4$ (5D) $4p$, $3d^3 4s$ (5P) $4p$

další příklad P IV $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s$ (2S) a $1s^2 2s^2 2p^6 3p$ (${}^2P^o$)

$1s^2 2s^2 2p^6 3s$ (2S) $3s$ 1S

$1s^2 2s^2 2p^6 3s$ (2S) $3p$ ${}^3P^o$

$1s^2 2s^2 2p^6 3s$ (2S) $3p$ ${}^1P^o$

$1s^2 2s^2 2p^6 3p$ (${}^2P^o$) $3p$ 1D

$1s^2 2s^2 2p^6 3p$ (${}^2P^o$) $3p$ 3P

$1s^2 2s^2 2p^6 3s$ (2S) $3d$ 3D

$1s^2 2s^2 2p^6 3p$ (${}^2P^o$) $3p$ 1S

$1s^2 2s^2 2p^6 3s$ (2S) $3d$ 1D

polyad termy mající stejné rodiče

atomy s částečně zaplněnými d - a f -slupkami (Příloha B.5.6)

velké množství hladin, speciální značení (a, b, c, x, z, \dots) jako zkratka dlouhých konfigurací

značení viz také Moore (1952).

5.2.9 Výběrová pravidla

(zeemanovská) složka (čáry) je přechod mezi stavy

čára je přechod mezi hladinami, skládá se ze složek

multiplet je přechod mezi termy, skládá se z čar

výběrová pravidla (viz Tatum, 2020, kapitola 7.24) (viz také Martin and Wiese, 2006, Table 10.4)

většina spektrálních čar – elektrické dipólové záření

některé čáry nejsou dovolené pro dipólové záření (E1) \Rightarrow jsou zakázané, ale mohou být dovolené pro elektrické kvadrupólové záření (E2) nebo pro záření magnetického dipólu (M1)

některé přechody jsou zakázané jen díky LS-vazbě a začínají být dovolené při odchylkách of LS vazby

elektrické dipólové přechody (E1) – podmínky:

1. $\Delta J = 0, \pm 1$ ($J = 0 \rightarrow J = 0$ je zakázaný)
2. pro Zeemanovské složky $\Delta M = 0 \pm 1$ (kromě $0 \leftrightarrow 0$ pro $\Delta J = 0$)
3. změna parity
4. pro slabou kongurační interakci:
přeskok jednoho elektronu: $\Delta l = \pm 1, \Delta n$ libovolné
5. jen pro LS coupling
 $\Delta S = 0$
 $\Delta L = 0, \pm 1$ kromě $0 \leftrightarrow 0$

magnetické dipólové přechody (M1) – přechody mezi termy stejné konfigurace

1. $\Delta J = 0 \pm 1$, ($J = 0 \rightarrow J = 0$ je zakázaný)
2. pro Zeemanovské složky $\Delta M = 0 \pm 1$ (kromě $0 \leftrightarrow 0$ pro $\Delta J = 0$)
3. není změna parity
4. není změna elektronové konfigurace ($\Delta l = 0, \Delta n = 0$)
5. navíc pro pro LS-vazbu:
 - $\Delta S = 0$
 - $\Delta L = 0$
 - $\Delta J = \pm 1$ (Martin and Wiese, 2006, Table 10.4)

elektrické kvadrupólové přechody (E2) – přechody mezi termy stejné konfigurace nebo mezi konfiguracemi, kde je $\Delta l = \pm 2, \Rightarrow$ beze změny parity

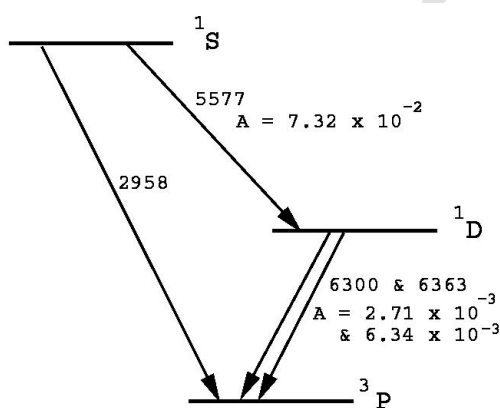
1. $\Delta J = 0, \pm 1, \pm 2$, ale $0 \leftrightarrow 0, \frac{1}{2} \leftrightarrow \frac{1}{2}, 0 \leftrightarrow 1$ jsou zakázané
2. pro Zeemanovské složky $\Delta M = 0, \pm 1, 2$
3. není změna parity
4. navíc pro pro LS-vazbu:
 - $\Delta S = 0$
 - $\Delta L = 0, \pm 1, \pm 2$, ale $0 \leftrightarrow 0, 0 \leftrightarrow 1$ jsou zakázané

5.2.10 Zakázané čáry v přírodě

mají mnohem nižší pravděpodobnost přechodu \Rightarrow mají větší délku života (až sekundy i minuty);

nutná metastabilní hladina

objeví se všude tam, kde je méně srážek mezi atomy a elektrony (důležité jsou nepružné srážky) – je nutné nechat metastabilní hladiny žít



Obrázek 5.6: Zakázané přechody O I. NIST: 2958 E2, 2972 M1, 5577 E2, 6300 & 6363 M1 a slabší přechod E2.

- planetární mlhoviny – čáry [O II], [O III], [N I], [N II], [N III]
 [O III] 5007 (M1: $^3P_2 - ^1D_2$)
 známé čáry: [O III] 4959 (M1: $^3P_1 - ^1D_2$)
 [O III] 4363 (E2: $^1P_2 - ^1S_0$)

struktura O III stejná jako C I (obrázek B.7) – stejný počet elektronů

„nebulium” – než se to pochopilo

- sluneční koróna
 čára 5303 Å [Fe XIV] ($^2P_{\frac{1}{2}}^o - ^2P_{\frac{3}{2}}^o$)

„coronium”

- polární záře
 - zelená čára [O I] 5577 (E2: $^1S_0 - ^1D_2$)
 - červené čáry [O I] 6300 (M1: $^1D_2 - ^3P_2$)
 - [O I] 6363 (M1: $^1D_2 - ^3P_1$)
- diagramy O I: obrázky 5.6 a B.8
- 21cm čára vodíku
 - hyperjemná struktura – složení impulsmomentu elektronového obalu a jádra, vzniknou 2 stavy

5.2.11 jj vazba

viz Pradhan and Nahar (2011, kapitola 2.7), Sobelman (1992, kapitola 2.3.2)

- vazba mezi elektronem a jádrem silnější -> porušení LS vazby
- elektrostatická interakce mezi elektrony slabší než spin-orbitální interakce
- nutnost uvažovat impulsmoment jednotlivých elektronů

$$\mathbf{j}_i = \mathbf{l}_i + \mathbf{s}_i$$

$$\mathbf{J} = \sum_i \mathbf{j}_i$$

celkem $2J + 1$ stavů

- značení jednotlivých elektronů $s_{\frac{1}{2}}, p_{\frac{1}{2}}, p_{\frac{3}{2}}, d_{\frac{3}{2}}, d_{\frac{5}{2}}, f_{\frac{5}{2}}, f_{\frac{7}{2}}, \dots$
- značení: pro 2 p -elektrony $(j_1, j_2)_J$: $(1/2, 3/2)_1, (1/2, 3/2)_2$
- příklad: p a d elektrony, $j_1 = 1 \pm \frac{1}{2}, j_2 = 2 \pm \frac{1}{2}$
 $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2})_{2,1} (\frac{1}{2}, \frac{5}{2})_{3,2} (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})_{3,2,1,0} (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})_{4,3,2,1}$
- to jsou neekvivalentní elektrony, pro jj vazbu zajímavější, protože elektrostatická interakce mezi ekvivalentními elektrony je vždy silná
- pro ekvivalentní elektrony je vždy nutné vzít v úvahu Pauliho princip

porovnání LS a jj vazby pro O III 2p3d level (viz Sobelman, 1992, kapitoly 4.7.1 a 4.7.2)

Příklad: O III konfigurace $1s^2 2s^2 2p 3d$

LS vazba

- $2p: l_1 = 1 \quad s_1 = \frac{1}{2}$
- $3d: l_2 = 2 \quad s_2 = \frac{1}{2}$
- $L = l_1 + l_2 \Rightarrow L = 1, 2, 3$
- $S = s_1 + s_2 \Rightarrow S = 0, 1$
- $J = L + S$

L	S	J	
1	0	1	$^1P_1^o$
1	0	0,1,2	$^3P_0^o \ ^3P_1^o \ ^3P_2^o$
2	0	2	$^1D_2^o$
2	1	1, 2, 3	$^3D_1^o \ ^3D_2^o \ ^3D_3^o$
3	0	3	$^1F_3^o$
2	1	2, 3, 4	$^3F_2^o \ ^3F_3^o \ ^3F_4^o$

jj vazba

- $l_1 = 1, s_1 = \frac{1}{2}, j_1 = l_1 + s_1 \Rightarrow j_1 = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$
- $l_2 = 2, s_2 = \frac{1}{2}, j_2 = l_2 + s_2 \Rightarrow j_2 = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}$
- $J = j_1 + j_2$

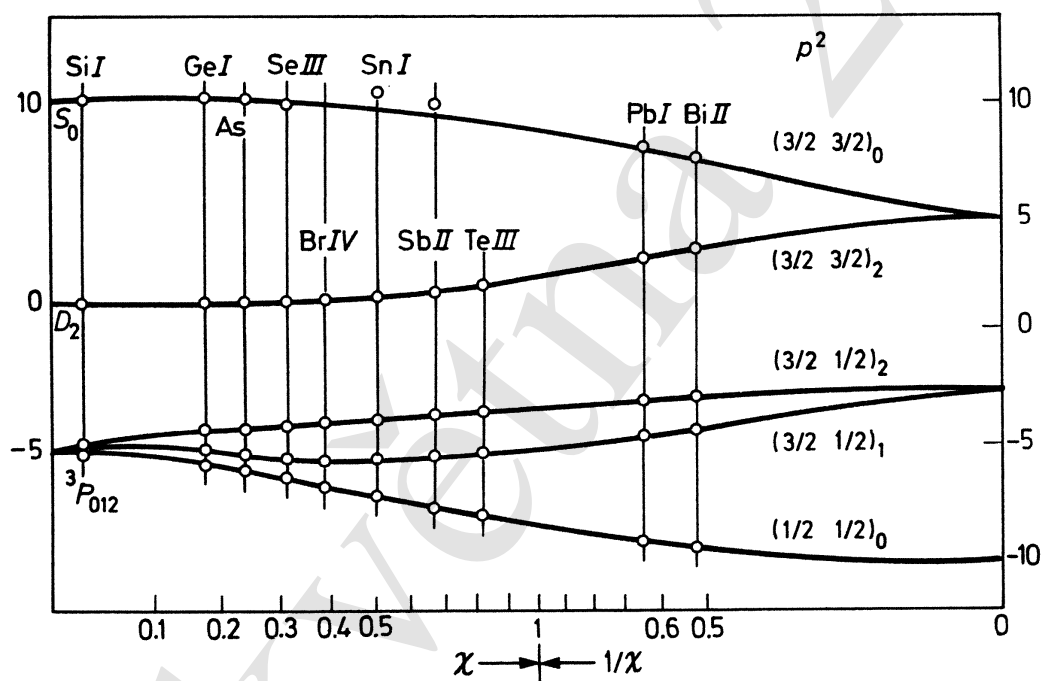
j_1	j_2	J
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1,2
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0,1,2,3
$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	2,3
$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{2}$	1,2,3,4

Příklad: O III konfigurace $1s^2 2s^2 2p^2$ nebo $1s^2 2s^2 2p 3p$
(viz Sobelman, 1992, kapitola 4.10)

- $2p$ nebo $3p: l_2 = 1 \quad s_2 = \frac{1}{2}$, pokud $n = 2$ pro oba: ekvivalentní elektrony
- $L = l_1 + l_2 \Rightarrow L = 0, 1, 2$
- $S = s_1 + s_2 \Rightarrow S = 0, 1$
- $J = L + S$

L	S	J	hladiny	
0	0	0	1S_0	
0	1	0,1	3S_0 3S_1	ne pro ekvivalentní elektrony
1	0	1	1P_1	ne pro ekvivalentní elektrony
1	1	0, 1, 2	3P_0 3P_1 3P_2	
2	0	2	1D_2	
2	1	1, 2, 3	3D_1 3D_2 3D_3	ne pro ekvivalentní elektrony

5.2.12 Ostatní typy vazeb



Obrázek 5.7: Přejít mezi LS a jj vazbou pro konfiguraci p^2 . Obrázek ze Sobelman (1992, obr. 5.1, str. 151).

intermediate coupling – přehled různých značení hladin – Martin and Wiese (2006)

přejít mezi LS a jj vazbou (obrázek 5.7)

LSJ coupling, (Pradhan and Nahar, 2011, kapitola 2.7), ale existuje více označení nejdříve sečteme všechna l a s pro všechny elektrony kromě valenčního

do J_1 , $\mathbf{J}_1 = \sum_i \mathbf{l}_i + \sum_i \mathbf{s}_i$, pak přidáme valenční elektron: $\mathbf{K} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{l}$,
 $\mathbf{J} = \mathbf{K} + \mathbf{s}$

jl (Sobelman, 1992, kapitola 5.7.3), J_1l or J_1L_2 (Martin and Wiese, 2006) – optický elektron "daleko" od elektronů jádra
 jl vazba u vzácných plynů (Příloha B.5.5) (Sobelman, 1992, kapitola 5.7.3)

Jj (Sobelman, 1992) J_1j nebo J_1J_2 (Martin and Wiese, 2006)

LS_1 (Martin and Wiese, 2006)

5.2.13 Vliv izotopů

- hmotový efekt
 ilustrační příklad – vodík → deuterium
 změní se redukovaná hmota atomu

$$\mu = \frac{m_{\text{at}}m_e}{m_{\text{at}} + m_e}$$

v rovnici (5.27) se změní \bar{R}_Z (viz rovnice B.5)
 posunou se energetické hladiny
 posunou se i spektrální čáry
 pro těžší prvky podobně, posun menší

- objemový efekt – těžší atomy jsou „větší“
 změnu energie hladiny lze odvodit za předpokladu konečného rozměru jádra (Landi Degl' Innocenti, 2014, kapitola 9.8)
 (nepoužije se standardní předpoklad jádra jako bodu)
 také vede k posunu spektrálních čar

5.2.14 Hladiny v magnetickém poli

Zeemanův efekt štěpení hladin ve *slabém* magnetickém poli

$E_{\alpha JM}$ (α zahrnuje všechna explicitně neuvedená kvantová čísla) – energie rozštěpených hladin

$$E_{\alpha JM} = E_{\alpha J} + \mu_0 g B M \quad (5.39)$$

$E_{\alpha J}$ – energie nerozštěpené hladiny

M – magnetické kvantové číslo, $M = -J, \dots, J$

B – indukce magnetického pole

μ_0 – Bohrov magneton,

$$\mu_0 = \frac{eh}{4\pi m_e c} \quad (5.40)$$

g – Landého faktor, pro LS vazbu viz (B.16)

- rozštěpením hladin vzniká rozštěpení spektrálních čar
- zpětně lze z poloh čar a s pomocí vztahu (5.39) určit magnetické pole, které způsobuje štěpení

Paschenův-Backův efekt pokud neplatí slabost magnetického pole

- magnetická interakce dominantní – úplný Paschenův-Backův efekt (spin-orbitální interakce je perturbací magnetické interakce)
- magnetická interakce srovnatelná se spin-orbitální interakcí (ostatní případy, které nejsou Zeemanův nebo úplný Paschenův-Backův efekt) – neúplný Paschenův-Backův efekt

trochu více Příloha B.4

5.3 Absorpce a emise ve spektrálních čarách

V této kapitole si ukážeme, jak jsou absorpční i emisní účinné průřezy spektrální čáry (5.13) frekvenčně závislé. Jejich závislost na frekvenci můžeme formálně vyjádřit jako

$$\alpha_{lu}(\nu) = \alpha_{lu} \phi_{lu}(\nu)$$

kde $\phi_{lu}(\nu)$ je **profil** spektrální čáry. V dalším textu nebudeme psát u ϕ indexy hladin l a u . Pro celkový účinný průřez čáry musí platit

$$\int_0^\infty \alpha_{lu}(\nu) d\nu = \alpha_{lu},$$

profil spektrální čáry je proto normalizovaný,

$$\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1$$

a jeho rozměr $[\phi] = \text{s}$. Pro frekvenčně závislý účinný průřez absorpce nebo emise ve spektrální čáře můžeme psát

$$\alpha_{lu}(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} B_{lu} \phi(\nu) = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} \phi(\nu), \quad (5.41)$$

kde jsme využili vztah (5.13).

5.3.1 Přírozené rozšíření spektrálních čar

Přírozené rozšíření spektrálních čar vyplývá z principu neurčitosti. Budeme uvažovat přechod mezi hladinami u (horní hladina) a l (spodní hladina) ve dvouhladinovém atomu. Střední doba života Δt_u atomu ve stavu u je dána vztahem (5.9) jako převrácená hodnota Einsteinova koeficientu, $\Delta t_u = A_{ul}^{-1}$. Z principu neurčitosti dostáváme rozšíření energií ΔE_u horní hladiny, $\Delta E_u \Delta t_u = \Delta E_u A_{ul}^{-1} \simeq h$, což způsobuje rozšíření frekvencí přechodu $u \rightarrow l$, $\Delta \nu_{ul} = \Delta E_u / h \simeq A_{ul}$.

Spontánně emitující systém lze považovat za rozpadající se systém (*decaying*) a lze jej popsat stejně jako tlumený systém (*damped*). Vztahy pro jeho kmity a účinný průřez uvádí Příloha B.2. Konstantu útlumu γ (B.8) nahradíme konstantou útlumu Γ , která přímo souvisí se střední dobou života hladin l a u . Pro celkový účinný průřez přechodu $u \rightarrow l$ můžeme použít vztah (B.10), z něhož pro závislost účinného průřezu na frekvenci vyplývá **Lorentzův profil**

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Gamma_{lu}}{4\pi}}{(\nu - \nu_{lu})^2 + \left(\frac{\Gamma_{lu}}{4\pi}\right)^2}, \quad (5.42)$$

kde **konstanta útlumu** (l a u jsou indexy spodní a horní hladiny přechodu)

$$\Gamma_{lu} = \Gamma_u + \Gamma_l, \quad \Gamma_l = \sum_{i < l} A_{li}, \quad \Gamma_u = \sum_{i < u} A_{ui}. \quad (5.43)$$

kde A_{ji} ($j = l$ nebo u) je Einsteinův koeficient spontánní emise při přechodu z hladiny j do hladiny i (viz kapitola 5.1.1). Pro každou hladinu j je Γ_j dáno jako součet všech koeficientů spontánní emise pro všechny přechody z dané hladiny. Tento standardní vztah platí přesně pro atom, který není vystaven žádnému záření. Pokud na atom dopadá záření o střední intenzitě $J(\nu_{ji})$, je nutné započítat i další procesy, které způsobují přechod z hladiny j do nižších (stimulovaná emise) a vyšších (absorpce) hladin. Výpočet konstanty útlumu Γ_j se pak změní,

$$\Gamma_j = \sum_{i < j} [A_{ji} + B_{ji} J(\nu_{ij})] + \sum_{i > j} B_{ji} J(\nu_{ji}). \quad (5.44)$$

Členy s Einsteinovými koeficienty B mohou být významné pro silné přechody do hladiny nebo z hladiny j pro $h\nu \ll kT$ (v dlouhovlnné oblasti spektra).

5.3.2 Dopplerovské (tepelné) rozšíření spektrálních čar

Dopplerovské rozšíření je důsledkem tepelného pohybu atomů a iontů. Profil spektrální čáry každé této částice je lorentzovský, částice se však tepelně pohybují. Částice (atom nebo iont) pohybující se rychlostí \mathbf{v}_p vyzaří foton o frekvenci ν_0 (v klidové soustavě částice) ve směru \mathbf{n} (aberci zanedbáme). Průmět rychlosti částice do směru šíření záření je $v_\xi = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_p$. Frekvence fotonu v soustavě pozorovatele je dána Dopplerovým posunem (například Mihalas and Weibel-Mihalas 1984, rovnice 89.7, Castor 2004, rovnice 6.9)

$$\nu' = \nu_0 \left(1 - \frac{v_p^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_p}{c}\right). \quad (5.45)$$

Pro tepelné pohyby ($v_p \ll c$) můžeme zanedbat relativistický člen

$$\nu' = \nu_0 \left(1 + \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_p}{c}\right) = \nu_0 \left(1 + \frac{v_\xi}{c}\right) \quad (5.46)$$

Čáry budou absorbovat nebo vyzařovat na dopplerovsky posunuté frekvenci. Výsledný profil absorpčního nebo emisního koeficientu souboru částic můžeme dostat pomocí rozdělení jejich rychlostí (maxwellovského, rovnice 4.13) v_ξ ve směru paprsku,

$$f(v_\xi) dv_\xi = \frac{1}{v_{th} \sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{v_\xi^2}{v_{th}^2}\right) dv_\xi, \quad (5.47)$$

kde

$$v_{th} = \sqrt{\frac{2kT}{m_a}}$$

je nejpravděpodobnější rychlost (tepelná rychlost, viz rovnice 4.14). Výsledný profil dostaneme integrací posunutých Lorentzových profilů (zde je označíme ϕ_L) přes rozdělení rychlostí (5.47),

$$\phi(\nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_L\left(\nu - \frac{v_\xi \nu}{c}\right) f(v_\xi) dv_\xi. \quad (5.48)$$

Za profil ϕ_L dosadíme z rovnice (5.42) a po úpravách dostaneme

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D \sqrt{\pi}} H[a, x(\nu)] \quad (5.49)$$

kde

$$H(a, x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-y^2) dy}{(x-y)^2 + a^2} \quad (5.50)$$

je *Voigtova funkce*,

$$\Delta\nu_D = \frac{v_{\text{th}}\nu_0}{c} \quad (5.51)$$

je *dopplerovská pološířka*,

$$x = \frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D} \quad (5.52)$$

je bezrozměrná frekvence vyjádřená vzhledem ke středu čáry v dopplerovských pološířkách,

$$a = \frac{\Gamma}{4\pi\Delta\nu_D} \quad (5.53)$$

a

$$y = \frac{v_{\xi}}{v_{\text{th}}}. \quad (5.54)$$

Pro $a \ll 1$, což je běžný případ v astrofyzice, můžeme Voigtovu funkci rozvinout

$$H(a, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n H_n(x) \quad (5.55)$$

kde jednotlivé členy rozvoje

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\pi}n!} \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{x'^2}{4}\right) x'^n \cos(xx') \, dx'. \quad (5.56)$$

Pro nultý a první člen rozvoje dostaneme

$$\begin{aligned} H_0(x) &= \exp(-x^2), \\ H_1(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} [2xF(x) - 1], \end{aligned} \quad (5.57)$$

kde

$$F(x) = \exp(-x^2) \int_0^x \exp(y^2) \, dy \quad (5.58)$$

je Dawsonův integrál⁵.

⁵<https://mathworld.wolfram.com/DawsonsIntegral.html>

Dopplerovské rozšíření spektrálních čar reprezentuje **Voigtův profil** (5.49), který je vyjádřen jako funkce frekvence ν . Vyjádříme-li ho jako funkci bezrozměrné frekvence x vzhledem ke středu čáry (5.52), dostaneme i s ohledem na normalizační podmínku $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx = 1$ vztah

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} H(a, x). \quad (5.59)$$

Přibližný tvar profilu, který dostaneme jako nejnižší člen rozvoje Voigtovy funkce (5.55) se nazývá **Dopplerův profil**

$$\phi(\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_D\sqrt{\pi}} \exp\left[-\left(\frac{\nu - \nu_0}{\Delta\nu_D}\right)^2\right], \quad (5.60a)$$

který poměrně dobře popisuje profil v okolí středu čáry. Dopplerův profil vyjádřený ve frekvencích x (5.52) je

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2). \quad (5.60b)$$

Pro Voigtův profil spektrálních čar uvádějí Hubeny and Mihalas (2014, rovnice 8.24) užitečné přibližné vyjádření

$$\phi(\nu) \approx \frac{1}{\Delta\nu_D\sqrt{\pi}} \left[\exp(-x^2) + \frac{a}{\sqrt{\pi}x^2} \right]. \quad (5.61a)$$

První člen (Dopplerův profil – viz rovnice 5.60a) popisuje profil v okolí středu čáry, kde je dominantní dopplerovské rozšíření ($a \ll 1$, podle (5.53) i $\Gamma \ll 4\pi\Delta\nu_D$). Druhý člen popisuje daleká křídla čar ($|x| \gg 1$), kde je dominantní lorentzovské rozšíření. Jako funkce frekvence x (5.52) vztah (5.61a) je

$$\phi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[\exp(-x^2) + \frac{a}{\sqrt{\pi}x^2} \right]. \quad (5.61b)$$

Vztahy (5.61) budeme v dalších kapitolách používat k přibližnému analytickému vyjádření Voigtova profilu.

5.3.2.1 Turbulentní rozšíření spektrálních čar

Dopplerovsky rozšířený profil někdy nepopisuje rozšíření spektrálních čar hvězdných atmosfér dostatečně přesně, pozorované rozšíření čar je větší. Je to způsobené tím, že kromě tepelných pohybů mají na šířku čáry vliv i netepelné pohyby na škálách menších než je střední volná dráha fotonu. Vliv těchto pohybů na šířku

spektrální čáry bývá zvykem popsat druhou mocninou volného parametru v_{turb} nazývaným **turbulentní rychlost** nebo **mikroturbulentní rychlost**. Tento efekt započteme tak, že do výrazu pro dopplerovskou pološířku (5.51) přidáme dodatečný člen obsahující tento volný parametr,

$$\Delta\nu_D = \frac{\nu_0}{c}v_{\text{th}} = \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m_a}} \rightarrow \frac{\nu_0}{c}\sqrt{\frac{2kT}{m_a} + v_{\text{turb}}^2}. \quad (5.62)$$

Na rozdíl od tepelné rychlosti v_{th} , která je různá pro atomy různé hmotnosti, je turbulentní rychlost pro všechny atomy stejná.

Nedávné 3-D hydrodynamické výpočty sluneční atmosféry ukázaly, že při tak podrobném popisu již není třeba turbulentní rychlost zavádět jako přídatný volný parametr, protože turbulence je nedílnou součástí 3-D hydrodynamického popisu.

5.3.3 Srážkové rozšíření spektrálních čar

vzniká v důsledku srážek s částicemi (atomy, ionty a elektrony)

perturbace horní i dolní hladiny přechodu

závisí na hustotě a teplotě (\Rightarrow tlak)

proto zvané také tlakové rozšiřování

přesné zahrnutí nesnadné

vyšší hladiny snadněji perturbovány

různé interakce s různými částicemi

různý dosah interagujících sil ($\sim r^{-p}$)

nárazové (impaktní) přiblížení – Weisskopf (1932) – „klasická teorie“

vyzařování atomu je přerušeno srážkou \rightarrow okamžitý posun fáze vlnového balíku (případně posun v čáře nebo posun na jinou hladinu)

střední časový interval mezi těmito srážkami – Δt_c ,

časově středované energetické spektrum srážkově rozšířené čáry přes čas Δt_c (pomocí Fourierovy transformace, viz například Pradhan and Nahar, 2011, rovnice 9.43)

$$E(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{1}{\Delta t_c}}{(\omega - \omega_{lu})^2 + \left(\frac{1}{\Delta t_c}\right)^2} \quad (5.63)$$

zavedeme $\Gamma_{\text{col}} = 2/\Delta t_c$

v nárazovém přiblížení stejný profil jako přirozené zářivé rozšíření

$$E(\nu) = \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\Gamma_{\text{col}}}{4\pi}}{(\nu - \nu_{lu})^2 + \left(\frac{\Gamma_{\text{col}}}{4\pi}\right)^2} \quad (5.64)$$

(proto $\Gamma = \Gamma_{\text{rad}} + \Gamma_{\text{col}}$)

každý přechod je jiný a musí se započítat kvantově mechanicky

rozšíření se započítává statisticky

předpoklady Weisskopfova přiblížení:

1. nárazující částice je klasická částice
2. pohybuje se konstantní rychlostí po přímce
3. nárazující částice nezpůsobuje žádné přechody v atomu
4. způsobuje posun frekvence vyjádřitelný jako $\Delta\omega = C_p r^{-p}$,
 r je vzdálenost od středu atomu
 C_p se určí pomocí kvantově mechanických výpočtů
 typy interakcí podle p
 - $p = 2$ srážky nabitých částic s vodíkem nebo s vodíku podobným atomem (lineární Starkův efekt)
 - $p = 3$ srážky atomů se stejnými atomy (rezonanční rozšíření)
 - $p = 4$ srážky nabitých částic s jinými atomy než s vodíkem nebo s vodíku podobným atomem (kvadratický Starkův efekt)
 - $p = 6$ srážky s neutrálními částicemi (převážně s neutrálním vodíkem, van der Waalova interakce)

nárazové rozšíření čar elektrony (electron impact broadening) – započtení rozšíření spodní i horní hladiny – vede k posunu spektrální čáry

Starkovské rozšíření je významné pro hvězdy s vysokou hustotou (bílé trpaslíky) – spektrální čáry H I široké i několik desítek nm

5.4 Ionizace a rekombinace

zářivá ionizace atomu X na iont X^+



týká se elektronu z vnější slupky

zářivá ionizace může probíhat i do excitovaných hladin iontu, má-li foton dostatečnou energii



$[X^+]^*$ značí excitovaný iont

má-li foton ještě více energie, může být uvolněn elektron z nižší slupky (nižšího kvantového čísla n), tím vznikne iont s mnoha excitovanými elektrony (označíme ho $[X^+]^{***\dots}$)



vznikne vysokoenergetický elektron e^-_{high} , který může způsobit další ionizaci

může proběhnout řada dalších zářivých i srážkových procesů deexcitace i ionizace

(Augerovy procesy, kapitola 8.4)

autoionizace pro atomy/ionty, které jsou ve stavu se dvěma excitovanými elektrony, pak může být energie stavu větší, než je ionizační energie



uvolnění elektronu a energie bez vyzáření fotonu, uvolněná energie se přemění na kinetickou energii elektronu

zářivá excitace atomu z vázaného stavu do autoionizačního stavu



následovaná autoionizací (5.68) způsobuje vyšší možnost ionizace pro frekvence odpovídající danému přechodu $h\nu_{\text{exc}} \rightarrow \text{rezonance}$

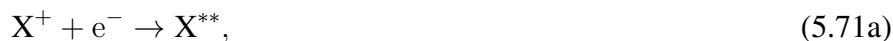
zářivá rekombinace – srážkový proces
spontánní rekombinace



nebo stimulovaná rekombinace s přispěním záření

dielektronická rekombinace :

nejdříve zachycení elektronu atomem se vznikem vázaného stavu se dvěma excitovanými elektrony



následuje deexcitace dvakrát excitovaného stavu do jednou excitovaného stavu, jehož energie je nižší než ionizační energie

$$X^{**} \rightarrow X^* + h\nu \quad (5.71b)$$

je možný i srážkový přechod na nižší hladinu (srážková stabilizace, Bates and Dalgarno, 1962, section 2.2)

$$X^{**} + e^-(E_1) \rightarrow X^* + e^-(E'_1) \quad (5.72)$$

nebo autoionizace (5.68), tím se dostaneme do původního stavu (ionizovaného)

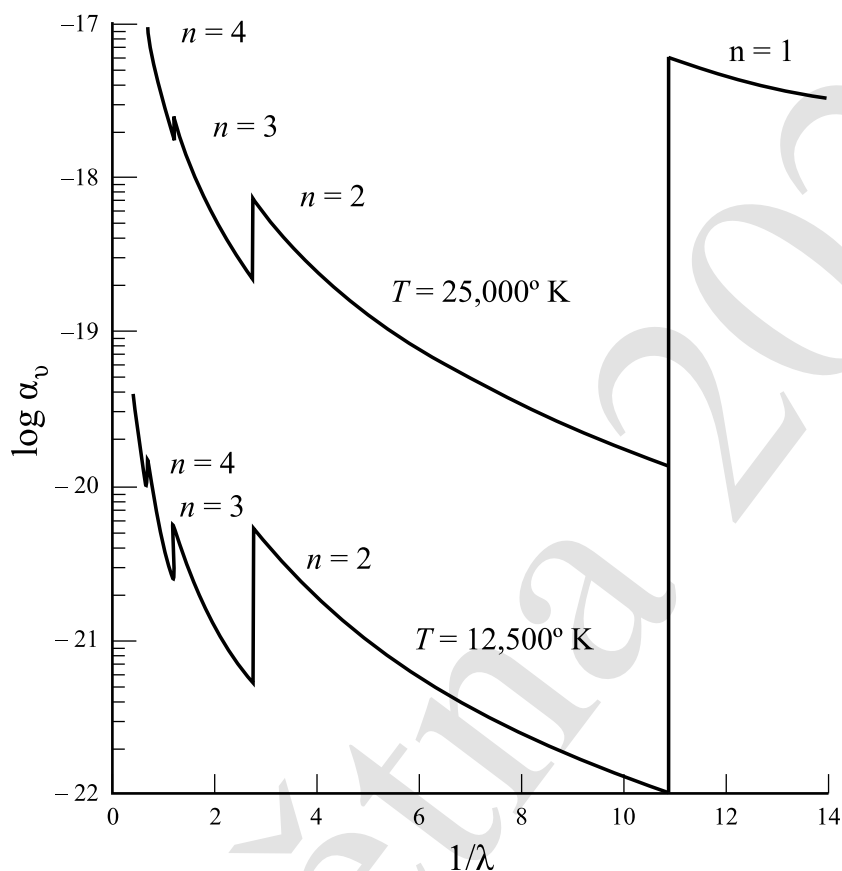
5.4.1 Fotoionizační účinný průřez

Vodík a vodíkpodobné ionty Závislost účinného průřezu na frekvenci odvodil semiklasicky pro vodík Kramers (1923), s korekcemi pro kvantovou mechaniku Gaunt (1930a,b). Účinný průřez je dán výrazem (Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 7.91)

$$\alpha_{bf}(n, \nu) = \frac{64\pi^4 m_e e^{10}}{3\sqrt{3}ch^6} Z^4 \frac{1}{n^5 \nu^3} g_{bf}(n, \nu), \quad (5.73)$$

což je součin semiklasického výrazu a Gauntova faktoru $g_{bf}(n, \nu)$. Výraz složený ze základních fyzikálních konstant má v soustavě CGS číselnou hodnotu $2.815 \cdot 10^{29} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-3}$, jeho odvození naznačuje Příloha B.3.1. Vztah (5.73) vyjadřuje typickou závislost účinného průřezu vodíku na frekvenci ($\sim \nu^{-3}$, Mihalas, 1978, obr. 4-1). I když se jedná o vztah platný pro vodíkpodobné atomy, někdy se používá jako přibližné vyjádření i pro nevodíkové ionty, převážně v případech, kdy nejsou k dispozici lepší data. Kvantověmechanické odvození tohoto vztahu lze nalézt v Hubeny and Mihalas (2014, rovnice 7.85 – 7.91).

Ostatní prvky Fotoionizační účinný průřez prvků s více elektrony má obecně složitější závislost na frekvenci, zejména kvůli přítomnosti rezonancí, které jsou způsobeny započtením možnosti autoionizace zmíněné v úvodu kapitoly 5.4. Související výpočty jsou poměrně náročné a vyžadují zahrnutí řady interakcí mezi energetickými hladinami (viz Pradhan and Nahar, 2011, kapitola 6.6). Důsledkem je vyšší účinný průřez a jeho velká proměnnost. Jako příklad může sloužit fotoionizační průřez iontu C II (viz obrázek 5.9, také Hubeny and Mihalas, 2014, obrázek 7.4).

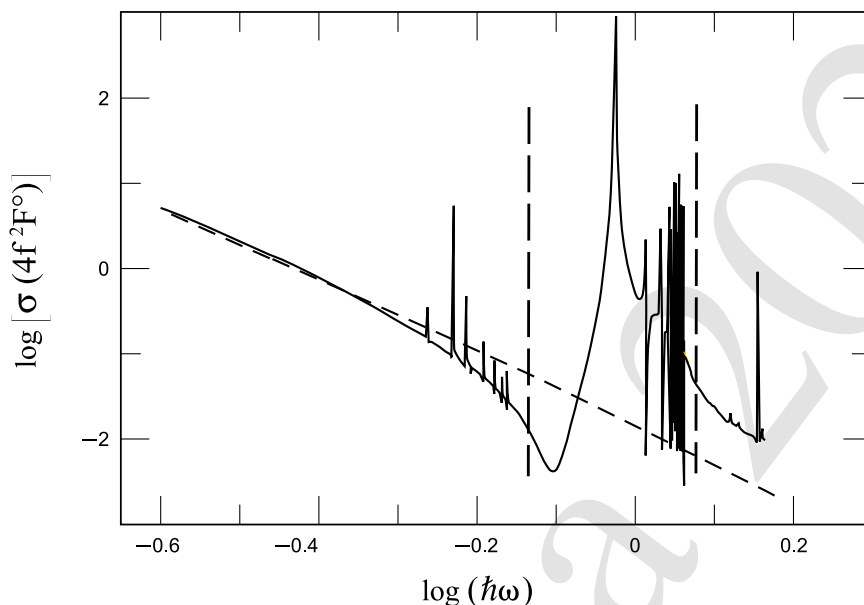


Obrázek 5.8: Vázaně-volný účinný průřez atomu vodíku. Obrázek zkopírován z (Hubeny and Mihalas, 2014, str.192).

Záporný iont vodíku Významným zdrojem fotoionizační opacit je záporný iont vodíku (H^-), který má dva vázané elektrony⁶. Důležitý je zejména pro hvězdy slunečního typu a chladnější, kde může záporný vodíkový iont existovat.

Tento iont má dvě rezonance v ultrafialové oblasti spektra, na sluneční atmosféru však nemají vliv, protože ultrafialový tok je pro Slunce malý. Zanedbáme-li je, dostaneme pro závislost fotoionizačního příčného průřezu na frekvenci hladkou křivku (obrázek 5.10).

⁶Možnost vytváření H^- objevili nezávisle Hans Bethe (1929) a Egil Hylleraas (1930a,b), jeho význam pro opacitu hvězd slunečního typu ukázal Rupert Wildt (1939a,b).



Obrázek 5.9: Fotoionizační účinný průřez $4f$ stavů He II (čárkovaná čára) a $4f$ stavů C II (plná čára). Svislé čárkované čáry označují ionizační hrany do C III $^3P^o$ (levá) a C III $^1P^o$ (pravá). Obrázek zkopírován z Hubeny and Mihalas (2014, str.206). Originál v Yan and Seaton (1987).

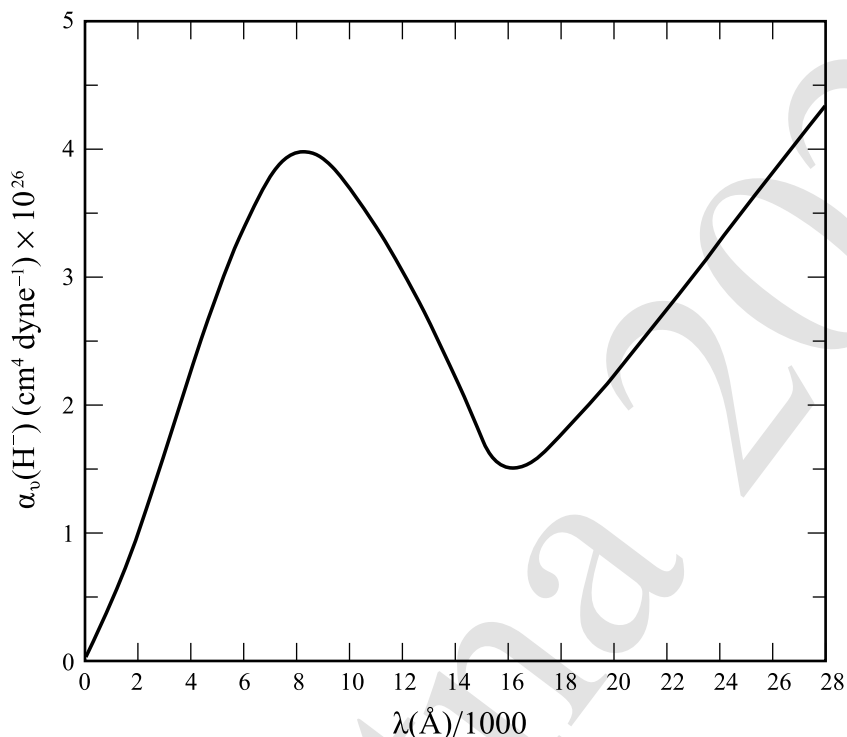
5.5 Volně-volné přechody

Volně-volné přechody jsou přechody mezi dvěma volnými stavy atomu X (z kontinua nad ionizační energií). Jsou to procesy typu

$$e + X^+ + h\nu \leftrightarrow X^+ + e'. \quad (5.74)$$

V těchto procesech dochází k přiblížení elektronu e k iontu X^+ a foton je absorbován nebo emitován v soustavě iont+elektron. Po interakci se elektron opět oddělí od iontu, obecně bude mít jinou rychlost, což je naznačeno čárkou (e'). Při interakci může dojít i k ionizaci nebo rekombinaci, je to však dvouelektronový přechod, který je podstatně méně pravděpodobný. Procesy bez ionizace či rekombinace jsou častější.

Vodík Pro volně-volný účinný průřez ionizovaného vodíku nebo vodíkpodobného iontu, který se potká s elektronem o rychlosti v , platí vztah (Hubeny and



Obrázek 5.10: Vázaně-vázaný a vázaně volný účinný průřez záporného iontu vodíku. Obrázek zkopírován z (Hubeny and Mihalas, 2014, str.207).

Mihalas, 2014, rovnice 7.99)

$$\alpha_{\text{ff}}(\nu, v) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}} \frac{Z^2 e^6}{chm_e^2} \frac{g_{\text{ff}}(\nu, v)}{\nu^3 v} \quad (5.75)$$

kde $g_{\text{ff}}(\nu, v)$ je **volně-volný Gauntův faktor**. Většinou rychlosti v jednotlivých elektronů neznáme, užitečnější pro řadu případů bude střední hodnota pro statistický soubor elektronů. Vystředováním přes maxwellovské rozdělení rychlostí elektronů dostaneme (Mihalas 1978, rovnice 4-122; Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 7.100)

$$\alpha_{\text{ff}}(\nu, T) = \frac{\sqrt{32\pi} Z^2 e^6}{3\sqrt{3} ch \sqrt{km_e^3 T}} \frac{\bar{g}_{\text{ff}}(\nu, T)}{\nu^3} \quad (5.76)$$

kde $\bar{g}_{\text{ff}}(\nu, T)$ je střední hodnota volně-volného Gauntova faktoru pro maxwellovské rozdělení rychlostí elektronů. Semiklasické odvození vztahu můžeme nalézt

v Hubeny and Mihalas (2014, kapitola 5.6) nebo v Rybicki and Lightman (1979, kapitola 5).

5.6 Interakce záření s molekulami

molekuly nacházíme

u chladných hvězd (K, M, S, C, ...), do asi 8000K
trochu i u hvězd slunečního typu
v okolohvězdném prostředí
v mezihvězdném prostředí (detekováno více jak 120 molekul, Tennyson, 2005, str.124)

polyatomické molekuly

diatomické molekuly (ty v dalším textu)

odlišnosti od atomů

- neexistuje střed, kolem kterého se elektrony v molekule pohybují
- jednotlivé atomy v molekule se pohybují → vibrační a rotační pohyby atomů v molekule

Energetické stavy molekul

Bornova-Oppenheimerova aproximace dovoluje

- oddělení pohybů jádra a elektronů (protože elektrony jsou lehké a pohybují se výrazně rychleji)
- vlnovou funkci molekuly lze zapsat jako součin vlnové funkce jádra molekuly a vlnové funkce elektronů
- můžeme oddělit i rotační a vibrační pohyby

rotační hladiny molekula se může otáčet
model pevného rotátoru

- energie hladin

$$E_{\text{rot},J} = J(J + 1)B \quad (5.77)$$

J – rotační kvantové číslo, $J = 0, 1, 2, 3, \dots$

B – rotační konstanta molekuly

hladiny degenerovány, $g_J = 2J + 1$

M nebo m – kvantové číslo průmětu impulsmomentu do význačné osy, hodnoty z intervalu $\langle -J, \dots, J \rangle$

vibrační hladiny atomy v molekule mohou vibrovat

- energie hladin

$$E_{\text{vib},v} = \left(v + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_0, \quad v = 0, 1, 2, 3, \dots$$

v – vibrační kvantové číslo

ω_0 – přirozená vibrační frekvence

- obrázek vibračních hladin s rotační jemnou strukturou (5.12)

elektronické hladiny energetické hladiny podobné atomům, ale rozdíly

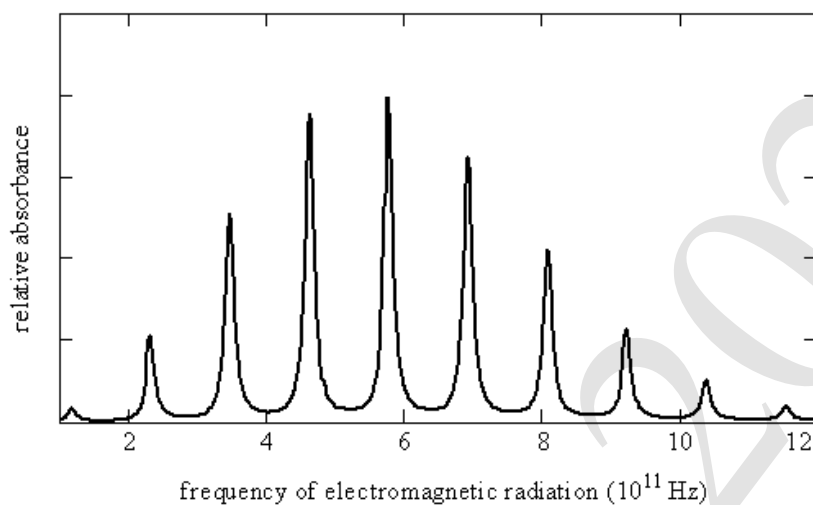
- molekuly nejsou sféricky symetrické,
- celkový elektronický impulsmoment L rotuje kolem mezijaderné osy (precese)
- složka orbitálního impulsmomentu ve směru osy molekuly
 $M_L \in \langle L, L - 1, \dots, 0, \dots, -L \rangle$
značí se $\Lambda = |M_L|$ – je degenerované ($g = 2$ pro $\Lambda \neq 0$)
 $\Lambda = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, značení $\Sigma, \Pi, \Delta, \Phi, \Gamma \dots$
- celkový spin S , průmět do mezijaderné osy $M_S \equiv \Sigma$, také, neplést s označením pro $\Lambda = 0$
značení: $^{2S+1}\Lambda$
- symetrie (analogie parity) vlnové funkce při záměně atomů;
 - nemění znaménko – sudá – g (gerade)
 - mění znaménko – lichá – u (ungerade)
značení $^{2S+1}\Lambda_{g/u}$
- značení elektronických hladin – používá se ad hoc systém:
 - X – označuje základní elektronický stav
 - A, B, C, ... označuje stavy stejné multiplicity jako základní stav.
 - a, b, c, ... označuje stavy jiné multiplicity než základní stav

příklad H_2 :

řazení podle energie hladin, ne vždy

celková vnitřní energie molekul

$$E_{\text{int}} = E_{\text{el}} + E_{\text{vib}} + E_{\text{rot}} \quad (5.78)$$



Obrázek 5.11: Rotační spektrum molekuly CO. Obrázek 7.1.1. z Hanson et al. (2021), licence CC BY-NC-SA 3.0.

Přechody v molekulách

- elektronické přechody $\sim eV \rightarrow$ optický, UV obor analogické atomárním dipólovým přechodům
- vibrační přechody \rightarrow near-IR, mid-IR
- rotační přechody \rightarrow far-IR, mm

celková energie hladin se skládá podle (5.78)

řádové odhady poměru energií (viz Rybicki and Lightman, 1979, kap. 11.1)

$$E_{\text{rot}} : E_{\text{vib}} : E_{\text{el}} \sim \frac{m_e}{M} : \sqrt{\frac{m_e}{M}} : 1$$

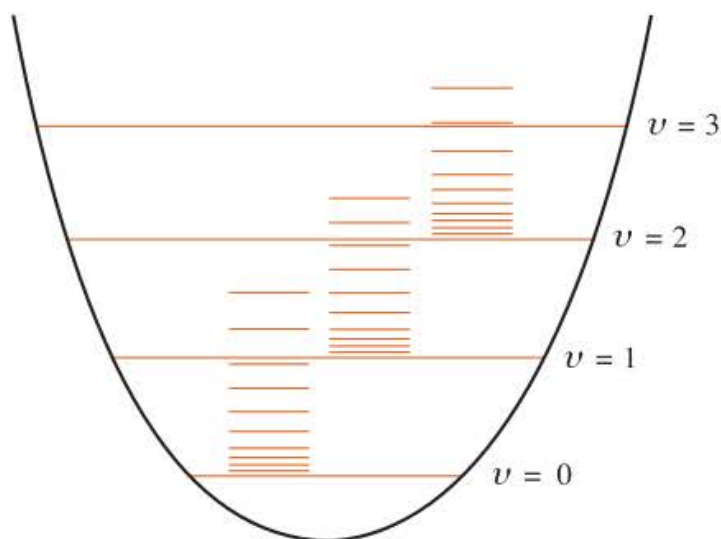
M je hmotnost jádra molekuly

čistě rotační přechody

- frekvence přechodů, z (5.77)

$$\nu_{J+1,J} = \frac{E_{J+1} - E_J}{h} = 2(J+1) \frac{B}{h}$$

- základní výběrové pravidlo $\Delta J = \pm 1$



Obrázek 5.12: Rotační hladiny jednotlivých vibračních stavů. Z McQuarrie (2008, Figure 6.3).

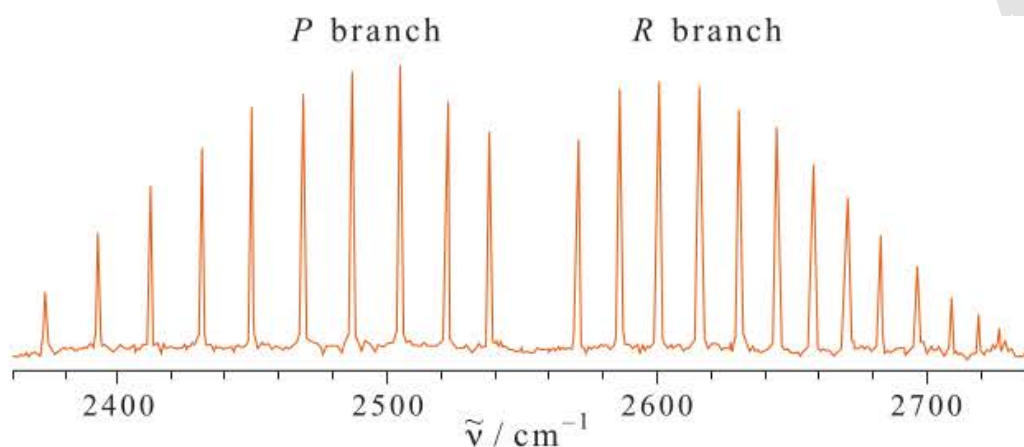
- nutný permanentní dipólový moment molekuly ($d \neq 0$)
homoatomické dvouatomové molekuly: $d = 0$
jen kvadrupólové přechody ($\Delta J = \pm 2$)
příklad: kvadrupólové přechody H_2 pozorovány v mezihvězdném prostředí
příklad čistě rotačního spektra – obr. 5.11

vibračně-rotační přechody

- energie pro excitaci vibračních modů \gg energie pro excitaci rotačních modů
 \Rightarrow existence čistě vibračního spektra nepravděpodobná
- kombinovaná vibračně-rotační hladina v aproximaci pevného rotátoru a harmonického oscilátoru

$$E_{v,J} = \left(v + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0 + J(J+1)B \quad (5.79)$$

- výběrová pravidla
 $\Delta v = \pm 1$, pro rozdíly ± 2 atd. “vyšší harmonické” přechody
- vibrační přechody mají jemnou strukturu způsobenou existencí rotačních hladin



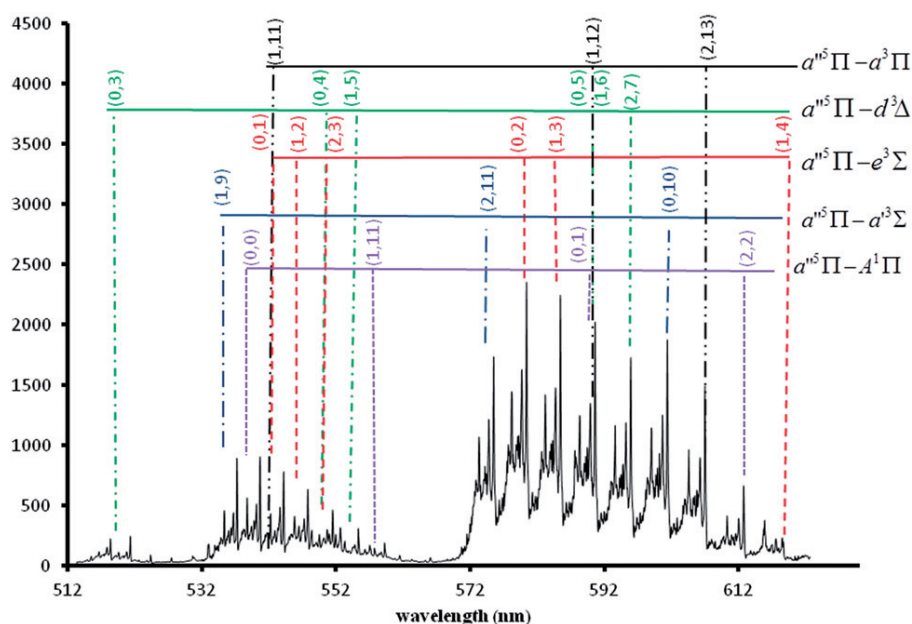
Obrázek 5.13: Vibračně-rotáčnické spektrum vibračního přechodu 0 – 1 HBr(g). Označeny jsou P a R branch. Z McQuarrie (2008, Figure 6.4).

uplatňují se i výběrová pravidla pro rotační přechody
 může nastat rotační emise i absorpce
 systém jemné struktury čar pro $\Delta J = +1$ (R branch) a $\Delta J = -1$ (P branch)

- obrázek vibračních hladin s rotační jemnou strukturou (5.12)
- obrázek vibračně-rotáčnického spektra (obr. 5.13)

elektronicko-vibračně-rotáčnické přechody

- nutno započítat změny elektronických, rotačních i vibračních stavů
- každý elektronický přechod je vlastně soustavou pásů (vibrační přechody) s jemnou strukturou (rotační přechody)
- výběrová pravidla
 - elektronické hladiny
 - * $\Delta \Lambda = 0, \pm 1$
 - * $\Delta S = 0$ (zachování spinu)
 - vibrační hladiny
 - * Δv jakékoli kladné nebo záporné celé číslo
 - rotační hladiny
 - * $\Delta J = -1, 0, 1$, ale $J = 0 \rightarrow J = 0$ zakázaný
 - * $\Delta J = 0$ je zakázaný pro Σ elektronické stavy
- obrázek elektronicko-vibračně-rotáčnického spektra (obr. 5.14)



Obrázek 5.14: Emisní elektronicko-vibračně-rotační spektrum CO. Z Al-Tuwirqi et al. (2012, Fig. 5).

astrofyzikálně významné molekuly

nejvýše zastoupené molekuly nemusejí být nejvýznamnější z hlediska přenosu záření (H_2) – maximální opacita v UV, tam je ale málo záření pro atmosféry, kde H_2 existuje

některé nepřítis početné molekuly významné zdroje opacity (TiO, VO) – rozdíl ve hmotách jednotlivých prvků způsobuje silné vibrační přechody

CO, CH_4 (metan), N_2 , NH_3 (čpavek), H_2O , H_2 – dominantní pro chemickou rovnováhu

na Slunci: CN, CH, C_2 , OH, MgH

molekulární ionty – H_2^+ , H_2^-

možní molekulární původci difúzních mezihvězdných pásů (DIB)

- fulereny (C_{60} , C_{70})
- polycyklické aromatické uhlovodíky (PAH)

Ramanovská spektra molekul viz (Rau, 2002, Ch.6, 3.3)

nepružný rozptyl záření na molekulách,
významný pro homonukleární molekuly

během rozptylu dojde k přechodu mezi vibračně rotačními stavy
výběrové pravidlo $\Delta J = 2$

přechodné dipóly příklad: H_2 – častá molekula, nemá stálý dipólový moment
srážkou s jinou H_2 , He – dočasný dipólový moment
podmínka: nízké teploty a vysoká hustota

molekulární satelity vodíkových čar u bílých trpaslíků
interakce



vytvoří přechodné molekuly

“quasi-molecular satellites” - přechody mezi elektronickými stavy těchto molekul

satelity jsou daleko od $Ly\alpha$ na 1400Å a 1600Å

5.7 Rozptyl v kontinuu

5.7.1 Rozptyl na volných elektronech

Při interakci fotonu s volným elektronem se dopadající foton rozptýlí obecně do jiného směru, případně se může během interakce změnit jeho energie. Jedná se o skutečný rozptylový proces s centrem rozptylu (na rozdíl od rozptylu v rezonančních čarách). Při interakci fotonu a elektronu se obecně projevují i vlnové vlastnosti elektronu, které ale nejsou pro vlnové délky záření mnohem větší než de Broglieova vlnová délka elektronu ($\lambda_{dB} = h/[m_e v]$) podstatné. Pro účinný průřez rozptylu záření o nízkých energiích ($h\nu \ll m_e c^2$, což je splněno ve většině hvězdných atmosfér) na volných elektronech hovoříme o **Thomsonově rozptylu** a pro účinný průřez platí frekvenčně nezávislý vztah

$$\sigma_e = \frac{8\pi}{3} r_0^2 = \frac{8\pi e^4}{3m_e^2 c^4} \quad (5.81)$$

V tomto vztahu je $r_0 = e^2/(m_e c^2)$ „klasický poloměr elektronu“, udává „rozměr“ bodového náboje (například Rybicki and Lightman, 1979, rovnice 3.38). Číselná

hodnota tohoto účinného průřezu je $\sigma_e = 6.65 \cdot 10^{-25} \text{cm}^2$. Úhlová závislost rozptylu ze směru \mathbf{n}' do směru \mathbf{n} (ϕ je zde úhel mezi těmito směry) je popsána **Rayleighovou (dipólovou) fázovou funkcí**

$$g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = \frac{3}{4} \left[1 + (\mathbf{n}' \cdot \mathbf{n})^2 \right] = \frac{3}{4} (1 + \cos^2 \phi). \quad (5.82)$$

Často se úhlová závislost Thomsonova rozptylu zanedbává a rozptyl se považuje za izotropní. Pak

$$g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = 1. \quad (5.83)$$

Odvození vztahů (5.81) a (5.82) lze nalézt v knize Hubeny and Mihalas (2014, kapitoly 6.1 a 6.2).

Pro vysoké energie přechází Thomsonův rozptyl na **Comptonův rozptyl**, jehož účinný průřez frekvenčně závislý je (viz např. Rybicki and Lightman, 1979, rovnice 7.5),

$$\sigma_c = \frac{3}{4} \sigma_e \times \left\{ \frac{1+u}{u^3} \left[\frac{2u(1+u)}{1+2u} - \log(1+2u) \right] + \frac{\log(1+2u)}{2u} - \frac{1+3u}{(1+2u)^2} \right\}, \quad (5.84)$$

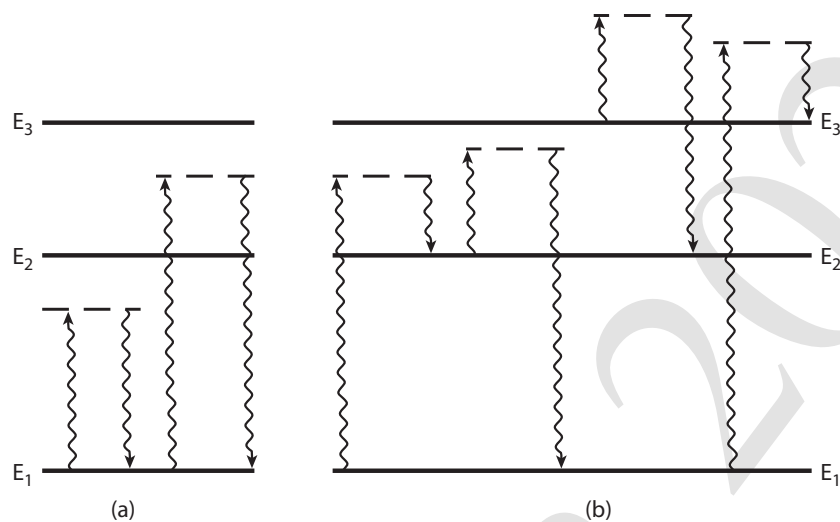
kde $u = (h\nu)/(m_e c^2)$. Tento účinný průřez také nazýváme **Kleinovým-Nishinovým účinným průřezem**. V nerelativistické limitě $u \ll 1$ můžeme psát rozvoj (Rybicki and Lightman, 1979, rovnice 7.6a)

$$\sigma_c = \sigma_e \left(1 - 2u + \frac{26u^2}{5} + \dots \right) \approx \sigma_e. \quad (5.85)$$

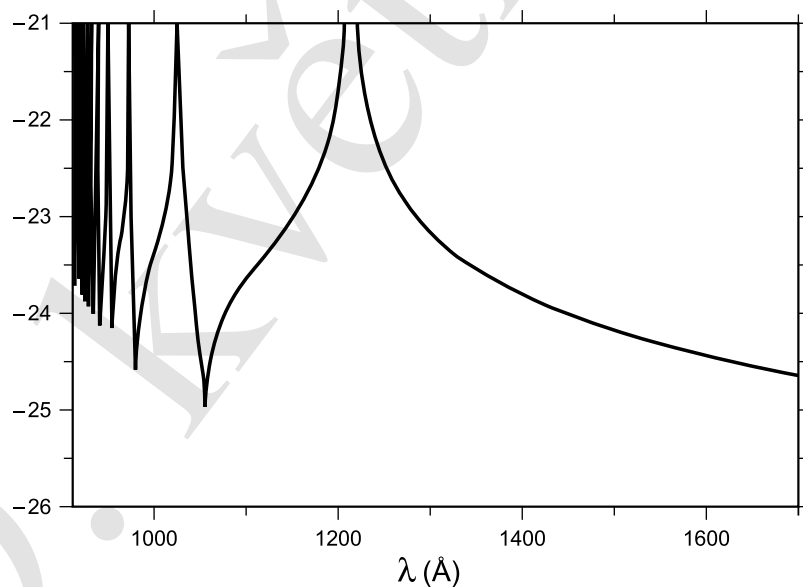
V nerelativistické limitě, tj. pro nízké energie záření, dostáváme Thomsonův účinný průřez (5.81).

5.7.2 Rozptyl na elektronech vázaných v atomu

Kromě rozptylu na volných elektronech může docházet i k rozptylu na elektronech vázaných v atomech. Při **Rayleighově rozptylu** je atom excitován do nestabilního stavu (který není vlastním stavem) a vzápětí deexcitován (viz obr. 5.15). Účinný průřez rozptylu závisí na rozdílu energie nestabilního stavu a energie stabilního vlastního stavu, s rostoucím rozdílem klesá. Pokud se frekvence rozptýleného fotonu změní (například foton absorbovaný v dalekém křídle čáry Lyman- β je vyzářen v dalekém křídle čáry Balmer- α), hovoříme o **Ramanovu rozptylu**. Pomocí Ramanova rozptylu na vodíkových atomech můžeme vysvětlit zvláštní emisní čáry v dalekých křídlech Balmerovských čar ve spektrech symbiotických hvězd (např. Schmid, 1989).



Obrázek 5.15: Schéma Rayleighova (a) a Ramanova (b) rozptylu. Obrázek zkopírován z (Hubeny and Mihalas, 2014, Obr. 6.2).



Obrázek 5.16: Účinný průřez Rayleighova rozptylu na atomu vodíku. Obrázek zkopírován z (Hubeny and Mihalas, 2014, str.156).

5.8 Rozptyl ve spektrálních čarách

Rozptyl ve spektrálních čarách jsme jako protiklad pravé absorpce zmínili již na začátku kapitoly 3.1. Podrobně jej rozebírá Hubeny and Mihalas (2014, kapitola 10).

Uvažujme přechod mezi dvěma hladinami atomu ve spektrální čáře, jejíž frekvenčně závislý účinný průřez je popsán vztahem (5.41). Po absorpci fotonu v této čáře následuje emise ve stejné spektrální čáře. Podívejme se nyní na to, jaká bude souvislost mezi pohlceným a vyzářeným fotonem.

V následujících úvahách budeme interakci popisovat v souřadné soustavě spojené s interagujícím atomem a nebudeme se zabývat frekvenčně nezávislou částí účinného průřezu v čáře (viz vztah 5.41), která vyjadřuje pravděpodobnost, že k prvotní absorpci vůbec dojde. Foton o frekvenci ν' letí k atomu ze směru \mathbf{n}' . Po interakci foton odletí směrem \mathbf{n} a bude mít frekvenci ν . Vztah mezi těmito stavy popisuje **redistribuční funkce** $r(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n})$, což je společná pravděpodobnost rozptylu fotonu z frekvenčního intervalu $(\nu'; \nu' + d\nu')$ a směru \mathbf{n}' do frekvenčního intervalu $(\nu; \nu + d\nu)$ a směru \mathbf{n} . Pro nerelativistický případ můžeme redistribuční funkci rozdělit na frekvenční a úhlovou část

$$r(\nu', \mathbf{n}'; \nu, \mathbf{n}) = r(\nu', \nu)g(\mathbf{n}', \mathbf{n}). \quad (5.86)$$

Pokud budeme dále předpokládat izotropní opacitu a emisivitu, můžeme položit $g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = 1$. V dalším budeme uvažovat redistribuční funkci pouze ve frekvencích.

Jednotlivé hladiny jsou rozšířené jako důsledek relací neurčitosti (přirozeného rozšíření popsaného v kapitole 5.3.1) a navíc i srážkového rozšíření (kapitola 5.3.3). Tato neurčitost se promítá do neurčitosti vyzařované frekvence fotonu. Pro další úvahy použijeme semiklasický popis (viz například Hubeny and Mihalas, 2014, kapitola 10.1), kdy hladinu považujeme v důsledku rožřření za spojité rozdělení podhladin okolo její energie. Budeme pro zjednodušení uvažovat přechody mezi základní hladinou, která rozšířená není (doba života této hladiny je nekonečná), a excitovanou hladinou, která rozšířená je. Excitovaný atom je vždy superpozicí stavů (vyplývající z přirozeného rozšíření), takže nelze říci, v které podhladině excitovaného stavu se nachází. Kromě toho srážkové rozšíření stavu způsobí další posun mezi podhladinami. Frekvence vyzářeného fotonu bude však závislá na tom, v kterém podstavu excitovaného stavu se atom nacházel. Další otázkou je závislost vyzářené frekvence na frekvenci absorbovaného fotonu, kterou popisujeme frekvenční redistribuční funkcí $r(\nu', \nu)$.

Limitním případem je situace, kdy je frekvence vyzářeného fotonu stejná jako frekvence pohlceného fotonu. Tomuto případu říkáme **monochromatický rozptyl**, případně úplně korelovaný rozptyl nebo koherentní rozptyl. Redistribuční funkci

označíme $r^{\text{corr}}(\nu', \nu)$. Ta se v tomto případě redukuje na δ -funkci,

$$r(\nu', \nu) = r^{\text{corr}}(\nu', \nu) = \delta(\nu' - \nu) \quad (5.87)$$

Opačný limitní případ je, když se foton po absorpci vyzáří na kterékoli frekvenci čáry s pravděpodobností danou profilem čáry. Tomuto případu říkáme **úplná frekvenční redistribuce**, je popsána redistribuční funkcí $r^{\text{ncorr}}(\nu', \nu)$, která se redukuje na součin absorpčního a emisního profilu

$$r(\nu', \nu) = r^{\text{ncorr}}(\nu', \nu) = \phi(\nu')\phi(\nu). \quad (5.88)$$

V obecném případě bude situace dána poměrným vlivem pružných srážek na změnu podstavu excitované hladiny. Pravděpodobnost koherentního rozptylu p^{corr} můžeme vyjádřit jako (Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 10.23)

$$p^{\text{corr}} = \frac{P_j}{P_j + Q_j} \quad (5.89)$$

kde P_j je četnost *všech* přechodů (způsobených zářeními i nepružnými srážkami – podrobně se jimi budeme zabývat v kapitolách 9.3 a 9.4) z hladiny j a Q_j je četnost pružných srážek způsobujících přechody mezi podhladinami. Tomuto případu říkáme **částečná frekvenční redistribuce**. Redistribuční funkce v tomto obecném případě je dána vztahem

$$r(\nu', \nu) = p^{\text{corr}} r^{\text{corr}}(\nu', \nu) + (1 - p^{\text{corr}}) r^{\text{ncorr}}(\nu', \nu), \quad (5.90)$$

který kombinuje monochromatický rozptyl a úplnou redistribuci záření.

Kapitola 6

Formální řešení rovnice přenosu záření

Formální řešení rovnice přenosu záření je její řešení při zadané opacitě a emisivitě. Nejdříve se budeme zabývat řešením nejjednoduššího případu rovnice přenosu záření, a to jejím řešením pro planoparalelní atmosféru. Na příkladu planoparalelní atmosféry lze poměrně jednoduše ukázat řadu vlastností rovnice přenosu záření a jejího řešení, které však mají obecnou platnost i ve složitějších případech. Budeme řešit planoparalelní rovnici přenosu záření (3.15) nebo (3.27), nejdříve s využitím dalších zjednodušujících předpokladů.

Pokud jsou v prostředí nulové opacita i emisivita ($\chi = 0$, $\eta = 0$), má rovnice přenosu záření (3.15) pro každou frekvenci ν a směr šíření záření μ (závislost intenzity I , opacity χ a emisivity η na frekvenci ν zde nebudeme explicitně uvádět) jednoduchý tvar

$$\frac{dI(z, \mu)}{dz} = 0, \quad (6.1a)$$

jehož řešením je konstantní specifická intenzita záření podél paprsku,

$$I(z, \mu) = \text{const}, \quad (6.1b)$$

což jsme jiným způsobem ukázali v kapitole 2.1 jako nezávislost specifické intenzity na vzdálenosti od zdroje záření. V prostředí, kde je nulová jen opacita ($\chi = 0$) a emisivita je nenulová ($\eta > 0$), má rovnice přenosu záření tvar

$$\mu \frac{dI(z, \mu)}{dz} = \eta(z, \mu) \quad (6.2a)$$

a jejím řešením v intervalu $\langle z_2; z_1 \rangle$ je

$$I(z_1, \mu) = I(z_2, \mu) + \int_{z_2}^{z_1} \eta(z', \mu) \frac{dz'}{\mu}. \quad (6.2b)$$

6. FORMÁLNÍ ŘEŠENÍ ROVNICE PŘENOSU ZÁŘENÍ

Toto řešení je velmi blízké řešení rovnice přenosu záření v opticky tenkém prostředí ($\tau \ll 1$), což je například prostředí planetárních mlhovin. Vztah (6.2b) se také často používá pro *přibližné* určení emise z okolohvězdného nebo mezihvězdného prostředí. Nutnou podmínkou pro takové řešení je zanedbatelná absorpce. V rovnici (6.2b) se často pokládá $z_2 = 0$.

Pokud je v prostředí nenulová opacita ($\chi > 0$), můžeme rovnici přenosu zapsat pomocí optické hloubky (3.27, pro nulovou opacitu to nešlo). Pak pro nulovou emisivitu dostaneme vztah

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu), \quad (6.3a)$$

jehož řešením v intervalu $\langle \tau_2; \tau_1 \rangle$, $\tau_2 > \tau_1$ je

$$I(\tau_1, \mu) = I(\tau_2, \mu) \exp\left(-\frac{\tau_2 - \tau_1}{\mu}\right) \quad (6.3b)$$

což v případě $\tau_2 = \tau$ a $\tau_1 = 0$ popisuje zeslabení záření při průchodu od místa s optickou hloubkou τ do místa s optickou hloubkou 0. Typickým příkladem použití je zeslabování záření při průchodu zemskou atmosférou.

V případě, že jsou opacita i emisivita nenulové, řešíme v planparalelním prostředí úplnou rovnici (3.27). Řešení této rovnice najdeme nejjednodušeji jejím vynásobením integračním faktorem $\exp(-\tau/\mu)$. Po úpravě dostaneme

$$\frac{d\left[I(\tau, \mu) \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)\right]}{d\tau} = -\frac{S(\tau, \mu)}{\mu} \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right)$$

Rovnici zintegrujeme od většího τ_2 k menšímu τ_1 ,

$$I(\tau_1, \mu) = I(\tau_2, \mu) \exp\left(-\frac{\tau_2 - \tau_1}{\mu}\right) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t, \mu) \exp\left(-\frac{t - \tau_1}{\mu}\right) \frac{dt}{\mu}. \quad (6.4)$$

První člen na pravé straně popisuje zředění záření vycházejícího z místa τ_2 absorpcí mezi místy τ_2 a τ_1 , druhý člen popisuje záření vzniklé mezi místy τ_2 a τ_1 snížené o tu část, která se při jeho cestě do τ_1 absorbuje.

Limitním případem, který lze použít pro popis hvězdné atmosféry, je případ $\tau_1 = 0$, $\tau_2 \rightarrow \infty$. Říkáme mu *polonekonečná atmosféra* (*semi-infinite atmosphere*)¹. V tomto případě přejde rovnice (6.4) na tvar

$$I(0, \mu) = \int_0^{\infty} S(t, \mu) \exp\left(-\frac{t}{\mu}\right) \frac{dt}{\mu}. \quad (6.5)$$

¹Polonekonečná atmosféra je zmíněna i v kapitole 3.5.

6. FORMÁLNÍ ŘEŠENÍ ROVNICE PŘENOSU ZÁŘENÍ

Tato rovnice vyjadřuje specifickou intenzitu záření, které vychází ve směru μ z povrchu polonekonečné atmosféry.

Zajímavý výsledek dostaneme, pokud můžeme aproximovat vydatnost pomocí lineárního vztahu $S(\tau) = a + b\tau$. Předpokládáme, že S nezávisí na směru. Dosažením do (6.5) dostaneme jednoduchý vztah

$$I(0, \mu) = a + b\mu = S(\tau = \mu) \quad (\text{Eddingtonova-Barbierova relace}), \quad (6.6)$$

z něhož například vyplývá, že intenzita vystupujícího záření v kolmém směru ($\mu = 1$) z planparalelní atmosféry je rovna vydatnosti v jednotkové optické hloubce ($\tau = 1$). Eddingtonova-Barbierova relace nabízí pro řadu případů vhodnou aproximaci intenzity vystupujícího záření.

Posledním zjednodušeným případem, který v této části zmíníme, je záření vycházející z konečné homogenní vrstvy. V celé takové vrstvě můžeme psát $S = \text{const}$. Potom pro $\tau_2 = T$ ($T < \infty$ je celková optická tloušťka vrstvy) a $\tau_1 = 0$ dostaneme z rovnice (6.4) pro záření vystupující ve směru $\mu = 1$

$$I(0, 1) = S(1 - e^{-T}) \quad (6.7)$$

Pro opticky tenkou vrstvu ($T \ll 1$) je $I(0, 1) = ST$, což je v souladu s faktem, že vydatnost vyjadřuje počet fotonů vyzářených na jednotkovou optickou hloubku (viz 3.30). Pro opticky tlustou vrstvu ($T \gg 1$) je $I(0, 1) = S$, intenzita se saturuje na hodnotě S , protože prakticky všechny fotony vyzářené na optických hloubkách větších než 1 jsou absorbovány a ven se dostanou jen ty, vyzářené na optických hloubkách menších než 1.

6.1 Difúzní přiblížení

Ve velkých hloubkách hvězdné atmosféry je opacita velmi velká a pravděpodobnost absorpce záření má hodnotu blízkou jedné. Pole záření je téměř izotropní. Prostředí je blízko termodynamické rovnováže, takže můžeme uvažovat vydatnost odpovídající termálnímu záření, $S_\nu \rightarrow B_\nu$. Pro zjednodušení budeme hledat řešení pro planparalelní atmosféru, což je pro uvedené fyzikální podmínky vhodné přiblížení. Budeme hledat řešení v místě o optické hloubce τ_ν . Napíšeme Taylorův rozvoj S_ν pro $t_\nu \geq \tau_\nu$,

$$S_\nu(t_\nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n B}{d\tau_\nu^n} \frac{(t_\nu - \tau_\nu)^n}{n!}, \quad (6.8)$$

který dosadíme do formálního řešení (6.4) pro $\tau_1 = \tau_\nu$ a $\tau_2 = \infty$. Pro specifickou intenzitu záření tak dostaneme

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu^n \frac{d^n B}{d\tau_\nu^n} = B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \mu^2 \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \dots, \quad (6.9a)$$

6. FORMÁLNÍ ŘEŠENÍ ROVNICE PŘENOSU ZÁŘENÍ

Řešení ve formě rozvoje pro momenty intenzity záření dostaneme dosazením (6.9a) do vztahů (2.31), (2.34) a (2.36),

$$J_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \frac{d^{2n} B_\nu}{d\tau_\nu^{2n}} = B_\nu(\tau_\nu) + \frac{1}{3} \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \dots \quad (6.9b)$$

$$H_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \frac{d^{2n+1} B_\nu}{d\tau_\nu^{2n+1}} = \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} + \frac{1}{5} \frac{d^3 B_\nu}{d\tau_\nu^3} + \dots \quad (6.9c)$$

$$K_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+3} \frac{d^{2n} B_\nu}{d\tau_\nu^{2n}} = \frac{1}{3} B_\nu(\tau_\nu) + \frac{1}{5} \frac{d^2 B_\nu}{d\tau_\nu^2} + \dots \quad (6.9d)$$

Ve velkých hloubkách ve hvězdné atmosféře stačí, když v rozvoji ponecháme jenom členy nejnižších řádů,

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) \approx B_\nu(\tau_\nu) + \mu \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \quad (6.10a)$$

$$J_\nu \approx B_\nu(\tau_\nu) \quad (6.10b)$$

$$H_\nu \approx \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \quad (6.10c)$$

$$K_\nu \approx \frac{1}{3} B_\nu(\tau_\nu) \quad (6.10d)$$

Z rovnic (6.10) vyplývá, že se střední intenzita J_ν blíží rovnovážné hodnotě zářivé energie B_ν a že pole záření je téměř izotropní, neboť Eddingtonův faktor (2.46)

$$f_\nu^K \approx \frac{1}{3}. \quad (6.11)$$

Pro Eddingtonův tok (2.34) můžeme podle rovnice (6.10c) psát

$$H_\nu = \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} = -\frac{1}{3} \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dz} = -\left(\frac{1}{3} \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \right) \frac{dT}{dz} \quad (6.12)$$

Rovnice (6.12) má formálně tvar rovnice pro vedení (konduktivitu), v tomto případě se jedná o vedení záření. Člen na pravé straně v závorce lze považovat za koeficient zářivé vodivosti (zářivou konduktivitu). Integrací rovnice (6.12) přes frekvence dostaneme pro **celkový Eddingtonův tok v difúzním přiblížení**

$$H = \int_0^\infty H_\nu d\nu = - \int_0^\infty \frac{1}{3} \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dz} d\nu = -\frac{1}{3} \frac{dT}{dz} \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu. \quad (6.13)$$

Zavedeme **Rosselandovu střední opacitu** $\bar{\chi}_R$ vztahem

$$\frac{1}{\bar{\chi}_R} \frac{dB}{dT} = \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu \quad (6.14)$$

a dosazením do (6.13) dostaneme

$$H = - \left(\frac{1}{3} \frac{1}{\bar{\chi}_R} \frac{dB}{dT} \right) \frac{dT}{dz} \quad (6.15)$$

Protože vidíme hvězdu, záření směřuje k nám a tok $H > 0$. Ze vztahu (6.15) musí být $dT/dz < 0$, vzhledem k orientaci osy z musí teplota směrem dovnitř hvězdy růst.

Rosselandova střední opacita určuje v difúzní aproximaci teplotní strukturu hvězdné atmosféry. Vztahem

$$d\bar{\tau}_R = -\bar{\chi}_R dz \quad (6.16)$$

definujeme **Rosselandovu optickou hloubku**, která se hojně využívá jako nezávislá proměnná v modelování hvězdných atmosfér.

6.2 Schwarzschildova rovnice (Λ operátor)

V případě planparalelního prostředí, kde je jedna okrajová podmínka vyjádřena pro optickou hloubku $\tau \rightarrow \infty$ (polonekonečná atmosféra, viz kapitola 3.5), můžeme řešení rovnice přenosu záření v bodě τ_ν podél paprsku definovaného směrovým kosinem $\mu > 0$ vyjádřit pro oba proti sobě jdoucí směry ve tvaru

$$\begin{aligned} I_\nu(\tau_\nu, \mu) &= \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t) \exp\left(-\frac{t - \tau_\nu}{\mu}\right) \frac{dt}{\mu} \quad \text{pro směr } \mu > 0 \\ I_\nu(\tau_\nu, -\mu) &= \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) \exp\left(-\frac{t - \tau_\nu}{-\mu}\right) \frac{dt}{-\mu} \quad \text{pro směr } \mu < 0. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Dosazením (6.17) do definičního vztahu pro střední intenzitu záření v rovinné geometrii (2.31) (tj. integrací přes všechny směry μ) dostaneme **Schwarzschildovu rovnici** odvozenou Karlem Schwarzschildem (viz Mihalas 1978, rovnice 2.57; Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 11.108)

$$J_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_\nu(t) E_1(|t - \tau_\nu|) dt \quad (6.18)$$

Funkce $E_1(x) = \int_0^1 e^{-x/\mu} d\mu/\mu$ je speciální případ **n -té exponenciální integrální funkce** (*exponential integral*, viz Příloha A.1, rovnice A.1)²

$$E_n(x) = \int_1^{\infty} e^{-xt} t^{-n} dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

²V původní německé práci Schwarzschild (1914) označuje exponenciální integrální funkci K_n a nazývá ji *Integrallogarithmus*. Pozdější překlad této práce do angličtiny od Rudolfa Loesera (Schwarzschild, 1966) používá současné značení E_n a název *exponential integral*.

6. FORMÁLNÍ ŘEŠENÍ ROVNICE PŘENOSU ZÁŘENÍ

pro $n = 1$ a substituci $t = 1/\mu$. Rovnici (6.18) můžeme formálně zapsat jako

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_{\tau_\nu}[S_\nu(t)], \quad (6.19)$$

kde

$$\Lambda_{\tau_\nu}[f(t)] = \frac{1}{2} \int_0^\infty E_1(|t - \tau_\nu|) f(t) dt. \quad (6.20)$$

Tento operátor zavedli Kourganoff and Busbridge (1952, rovnice 11.12), nazývá se **Λ operátor** a převádí zdrojovou funkci (vydatnost) na střední intenzitu záření. To je základní zavedení Λ -operátoru, kde τ_ν v indexu značí přechod od funkce proměnné t k funkci proměnné τ_ν . Tento původní význam indexu, který Kourganoff and Busbridge zavedli, se však vytratil a v současné době se píše v indexu u operátoru Λ frekvence ν , která spíše vyjadřuje monochromaticnost Λ operátoru, směrový kosinus μ označující směr šíření záření, případně se nepíše index žádný. Někdy se používají i jiné formy, které převádějí vydatnost na specifickou intenzitu, případně na intenzitu (specifickou nebo střední) integrovanou přes nějaký frekvenční interval, nejčastěji přes spektrální čáru.

Operátor $\Lambda_{\nu\mu}$ pro přenos záření ve směru μ odpovídající rovnici (6.17) (převod vydatnosti na specifickou intenzitu záření) zavedeme rovnicí

$$I_\nu(\tau_\nu, \mu) = I_{\nu\mu} = \Lambda_{\nu\mu}[S_\nu(\tau_\nu)]. \quad (6.21)$$

Integrací tohoto operátoru přes úhly dostaneme operátor Λ_ν , který byl zaveden rovnicí (6.20),

$$\Lambda_\nu[f(\tau)] = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \Lambda_{\nu\mu}[f(\tau)] d\mu. \quad (6.22)$$

Zde jsme použili výše diskutované a častěji používané označení $\Lambda_\nu = \Lambda_{\tau_\nu}$. Střední intenzita integrovaná přes profil spektrální čáry je

$$\bar{J} = \int_0^\infty \phi_\nu J_\nu d\nu = \bar{\Lambda}[S], \quad (6.23)$$

kde je zaveden frekvenčně středovaný Λ operátor

$$\bar{\Lambda}[f] = \int_0^\infty \phi_\nu \Lambda_\nu[f] d\nu. \quad (6.24)$$

Zjednodušeně řečeno, za Λ -operátor lze považovat každý operátor, který nám převede vydatnost na střední nebo specifickou intenzitu záření.

Ostatní operátory Podobně jako Λ -operátor převádí vydatnost na střední intenzitu, můžeme definovat operátory, které budou z vydatnosti vytvářet tok nebo tlak záření (K -integrál). Nejdříve vyjádříme závislost H_ν (2.34) na vydatnosti jako

$$H_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t) E_2(t - \tau_\nu) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) E_2(\tau_\nu - t) dt \quad (6.25)$$

(viz Milne, 1930, část c, rovnice 163)³. Podobně závislost K_ν (2.36) na vydatnosti lze vyjádřit jako

$$K_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_\nu(t) E_3(|t - \tau_\nu|) dt. \quad (6.26)$$

Funkce E_2 a E_3 jsou také exponenciální integrální funkce (viz Příloha A.1). Rovnicím (6.25) a (6.26) se říká **Milneho rovnice**. Můžeme definovat operátory Φ_{τ_ν} a X_{τ_ν}

$$\Phi_{\tau_\nu} [f(t)] = 2 \int_{\tau_\nu}^{\infty} f(t) E_2(t - \tau_\nu) dt - 2 \int_0^{\tau_\nu} f(t) E_2(\tau_\nu - t) dt \quad (6.27)$$

$$X_{\tau_\nu} [f(t)] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} f(t) E_3(|t - \tau_\nu|) dt \quad (6.28)$$

Operátory Λ , Φ a X jsou podrobně rozebírány v knize Kourganoff and Busbridge (1952, kapitola II) a převádějí vydatnost na astrofyzikální tok

$$F_\nu(\tau_\nu) = \Phi_{\tau_\nu} [S_\nu(t)] \quad (6.29)$$

nebo na tlak záření (K -integrál)

$$K_\nu(\tau_\nu) = X_{\tau_\nu} [S_\nu(t)]. \quad (6.30)$$

Hubeny and Mihalas (2014) používají místo označení X označení Ξ .

Pravděpodobnostní interpretace Schwarzschildovy rovnice (6.18). Na rozdíl od makroskopického popisu založeného na využití statistické střední veličiny I , která popisuje chování souboru fotonů, je pravděpodobnostní popis využívá popisu toho, co se děje s *jedním* fotonem, s jakou pravděpodobností je absorbován, emitován a rozptylován.

Předpokládejme, že v místě s optickou hloubkou $\tau = 0$ má specifická intenzita hodnotu $I(0)$. Budeme-li dále předpokládat prostředí, které pouze absorbuje,

³viz také Milne (1966)

je specifická intenzita v místě τ dána vztahem (6.3a) $I(\tau) = I(0)e^{-\tau}$. Potom pravděpodobnost, že foton *není* absorbován mezi 0 a τ , je

$$p(\tau) = e^{-\tau}. \quad (6.31)$$

Pravděpodobnost, že foton *je* absorbován mezi 0 a τ , je podobně

$$p_a(\tau) = 1 - e^{-\tau}. \quad (6.32)$$

Pro velmi malé optické vzdálenosti $\delta\tau \ll 1$ můžeme použít Taylorův rozvoj rovnice (6.32). Pro pravděpodobnost, že foton je absorbován, dostaneme s přesností do 1. řádu

$$p_a(\delta\tau) = \delta\tau. \quad (6.33)$$

Vynásobením pravděpodobností ze vztahů (6.31) a (6.33) dostáváme vztah pro pravděpodobnost, že foton proletí optickou vzdálenost τ a potom je mezi místy τ a $\tau + d\tau$ pohlcen vztah

$$p(\tau)p_a(d\tau) = p(\tau) d\tau = e^{-\tau} d\tau. \quad (6.34)$$

Je-li v planparalelní atmosféře foton vyzářen v $\tau = 0$ do směru μ , pak pravděpodobnost, že je absorbován v oblasti $(\tau, \tau + d\tau)$, je

$$p(\tau) d\tau = \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) \frac{d\tau}{\mu}. \quad (6.35)$$

Integrací vztahu (6.35) přes všechny směry μ dostáváme

$$\bar{p}(\tau) d\tau = \int_0^1 \exp\left(-\frac{\tau}{\mu}\right) \frac{d\tau}{\mu} d\mu = E_1(\tau) d\tau, \quad (6.36)$$

kde $\bar{p}(\tau) d\tau$ vyjadřuje celkovou pravděpodobnost, že foton šířící se libovolným směrem $0 \leq \mu \leq 1$ je pohlcen v intervalu $(\tau, \tau + d\tau)$. $E_1(x)$ je první exponenciální integrální funkce (rovnice A.1). Tato funkce tedy v rovnici (6.18) udává pravděpodobnost, že vyzářený foton (jejich počet je úměrný vydatností S – viz rovnice 3.30) letí mezi t a τ a je potom v $(\tau, \tau + d\tau)$ pohlcen.

6.3 Numerické řešení rovnice přenosu záření

V řadě případů, zejména pokud chceme řešením rovnice přenosu záření získat teoretické spektrum, které chceme porovnat s pozorovaným, nevystačíme s analytickým řešením rovnice přenosu záření. Jako příklad si vezměme rovnici přenosu záření v planparalelní geometrii (3.27). Přenos záření mezi body τ_2 a τ_1 lze v planparalelní geometrii vyjádřit pomocí rovnice (6.4). Tato rovnice se řeší často numericky. V dalším se budeme zabývat numerickým řešením rovnice přenosu záření.

6.3.1 Diskretizace rovnice přenosu záření

Při numerickém řešení rovnice přenosu záření je diskretizace nevyhnutelná. Diskretizaci používáme hlavně pro vyjádření diferenciálů i integrálů. Jedním ze základních výpočtů při různých částech řešení rovnice přenosu záření je výpočet určitého integrálu nějaké funkce $f(x)$ v mezích od a do b , který se numericky řeší jako součet funkčních hodnot ve vybraných bodech x_i ($a \leq x_i \leq b, i = 1, \dots, I$) vynásobených kvadraturními vahami w_i ,

$$\int_a^b f(x) dx \rightarrow \sum_{i=1}^I w_i f(x_i). \quad (6.37)$$

Jak kvadraturní váhy, tak i výběr bodů x_i jsou pro přesnost výpočtu klíčové. Je třeba je zvolit tak, aby výsledný součet co nejpřesněji odpovídal hodnotě integrálu. Pro zpřesnění výpočtu je kvadraturní váhy vhodné normalizovat. Dosáhneme toho dosazením funkce $f(x) = 1$ do (6.37). Spočteme

$$S_I \equiv \sum_{i=1}^I w_i \quad (6.38)$$

Pokud $S_I \neq b - a$, podělíme všechny kvadraturní váhy hodnotou S_I ,

$$w_i \rightarrow \frac{w_i}{S_I}. \quad (6.39)$$

Problematika přesných numerických výpočtů integrálů je podrobně studována v monografiích o numerické matematice.

Při řešení rovnice přenosu v diferenciálním tvaru používáme diskretizaci pro výpočet derivací. Jako příklad si uvedeme nejjednodušší diferenční vyjádření první derivace funkce $f(x)$ v bodě x_i ,

$$\left. \frac{df(x)}{dx} \right|_i \rightarrow \frac{f_{i+1}(x) - f_i(x)}{x_{i+1} - x_i}. \quad (6.40)$$

Existuje řada přesnějších formulí, které lze nalézt v monografiích věnovaných numerické matematice.

6.3.1.1 Prostorová diskretizace

Prostorová diskretizace pro numerické výpočty se provádí s ohledem na to, jak se mění vlastnosti prostředí v prostoru.

V jednorozměrném případě (planoparalelním nebo sféricky symetrickém) se jedná o hloubkovou diskretizaci nezávislé proměnné z . Prostředí (hvězdná atmosféra, mlhovina) je reprezentováno pomocí D hloubkových bodů vhodně rozdělených tak, aby co nejlépe popisovaly dané prostředí. Pro stabilní řešení rovnice

přenosu záření v atmosféře, která je v hydrostatické rovnováze, je vhodné volit diskretizaci ekvidistantní v $\ln \tau$, ale pro každou frekvenci. Obecně je pro každou frekvenci jiná škála optických hloubek (3.22), protože opacita je v každé frekvenci jiná. Ideální by tedy bylo použít pro každou frekvenci jinou hloubkovou diskretizaci. To ovšem narazí na jiný problém. Kdybychom v takovém případě chtěli spočítat integrál intenzity záření přes nějaký frekvenční interval v dané hloubce, například v integrovaných momentových rovnicích (3.36) nebo přes profil spektrální čáry, neobešli bychom se bez prostorových interpolací téměř pro každou frekvenci. Abychom se této situaci vyhnuli, volíme diskretizaci pro nějakou „střední“ optickou hloubku a tu pak použijeme pro všechny frekvence. Často se používá Rosselandova optická hloubka $\bar{\tau}_R$ (6.16), v některých případech i optická hloubka kontinua pro vlnovou délku $\lambda = 500$ nm, případně i pro jinou vlnovou délku.

Maticová reprezentace Λ -operátoru Pokud vyjádříme střední intenzitu pro diskrétní hloubkové body, můžeme působení Λ -operátoru (viz kapitola 6.2) vyjádřit pomocí maticové rovnice (D je počet hloubkových bodů)

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ \dots \\ J_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda_{1,1} & \Lambda_{1,2} & \dots & \dots & \Lambda_{1,D} \\ \Lambda_{2,1} & \Lambda_{2,2} & \dots & \dots & \Lambda_{2,D} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Lambda_{D,1} & \Lambda_{D,2} & \dots & \dots & \Lambda_{D,D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_D \end{pmatrix} \quad (6.41)$$

Λ -operátor můžeme zjednodušit na tzv. přibližný Λ -operátor, o němž se zmíníme později (kapitola 10.2.2).

6.3.1.2 Úhlová diskretizace

Vzhledem k tomu, že rovnici přenosu záření vždy řešíme podél omezeného počtu paprsků definovaných směrovým vektorem \mathbf{n} , je při výpočtu střední intenzity (2.13), toku (2.19) a tenzoru tlaku (2.23) nutné integrovat specifickou intenzitu přes úhly. V případě planparalelní geometrie řešíme numericky integrál přes μ (2.28). Podle (6.37) dostáváme

$$\int_{-1}^1 I(\mu) d\mu \approx \sum_{m=1}^M w_m I(\mu_m). \quad (6.42)$$

kde M je počet směrů, pro něž známe specifickou intenzitu záření. Musí platit normalizační podmínka, kterou získáme z rovnice (6.42) pro $I(\mu) = 1$,

$$S_M = \sum_{m=1}^M w_m = 1. \quad (6.43)$$

Pokud tato podmínka splněna není a výsledkem součtu (6.43) je číslo $S_M \neq 1$, je nutné všechny kvadrurní váhy w_m nahradit váhami w_m/S_M .

Sít' M paprsků může být vybrána různými způsoby. Pokud je oněch M paprsků vybráno tak, aby hodnoty kosinů μ byly kořeny Legendreových polynomů řádu M (Gaussova-Legendreova kvadratura, viz například Hildebrand, 1974, kapitola 8.5) výsledná integrace je alespoň dvakrát přesnější než v případě M libovolných směrů. Nevýhodou může být pevné zadání směrů, v nichž se rovnice přenosu záření řeší. V případě, že není možné využít Gaussovu-Legendreovu kvadraturu, je možné použít libovolné směry a integrovat lichoběžníkovou metodou. Nevýhodou je nižší přesnost, ale směry můžeme volit podle potřeby.

6.3.1.3 Frekvenční diskretizace

Podobně jako v případě úhlové diskretizace je vhodné zavést frekvenční diskretizaci (tj. zvolit frekvenční body $\nu_n, n = 1, \dots, F$) tak, aby co nejlépe vystihla optické vlastnosti prostředí. Základní rysy frekvenčního spektra, které je třeba vhodnou diskretizací popsat, jsou dány závislostí opacity χ a emisivity η na frekvenci ν . Tato závislost pak určuje i závislost intenzity záření I na frekvenci. Přechody v kontinuu (rozptyl na elektronech, volně-volné přechody) se s frekvencí mění poměrně pomalu (malé $\partial\chi/\partial\nu$) a rovnoměrně ($\partial^2\chi/\partial\nu^2 \approx 0$). Tím jsou malé i změny intenzity záření I s frekvencí ν (malé $\partial I/\partial\nu$). Ionizace a rekombinace mají pro většinu frekvencí rovněž malé a rovnoměrné změny (malé $\partial\chi/\partial\nu$ a malé $\partial^2\chi/\partial\nu^2$), ale v případě ionizačních hran se opacita (a tím i intezita záření) mění skokem. Čárové přechody se vyznačují velkou změnou opacity (velké $\partial\chi/\partial\nu$) v úzké čáře. Často lze však úspěšně využít fakt, že spektrální čáry bývají symetrické vzhledem ke své centrální frekvenci a řešit rovnici přenosu jen v půlce spektrální čáry.

Závislost derivace $\partial\chi/\partial\nu$ na frekvenci ν určuje vhodné rozdělení frekvenčních bodů. Pokud se opacita mění rovnoměrně ($\partial^2\chi/\partial\nu^2 \approx 0$), můžeme frekvenční body volit prakticky ekvidistantně. S ohledem na skutečnost, že $|\partial^2\chi/\partial\nu^2| \gtrsim 0$, je vhodná diskretizace ekvidistantní v $\ln \nu$. Pokud však je $|\partial^2\chi/\partial\nu^2| \gg 0$, musíme volbu frekvenčních bodů přizpůsobit funkci $\chi(\nu)$ tak, aby případné integrování přes frekvence mělo co nejmenší chybu.

Pro integraci přes frekvence je nejvhodnější lichoběžníková metoda, protože minimalizuje počet nutných frekvenčních bodů. Umožňuje nám je rozmístit jen tam, kde je jich třeba.

integrace přes profil čáry

$$\int_0^\infty J(\nu) d\nu \approx \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} J(\nu) d\nu \approx \sum_{n=1}^F w_n J(\nu_n). \quad (6.44)$$

normalizace profilu čáry

$$S_F = \sum_{n=1}^F w_n = 1. \quad (6.45)$$

pro $S_F \neq 1$: $w_n \rightarrow w_n/S_F$

6.3.2 Dlouhé a krátké charakteristiky

Metoda charakteristik převádí řešení parciální diferenciální rovnice na řešení množiny obyčejných diferenciálních rovnic. *Charakteristika* je přímka, podél níž řešíme parciální diferenciální rovnici jako obyčejnou diferenciální rovnici. V astronomickém přenosu záření pro ni také používáme název paprsek.

Dlouhé charakteristiky je pojem používaný v astronomickém přenosu záření pro charakteristiky. Při použití metody dlouhých charakteristik se řeší rovnice přenosu záření podél paprsků procházejících *celým* prostředím (od okraje k okraji). V případě planparalelní geometrie je pro daný paprsek úhel θ mezi směrem šíření záření \mathbf{n} a polohovým vektorem $\mathbf{r} = (0, 0, z)$ konstantní. V tomto případě jde o „triviální“ charakteristiku, protože časově nezávislá planparalelní rovnice přenosu záření je obyčejnou diferenciální rovnicí. Pro sféricky symetrickou geometrii (obrázek 6.1) má každý paprsek jistou minimální vzdálenost p od středu symetrie. Tato vzdálenost se nazývá *impact parameter* (Hummer and Rybicki, 1971). Sféricky symetrickou rovnici přenosu záření pak řešíme podél jednotlivých paprsků s různým p , přičemž úhel θ mezi směrem šíření záření \mathbf{n} a polohovým vektorem \mathbf{r} se mění podél paprsku.

Krátké charakteristiky vzniknou rozdělením charakteristik na menší úsečky. V jednorozměrném případě jen rozdělíme řešení na několik navazujících částí, což je jen malá změna v porovnání s dlouhými charakteristikami. Výhody krátkých charakteristik se více projeví ve vícerozměrných (2-D a 3-D) případech. Použití dlouhých charakteristik ve vícerozměrných případech bývá často nevýhodné. Pokud jsou hodnoty základních veličin atmosféry definovány numericky pomocí sítě, dlouhá charakteristika vycházející z uzlového bodu často mine většinu dalších uzlových bodů, takže pro pokračování integrace podél paprsku musíme velmi často interpolovat z hodnot v uzlových bodech. Podobně musíme interpolovat, chceme-li zjistit hodnoty intenzity v uzlových bodech. Pomocí krátkých charakteristik, které jsou celé obsaženy jen v jedné buňce ohraničené uzlovými body a nemusejí na sebe navazovat, můžeme množství interpolací významně snížit. Krátké

charakteristiky můžeme zvolit tak, že hodnoty veličin z uzlových bodů interpolujeme pouze na jejich začátku nebo konci. Užití krátkých charakteristik znamená použití rovnice (6.4) na „krátkých“ intervalech.

6.3.3 Integrální metody

řešení 1-D rovnice (6.4), metody jsou použitelné i ve více rozměrech

$$I(\tau_1, \mu) = I(\tau_2, \mu) \exp\left(-\frac{\tau_2 - \tau_1}{\mu}\right) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} S(t, \mu) \exp\left(-\frac{t - \tau_1}{\mu}\right) \frac{dt}{\mu} \quad (6.4)$$

- optická hloubka se mění ve hvězdných atmosférách až o několik řádů
- pro numerické řešení
 - provedeme hloubkovou diskretizaci (kapitola 6.3.1.1) podle optických hloubek
 $\tau_d, d = 1, \dots, D$ (D je celkový počet hloubkových bodů)
 - integrál vyjádříme pomocí (6.37)
 - je třeba vhodným způsobem interpolovat průběh vydatnosti i optické hloubky mezi body τ_1 a τ_2
 - bývá vhodné rozdělit interval $\langle \tau_2; \tau_1 \rangle$ na menší, je-li to třeba
 - řešíme podél dlouhých nebo krátkých charakteristik (kapitola 6.3.2)
 - řešení podél dlouhých charakteristik výpočetně náročné
 problém s globální interpolací,
 lokální interpolace nutností (Jones, 1973)
 - metoda krátkých charakteristik pro integrální metody vhodnější

lineární interpolace

$$S(t) = S_d \frac{\tau_{d+1} - t}{\tau_{d+1} - \tau_d} + S_{d+1} \frac{t - \tau_d}{\tau_{d+1} - \tau_d}, \quad \tau_d \leq t \leq \tau_{d+1} \quad (6.46)$$

kvadratická interpolace (například Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 12.123)

$$S(t) = \sum_{i=-1}^1 \frac{\prod_{j \neq i} (t - \tau_{d+j})}{\prod_{j \neq i} (\tau_{d+i} - \tau_{d+j})} S_{d+i} \quad (6.47)$$

Obecnou nevýhodou integrálních metod řešení rovnice přenosu záření je velké množství výpočtů exponenciál (ve členech obsahujících $\exp(-\Delta\tau)$), což je sice přímočarý výpočet, ale náročný na výpočetní čas.

6.3.4 Feautrierova metoda

Řešením rovnice přenosu záření se hodnota specifické intenzity $I_{\nu\mu}$ získá vždy jen v jednom směru. Existuje ale i snadná možnost, jak získat řešení rovnice přenosu záření současně v proti sobě jdoucích směrech. Rovnici přenosu záření můžeme převést na rovnici druhého řádu (viz Schuster, 1905) a řešit diferenciací podle Feautriera (1964). Zde uvedeme postup pro planoparalelní statickou atmosféru a monochromatickou rovnici přenosu záření.

Zavedeme proměnné $j_{\nu\mu}$ a $h_{\nu\mu}$ pomocí vztahů (pro $0 \leq \mu \leq 1$)⁴

$$j_{\nu\mu} \equiv \frac{1}{2} [I(+\mu, \nu) + I(-\mu, \nu)] \quad (6.48a)$$

$$h_{\nu\mu} \equiv \frac{1}{2} [I(+\mu, \nu) - I(-\mu, \nu)] \quad (6.48b)$$

Sečtením (3.15) pro $+\mu$ a $-\mu$ dostaneme s využitím (6.48)

$$\mu \frac{dh_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} = j_{\nu\mu} - S_\nu \quad (6.49a)$$

$$\mu \frac{dj_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} = h_{\nu\mu} \quad (6.49b)$$

Derivováním rovnice (6.49b) podle τ_ν a následným dosazením z (6.49a) dostaneme rovnici druhého řádu pro proměnnou j ,

$$\mu^2 \frac{d^2 j_{\nu\mu}}{d\tau_\nu^2} = j_{\nu\mu} - S_\nu, \quad (6.50)$$

kteřou budeme nazývat **Schusterovou rovnicí** přenosu záření druhého řádu (viz Hubeny and Mihalas, 2014, kapitola 11.6).

Okrajové podmínky Rovnici (6.50) řešíme mezi optickými hloubkami τ_{\min} (nejnižší hodnota) a τ_{\max} (nejvyšší hodnota). Horní okrajovou podmínku rovnice (3.15),

$$I(-\mu, \nu, \tau_{\min}) = I_{\nu\mu}^-, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (6.51a)$$

kteřá většinou definuje záření dopadající na hvězdnou atmosféru z vnějšku, a dolní okrajovou podmínku téže rovnice,

$$I(+\mu, \nu, \tau_\nu = \tau_{\max}) = I_{\nu\mu}^+, \quad 0 \leq \mu \leq 1, \quad (6.51b)$$

⁴Proměnné se někdy značí u a v . Proměnným se běžně říká Feautrierovy proměnné, i když je Schuster zavedl o hodně let dříve (1905). Feautrier (1964) je použil k formulaci numerické metody řešení rovnice přenosu záření. Oba autoři je značili odlišně od značení použitého zde, Schuster použil označení A a B a Feautrier J a F .

6. FORMÁLNÍ ŘEŠENÍ ROVNICE PŘENOSU ZÁŘENÍ

kteřá popisuje záření přicházející do atmosféry z nitra hvězdy, přepíšeme pomocí vztahů $I(+\mu, \nu) = j_{\nu\mu} + h_{\nu\mu}$ a $I(-\mu, \nu) = j_{\nu\mu} - h_{\nu\mu}$, které vyplývají z definice proměnných (6.48). Dostaneme tak vztahy pro horní okrajovou podmínku

$$\mu \left. \frac{dj_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\min}} = j_{\nu\mu}(\tau_{\min}) - I_{\nu\mu}^- \quad (6.52a)$$

a pro dolní okrajovou podmínku

$$\mu \left. \frac{dj_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\max}} = I_{\nu\mu}^+ - j_{\nu\mu}(\tau_{\max}). \quad (6.52b)$$

Pro hvězdné atmosféry se často uvažuje nulové dopadající záření,

$$I_{\nu\mu}^- = 0, \quad (6.53)$$

není to však podmínkou. Nejčastější podmínkou na spodním okraji hvězdných atmosfér je difúzní přiblížení (rovnice 6.10a),

$$I_{\nu\mu}^+ = B_\nu(\tau_{\max}) + \mu \left. \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\max}}, \quad (6.54)$$

opět však můžeme nalézt případy, kdy je vhodnější jiná okrajová podmínka. Pro případ symetrické vrstvy můžeme stanovit hraniční podmínku ve středu symetrie, kde je $h_{\nu\mu}(\tau) = 0$. Položíme-li $\tau = \tau_{\max}$, máme okrajovou podmínku

$$\mu \left. \frac{dj_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\max}} = 0 \quad (6.55)$$

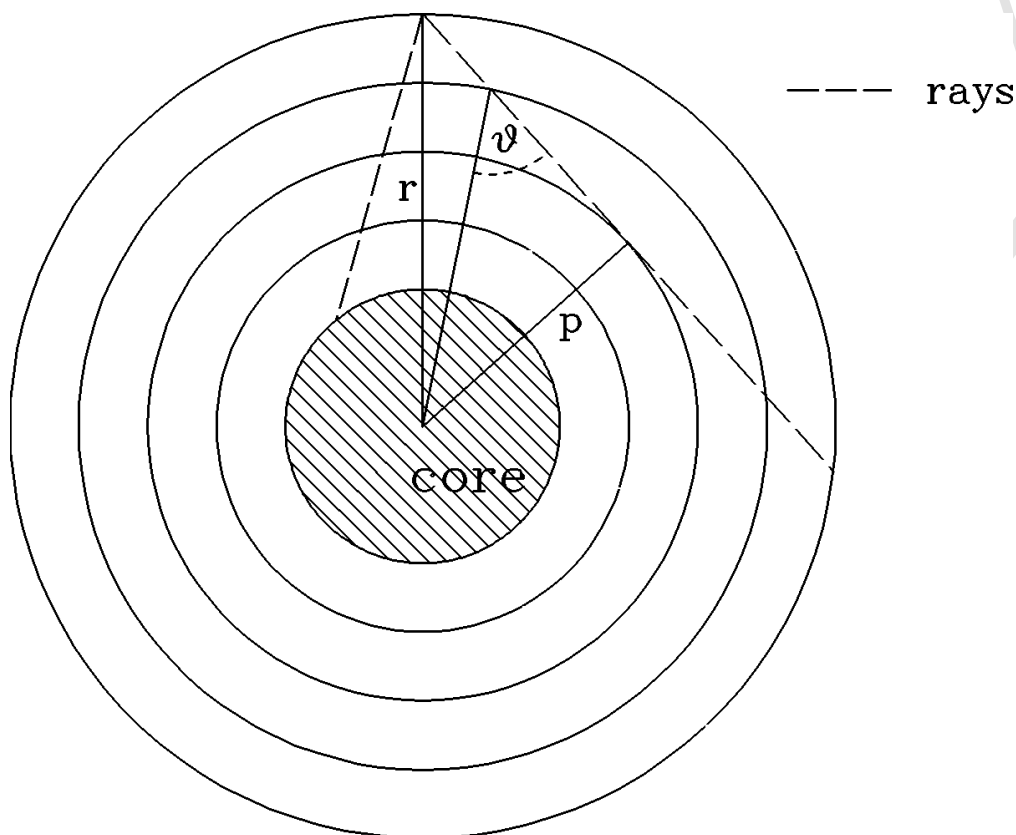
Dále se problém diskretizuje a řeší numericky (viz Příloha C.1).

6.3.5 Sféricky symetrická rovnice přenosu záření

Rozdíl mezi planparalelní a sférickou geometrií je patrný z obrázku 6.1. Některé paprsky, podél kterých se šíří záření, procházejí skrz prostředí, oba jejich konce jsou vnější. Doprostřed souřadné soustavy umístíme opticky tlustou hvězdu, která se při formulaci řešení rovnice přenosu ve sférické geometrii často nazývá jádrem (*core*). Některé paprsky protínají jádro, způsob řešení rovnice přenosu záření bude pro tyto paprsky odlišný od způsobu řešení podél paprsků jádro neprotínajících.

Výraz na levé straně sféricky symetrické rovnice přenosu záření (3.19) je přesně derivace ve směru (3.17). Směr označíme s a nahradíme levou stranu derivací ve směru d/ds ,

$$\frac{dI_{\nu\mu}}{ds} = \eta_\nu(r) - \chi_\nu(r)I_{\nu\mu}(r), \quad (6.56)$$



Obrázek 6.1: Paprsky ve sféricky symetrickém modelu, $\mu = \cos \vartheta$ v obrázku.

což je rovnice přenosu záření ve sférické geometrii podél paprsku. Zavedeme optickou hloubku podél paprsku s jako $d\tau_{\nu s} = -\chi_{\nu} ds$, vydatnost pomocí (3.25) a rovnici přenosu záření podél paprsku přepíšeme

$$\frac{dI_{\nu\mu}}{d\tau_{\nu s}} = I_{\nu\mu} - S_{\nu}. \quad (6.57)$$

Podobně jako v planparalelním případě sečteme a odečteme rovnice přenosu záření v protichůdných směrech, využijeme Schusterovy-Feautrierovy proměnné (6.48) a zapíšeme rovnici přenosu záření druhého řádu podél paprsku s jako

$$\frac{d^2 j_{\nu\mu}}{d\tau_{\nu s}^2} = j_{\nu\mu} - S_{\nu} \quad (6.58)$$

Je to stejná rovnice jako (6.50), liší se jen v optické hloubce ($d\tau_{\nu}/\mu \rightarrow d\tau_{\nu s}$). Intenzitu dopadajícího záření označíme stejně jako v planparalelním případě (6.51)

6. FORMÁLNÍ ŘEŠENÍ ROVNICE PŘENOSU ZÁŘENÍ

a podobné budou i okrajové podmínky (6.52). Na horním okraji je okrajová podmínka

$$\left. \frac{dj_{\nu\mu}}{d\tau_{\nu s}} \right|_{\tau_{\min}} = j_{\nu\mu}(\tau_{\min}) - I_{\nu\mu}^- \quad (6.59a)$$

pro volbu $I_{\nu\mu}^-$ platí stejné poznámky jako v planparalelním případě. Pro paprsky protínající jádro (*core*) použijeme okrajovou podmínku jako v planparalelním případě na spodním okraji,

$$\left. \frac{dj_{\nu\mu}}{d\tau_{\nu s}} \right|_{\tau_{\max}} = I_{\nu\mu}^+ - j_{\nu\mu}(\tau_{\max}). \quad (6.59b)$$

Pro paprsky neprotínající jádro je druhým okrajem opět horní okraj. Vzhledem ke sférické symetrii však stačí řešit rovnici přenosu jen v půlce paprsku. Okrajovou podmínku potom formulujeme v tom místě paprsku, kde je vzdálenost od středu hvězdy nejkratší,

$$\left. \frac{dj_{\nu\mu}}{d\tau_{\nu s}} \right|_{\tau_{\max}} = 0. \quad (6.59c)$$

Problém diskretizujeme a řešíme numericky stejnou metodou jako v planparalelním případě (viz Příloha C.1).

Kapitola 7

Přenos záření s obecnou vydatností

V této části se začneme zabývat zobecněním rovnice přenosu pro případy, kdy při řešení rovnice přenosu neznáme vydatnost (opacitu a emisivitu), protože nějakým způsobem závisí na poli záření. V této kapitole se podíváme na vliv rozptylu na pohyb fotonu v prostředí a na to, jak započtení rozptylu ovlivní rovnici přenosu záření a jaké máme možnosti řešení rovnice přenosu záření s rozptylem. Později (v kapitole 9) se budeme zabývat složitější závislostí vydatnosti na poli záření přes rovnice kinetické rovnováhy.

7.1 Vydatnost spektrální čáry

Odvodíme si nyní vztah pro vydatnost (zdrojovou funkci) spektrální čáry. Opacitu můžeme se zahrnutím stimulované emise jako záporné absorpce zapsat jako

$$\chi(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} (\phi(\nu)n_l B_{lu} - \psi^{\text{stim}}(\nu)n_u B_{ul}) \quad (7.1)$$

kde $\phi(\nu)$ je absorpční profil a $\psi^{\text{stim}}(\nu)$ je profil stimulované emise. Obecně mohou být tyto profily rozdílné. Emisivitu v čáře můžeme zapsat jako

$$\eta(\nu) = \frac{h\nu}{4\pi} \psi^{\text{spont}}(\nu)n_u A_{ul}, \quad (7.2)$$

kde $\psi^{\text{spont}}(\nu)$ je profil spontánní emise, který se obecně opět může lišit od absorpčního profilu i od profilu stimulované emise. Vydatnost v čáře S_L dostaneme jako podíl emisivity a opacity

$$S_L(\nu) = \frac{\eta(\nu)}{\chi(\nu)} = \frac{\psi^{\text{spont}}(\nu)n_u A_{ul}}{\phi(\nu)n_l B_{lu} - \psi^{\text{stim}}(\nu)n_u B_{ul}}. \quad (7.3)$$

V případě nepříliš intenzivního pole záření (což je případ běžných hvězdných atmosfér) jsou emisní profily pro spontánní a stimulovanou emisi stejné (Cooper

et al., 1983), $\psi^{\text{spont}}(\nu) = \psi^{\text{stim}}(\nu) \equiv \psi(\nu)$. Pokud navíc dochází k úplné redistribuci záření ve spektrální čáře (B.29c), jsou stejné i absorpční a emisní profily, $\phi(\nu) = \psi(\nu)$, pak

$$S_L = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} \frac{1}{\frac{n_l g_u}{n_u g_l} - 1}. \quad (7.4)$$

Tento vztah přejde na Planckovu funkci (rovnovážný stav), pokud platí

$$\frac{n_u}{n_l} = \frac{g_u}{g_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{lu}}{kT}\right). \quad (7.5)$$

Tento vztah je splněn nejen v případě termodynamické rovnováhy, kdy obsazení hladin n_l a n_u mají rovnovážné hodnoty n_l^* a n_u^* , ale může být splněn i pro obecně nerovnovážné hodnoty n_l a n_u . V tom případě někdy říkáme, že hladiny l a u jsou *vuči sobě* v (lokální) termodynamické rovnováze. Typickým příkladem jsou hladiny, jejichž excitační energie mají vzájemně blízké hodnoty, nebo hladiny s excitačními energiemi blízkými ionizační energii.

7.2 Vydatnost s rozptylem

Zahrnutí rozptylu vnáší do rovnice přenosu záření člen, který je přímo závislý na intenzitě záření. Při rozptylu nedochází ke zničení fotonu jako například při pravé absorpci, ale může se jeho měnit frekvence ν (například kapitola 5.8) i směr \mathbf{n} (například kapitola 5.7).

V této kapitole oddělíme od opacity a emisivity jejich část způsobenou rozptylem. Důvodem je hlavně emisivita, která při rozptylu závisí na dopadajícím záření. Zbylou část opacity a emisivity budeme označovat přívlastkem termální, což charakterizuje zničení (termalizaci) fotonu při pravé absorpci a jeho vznik z tepelné energie přes vnitřní energii atomů při emisi. Celkovou opacitu označíme χ , opacitu rozptylu σ a absorpční opacitu bez rozptylu (termální opacitu) κ . Pro celkovou opacitu platí

$$\chi(\mathbf{n}, \nu) = \kappa(\mathbf{n}, \nu) + \sigma(\mathbf{n}, \nu). \quad (7.6)$$

Podobně celkovou emisivitu označíme η , rozptylovou emisivitu η^S a termální emisivitu (bez rozptylu) η^{th} a pro celkovou emisivitu napíšeme vztah

$$\eta(\mathbf{n}, \nu) = \eta^{\text{th}}(\mathbf{n}, \nu) + \eta^S(\mathbf{n}, \nu). \quad (7.7)$$

Podělením rovnic pro emisivitu (7.7) a opacitu (7.6) dostaneme vztah pro celkovou vydatnost

$$S(\mathbf{n}, \nu) = \frac{\eta(\mathbf{n}, \nu)}{\chi(\mathbf{n}, \nu)} = \frac{\eta^{\text{th}}(\mathbf{n}, \nu) + \eta^{\text{S}}(\mathbf{n}, \nu)}{\kappa(\mathbf{n}, \nu) + \sigma(\mathbf{n}, \nu)} \quad (7.8)$$

Rovnice přenosu záření bez časového členu (3.9) získá po dosazení za opacitu a emisivitu z (7.6) a (7.7) tvar

$$\mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) = - [\kappa(\mathbf{n}, \nu) + \sigma(\mathbf{n}, \nu)] I(\mathbf{n}, \nu) + \eta^{\text{th}}(\mathbf{n}, \nu) + \eta^{\text{S}}(\mathbf{n}, \nu) \quad (7.9)$$

Rozptylová emisivita η^{S} závisí na dopadajícím poli záření. Obecně ji můžeme vyjádřit vztahem

$$\eta^{\text{S}}(\mathbf{n}, \nu) = \frac{1}{4\pi} \oint d\varpi' \int_0^\infty d\nu' \sigma(\mathbf{n}', \nu') \tilde{R}(\mathbf{n}', \nu'; \mathbf{n}, \nu) I(\mathbf{n}', \nu') \quad (7.10)$$

kde $\tilde{R}(\mathbf{n}', \nu'; \mathbf{n}, \nu)$ je redistribuční funkce vyjadřující pravděpodobnost rozptylu $(\mathbf{n}', \nu') \rightarrow (\mathbf{n}, \nu)$ v soustavě pozorovatele. Můžeme ji získat vystředováním atomární redistribuční funkce (zavedené v kapitole 5.8) přes rozdělení rychlostí. Pro nerelativistický případ můžeme podobně jako v případě rovnice (5.86) redistribuční funkci rozdělit na úhlovou a frekvenční část,

$$\tilde{R}(\mathbf{n}', \nu'; \mathbf{n}, \nu) = g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) R(\nu'; \nu), \quad (7.11)$$

kde $g(\mathbf{n}', \mathbf{n})$ je úhlová redistribuční funkce a $R(\nu'; \nu)$ je frekvenční redistribuční funkce. Podívejme se nyní jednotlivě na obě redistribuční funkce.

Úhlová redistribuce záření je podrobně rozebrána v knize Chandrasekhar (1960, kapitola III a následující). Pro zjednodušení předpokládáme frekvenčně koherentní rozptyl,

$$\tilde{R}(\mathbf{n}', \nu'; \mathbf{n}, \nu) = g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \delta(\nu - \nu').$$

Rozptylová emisivita (7.10) pro čistě úhlovou redistribuci záření a za předpokladu izotropní rozptylové opacity (σ nezávisí na směru, odkud přichází záření) je

$$\eta^{\text{S}}(\mathbf{n}, \nu) = \sigma(\nu) \oint I(\mathbf{n}', \nu) g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \frac{d\varpi'}{4\pi}, \quad (7.12)$$

po jejím dosazení do rovnice přenosu záření dostaneme

$$\mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) = - [\kappa(\mathbf{n}, \nu) + \sigma(\mathbf{n}, \nu)] I(\mathbf{n}, \nu) + \eta^{\text{th}}(\mathbf{n}, \nu)$$

$$+ \sigma(\nu) \oint I(\mathbf{n}', \nu) g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \frac{d\varpi'}{4\pi}. \quad (7.13)$$

V případě izotropního rozptylu ($g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = 1$) se rovnice přenosu záření zjednoduší na

$$\mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) = - [\kappa(\mathbf{n}, \nu) + \sigma(\nu)] I(\mathbf{n}, \nu) + \eta^{\text{th}}(\mathbf{n}, \nu) + \sigma(\nu) J(\nu). \quad (7.14)$$

Termální opacita κ a emisivita η^{th} bývají také často nezávislé na směru dopadajícího záření. Pokud budou navíc i tyto nulové, budeme mít pro čistě rozptylující prostředí rovnici přenosu záření

$$\mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) = -\sigma(\nu) [I(\mathbf{n}, \nu) - J(\nu)]. \quad (7.15)$$

Příkladem použití takovéto rovnice může být prostředí, kde jediným zdrojem opacity je rozptyl na volných elektronech (kapitola 5.7.1). Zobecnění rovnice (7.15) pro anizotropní rozptyl je zřejmé.

Frekvenční redistribuce záření je stručně popsána v kapitole 5.8. Pro zjednodušení předpokládáme izotropní rozptyl ($g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) = 1$) a nezávislost rozptylové opacity na směru dopadajícího záření. Z rovnice (7.11) tak dostaneme

$$\tilde{R}(\mathbf{n}', \nu'; \mathbf{n}, \nu) = R(\nu', \nu)$$

a rozptylová emisivita pro čistě frekvenční redistribuci záření po integraci přes všechny směry bude

$$\eta^{\text{S}}(\nu) = \int_0^\infty \sigma(\nu') R(\nu', \nu) J(\nu') d\nu'. \quad (7.16)$$

Rovnice přenosu záření (7.9) získá tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) = & - [\kappa(\mathbf{n}, \nu) + \sigma(\nu)] I(\mathbf{n}, \nu) + \eta^{\text{th}}(\mathbf{n}, \nu) \\ & + \int_0^\infty \sigma(\nu') R(\nu', \nu) J(\nu') d\nu' \end{aligned} \quad (7.17)$$

Tato rovnice svazuje různé frekvence v závislosti na rozptylové opacitě $\sigma(\nu)$ a redistribuční funkci $R(\nu', \nu)$ jako funkcí frekvence. Pro speciální případ úplné redistribuce ve spektrálních čarách můžeme pro součin rozptylové opacity a redistribuční funkce v rovnici (7.16) psát

$$\sigma(\nu') R(\nu', \nu) = \sigma_0 \phi(\nu') \phi(\nu),$$

kde rozptylová opacita $\sigma_0 = \pi e^2 / (m_e c) f_{lu}$ (rovnice 5.41) nezávisí na frekvenci. Potom rozptylová emisivita

$$\eta^S(\nu) = \sigma_0 \phi(\nu) \int_0^\infty \phi(\nu') J(\nu') d\nu' \quad (7.18)$$

a rovnice přenosu záření bude mít tvar

$$\mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) = - [\kappa(\mathbf{n}, \nu) + \sigma(\nu)] I(\mathbf{n}, \nu) + \eta^{\text{th}}(\mathbf{n}, \nu) + \sigma_0 \phi(\nu) \int_0^\infty \phi(\nu') J(\nu') d\nu' \quad (7.19)$$

V případě koherentního rozptylu je

$$\sigma(\nu') R(\nu', \nu) = \sigma_0 \phi(\nu') \delta(\nu - \nu'),$$

rozptylová emisivita se zjednoduší na

$$\eta^S(\nu) = \sigma(\nu) J(\nu) \quad (7.20)$$

a rovnice přenosu záření získá tvar (7.14). Příkladem procesu s frekvenční redistribucí záření je rozptyl ve spektrálních čarách (kapitola 5.8).

7.2.1 Planparalelní rovnice přenosu záření s koherentním rozptylem

Podíváme se nyní blíže na rovnici (7.14) pro případ rovinné geometrie. Budeme uvažovat planparalelní rovnici přenosu záření (3.15) s optickou hloubkou, která bude zahrnovat opacitu termální absorpce κ_ν i rozptylu σ_ν (viz kapitola 5), $d\tau_\nu = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) dz$,

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} = I_{\nu\mu} - S_\nu. \quad (7.21)$$

Budeme se zabývat různými tvary vydatnosti S_ν .

V jednoduchém případě lokální termodynamické rovnováhy (LTE – viz kapitola 4.6 a později 9.1) bez rozptylu ($\chi_\nu = \kappa_\nu$) má vydatnost jednoduchý tvar $S_\nu = B_\nu$. Opačným extrémním případem je čistě koherentní (frekvence se při rozptylu nemění) izotropní rozptyl. V tomto případě je vydatnost rovna

$$S_\nu = \frac{\sigma_\nu J_\nu}{\sigma_\nu} = J_\nu = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I_{\nu\mu} d\mu. \quad (7.22)$$

7. PŘENOS ZÁŘENÍ S OBEČNOU VYDATNOSTÍ

Rovnice přenosu záření s vydatností tohoto typu a její řešení jsou podobně studovány v knize Chandrasekhar (1960, kapitola III a další).

Kombinací těchto dvou limitních případů dostáváme případ tepelného (LTE) záření spojeného s koherentním rozptylem v kontinuu. V tomto případě obsahuje vydatnost jak termální člen, tak i rozptylový člen,

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu}{\chi_\nu} = \frac{\kappa_\nu B_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu}. \quad (7.23)$$

Podíl termální opacit k celkové opacitě

$$\varepsilon_\nu = \frac{\kappa_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu} \quad (7.24)$$

udává pravděpodobnost, že bude foton pohlcen („zničen“). Tento podíl se nazývá **parametr tepelné vazby** (*thermal coupling parameter*) nebo také **pravděpodobnost zničení fotonu** (*photon destruction probability*). S tímto parametrem získá výraz pro vydatnost tvar

$$S_\nu = \varepsilon_\nu B_\nu + (1 - \varepsilon_\nu) J_\nu \quad (7.25)$$

Z tohoto vztahu vyplývá, že v případě, když převládá tepelná opacita a opacita rozptylu je malá, je pravděpodobnost zničení fotonu velká ($\varepsilon_\nu \rightarrow 1$) a vydatnost se blíží své rovnovážné hodnotě. Pokud převládá opacita rozptylu, je pravděpodobnost zničení fotonu malá a vydatnost se blíží vztahu (7.22)

Formálně zobecníme tento výsledek i pro případ rozptylu ve spektrální čáře (kapitola 5.8) na pozadí kontinua, které se formuje v LTE. Opacitu χ_ν v tomto případě můžeme vyjádřit jako

$$\chi_\nu = \chi_c + \chi_l \phi_\nu, \quad (7.26)$$

kde χ_c je opacita kontinua (ionizací, volně volných přechodů a rozptylu na elektronech), χ_l je opacita ve středu čáry (nezávisí na frekvenci) a ϕ_ν je profil této čáry. Opacita kontinua χ_c je pro frekvence v čáře prakticky konstantní, protože spektrální čáry jsou většinou velmi úzké. Pro emisivitu v této čáře platí, že část ε pochází z termálních procesů a část $1 - \varepsilon$ z rozptylu v čáře. Předpokládáme úplnou redistribuci záření při rozptylu v čáře. Pro celkovou emisivitu můžeme psát

$$\eta_\nu = \chi_c B_\nu + \chi_l \phi_\nu \left[\varepsilon B_\nu + (1 - \varepsilon) \int_0^\infty \phi_{\nu'} J_{\nu'} d\nu' \right] \quad (7.27)$$

Vztah pro vydatnost můžeme přepsat do tvaru podobného vztahu (7.25),

$$S_\nu = \xi_\nu B_\nu + (1 - \xi_\nu) \int_0^\infty \phi_{\nu'} J_{\nu'} d\nu', \quad (7.28)$$

kde $r = \chi_c/\chi_l$ a $\xi_\nu = (r + \varepsilon\phi_\nu)/(r + \phi_\nu)$.

Rovnice přenosu záření (7.21) je díky vydatnostem (7.25) nebo (7.28) integrodiferenciální. Její řešení můžeme formálně zapsat pomocí Λ -operátoru (viz kapitola 6.2),

$$J_\nu(\tau_\nu) = \Lambda_{\tau_\nu} [S_\nu] = \Lambda_{\tau_\nu} [(1 - \varepsilon_\nu) J_\nu] + \Lambda_{\tau_\nu} [\varepsilon_\nu B_\nu]. \quad (7.29)$$

Bez rozptylu (tj. kdyby $\varepsilon_\nu = 1$) by bylo řešení rovnice (7.29) jednoduché formální řešení rovnice přenosu pro $S_\nu = B_\nu$. V opačném případě řešení (když $\varepsilon_\nu < 1$) není již tak přímočaré.

7.3 Termalizační délka

Pro jednoduchost budeme zde uvažovat koherentní a izotropní rozptyl. Střední volná dráha ℓ_ν fotonu o frekvenci ν je dána převrácenou hodnotou absorpčního koeficientu χ_ν (viz kapitola 3.1.1),

$$\ell_\nu = \frac{1}{\chi_\nu} = \frac{1}{\kappa_\nu + \sigma_\nu}. \quad (7.30)$$

Absorpční koeficient χ_ν se zde skládá z termální opacity κ_ν a rozptylu σ_ν , $\chi_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$. Po každém proletu střední volné dráhy je foton buď *absorbován* nebo *rozptýlen*. Po rozptylu foton pokračuje ve své cestě (obecně jiným směrem), po absorpci svou cestu končí, protože jeho energie se nakonec převede pomocí srážek do tepelné energie (říkáme, že foton je *termalizován*). Nás bude zajímat celková střední dráha, kterou foton proletí, než bude termalizován (viz také Rybicki and Lightman, 1979, kapitola 1.7), kterou nazveme *termalizační délka*.

Celková dráha \mathbf{L} , kterou foton proletí po N rozptylech, je dána vektorovým součtem $\mathbf{L} = \sum_{n=1}^N \boldsymbol{\ell}_n$, kde $\boldsymbol{\ell}_n$ jsou dráhy mezi jednotlivými interakcemi. V případě náhodných procesů bude prostá střední hodnota \mathbf{L} nulová, neboť je to vektor a v důsledku vektorového sčítání se jednotlivé dráhy vzájemně odečtou. Vezmeme proto střední hodnotu L z kvadrátů středních volných drah (což odpovídá druhé mocnině velikostí jednotlivých drah),

$$L^2 = \langle \mathbf{L}^2 \rangle = \sum_{n=1}^N \langle \ell_n^2 \rangle + 2 \sum_{n=1}^N \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N \langle \boldsymbol{\ell}_n \cdot \boldsymbol{\ell}_m \rangle.$$

Pro izotropní rozptyl je střední hodnota všech skalárních součinů $\langle \boldsymbol{\ell}_n \cdot \boldsymbol{\ell}_m \rangle$ nulová a $\langle \ell_n^2 \rangle = \ell^2$ (čtverec střední volné dráhy fotonu). Střední celková dráha fotonu po N rozptylech je tedy

$$L = \sqrt{N} \ell. \quad (7.31)$$

Veličina ε_ν ze vztahu (7.24) vyjadřuje pravděpodobnost zničení fotonu frekvence ν (pravděpodobnost absorpce). Celkový střední počet rozptylů je roven její převrácené hodnotě, $N = 1/\varepsilon_\nu$. Celková dráha fotonu o frekvenci ν je

$$L_\nu = \frac{\ell_\nu}{\sqrt{\varepsilon_\nu}} = \frac{\ell_\nu}{\sqrt{\frac{\kappa_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu}}} = \frac{1}{\sqrt{\kappa_\nu(\kappa_\nu + \sigma_\nu)}} \quad (7.32)$$

Této vzdálenosti se kromě již zmíněného názvu termalizační délka říká také difúzní délka nebo efektivní střední volná dráha fotonu. Vyjádříme-li termalizační délku jako optickou vzdálenost τ_{th} , dostaneme

$$\tau_{\text{th}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_\nu}}. \quad (7.33)$$

To je *termalizační délka vyjádřená v jednotkách střední volné dráhy* ℓ_ν fotonu o frekvenci ν .

7.4 Přímé metody řešení rovnice přenosu záření s rozptylem

Při řešení monochromatické rovnice přenosu záření s rozptylem se musíme vypořádat se zahrnutím závislosti vydatnosti (zdrojové funkce) na záření ze všech směrů (viz rovnice 7.25). V této části se opět omezíme na řešení rovnice přenosu záření v planparalelním přiblížení.

Rovnici přenosu záření (7.21) diskretizujeme pro úhlovou proměnnou μ . Zvolíme $2M + 1$ hodnot μ_m , $m = -M, \dots, -1, 0, 1, \dots, M$. Touto volbou m chceme zdůraznit, že budeme řešit rovnice přenosu pro proti sobě jdoucí směry. Hodnota $m = 0$ bude odpovídat vodorovnému směru pro $\mu = 0$). Rovnici přenosu záření přepíšeme

$$\mu_m \frac{dI(\nu, \mu_m, \tau_\nu)}{d\tau_\nu} = I(\nu, \mu_m, \tau_\nu) - S(\nu, \tau_\nu), \quad (7.34)$$

kde vydatnost (zdrojová funkce) je dána (z 7.25)

$$S(\nu, \tau_\nu) = (1 - \varepsilon_\nu) \sum_{m=-M}^M w_m^\mu I(\nu, \mu_m, \tau_\nu) + \varepsilon_\nu B_\nu(\tau_\nu). \quad (7.35)$$

V této rovnici byl integrál specifické intenzity přes úhly nahrazen součtem (viz kapitola 6.3.1). Veličiny w_m^μ jsou odpovídající kvadraturní váhy (6.44), které jsou normalizovány k 1 (viz 6.43).

Základní problém řešení rovnice (7.34) je v okrajových podmínkách. Rovnice přenosu záření je diferenciální rovnice prvního řádu, pro její řešení v jednom směru stačí jedna okrajová podmínka. Pro výpočet rozptylového integrálu potřebujeme však znát záření přicházející ze *všech* směrů. V případě $2M + 1$ směrů je to $2M + 1$ okrajových podmínek. S výhodou lze využít Schusterovy proměnné (6.48) a místo $2M + 1$ rovnic prvního řádu řešit $M + 1$ rovnic druhého řádu.

Feautrierova metoda popsaná v kapitole 6.3.4 převádí rovnici přenosu záření pro specifickou intenzitu I , která je prvního řádu, na rovnici druhého řádu (6.50) pro proměnnou j (6.48a). Tím se jedním řešením rovnice přenosu záření získá záření přicházející z protilehlých směrů. Pro přenos záření s termální absorpcí a rozptylem řešíme rovnici (6.50) s vydatností, která zahrnuje rozptyl. Nejjednodušší takový případ je vydatnost zadaná rovnicí (7.23). Okrajové podmínky můžeme použít stejně jako v případě formálního řešení (6.52). Rozdíl oproti formálnímu řešení tkví v tom, že nyní musíme řešit *současně* rovnice pro danou frekvenci a *různé* směry μ , které jsou vzájemně svázány přes střední intenzitu záření v rozptylovém členu vydatnosti. Více o numerickém řešení uvádí Příloha C.1.4.

Rybickiho řešení je speciální metoda numerického řešení rovnice přenosu záření se zahrnutím rozptylu, kde se systém přetransformuje na řešení pro střední intenzitu záření v čáře $\bar{J} \equiv \int \phi_\nu J_\nu$ (Rybicki, 1971). Použitelná je pro poměrně častý případ úplné redistribuce záření v čáře.

7.5 Iterační metody řešení rovnice přenosu záření s rozptylem

Užití iteračních metod při numerickém řešení rovnic je často velmi dobrou alternativou k přímému řešení, která má nižší nároky na paměť počítače a častokrát bývá i rychlejší, i když se výpočty opakují po několik iterací.

7.5.1 Λ iterace

Jednoduchá iterační metoda se přímo nabízí z rovnice (7.29) (závislost na hloubkové proměnné τ nebudeme uvádět),

$$J_\nu = \Lambda [S_\nu] = \Lambda [(1 - \varepsilon_\nu) J_\nu] + \Lambda [\varepsilon_\nu B_\nu]. \quad (7.36)$$

V iteračním postupu budeme střídavě určovat střední intenzitu J_ν a vydatnost S_ν . Jako úvodní iterační hodnotu pro pole záření vezmeme Planckovu funkci

$$J_\nu^{(0)} = B_\nu. \quad (7.37a)$$

7. PŘENOS ZÁŘENÍ S OBEČNOU VYDATNOSTÍ

V první iteraci určíme střední intenzitu s využitím (7.36) jako

$$J_\nu^{(1)} = \Lambda [(1 - \varepsilon_\nu)J_\nu^{(0)}] + \Lambda [\varepsilon_\nu B_\nu]. \quad (7.37b)$$

Zobecněním této rovnice pro $n + 1$. iteraci dostaneme

$$J_\nu^{(n+1)} = \Lambda [(1 - \varepsilon_\nu)J_\nu^{(n)}] + \Lambda [\varepsilon_\nu B_\nu]. \quad (7.37c)$$

Tomuto postupu určování střední intenzity říkáme **Lambda iterace**. Tato metoda konverguje ke správnému řešení. Rychlost konvergence je možné měřit pomocí odchylek od správného řešení, které se musí dostatečně rychle zmenšovat. Protože během iteračního postupu správné řešení ještě neznáme, standardní kritérium konvergence používané v těchto iteračních metodách je, že změna iterované veličiny mezi po sobě následujícími iteracemi je velmi (dostatečně) malá, tj.

$$\left| \frac{J_\nu^{(n+1)} - J_\nu^{(n)}}{J_\nu^{(n)}} \right| \ll 1. \quad (7.38)$$

Iterační postup můžeme místo iterování střední intenzity J_ν pomocí vztahů (7.37) vyjádřit pomocí iterování vydatnosti S_ν . Pokud do rovnice pro vydatnost (například 7.25) dosadíme za J_ν vyjádření pomocí lambda operátoru, dostaneme rovnici

$$S_\nu = (1 - \varepsilon_\nu) \Lambda [S_\nu] + \varepsilon_\nu B_\nu. \quad (7.39)$$

s jejíž pomocí můžeme zavést iterační postup pro vydatnost S_ν ,

$$\begin{aligned} S_\nu^{(0)} &= B \\ S_\nu^{(n+1)} &= (1 - \varepsilon_\nu) \Lambda [S_\nu^{(n)}] + \varepsilon_\nu B_\nu. \end{aligned} \quad (7.40)$$

Jako kritérium konvergence použijeme stejný výraz jako v případě středních intenzit,

$$\left| \frac{S_\nu^{(n+1)} - S_\nu^{(n)}}{S_\nu^{(n)}} \right| \ll 1. \quad (7.41)$$

Pro tento případ se blíže podíváme na rychlost konvergence Λ -iterace. Vyjádříme S_ν z (7.39),

$$S_\nu = [1 - (1 - \varepsilon_\nu)\Lambda]^{-1} [\varepsilon_\nu B_\nu]. \quad (7.42)$$

Rozvineme operátor $[1 - (1 - \varepsilon_\nu)\Lambda]^{-1}$ v řadu,

$$\begin{aligned} [1 - (1 - \varepsilon_\nu)\Lambda]^{-1} &\approx \\ &\approx 1 + (1 - \varepsilon_\nu)\Lambda + (1 - \varepsilon_\nu)^2 \Lambda^2 + \dots + (1 - \varepsilon_\nu)^n \Lambda^n + \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} [(1 - \varepsilon_\nu)\Lambda]^i \end{aligned} \quad (7.43)$$

Nyní můžeme zapsat hodnotu vydatnosti po n -té iteraci vztahem

$$S_\nu^{(n)} = \sum_{i=0}^n (1 - \varepsilon_\nu)^i \Lambda^i [\varepsilon_\nu B_\nu] \quad (7.44)$$

Pokud je $(1 - \varepsilon_\nu) \ll 1$, což je v případě slabého rozptylu, změny při jednotlivých iteracích rychle klesají a iterační procedura konverguje. Naopak pro $(1 - \varepsilon_\nu) \approx 1$, což je v případě silného rozptylu, jsou změny při jednotlivých iteracích zhruba stejné (byť malé), iterační procedura se stabilizuje a ke konvergenci je třeba extrémně velkého množství iterací.

Z uvedeného vyplývá, že Λ -iterace není vhodná iterační metoda pro silně rozptylující prostředí. Příčina je kromě výše uvedeného matematického zdůvodnění také fyzikální. Jeden iterační krok představuje šíření informace o jednu střední volnou dráhu fotonu. Při vysokém podílu rozptylu se informace šíří v prostředí pomalu. Je třeba vysoký počet středních volných drah než je foton absorbován. Důsledkem je velmi pomalá konvergence.

7.5.2 Metoda proměnných Eddingtonových faktorů

Metodu proměnných Eddingtonových faktorů navrhli pro řešení rovnice přenosu záření Auer and Mihalas (1970). Metoda je založena na iterativním určování Eddingtonových faktorů (3.40).

Zde si uvedeme konkrétní případ, kdy metoda proměnných Eddingtonových faktorů je použita spolu s Feautrierovým řešením v planparalelní atmosféře. Budeme řešit rovnici přenosu záření pro $j_{\nu\mu}$ (6.50) s okrajovými podmínkami (6.52) a známou vydatností (formální řešení). Pro Eddingtonův faktor (3.40) vyjádřený pomocí Schusterovy proměnné j platí

$$f_\nu^K \equiv \frac{K_\nu}{J_\nu} = \frac{\int_0^1 \mu^2 j_{\nu\mu} d\mu}{\int_0^1 j_{\nu\mu} d\mu}. \quad (7.45)$$

Na okrajích prostředí (pro $\tau = \tau_{\min}$ a $\tau = \tau_{\max}$) zavedeme **povrchový Eddingtonův faktor** vztahem (viz také Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 18.3)

$$f_\nu^H \equiv \frac{\int_0^1 \mu j_{\nu\mu} d\mu}{\int_0^1 j_{\nu\mu} d\mu} \Bigg|_{\tau_{\min}, \tau_{\max}}. \quad (7.46)$$

Při řešení využijeme i kombinovanou momentovou rovnici (3.41) s Eddingtonovým faktorem (7.45)

$$\frac{d^2(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu \quad (3.41)$$

a vydatností (7.8). Okrajové podmínky získáme vynásobením rovnic (6.52) úhlovým kosinem μ a jejich integrací přes μ v intervalu od 0 do 1,

$$\left. \frac{d(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\min}} = f_\nu^H J_\nu(\tau_{\min}) - H_\nu^- \quad (7.47a)$$

$$\left. \frac{d(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\max}} = H_\nu^+ - f_\nu^H J_\nu(\tau_{\max}), \quad (7.47b)$$

kde jsme využili povrchový Eddingtonův faktor (7.46). Povrchový Eddingtonův faktor se někdy zavádí jako $f_\nu^H(\tau_{\min}) = H_\nu(\tau_{\min})/J_\nu(\tau_{\min})$ (například Hubeny and Mihalas, 2014, kapitola 12.5), který se však od definice (7.46) liší o $2 \int_0^1 \mu I_{-\mu} d\mu$.

Okrajový tok na horním okraji H_ν^- a na spodním okraji H_ν^+ dostaneme integrací $I_{\nu\mu}^-$ a $I_{\nu\mu}^+$ přes μ v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$,

$$H_\nu^- = \int_0^1 I_{\nu\mu}^- \mu d\mu \quad (7.48a)$$

$$H_\nu^+ = \int_0^1 I_{\nu\mu}^+ \mu d\mu \quad (7.48b)$$

Pro difúzní přiblížení z rovnic (7.48b) a (6.54) vyplývá vztah (srovnej s 6.10c)

$$H_\nu^+ = \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (7.49)$$

Numerické řešení rovnice (3.41) s okrajovými podmínkami (7.47) se provádí jako řešení rovnice přenosu pro Feautrierovu proměnnou (viz také Příloha C.1).

Nyní můžeme zformulovat iterační postup pro řešení celé úlohy. Nejdříve určíme vydatnost S_ν , kterou buď vezmeme z předcházejícího iteračního kroku nebo (pokud začínáme výpočet) ji položíme rovnu například Planckově funkci. V prvním iteračním kroku pro tuto zadanou vydatnost S_ν řešíme rovnici (6.50) a určíme Feautrierovu intenzitu $j_{\nu\mu}$. V dalším kroku ze známé intenzity $j_{\nu\mu}$ spočteme Eddingtonovy faktory f_ν^K a f_ν^H s využitím vztahů (7.45) a (7.46). Následuje řešení momentové rovnice přenosu (3.41) s okrajovými podmínkami (7.47) pro zadané Eddingtonovy faktory, řešením je střední intenzita záření J_ν . V závěrečném kroku určíme relativní rozdíl J_ν mezi dvěma posledními iteracemi. Pokud je tento relativní rozdíl větší než hodnota, kterou jsme vybrali jako kritérium konvergence (například 10^{-4}), určíme novou vydatnost podle rovnice (7.25) a vracíme se zpět na první krok iteračního postupu, kdy řešíme rovnici (6.50) pro $j_{\nu\mu}$ se zadanou vydatností. Pokud je kritérium konvergence splněno, končíme výpočet.

Pro metodu proměnných Eddingtonových faktorů ve sférické geometrii použijeme momentovou rovnici druhého řádu (3.47) s Eddingtonovým činitelem (7.45), faktorem (funkcí) sférickosti q_ν (3.43) a nezávislou proměnnou X_ν (3.45). Rovnici doplníme o okrajové podmínky

$$\left. \frac{d(f_\nu^K q_\nu J_\nu)}{dX_\nu} \right|_{\tau_{\min}} = r^2 [f_\nu^H J_\nu(\tau_{\min}) - H_\nu^-] \quad (7.50a)$$

$$\left. \frac{d(f_\nu^K q_\nu J_\nu)}{dX_\nu} \right|_{\tau_{\max}} = r^2 [H_\nu^+ - f_\nu^H J_\nu(\tau_{\max})] \quad (7.50b)$$

v nichž okrajové toky H_ν^\pm jsou zavedeny stejně jako v planparalelním případě vztahy (7.48), stejný je i povrchový Eddingtonův faktor (7.46). Iterační postup je identický s planparalalením případem.

Kapitola 8

Srážkové procesy

podle Pradhan and Nahar (2011, kapitoly 3 a 5)

srážka elektronu (nebo jiné částice) s atomem nebo iontem:

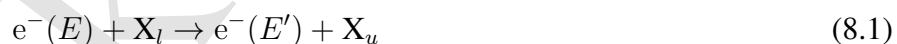
- pružná (častější)
- nepružná
 - přímé procesy
 - nepřímé procesy – mohou vést k více různým výsledkům

zajímají nás účinné průřezy procesů

8.1 Srážková excitace a deexcitace

(Pradhan and Nahar, 2011, kapitola 3.2.3)

přímá excitace ze stavu X_l do stavu X_u

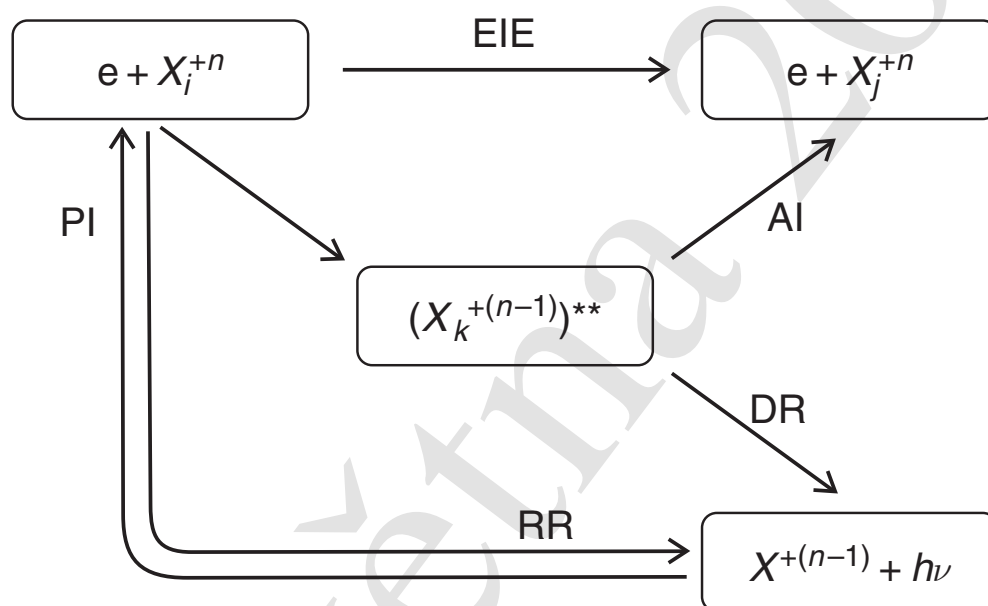


nepřímá excitace elektron v coulombickém poli při přibližování k iontu získává kinetickou energii

elektronu musí po excitaci zůstat energie k úniku, jeho energie musí být $E = \frac{1}{2}mv^2 \geq E_{lu}$

pokud po excitaci nemá dost energie k úniku, zůstane vázaný v atomu/iontu, který bude ve dvojexcitovaném stavu

poté dojde k autoionizaci (5.68) (výsledek je excitovaný stav) nebo k dielektronické rekombinaci (5.71b) (výsledek je iont s nižším nábojem – není to excitace, ale rekombinace)



Obrázek 8.1: Unified picture of dominant atomic processes in plasmas: electron impact excitation (EIE), photoionization (PI), autoionization (AI), dielectronic recombination (DR) and radiative recombination (RR). Note the often important role of resonance states in the centre, mediating atomic processes. Z (Pradhan and Nahar, 2011, obr. 3.5, str. 49) (zkopírováno 14).

8. SRÁŽKOVÉ PROCESY

(Pradhan and Nahar, 2011, kapitola 5.1)

- pro srážkovou excitaci neexistují výběrová pravidla
- **účinný průřez** (značení podle Pradhan and Nahar, 2011, rovnice 5.1)

$$\sigma(E) = \frac{\text{počet interagujících částic}}{\text{počet částic dopadajících na jednotkovou plochu}}$$

úhlově závislý, úhel rozptylu θ

elektrony rozptylovány do prostorového úhlu ϖ (kolem směru určeného rozptylovým úhlem θ , $d\varpi = \sin \theta d\theta d\phi$)

- **diferenciální účinný průřez** $d\sigma$

$$\frac{d\sigma(E, \theta)}{d\varpi} = |f(\theta)|^2$$

$f(\theta)$ – amplituda rozptylu (*scattering amplitude*)

celkový účinný průřez pro danou energii E – integrál přes všechny směry

$$\sigma(E) = \int \frac{d\sigma}{d\varpi} d\varpi$$

srážková síla (*collision strength*) Ω_{lu} , zavedl Menzel, pojmenoval Seaton (píší Pradhan and Nahar, 2011), bezrozměrná veličina

$$\sigma_{lu}(E) = \frac{\Omega_{lu}}{g_l k_l^2} (\pi a_0^2) \quad (8.2)$$

g_l – statistická váha dolní hladiny,

$E = k_l^2$ – energie dopadajícího elektronu v Rydberzích (viz kapitola B.1)

$\pi a_0^2 \approx 8.797 \cdot 10^{-17} \text{ cm}^2$, a_0 je Bohrovův poloměr

Ω_{lu} je na energii dopadajícího elektronu E jen slabě závislá (díky podělení energií dopadajícího elektronu)

přítomnost rezonancí v závislosti na energii elektronu (pro vyšší energie elektronu)

rozdílná forma pro neutrální atomy a pro ionty

$\sigma_{lu} = 0$ pro $E < E_{lu}$

kladné ionty coulombická síla (daleký dosah)

nenulový účinný průřez i pro energie trochu nižší než excitační energie (vliv přitažlivé coulombické síly, která elektron urychluje)

rezonance Rydbergova typu (hodně „ostrých“ rezonancí)

neutrální atomy účinný průřez pro $E \leq E_{lu}$ nulový

rezonance v blízkosti hraničních energií (*shape resonances*) – vlivem sil krátkého dosahu

složitější elektron-elektronové korelace (díky absenci coulombické síly)

obtížné i měření – nedá se fokusovat (zaostřit) elektronový paprsek coulombickou silou

nicméně pro nízké hladiny je poměrně dobrá shoda s teorií

nejsou v astronomii tolik důležité, většina hmoty je ionizovaná

efektivní srážková síla $\Upsilon(T)$ (Pradhan and Nahar, 2011, rovnice 5.31)

$\Omega(E)$ vystředovaná přes maxwellovské rozdělení rychlostí elektronů

$$\Upsilon(T) = \int_0^{\infty} \Omega_{lu}(E) e^{-\frac{E}{kT}} d\left(\frac{E}{kT}\right) \quad (8.3)$$

užitečná tam, kde nepotřebujeme explicitní závislost účinného průřezu na energii dopadajícího elektronu

škálování srážkové síly

$x = E/E_{ul}$ pro přechod $l \rightarrow u$

pro hladiny s LS vazbou přibližně platí (viz Pradhan and Nahar, 2011, kapitola 5.5)

- a) $\Omega(l, u) \sim \text{konst.}$ pro zakázané přechody (electrické kvadrupólové), $\Delta L \neq 1, \Delta S = 0$
- b) $\Omega(l, u) \sim x^{-2}$ pro přechody se změnou spinu $\Delta S \neq 0$
- c) $\Omega(l, u) \sim a \ln(4x)$, dovolené přechody, $\Delta L = 0, \pm 1, \Delta S = 0$
 $a \sim f_{lu}$

měření srážkové síly

nesnadné, většinou souhlasí s teoretickými výpočty na 10 – 20%

měření rezonancí je závislé na rozlišení paprsku dopadajících elektronů

data pro srážkovou excitaci v literatuře, existují „hodnocené kompilace“ (*evaluated compilations*), které kriticky hodnotí publikovaná data a doporučují nejlepší hodnoty (například Pradhan and Gallagher, 1992)

srážková deexcitace je inverzní proces ke srážkové excitaci v termodynamické rovnováze platí detailní rovnováha

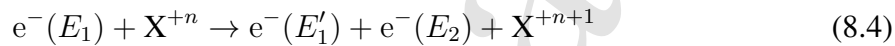
8.2 Srážková ionizace a rekombinace

(Pradhan and Nahar, 2011, kapitoly 3.2.6 a 5.8)

(Dopita and Sutherland, 2005, kapitola 5.1)

přímá ionizace iontu X^{+n} na iont X^{+n+1}

rozdílný mechanismus od excitace – problém tří těles (po interakci)



platí zákon zachování $E_1 = E'_1 + E_2 + E_{\text{ion}}$

E_1 – energie elektronu před ionizací;

E'_1 – energie ionizujícího elektronu po ionizaci;

E_2 – energie elektronu uvolněného ionizací;

E_{ion} – ionizační energie

elektrony po ionizaci korelované pro nízké energie (posrážková interakce)

ovlivňuje účinný průřez pro energie dopadajícího elektronu blízké excitační energii

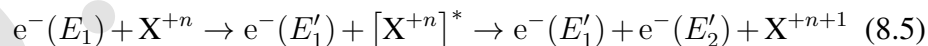
blízko ionizační hrany $\sigma \sim E^a$ (Wannierova relace), kde $a = 1.127$ pro ionizaci neutrálních atomů

přímá ionizace do vyšších hladin pro vyšší energie elektronů

zvyšuje účinný průřez

alternativní autoionizační kanál (*excitation-autoionization*)

excitace do dvakrát excitovaného stavu s následnou autoionizací (5.68)



dvojitá autoionizace (*resonant excitation double autoionization* – REDA)

v případě, že výsledný stav po excitaci-autoionizaci je znovu dvakrát excitovaný, po autoionizaci



účinný průřez teoretický popis složitější než u excitace (problém tří těles), měření snadnější než pro excitaci (pouze jeden vázaný stav)

semiempirické vztahy (například Seaton, 1964; Lotz, 1967a,b, další v Pradhan and Nahar 2011), také kapitola 9.4

srážková rekombinace je inverzní proces ke srážkové ionizaci v termodynamické rovnováze platí detailní rovnováha v mezihvězdném prostředí je zanedbatelná

8.3 Další srážkové procesy

Výměna náboje

charge transfer (Pradhan and Nahar, 2011, kapitola 3.2.7), je to výměna elektronu mezi ionty, viz také Dopita and Sutherland (2005, kapitola 5.4) nejčastější proces je reakce s neutrálním vodíkem



a v mezihvězdném prostředí i s neutrálním heliem



ΔE je přebytek energie, který přejde do kinetické energie částic

zpětná reakce je možná jen v případě, že srážející se ionty mají dostatečně velkou kinetickou energii

důležitý příklad – rezonanční výměna náboje mezi O a H – přibližně stejná ionizační energie O I a H I (rezonanční výměna náboje – *resonant charge exchange*) častý proces v oblasti nad ozonovou vrstvou Země



nerezonanční výměny náboje méně časté

výměna náboje i při srážkách s molekulami, například



účinné průřezy výměny náboje v Dopita and Sutherland (2005, kapitola 5.4)

Srážky s protony

výrazně menší účinný průřez

- proton je $1836\times$ těžší než elektron, takže $43\times$ pomalejší
- je odpuzován kladnými ionty

pro některé případy za vhodných teplot (vysokých – $kT_p \gg E_{exc}$, T_p je teplota protonů a E_{exc} je excitační energie daného přechodu) četnost může být značná

Srážky atomů a iontů s atomy nebo ionty

například excitace hladin jemné struktury neutrálních atomů srážkami s neutrálním vodíkem

srážky s protony, atomy, ionty a výměna náboje se považují za molekulární procesy

8.4 Augerovy procesy

(Pradhan and Nahar, 2011, kapitola 5.9)

- ionizace elektronu z vnitřní slupky (K) (srážkou nebo vysokoenergetickým zářením)

→ výsledkem vysoce excitovaný iont s „dírou“ v K slupce

⇒ téměř všechny elektrony excitovány

pak může následovat

- autoionizace (uvolnění elektronu spojené s vyzářením energie, viz kapitola 5.4)
- zářivý rozpad
- fluorescence (postupná deexcitace, přechod jednotlivých elektronů do nižších energetických stavů)

8. SRÁŽKOVÉ PROCESY

zářivý rozpad: foton emitovaný při přechodu elektronu do nižší slupky může způsobit další ionizaci

existuje mnoho cest k opět stabilnímu atomu

příklad: po ionizaci z K slupky následuje přechod $L \rightarrow K$, potom může nastat:

- vyražení dalšího elektronu ze slupky L
energie vyraženého elektronu (Pradhan and Nahar, 2011, rovnice 5.46)

$$\Delta E_e = h\nu(L - K) - E_{\text{IP}}(L)$$

rozdíl mezi energií přechodu $L \rightarrow K$ a ionizační energií ze slupky L
zdroj elektronů s nízkou energií

- $L \rightarrow L$ (přechod uvnitř slupky), další ionizace M (přechod uvnitř jedné slupky vyrazí elektron z jiné slupky – Costerův-Kronigův proces)
- $N \rightarrow N$ (přechod uvnitř slupky), další ionizace N (přechod uvnitř jedné slupky vyrazí elektron z téže slupky – super-Costerův-Kronigův proces)

může vzniknout ionizační kaskáda
spojeno s postupnou deexcitací (fluorescence)
pomocí zářivých i autoionizačních přechodů

Kapitola 9

Obsazení energetických hladin atomů

Pro určení schopnosti hmoty absorbovat záření je nutná znalost dvou základních informací. Je třeba znát interakční vlastnosti hmoty se zářením pro jednotlivé druhy interakcí a množství interagující hmoty, tj. kolik jednotlivých částic hmota obsahuje. Interakční vlastnosti hmoty jsme probrali v kapitole 5, zde se budeme zabývat určením množství absorbujících částic.

To je dáno hustotou hmoty, jejím chemickým složením a její ionizační a excitační rovnováhou. První dvě veličiny, tj. hustotu ρ a chemické složení (abundance), budeme v této kapitole považovat za dané. Pro zjednodušení budeme předpokládat, že hmota se skládá jen z atomů, jejich iontů a volných elektronů. Nebudeme zde tedy uvažovat molekuly a procesy vedoucí k jejich vzniku nebo disociaci ani jaderné reakce měnící jeden druh atomů na jiné. Zabývat se budeme rozdělením atomů mezi jednotlivé ionty a jejich energetické hladiny (stavy). Pro zadané chemické složení, celkovou hustotu a pro známé absorpční vlastnosti částic určuje toto rozdělení opacitu a je pro formování vystupujícího záření rozhodující. Můžeme je určit za předpokladu termodynamické rovnováhy nebo bez tohoto předpokladu.

9.1 Lokální termodynamická rovnováha

V termodynamické rovnováze platí kromě Maxwellova rozdělení rychlostí, Boltzmannova rozdělení excitačních stavů a Sahaova rozdělení ionizačních stavů také Planckovo rozdělení pro pole záření (4.45). Z pozorování hvězdných spekter ale víme, že jejich záření není popsáno rovnovážným Planckovým rozdělením a že obsahuje ionizační hrany a velké množství spektrálních čar. Proto rovnovážnou aproximaci pro pole záření můžeme těžko přijmout. Lze však předpokládat plat-

nost termodynamické rovnováhy pro hodnotu teploty T a elektronové hustoty n_e v daném místě (lokálně), přičemž se obě veličiny mohou místo od místa měnit. Lokálně platí i rovnovážné rozdělení rychlostí částic, excitačních stavů a ionizační rovnováhy. Lokálně platí i rovnováha mezi vyzářenou a pohlcenou zářivou energií (Kirchhoffův zákon, rovnice 4.54). Přenos energie mezi vzájemně vzdálenými místy atmosféry *probíhá zářením* a intenzitu záření určíme řešením rovnice přenosu záření pro vydatnost vyplývající z Kirchoffova zákona, tj. rovnou Planckově funkci ($S_\nu = B_\nu$). V lokální termodynamické rovnováze (LTE) je tedy obsazení energetických stavů atomů určeno v termodynamické rovnováze, pole záření však musíme určit řešením rovnice přenosu záření.

9.1.1 Podmínky pro lokální termodynamickou rovnováhu a jejich porušení vlivem záření

V termodynamické rovnováze je četnost, kterou probíhá libovolný proces, stejná jako četnost, kterou probíhá proces k němu opačný. Této vlastnosti se říká *detailní rovnováha*. V termodynamické rovnováze musí platit detailní rovnováha jak pro srážkové, tak i pro zářivé procesy.

Zda hmota bude splňovat podmínky termodynamické rovnováhy či nikoli, závisí na četnostech jednotlivých interakcí vzájemně mezi částicemi a na četnostech interakcí mezi částicemi a zářením. *Pružné srážky* mezi částicemi ustavují rovnovážné rozdělení rychlostí. Celková kinetická energie srážejících se částic se při pružných srážkách zachovává a dochází pouze k přerozdělení hybnosti mezi nimi. Pružné srážky vedou k ustavení rovnovážného rozdělení rychlostí. Při *nepružných srážkách* mezi částicemi je část kinetické energie přeměněna na vnitřní energii částic (excitace) nebo naopak, vnitřní energie částic je přeměněna na kinetickou (deexcitace). Při nepružných srážkách může také dojít k vyrazení elektronu z iontu (ionizace) nebo k jeho zachycení (rekombinace). Při všech těchto procesech může dojít k porušení rovnovážného rozdělení rychlostí. Ve většině astronomických aplikací je frekvence pružných srážek vyšší než frekvence nepružných srážek, což zaručuje zachování rovnovážného rozdělení rychlostí. Proto můžeme považovat rozdělení rychlostí částic za rovnovážné. Pro rovnovážné rozdělení rychlostí vedou nepružné srážky k ustavení rovnovážného rozdělení i pro vnitřní energii částic. Rozdělení do excitačních a ionizačních stavů je tedy vlivem nepružných srážek také rovnovážné. Jednotlivé excitační a ionizační procesy jsou v detailní rovnováze.

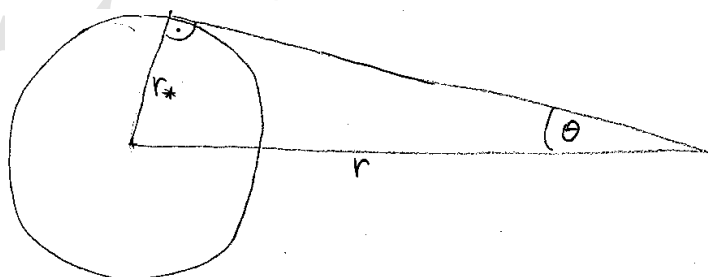
Pokud pole záření není rovnovážné, což je případ hvězdných atmosfér i jiných vesmírných objektů, interakce mezi hmotou a zářením (těmto interakcím říkáme často zkráceně *zářivé procesy*) obecně v detailní rovnováze nejsou. Tyto procesy mají tendenci narušovat ionizační a excitační rovnováhu. Naopak srážkové exci-

tace, deexcitace, ionizace a rekombinace (zkráceně často *srážkové procesy*) mají tendenci ionizační a excitační rovnováhu ustavovat. Mezi srážkové procesy počítáme i zářivou rekombinaci (jde o interakci fotonu, iontu a elektronu, poslední dvě částice se “srazí”) a volně-volné přechody (jde vlastně o srážku iontu a elektronu).

Lokální a nelokální pole záření V případě, že pole záření má rovnovážné rozdělení, jsou i zářivé procesy v detailní rovnováze. V hlubokých vrstvách hvězdných atmosfér, kde pro šíření záření můžeme použít difúzní přiblížení (viz kapitola 6.1), je odchylka pole záření od rovnovážného stavu poměrně malá. Proto v této oblasti zářivé procesy nenarušují příliš lokální termodynamickou rovnováhu a tato je pro popis této oblasti poměrně vhodná.

Pokud však difúzní přiblížení neplatí, získáme pole záření řešením rovnice přenosu záření. Takové záření již není rovnovážné a tím i přiblížení lokální termodynamické rovnováhy není vhodné. Další vlastností takového záření (nejen ve hvězdných atmosférách) je jeho nelokálnost. Díky nezanedbatelné střední volné dráze fotonu nelze záření považovat za lokální veličinu. Zářením mohou být propojena místa od sebe velmi vzdálená. Tím se může snadno stát, že teplota záření v daném místě (daná teplotou vystupující v Planckově funkci 4.45) může být dosti různá od lokální elektronové teploty (dané Maxwellovým rozdělením rychlostí 4.13). Záření může způsobovat ohřev nebo ochlazování.

Anizotropie záření ve hvězdných atmosférách Záření vycházející z hvězd a z jiných vesmírných objektů musí být vně těchto objektů anizotropní. Tuto anizotropii můžeme charakterizovat geometrickou veličinou nazývanou *faktor zředění* (*dilution factor*) a označovanou W . Z každého bodu vně hvězdy je hvězda vidět pod prostorovým úhlem $\varpi_* < 4\pi$. Tento úhel použijeme pro definici faktoru



Obrázek 9.1: Schéma pro výpočet faktoru zředění (r_* je poloměr hvězdy, r je vzdálenost od středu hvězdy)

zředění,

$$W = \frac{\varpi_*}{4\pi}. \quad (9.1)$$

Je-li r_* je poloměr zářícího povrchu hvězdy a r je vzdálenost k pozorovateli od středu hvězdy, můžeme vyjádřit prostorový úhel jako $\varpi_* = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\theta \sin \theta' d\theta' = 2\pi(1 - \cos \theta)$, přičemž $\sin \theta = r_*/r$ (viz obrázek 9.1). Odtud dostaneme pro faktor zředění vztah

$$W = \frac{1}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{r_*}{r}\right)^2} \right] \quad (9.2)$$

Na povrchu hvězdy ($r = r_*$) je faktor zředění $W = \frac{1}{2}$.

Faktor zředění můžeme použít pro přibližné vyjádření střední intenzity záření i ve hvězdných atmosférách, protože v nich platí, že $r > r_*$. V nich je vždy $W < \frac{1}{2}$, s rostoucí vzdáleností od povrchu hvězdy W klesá. V planetárních mlhovinách ozařovaných centrální hvězdou je $W \ll 1$. Pro termodynamickou rovnováhu však potřebujeme $W = 1$, aby záření mělo rovnovážnou hodnotu. Anizotropie záření rovněž významně přispívá k nekorektnosti předpokladu lokální termodynamické rovnováhy.

Rozdělení rychlostí elektronů Jelikož dominantní zastoupení ve hvězdných atmosférách mají volné elektrony, je základní podmínkou pro použitelnost lokální termodynamické rovnováhy lokální platnost rovnovážného (Maxwellova) rozdělení jejich rychlostí. Ta bude zajištěna, pokud budou pružné srážky mezi elektrony převažovat nad nepružnými. Nepružné srážky (vázaně-vázané, vázaně-volné a volně-volné srážkové atomární přechody) sice nastavují rovnováhu v excitaci a ionizaci (Sahovo-Boltzmannovo rozdělení), ale za cenu porušení rovnovážného rozdělení rychlostí. Pokud však mezi dvěma nepružnými srážkami bude dostatek pružných, rovnovážné rozdělení rychlostí se vrátí zpět. Tato podmínka naštěstí ve hvězdných atmosférách platí. **Relaxační doba** (doba potřebná k obnovení rovnovážného rozdělení rychlostí) je mnohem menší než časový interval mezi dvěma následujícími nepružnými srážkami. Existují však situace, kdy je elektronů méně nebo kdy dochází k velkým odchýlkám od Maxwellova rozdělení (například na Slunci v případě elektronových svazků v erupcích). V těchto případech je třeba řešit Boltzmannovu kinetickou rovnici pro elektrony (např. Chevalier, 2001; Scudder, 1992, 1994; Shoub, 1977a,b).

Neplatnost lokální termodynamické rovnováhy Rozhodující informací pro to, jestli je aproximace lokální termodynamické rovnováhy pro dané prostředí

Tabulka 9.1: Schematická tabulka vyjadřující určení rozdělení záření, rychlostí, excitací a ionizací za předpokladu termodynamické rovnováhy (TE), lokální termodynamické rovnováhy (LTE) a předpokladu NLTE. Zpracováno podle Hubený (1976, kapitola 6).

	rychlosti	ionizace a excitace (obsazení energetických hladin)	záření
TE	rovnovážné (Maxwellovo rozdělení)	rovnovážné (Sahovo a Boltzmannovo rozdělení)	rovnovážné (Planckovo rozdělení)
LTE	rovnovážné (Maxwellovo rozdělení)	rovnovážné (Sahovo a Boltzmannovo rozdělení)	řešením rovnice přenosu záření, vydatnost $S = B$
NLTE	rovnovážné (Maxwellovo rozdělení)	řešením rovnic kinetické (statistické) rovnováhy	řešením rovnice přenosu záření, vydatnost S je obecná

vhodná, je porovnání účinnosti srážkových a zářivých procesů při ionizaci, excitaci a deexcitaci. Ukazuje se (viz například rozsáhlou diskusi v učebnici Mihalas, 1978), že zejména pro atmosféry horkých hvězd je účinnost zářivých procesů velmi vysoká. Proto není lokální termodynamická rovnováha pro studium hvězdných atmosfér obecně přijatelná aproximace.

Úlohou této kapitoly bude zavést metodu, která umožní určit rozdělení excitačních a ionizačních stavů v případě, že zářivé procesy jsou významné a nelze je jednoduše zanedbat. Pro určení excitační a ionizační rovnováhy nebude stačit použít poměrně jednoduché Sahovo-Boltzmannovo rozdělení, ale bude nutné řešit **rovnice kinetické rovnováhy** (často nazývané rovnice statistické rovnováhy), v nichž je zahrnut i vliv záření.

Pro studium interakce hmoty se zářením v případech, že nelze použít přiblížení lokální termodynamické rovnováhy (LTE) se v literatuře běžně používá označení **non-LTE** nebo **NLTE**. Toto označení někdy může vést k nesprávným interpretacím fyzikálního stavu, protože zejména zkratka non-LTE přímo vyzývá k použití nesprávného slovního spojení „nelokální termodynamická rovnováha“ (non-local thermodynamic equilibrium). Tento název však nepopisuje skutečnost správně, protože termodynamická rovnováha pro rozdělení excitačních a ionizačních stavů neexistuje (ani lokální, ani nelokální), ale je nahrazena kinetickou (statistickou) rovnováhou. Zkratky non-LTE a NLTE je lépe chápat jako označení *jakékoli* odchylky od předpokladu lokální termodynamické rovnováhy (viz Hubený and Mihalas, 2014, kapitola 9.1). Fyzikální obsah obsah pojmů TE, LTE a NLTE je stručně popsán v tabulce 9.1.

9.2 Rovnice kinetické rovnováhy

Z rovnic pro časový vývoj matice hustoty (viz například Cooper et al., 1982) vyplývá, že pokud budeme uvažovat pouze čisté stavy (tj. její diagonální členy), tak pro změnu koncentrace částic ve stavu i každého atomu (nebo molekuly) v atmosféře platí

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) = \sum_{j \neq i} (n_j P_{ji} - n_i P_{ij}), \quad (9.3)$$

kde P_{ij} je **četnost přechodu** (*transition rate*) ze stavu i do stavu j a je úměrná pravděpodobnosti přechodu ze stavu i do stavu j za jednotku času. Sečtením (9.3) přes všechny energetické stavy prvku k dostaneme rovnici kontinuity pro prvek k (N_k je jeho koncentrace),

$$\frac{\partial N_k}{\partial t} + \nabla \cdot (N_k \mathbf{v}) = 0. \quad (9.4)$$

Vynásobíme-li rovnici (9.4) hmotností m_k jednotlivých prvků a sečteme-li přes všechna k , dostaneme rovnici kontinuity,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (9.5)$$

kde hustota $\rho = \sum_k m_k N_k$.

V časově nezávislém případě ($\partial/\partial t = 0$) se rovnice (9.3) zjednoduší na tvar

$$\nabla \cdot (n_i \mathbf{v}) = \sum_{j \neq i} (n_j P_{ji} - n_i P_{ij}) \quad (9.6)$$

a ve statickém případě ($\mathbf{v} = 0$) na

$$\sum_{j \neq i} (n_j P_{ji} - n_i P_{ij}) = \sum_{j \neq i} n_j P_{ji} - n_i \sum_{j \neq i} P_{ij} = 0. \quad (9.7)$$

Poznamenejme ještě, že detailní rovnováha nastane, když pro každé i, j platí $n_j P_{ji} = n_i P_{ij}$. V další části se budeme zabývat otázkou určení četností přechodu P_{ij} . Jak jsme zmínili v předcházející diskusi, přechody mezi jednotlivými stavy mohou být způsobeny zářením (četnosti označíme R_{ij}) nebo srážkami s jinými částicemi (četnosti označíme C_{ij}), přičemž platí

$$P_{ij} = R_{ij} + C_{ij}. \quad (9.8)$$

Odchylky od LTE populací, *b*-faktory

Řešením rovnic kinetické rovnováhy získáme koncentrace atomů v daných energetických stavech, které obecně nebudou rovnovážné. Odchylku od rovnovážných hodnot často popisujeme pomocí veličiny zvané *koeficient odchylky* (*departure coefficient*)¹, častěji však s ohledem na její ustálené značení *b*-faktor. Tato veličina je pro hladinu *l* zavedena vztahem

$$b_l = \frac{n_l}{n_l^*} \quad (9.9)$$

kde n_l je nerovnovážná hodnota koncentrace l a n_l^* je její rovnovážná hodnota. Používají se dvě odlišné definice závislé na tom, jak se chápe hodnota n_l^* . Menzel (1937) zavedl *b*-faktory jako odchylku od termodynamické rovnováhy. V tomto pojetí je n_l^* koncentrace atomu ve stavu l , která by byla za předpokladu termodynamické rovnováhy. Mihalas (1978) naopak používá definici (5.22), podle níž je n_l^* určeno ze Sahovy a Boltzmannovy rovnice vzhledem k aktuálnímu obsazení základní hladiny nejbližšího vyššího iontu, které nemusí mít rovnovážnou hodnotu. Tato druhá definice sice nevystihuje změnu, ke které dojde při opuštění předpokladu LTE, ale má široké využití v modelování hvězdných atmosfér.

9.3 Četnost zářivých přechodů

V této části se budeme zabývat pravděpodobnostmi přechodů mezi dvěma energetickými stavy atomu způsobenými zářením. Takovým přechodům se běžně říká *zářivé přechody* (*radiative transitions*).

Absorbovaná energie při přechodech (absorpcích) ze stavu l s nižší energií do stavu m (vázaného i volného) s vyšší energií způsobených zářením o intenzitě I_ν ve frekvenčním intervalu $d\nu$ z prostorového úhlu $d\varpi$ je $n_l \alpha_{lm}(\nu) I_{n,\nu} d\nu d\varpi$, kde $\alpha_{lm}(\nu)$ absorpční účinný průřez přechodu $l \rightarrow m$ (5.41) a n_l je koncentrace částic ve stavu l . Protože nás zajímá celkový efekt způsobený zářením dopadajícím ze všech směrů, zintegrujeme výraz přes úhly a pro monochromatickou absorbovanou energii dostaneme $n_l 4\pi \alpha_{lm}(\nu) J_\nu d\nu$. Počet přechodů dostaneme podělením energií fotonu. Celkový počet přechodů $l \rightarrow m$ za jednotku času pak získáme integrací přes frekvence

$$n_l R_{lm} = n_l 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lm}(\nu)}{h\nu} J_\nu d\nu, \quad (9.10)$$

kde jsme zavedli veličinu R_{lm} jako *četnost zářivého přechodu* (*radiation transition rate*) $l \rightarrow m$. Vztahy pro inverzní procesy $m \rightarrow l$ se budou lišit v závislosti

¹Dopita and Sutherland (2005, rovnice 5.13) používají označení occupation factor.

na tom, jestli se jedná o přechod do vázaného nebo do volného stavu, proto obě možnosti probereme odděleně.

9.3.1 Vázaně-vázané přechody

Absorpční přechody Četnost absorpcí v čáře při přechodu z vázaného stavu l s nižší energií do vázaného stavu u s vyšší energií označíme R_{lu} . Počet přechodů v jednotkovém objemu $n_l R_{lu}$ je dán vztahem (9.10) a dostaneme ho také z rovnice (5.1) integrací přes $d\tau$ a $d\nu$ a s využitím (5.13),

$$n_l R_{lu} = n_l B_{lu} \int_0^\infty \phi_\nu J_\nu d\nu = n_l 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} J_\nu d\nu, \quad (9.11)$$

kde ϕ_ν je profil čáry (viz kapitola 5.3). Pomocí integrované střední intenzity v přechodu $l \leftrightarrow u$ (srovnej s 6.23)

$$\bar{J}_{lu} = \int_0^\infty \phi_\nu J_\nu d\nu \quad (9.12)$$

můžeme celkovou četnost absorpcí v čáře vyjádřit také jako

$$n_l R_{lu} = n_l B_{lu} \bar{J}_{lu}. \quad (9.13)$$

Integrál absorpčního průřezu přes frekvence označíme α_{lu} . S využitím faktu, že plná šířka v polovině maxima absorpčního profilu je mnohem menší než frekvence přechodu, můžeme nahradit frekvenci v integrálu přes profil její hodnotou pro střed čáry $h\nu_{lu}$, čímž dostaneme

$$\alpha_{lu} = \int_0^\infty \alpha_{lu}(\nu) d\nu = \int_0^\infty \frac{h\nu}{4\pi} B_{lu} \phi(\nu) d\nu \approx \frac{h\nu_{lu}}{4\pi} B_{lu}. \quad (9.14)$$

Pak můžeme vyjádřit celkovou četnost absorpcí v jednotkovém objemu *přibližně* také jako (viz Mihalas, 1978, rovnice 5-53),

$$n_l R_{lu} \approx n_l 4\pi \alpha_{lu} \frac{\bar{J}_{lu}}{h\nu_{lu}}. \quad (9.15)$$

Vztahy (9.11), (9.13) a (9.15) jsou jen různými vyjádřeními pro četnost zářivých excitací v jednotkovém objemu.

Emisní přechody Pro určení četnosti emisí musíme uvážit dva způsoby emise, spontánní emisi a stimulovanou emisi. Celkovou četnost stimulovaných emisí získáme s využitím (5.8b) podobně jako vztah (9.11)

$$\begin{aligned} n_u R_{ul}^{\text{stim}} &= n_u B_{ul} \int_0^\infty \phi_\nu J_\nu d\nu \\ &= n_u \frac{g_l}{g_u} B_{lu} \int_0^\infty \phi_\nu J_\nu d\nu = n_u \frac{g_l}{g_u} 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} J_\nu d\nu \end{aligned} \quad (9.16)$$

nebo pomocí (9.12) také jako

$$n_u R_{ul}^{\text{stim}} = n_u B_{ul} \bar{J}_{lu} = n_u \frac{g_l}{g_u} B_{lu} \bar{J}_{lu}, \quad (9.17)$$

případně pomocí (9.14) získáme přibližný vztah

$$n_u R_{ul}^{\text{stim}} \approx n_u \frac{4\pi}{h\nu_{lu}} \frac{g_l}{g_u} \alpha_{lu} \bar{J}_{lu}. \quad (9.18)$$

Podobně dostaneme i celkovou četnost spontánních emisí

$$n_u R_{ul}^{\text{spont}} = n_u A_{ul} = n_u \frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} B_{ul} = n_u \frac{g_l}{g_u} \frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} B_{lu} \quad (9.19)$$

Výraz $(2h\nu_{lu}^3)/c^2$ můžeme vsunout pod integrál profilu ϕ_ν přes frekvence (který je roven 1) a opět s využitím faktu, že plná šířka čáry v polovině maxima profilu je mnohem menší než její frekvence, můžeme provést záměnu $\nu_{lu} \rightarrow \nu$. Po úpravách dostaneme

$$\begin{aligned} n_u R_{ul}^{\text{spont}} &= n_u A_{ul} \int_0^\infty \phi_\nu d\nu \approx n_u B_{ul} \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \phi_\nu d\nu \\ &= n_u \frac{g_l}{g_u} B_{lu} \int_0^\infty \frac{2h\nu^3}{c^2} \phi_\nu d\nu = n_u \frac{g_l}{g_u} 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} \frac{2h\nu^3}{c^2} d\nu \end{aligned} \quad (9.20)$$

případně pomocí (9.14) také přibližně jako

$$n_u R_{ul}^{\text{spont}} \approx n_u \frac{4\pi}{h\nu_{lu}} \frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} \frac{g_l}{g_u} \alpha_{lu}. \quad (9.21)$$

Celkovou četnost emisí dostaneme jako součet stimulovaných emisí (9.17) a spontánních emisí (9.21)

$$n_u R_{ul} = n_u (A_{ul} + B_{ul} \bar{J}_{lu}), \quad (9.22)$$

případně pomocí (9.16) a (9.20) jako

$$n_u R_{ul} \approx n_u \frac{g_l}{g_u} 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_\nu \right) d\nu \quad (9.23)$$

Mihalas (1978) dává přednost využití Boltzmannovy excitační rovnice (4.5), s jejíž pomocí lze vztah (9.23) přepsat

$$n_u R_{ul} \approx n_u \left(\frac{n_l}{n_u} \right)^* 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_\nu \right) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu. \quad (9.24)$$

Jak uvidíme dále, tato forma je stejná jako vztah pro četnost rekombinací (9.33).

9.3.2 Vázaně-volné přechody

V této části se budeme zabývat přechody mezi vázanými stavy l a volnými stavy k daného atomu.

Fotoionizace Pro fotoionizaci atomu z vázaného stavu l (s nižší energií) do volného stavu k (s vyšší energií) ze vztahu (9.10) dostáváme

$$n_l R_{lk} = n_l 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{bflk}}(\nu)}{h\nu} J_\nu d\nu, \quad (9.25)$$

kde $\alpha_{\text{bflk}}(\nu)$ je odpovídající fotoionizační absorpční účinný průřez, který můžeme pro frekvence menší než ionizační hrana ν_{0lk} položit rovný 0.

Fotorekombinace Pro odvození vztahu pro četnost fotorekombinačních přechodů využijeme výsledky z kapitoly 5.1.2. Při rekombinaci dochází k zachycení elektronu iontem, jedná se tedy v podstatě o srážkový proces. Napíšeme nejdříve četnost fotorekombinačních přechodů pro případ termodynamické rovnováhy. V tomto případě je střední intenzita záření rovna Planckově funkci ($J_\nu = B_\nu$) a kvůli platnosti detailní rovnováhy je celkový počet fotoionizací stejný jako celkový počet rekombinací²,

$$(n_k R_{kl})^* = (n_l R_{lk})^* = n_l^* 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{bflk}}(\nu)}{h\nu} B_\nu d\nu. \quad (9.26)$$

Pravou stranu můžeme přepsat odečtením a přičtením členu obsahujícího $\exp[-h\nu/(kT)]$,

$$(n_k R_{kl})^* = n_l^* 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{bflk}}(\nu)}{h\nu} B_\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] d\nu + n_l^* 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{bflk}}(\nu)}{h\nu} B_\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu. \quad (9.27)$$

První člen na pravé straně odpovídá spontánní rekombinaci (srovnej s rovnicí 5.20, která je psaná pro energii), druhý stimulované rekombinaci. Četnost *spontánních rekombinací v termodynamické rovnováze* získáme z rovnice (5.20) zobecněné pro libovolnou hladinu l , jejím vydělením energií fotonu $h\nu$ a integrací přes frekvence

$$(n_k R_{kl})^*_{\text{spont}} = n_l^* 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{bflk}}(\nu)}{h\nu} B_\nu \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] d\nu, \quad (9.28)$$

²Hvězdička označuje rovnovážné hodnoty.

což je přesně první člen na pravé straně rovnice (9.27). Pomocí Planckovy funkce (4.45) můžeme upravit

$$(n_k R_{kl})_{\text{spont}}^* = n_l^* 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{bflk}}(\nu)}{h\nu} \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu. \quad (9.29)$$

Jelikož rekombinace je srážkový proces zahrnující elektrony a ionty, je jeho četnost úměrná součinu $n_e n_k$. Pro danou teplotu T (a tím i rozdělení rychlostí) vztah platí po vydělení n_k^* pro jeden iont bez ohledu na předpoklad termodynamické rovnováhy. Proto pro získání počtu spontánních rekombinací v obecném případě stačí vynásobit rovnici (9.29) podílem n_k/n_k^* .

$$(n_k R_{kl})_{\text{spont}} = n_k \left(\frac{n_l^*}{n_k^*}\right) 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{bflk}}(\nu)}{h\nu} \frac{2h\nu^3}{c^2} \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu. \quad (9.30)$$

Stimulovaná rekombinace v termodynamické rovnováze je dána druhým členem na pravé straně rovnice (9.27),

$$(n_k R_{kl})_{\text{stim}}^* = n_l^* 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{bflk}}(\nu)}{h\nu} B_\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu. \quad (9.31)$$

Počet stimulovaných rekombinací v obecném případě dostaneme opět vynásobením rovnice (9.31) podílem n_k/n_k^* a nahrazením rovnovážné hodnoty intenzity záření (Planckovy funkce) aktuální hodnotou střední intenzity záření J_ν ,

$$(n_k R_{kl})_{\text{stim}} = n_k \left(\frac{n_l^*}{n_k^*}\right) 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{bflk}}(\nu)}{h\nu} J_\nu \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu \quad (9.32)$$

Výslednou četnost rekombinačních přechodů dostaneme sečtením rovnic (9.30) a (9.32),

$$\begin{aligned} n_k R_{kl} &= n_k (R_{kl,\text{spont}} + R_{kl,\text{stim}}) \\ &= n_k \underbrace{\left(\frac{n_l^*}{n_k^*}\right)}_{n_e \Phi_{lk}(T)} 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{\text{bflk}}(\nu)}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_\nu\right) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu \end{aligned} \quad (9.33)$$

Podíl $n_l^*/n_k^* = n_e \Phi_{lk}(T)$, což je rovnice (4.23), v níž je Φ_{lk} jinak označený Sahův-Boltzmannův faktor (4.24). Rekombinace tedy závisí na elektronové hustotě n_e , na hustotě iontů n_k a na zbytku, který je funkcí teploty. Ten označíme $\alpha_R(T)$ a budeme mu říkat **rekombinační koeficient**,

$$n_k R_{kl} = n_k n_e \alpha_R(T). \quad (9.34)$$

Rekombinační koeficient se často používá při formulaci rovnic kinetické rovnováhy pro prostředí mlhovin.

Kromě výše zmíněných ionizací a rekombinací mohou hrát důležitou úlohu v ionizační rovnováze složitější procesy autoionizace a dielektronové rekombinace (viz kapitola 5.4), jejichž započtení do četností zářivých procesů zde však nebudeme rozebírat.

9.3.3 Celková četnost zářivých přechodů

Ze vztahů (9.11) a (9.25) dostáváme pro počet absorpcí (přechodů z nižšího (l) do vyššího (u) energetického stavu) v jednotkovém objemu výraz $n_l R_{lu}$, kde četnost

$$R_{lu} = 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} J_\nu d\nu. \quad (9.35a)$$

Podobně ze vztahů (9.24) a (9.33) dostaneme pro počet emisí (přechodů z vyššího (u) do nižšího (l) energetického stavu) v jednotkovém objemu výraz $n_u (n_l^*/n_u^*) R_{ul}$, kde četnost

$$R_{ul} = 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_\nu \right) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu. \quad (9.35b)$$

9.4 Četnost srážkových přechodů

Atomy mohou přecházet mezi svými jednotlivými energetickými stavy také vlivem srážek s jinými částicemi, například s elektrony, atomy nebo molekulami. Srážky s těžšími částicemi jsou méně časté. Kromě toho je i poměr tepelné rychlosti elektronů k tepelné rychlosti iontů $v_{th,e}/v_{th,i} \approx 43\sqrt{A}$. Proto se můžeme v prvním přiblížení omezit pouze na nepružné srážky s elektrony.

Pro četnost *excitačního nebo ionizačního srážkového přechodu* (přechodu ze stavu o nižší energii do stavu o vyšší energii) můžeme psát (abychom předešli používání stejných písmen pro různé veličiny, budeme v této podkapitole horní hladinu přechodu místo u značit m)

$$n_l C_{lm} = n_l n_e \int_{v_0}^\infty \sigma_{lm}(v) f(v) v dv \quad (9.36)$$

kde $\sigma_{lm}(v)$ je účinný průřez srážkového přechodu $l \rightarrow m$ (je funkcí rychlosti elektronu) a $f(v)$ je rozdělení rychlostí elektronů. Zavedeme-li *koeficient srážkové četnosti* (*collisional rate coefficient*, Pradhan and Nahar, 2011, kapitola 8.1.1),

$$q_{lm}(T) = \int_{v_0}^\infty \sigma_{lm}(v) f(v) v dv \quad (9.37)$$

který dostaneme integrací účinného průřezu přes rovnovážné (Maxwellovo) rozdělení rychlostí elektronů, můžeme četnost srážkového excitačního nebo ionizačního přechodu zapsat jako

$$C_{lm} = n_e q_{lm}(T). \quad (9.38)$$

Pro četnost srážkového deexcitačního a rekombinačního přechodu v případě termodynamické rovnováhy platí podmínka detailní rovnováhy (n_l^* , n_m^* značí rovnovážné hodnoty koncentrací)

$$n_m^* C_{ml} = n_l^* C_{lm}, \quad (9.39)$$

z níž dostaneme pro četnost srážkového deexcitačního a rekombinačního přechodu vztah

$$n_m C_{ml} = n_m \left(\frac{n_l^*}{n_m^*} \right) C_{lm}. \quad (9.40)$$

Samotnou deexcitační a rekombinační srážkovou četnost můžeme vyjádřit pomocí koeficientu srážkové četnosti,

$$C_{ml} = \left(\frac{n_l^*}{n_m^*} \right) n_e q_{lm}(T). \quad (9.41)$$

Problémem ve výpočtu srážkových četností je určení účinného průřezu σ_{lm} . V zásadě existují dva způsoby určení, buď experimentálně nebo s použitím kvantově mechanických výpočtů. Ve většině astronomických aplikací nás zajímá spíše hodnota středovaná přes maxwellovské rozdělení ($q_{lm}(T)$) než $\sigma_{lm}(v)$ jako funkce rychlosti elektronů.

Určení koeficientu srážkové četnosti Srážkový účinný průřez závisí na energii dopadajícího fotonu a často se vyjadřuje jako funkce πa_0^2 (a_0 je Bohrov poloměr) ve tvaru $\sigma_{lm} = \pi a_0^2 Q_{lm}$. Veličina Q_{lm} je často tabelována jako funkce kinetické energie dopadající částice $E = \frac{1}{2}mv^2$. Někdy se místo Q používá veličina Ω (rovnice 8.2), kde se pro vyjádření energie používají Rydbergy.

Dosadíme za rychlost do (9.37) a za $f(v)$ použijeme maxwellovské rozdělení rychlostí (4.13). Po úpravách dostaneme vztah

$$q_{lm}(T) = C_0 \sqrt{T} \int_{u_0}^{\infty} Q_{lm}(ukT) u e^{-u} du, \quad (9.42)$$

kde $u = E/(kT)$, $C_0 = \pi a_0^2 \sqrt{8kT/(m\pi)} \doteq 5.5 \cdot 10^{-11}$ a $u_0 = E_{lm}/(kT)$ odpovídá energii přechodu $l \leftrightarrow m$. Zavedeme-li $x = u - u_0$, můžeme převést rovnici (9.42) na tvar

$$q_{lm}(T) = C_0 \sqrt{T} \exp\left(-\frac{E_0}{kT}\right) \Gamma_{lm}(T) \quad (9.43)$$

kde

$$\Gamma_{lm}(T) = \int_0^{\infty} Q_{lm}(E_0 + xkT)(x + u_0)e^{-x} dx \quad (9.44)$$

je pomalu se měnící funkce T . Koeficient srážkové četnosti lze také vyjádřit pomocí efektivní srážkové síly (8.3), která využívá vyjádření energií v Rydberzích (viz Pradhan and Nahar 2011, rovnice 5.32 a Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 9.57),

$$q_{lm}(T) = \frac{8.63 \times 10^{-6}}{g_l \sqrt{T}} \exp\left(-\frac{E_{lm}}{kT}\right) \Upsilon(T). \quad (9.45)$$

Hodnoty Υ jsou často tabelovány, jejich použití je pak jednoduché. Pro některé ionty (například H I, He I, He II) jsou dostupná měření. V těchto případech je možné na základě měřených dat zformulovat přibližné analytické závislosti.

Přibližné vztahy pro excitace a ionizace Pro dovolené vázaně vázané srážkové přechody lze použít přibližný výraz (van Regemorter 1962, viz také Mihalas 1978, rovnice 5.75 a Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 9.58)

$$q_{lm} = C_0 \sqrt{T} \left[14.5 f_{lm} \left(\frac{I_H}{E_0} \right)^2 \right] u_0 e^{-u_0} \Gamma(u_0), \quad (9.46)$$

kde I_H je ionizační energie vodíku,

$$\Gamma(u_0) = \max \left[\bar{g}, \frac{\sqrt{3}}{2\pi} e^{u_0} E_1(u_0) \right], \quad (9.47)$$

E_1 je exponenciální integrální funkce (viz Příloha A.1) a

$$\begin{aligned} \bar{g} &= 0.7 & nl &\rightarrow nl' \\ &= 0.2 & nl &\rightarrow n'l'. \end{aligned} \quad (9.48)$$

Pro ionizační srážkové přechody lze použít přibližný výraz nazývaný Seatonův, který je založen na Seatonově aproximaci účinného průřezu Q_{lk} (Seaton, 1962, rovnice (147)) a který je uveden i s odvozením v Jefferies (1968, rovnice 6.39) a bez odvození v Mihalas (1978, rovnice 5-79) a Hubeny and Mihalas (2014, rovnice 9.60),

$$q_{lk} = 1.55 \cdot 10^{13} \frac{1}{\sqrt{T}} \bar{g}_l \alpha_{\text{bf}}(\nu_0) \frac{e^{-u_0}}{u_0} \quad (9.49)$$

kde

$$\begin{aligned} \bar{g}_l = 0.1 & \quad \text{pro } Z = 1 \\ & \quad 0.2 \quad \quad Z = 2 \\ & \quad 0.3 \quad \quad Z > 2 \end{aligned} \quad (9.50)$$

Další vztahy pro srážkové excitace ionizace a odkazy na ně lze najít v učebnici Hubeny and Mihalas (2014, kapitola 9.3) a především v Pradhan and Nahar (2011, kapitola 5).

9.5 Soustava rovnic kinetické rovnováhy

V předcházející části jsme uvažovali přechody mezi jednotlivými hladinami atomů a jejich iontů. Neuvažovali jsme molekuly, jejich vznik a zánik, ani jaderné reakce. Při tomto zanedbání částice mohou tedy měnit ionizační a energetický stav, zůstávají ale stále stejnými atomy.

Pro každý prvek (atom k) uvažujeme L_k energetických stavů. Pro každý energetický stav (hladinu i , $i = 1, \dots, L_k$, iontu j prvku k) můžeme napsat rovnici (indexy iontu j zde nevypisujeme)

$$n_i \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{L_k} (R_{im} + C_{im}) - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{L_k} n_m (R_{mi} + C_{mi}) = 0 \quad (9.51)$$

vyplývající z rovnic (9.7) a (9.8). Rovnice (9.51) svazují uvažované energetické stavy pro každý atom k odděleně, přičemž platí $\sum_k L_k = L$, kde L je celkový počet uvažovaných energetických hladin všech atomů dohromady. Sečtením rovnic (9.51) přes i (všechny hladiny $1, \dots, L_k$) dostaneme $0 = 0$, jedná se tedy pro každý atom k o lineárně závislé rovnice. Abychom mohli z těchto rovnic určit obsazení energetických hladin, musíme soustavu doplnit nějakou další nezávislou rovnicí. Rovnice (9.51) nám určují, kolik částic přejde z jednoho stavu do jiného, ale neurčují, kolik atomů k je k dispozici. K vyřešení soustavy potřebujeme znát, jaká část celkové hmoty připadá na atom k .

To vyjádříme pomocí abundancí a celkové hustoty. Podobně jako v kapitole 4.3.1 použijeme relativní abundance $\tilde{\alpha}_k$. Celkovou koncentraci libovolného prvku k vyjádříme vztahem (4.32) $N_k = \tilde{\alpha}_k \tilde{N}_N$, kde \tilde{N}_N je stejně jako v kapitole 4.3.1 celková koncentrace všech atomů a iontů všech typů. N_k označuje koncentraci atomů k . Vyjádříme-li ji jako součet koncentrací všech hladin (všech iontů) atomu k , dostaneme

$$\sum_{m=1}^{L_k} n_m = \tilde{\alpha}_k \tilde{N}_N \quad (9.52a)$$

což je požadovaná doplňující rovnice soustavy (9.51). Často se místo celkové koncentrace všech atomů a iontů používá v této rovnici koncentrace nějakého referenčního prvku, nejčastěji vodíku. Použijeme-li rovnici (4.32) pro vodík, máme $N_H = \tilde{\alpha}_H \tilde{N}_N$. Dosazením za \tilde{N}_N do (9.52a) dostaneme

$$\sum_{m=1}^{L_k} n_m = Y_k N_H \quad (9.52b)$$

kde $Y_k = \tilde{\alpha}_k / \tilde{\alpha}_H$ je abundance prvku k vzhledem k vodíku (D.2). Této rovnici můžeme říkat **abundanční rovnice**.

Tuto rovnici můžeme použít pro všechny atomy kromě toho, který jsme zvolili jako referenční (v tomto případě vodíku). Pro ten potřebujeme rovnici, která bude obsahovat celkovou koncentraci částic. Dobře může posloužit **rovnice pro celkový počet částic**, kterou získáme sečtením všech zahrnutých energetických stavů ve všech uvažovaných atomech

$$\sum_k \sum_{m=1}^{L_k} n_m = \tilde{N}_N \quad (9.52c)$$

Můžeme také použít **rovnici elektrické neutrality prostředí**. Sečteme koncentrace všech iontů vynásobené celočíselným nábojem iontu (celkový kladný celočíselný náboj) a porovnáme je s koncentrací volných elektronů (celkový záporný celočíselný náboj)

$$\sum_k \sum_{m=1}^{L_k} n_m q_m = n_e \quad (9.52d)$$

kde q_m vyjadřuje hodnotu náboje iontu, k němuž hladina m patří. Pro neutrální atomy je $q_m = 0$ (takže je nemusíme uvažovat), pro jednou ionizované ionty je $q_m = 1$ a pro další ionty obdobně. Případné záporné ionty nejjednodušeji započteme na levé straně vztahu (9.52d) pomocí záporného celočíselného náboje q_m .

Soustavu L rovnic (9.51) doplněnou o některou z rovnic (9.52) můžeme formálně zapsat v maticovém tvaru jako

$$\mathcal{A} \cdot \mathbf{n} = \mathcal{B} \quad (9.53)$$

kde vektor $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \dots, n_L)^T$ obsahuje koncentrace jednotlivých energetických hladin, matice \mathcal{A} je tvořena četnostmi přechodů (viz rovnice 9.51). Tato matice má rozměr $L \times L$ a nazveme ji **maticí četností (rate matrix)**. Můžeme se setkat i s poločeským názvem rate (čti rejt) matice. Vektor pravých stran \mathcal{B} je nenulový pouze pro doplňující rovnice (9.52).

Pokud matice \mathcal{A} a vektor pravé strany \mathcal{B} nezávisí na obsazeních energetických stavů \mathbf{n} , je (9.53) snadno řešitelnou soustavou lineárních rovnic. V případě, kdy neplatí termodynamická rovnováha ani lokální termodynamická rovnováha, matice \mathcal{A} závisí na poli záření, protože na poli záření závisí četnosti zářivých přechodů R_{im} . Pro určení pole záření musíme řešit rovnici přenosu záření (viz kapitola 3.2), což znamená, že musíme znát opacitu a emisivitu, které závisí kromě jiných veličin i na obsazení energetických stavů \mathbf{n} . Soustava (9.53) tedy představuje soustavu nelineárních rovnic. Zahrnutím rovnic kinetické (statistické) rovnováhy se obsazení energetických hladin stávají funkcí nejen teploty T a elektronové hustoty n_e (viz kapitoly 4.1 a 4.3), ale i pole záření J_ν ,

$$n_i = n_i(n_e, T, J_\nu). \quad (9.54)$$

Započtení pole záření do určení obsazení energetických hladin znamená hodně nových proměnných, pro které je třeba současně řešit soustavu rovnic kinetické rovnováhy a rovnic přenosu záření pro všechny potřebné frekvence. Způsoby řešení této soustavy se budeme zabývat v kapitole 10.

9.5.1 Některé speciální případy

Pro pochopení důsledků rovnic kinetické rovnováhy je užitečné se podívat na některé speciální zjednodušené případy rovnic kinetické (statistické) rovnováhy a jejich řešení.

Rosselandův teorém cyklických přechodů Uvažujme atom, který má 3 stavy (označíme je 1,2,3), mezi kterými existují jen zářivé přechody. Symboly $R_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1}$ a $R_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1}$ označíme četnosti postupných zářivých přechodů do hladin uvedených v indexu. Určíme poměr $R_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1} / R_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1}$. V dalších úvahách zanedbáme indukovanou emisi. Počet excitací z hladiny 1 do hladiny 3 je $n_1 B_{13} W B(\nu_{13})$, počet deexcitací z hladiny 3 do hladiny 2 je $A_{32} / (A_{31} + A_{32})$ počet deexcitací z hladiny 2 do hladiny 1 je $A_{21} / [A_{21} + B_{23} W B(\nu_{23})]$. Pro četnost přechodů ve směru $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$ dostaneme

$$n_1 R_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1} = n_1 B_{13} W B(\nu_{13}) \cdot \frac{A_{32}}{A_{32} + A_{31}} \cdot \frac{A_{21}}{A_{21} + B_{23} W B(\nu_{23})} \quad (9.55)$$

Analogickým postupem dostáváme pro četnost ve směru $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ dostáváme

$$n_1 R_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1} = n_1 B_{12} W B(\nu_{12}) \cdot \frac{B_{23} W B(\nu_{23})}{A_{21} + B_{23} W B(\nu_{23})} \cdot \frac{A_{31}}{A_{32} + A_{31}}. \quad (9.56)$$

Pro podíl (9.56) a (9.55) platí

$$\frac{R_{1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1}}{R_{1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1}} = \frac{B_{12}WB(\nu_{12})B_{23}WB(\nu_{23})A_{31}}{B_{13}WB(\nu_{13})A_{21}A_{32}} = W < 1 \quad (9.57)$$

kde jsme využili vztahu pro $B(\nu)$ platného pro Wienovu limitu ($h\nu/kT \gg 1$)

$$\frac{B_{ij}}{A_{ji}}B(\nu_{ij}) = \left(\frac{n_j}{n_i}\right)^* \quad (9.58)$$

Cykly mají různou pravděpodobnost.

Jednohladinový atom s kontinuem se skládá jen z jedné vázané hladiny a jedné hladiny iontu (kontinua). Tento případ je podobněji popsán v knihách Mihalas (1978, kapitola 5.5) a Hubeny and Mihalas (2014, kapitola 9.5). V tomto případě jsou rovnice kinetické rovnováhy reprezentovány pouze dvěma rovnicemi, jednou pro hladinu $l = 1$ a druhou pro hladinu iontu k . Tyto rovnice jsou však stejné,

$$n_1(R_{1k} + C_{1k}) = n_k(R_{k1} + C_{k1}). \quad (9.59)$$

Do této rovnice dosadíme za n_1R_{1k} ze vztahu (9.25), za n_1C_{1k} a n_kC_{k1} ze vztahu (9.40) a za n_kR_{k1} z (9.33). V posledně jmenovaném vztahu zanedbáme stimulovanou emisi a použijeme přiblížení $\exp[h\nu/(kT)] \gg 1$. Dále využijeme fakt, že pro jednohladinový atom s kontinuem je $n_k = n_k^*$, protože k odpovídá nejvyššímu iontu atomu. Rovnice kinetické rovnováhy přejde na tvar (viz Mihalas 1978, rovnice 5.94 nebo Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 9.90)

$$\frac{n_1}{n_1^*} = \frac{4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\alpha_{bf1k}(\nu)B_\nu}{h\nu} d\nu + n_e q_{1k}}{4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\alpha_{bf1k}(\nu)J_\nu}{h\nu} d\nu + n_e q_{1k}} \quad (9.60)$$

V případě vysokých elektronových koncentrací (vysokých hustot) jsou dominantní srážkové přechody a podíl $n_1/n_1^* \rightarrow 1$ bez ohledu na hodnotu střední intenzity záření J_ν . Obsazení hladiny je tedy rovnovážné a podmínky LTE jsou splněny. Pokud se pole záření blíží rovnovážnému, $J_\nu \rightarrow B_\nu$ (například ve velkých hloubkách atmosféry), je také $n_1/n_1^* \rightarrow 1$. Pro rovnovážné pole záření tak rovněž dostáváme splnění podmínek pro LTE.

Naopak v případě nízkých hustot je člen $n_e q_{1k}$ malý a v rovnici (9.60) dominují zářivé členy. Můžeme psát

$$\frac{n_1}{n_1^*} \approx \frac{4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\alpha_{bf1k}(\nu)B_\nu}{h\nu} d\nu}{4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\alpha_{bf1k}(\nu)J_\nu}{h\nu} d\nu} \quad (9.61)$$

Pokud je četnost ionizací větší než četnost rekombinací, hladina 1 má nižší obsazení než v LTE, pokud jsou naopak četnější rekombinace, hladina 1 má vyšší obsazení než v LTE. Abychom získali alespoň přibližné odhady efektů, použijeme velmi zjednodušující předpoklad, který využívá faktu, že fotoionizační příčný průřez je nejvyšší na ionizační hraně a pro rostoucí frekvence je úměrný ν^{-3} . Nahradíme integrály přes celé frekvenční spektrum hodnotou na ionizační hraně ($\nu = \nu_0$). Rovnice (9.61) se zjednoduší na tvar

$$\frac{n_1}{n_1^*} \approx \frac{B(\nu_0)}{J(\nu_0)}. \quad (9.62)$$

Hladina má pro $B_{\nu_0} < J_{\nu_0}$ nižší obsazení než v případě termodynamické rovnováhy.

Ionizace v koróně je variantou předcházejícího případu. Teplota v koróně je velmi vysoká ($T_{\text{local}} \sim 10^6 \text{K}$) a je mnohem vyšší než teplota sluneční fotosféry ($T_R \sim 6000 \text{K}$). Četnost srážkových ionizací závisí na lokální teplotě, četnost zářivých ionizací závisí na fotosférické teplotě. Srážkové ionizace budou tedy výrazně převažovat ($C_{1k} \gg R_{1k}$). Četnosti srážkových i zářivých rekombinací závisejí na lokální teplotě, proto bude platit nerovnost $C_{k1} \ll R_{k1}$. Z rovnice (9.59) dostaneme

$$n_1 n_e q_{1k}(T) = n_k n_e \alpha_R(T), \quad (9.63)$$

kde α_R je celkový rekombinační koeficient (9.34). V případě koróny tento koeficient zahrnuje přímou i dielektronickou rekombinaci. Z rovnice (9.63) vyjádříme poměr

$$\frac{n_k}{n_1} = \frac{q_{1k}(T)}{\alpha_R(T)} = f(T) \quad (9.64)$$

Získali jsme zajímavou informaci, že ionizační rovnováha v koróně *nezávisí* na elektronové hustotě n_e v koróně, je pouze funkcí lokální teploty.

Opticky tenké kaskádové přechody

(Hubeny and Mihalas, 2014, str. 286)

zjednodušený mnohohladinový atom pro prostředí mlhovin
uvažujeme vodík, předpokládáme

- velmi slabé pole záření \Rightarrow
 - vodík převážně v základním stavu

- předpokládáme rezonanční čáry neprůhledné \Rightarrow jsou v detailní zářivé rovnováze
- fotoionizace z vyšších hladin zanedbány
fotoionizace jen ze základní hladiny
rekombinace probíhají do všech hladin
- zářivé excitace zanedbány (přechody z vyšších hladin průhledné)
- pouze spontánní deexcitace z vyšších hladin úměrné A_{ul}
- nízká hustota prostředí
 - srážky zcela zanedbány

rovnice kinetické rovnováhy pro ionizovaný vodík (hladina k),
 L je celkový počet hladin

$$n_k \sum_{l=1}^L R_{kl} = n_1 R_{1k} \quad (9.65)$$

vyjádříme pomocí rekombinačního koeficientu (9.34),
položíme $n_k = n_p$ (koncentrace protonů), pro čistě vodíkový plyn $n_p = n_e$,

$$n_1 R_{1k} = n_p n_e \sum_{l=1}^L \alpha_{Rkl}(T) = n_e^2 \sum_{l=1}^L \alpha_{Rkl}(T) \quad (9.66)$$

rovnice kinetické rovnováhy pro hladinu j

$$n_j \sum_{z=1}^{j-1} R_{jz} = n_k R_{kj} + \sum_{z=j+1}^L n_z R_{zj} \quad (9.67)$$

zavedeme

- rozvětovací poměr (*branching ratio*)
(pravděpodobnost spontánního přechodu $u \rightarrow l$ vzhledem ke všem ostatním spontánním přechodům z hladiny u)

$$a_{ul} \equiv \frac{A_{ul}}{\sum_{j < u} A_{uj}} \quad (9.68)$$

- kaskádové pravděpodobnosti (*cascade probabilities*) p_{ul} – celkové pravděpodobnosti, že se atom nějak dostane ze stavu u do stavu l
definovány rekurzivně pomocí (9.68)

$$p_{l+1,l} = a_{l+1,l}$$

$$p_{ul} = a_{ul} + \sum_{i'=l+1}^{u-1} p_{ui'} a_{i'l} \quad \text{pro } u \geq l+2 \quad (9.69)$$

rovnice kinetické rovnováhy pro hladinu j s pomocí rekombinačního koeficientu a kaskádových pravděpodobností (9.69)

$$n_j \sum_{z=1}^{j-1} A_{jz} = n_e^2 \alpha_{Rkj}(T) + \sum_{z=j+1}^L n_z A_{zj} = n_e^2 \left[\alpha_{Rkj}(T) + \sum_{z=j+1}^L p_{zj} \alpha_{Rkz}(T) \right] \quad (9.70)$$

můžeme určit poměry populací

emisivita pro přechod $u \rightarrow l$

$$\eta = \frac{h\nu}{4\pi} n_u A_{ul}$$

užití – přibližné určení relativní intenzity Balmerovských čar (Balmer decrement)

$$\frac{I(H_j)}{I(H_i)} = \frac{n_j A_{j2} h\nu_{j2}}{n_i A_{i2} h\nu_{i2}} \quad (9.71)$$

Jemná struktura hladin v mezihvězdném prostředí – formulace rovnic (Bahcall and Wolf, 1968)

extrémně nízká hustota i teplota \Rightarrow atomy a ionty převážně v základním stavu

základní stav (term) má více hladin

zajímají nás absorpční čáry ze základního stavu

tyto čáry jsou multiplety, jejich vzájemná intenzita bude záviset na obsazení hladin základního termu (stavu)

základní stav doublet ($J = \frac{1}{2}$ a $J = \frac{3}{2}$) – C II, N III (oba $2s^2 2p^2 P_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^o$); Al I, Si II, S IV (všechny $3s^2 3p^2 P_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}^o$)

- označíme hladiny indexy 1,2 podle jejich rostoucí energie (hladina ${}^2P_{\frac{1}{2}}^o$ má nižší energii než hladina ${}^2P_{\frac{3}{2}}^o$)
- přechod mezi hladinami 1 a 2 je magnetický dipólový
- v mezihvězdném prostředí slabé záření \rightarrow zanedbáme členy s intenzitou záření

$$n_1 C_{12} = n_2 (A_{21} + C_{21}) \quad (9.72)$$

odtud poměr obsazení hladin

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{C_{12}}{A_{21} + C_{21}} \quad (9.73)$$

doplněno uzavírací rovnicí

$$n_1 + n_2 = n_I \quad (9.74)$$

n_I je celková koncentrace iontu

- pro $A_{21} \ll C_{21} \Rightarrow$ LTE obsazení, jinak ne
- pro klesající hustotu klesá C_{12} i $C_{21} \Rightarrow$ klesá poměr n_2/n_1
- intenzita absorpčních čar závisí na obsazení spodní hladiny přechodu
- změněný poměr n_2/n_1 změní sílu složek absorpčního doubletu ze základního termu
- poměr n_2/n_1 závisí na elektronové hustotě \Rightarrow možnost určení mezihvězdné elektronové hustoty na základě poměru intenzit složek absorpčního doubletu daných prvků

základní stav triplet ($J = 0, J = 1, J = 2$) – C I, N II O III (všechny $2s^22p^2\ ^3P_{0,1,2}$), Si I, S III (oba $3s^23p^2\ ^3P_{0,1,2}$), O I ($2s^22p^4\ ^3P_{2,1,0}$), S I ($3s^23p^4\ ^3P_{2,1,0}$)

dva přechody magnetické dipólové (mezi hladinami $^3P_0 \leftrightarrow ^3P_1$ a $^3P_1 \leftrightarrow ^3P_2$), jeden elektrický kvadrupólový (mezi hladinami $^3P_0 \leftrightarrow ^3P_2$)

- označíme hladiny podle jejich rostoucí energie čísly 1,2,3; (pro konfiguraci ns^2np^2 rostou energie hladin pro kvantová čísla J podle posloupnosti 0,1,2; pro konfiguraci ns^2np^4 podle posloupnosti 2,1,0)
- uvažujme jen přechody 1-2 a 2-3, A_{31} zanedbáme (elektrický kvadrupólový přechod méně pravděpodobný než magnetický dipólový); C_{31} také zanedbáme

$$n_1(C_{12} + C_{13}) = n_2(A_{21} + C_{21}) \quad (9.75)$$

$$n_2(A_{21} + C_{21} + C_{23}) = n_1C_{12} + n_3(A_{32} + C_{32})$$

poměry obsazení

$$\frac{n_2}{n_1} = \frac{C_{12} + C_{13}}{A_{21} + C_{21}} \quad (9.76)$$

$$\frac{n_3}{n_1} = \frac{C_{13}(A_{21} + C_{21} + C_{23}) + C_{12}C_{13}}{(A_{21} + C_{21})(A_{32} + C_{32})}$$

doplněno uzavírací rovnicí

$$n_1 + n_2 + n_3 = n_I \quad (9.77)$$

pokud $A_{ij} \ll C_{ij} \Rightarrow$ LTE obsazení

- podobně jako v případě doubletunižší hustota ovlivní relativní obsazení n_1, n_2, n_3
- změněné poměry $n_2/n_1, n_3/n_2$ změní síly složek absorpčního tripletu ze základního termu
- poměry $n_2/n_1, n_3/n_2$ závisejí na elektronové hustotě \Rightarrow možnost určení mezihvězdné elektronové hustoty na základě poměru intenzit složek absorpčního tripletu daných prvků

Pravděpodobnost obsazení hladin v rovnicích kinetické rovnováhy

pravděpodobnosti obsazení w_l jsme zmínili v kapitole 4.1 v rovnici (4.8)

obsazení n_l hladiny l iontu I o koncentraci N_I v termodynamické rovnováze

$$\left(\frac{n_l}{N_I}\right)^* = w_l \frac{g_l}{U_I} e^{-\frac{E_l}{kT}} \quad (9.78)$$

partiční funkce dána vztahem (4.8)

pravděpodobnosti obsazení hladin w_l statisticky vyjadřují vliv okolních atomů na daný atom, který se projevuje tím, že vyšší hladiny nemusejí existovat

vztahy pro výpočet w_l v Hubeny and Mihalas (2014, kap. 9.4)

do rovnic kinetické (statistické) rovnováhy musíme zavést možnost neexistence vázané hladiny, do níž iont přechází

$$n_l \sum_{u \neq l} w_u P_{lu} - w_l \sum_{u \neq l} n_u P_{ul} = 0 \quad (9.79)$$

excitace do neexistující hladiny se stane ionizací

modifikace ionizačního účinného průřezu (zahrnutí frekvencí nižších než ionizační frekvence), viz Hubeny et al. (1994)

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_{bflk} &= \alpha_{bflk} & \text{pro } \nu &\geq \nu_{lk} \\ &= \left(1 - \frac{w_{n^*}}{w_l}\right) \alpha_{bflk} & \text{pro } \nu < \nu_{lk} \end{aligned} \quad (9.80)$$

kde

$$n_* = \left(\frac{1}{n_i^2} - \frac{h\nu}{\mathcal{E}_I} \right) \quad (9.81)$$

\mathcal{E}_I je ionizační energie

vztahy pro srážkové i zářivé četnosti se nemění

Kapitola 10

Řešení NLTE problému

Úlohu současného nalezení řešení rovnice přenosu záření a rovnic kinetické (statistické) rovnováhy nazýváme *NLTE problémem*, případně *NLTE problémem formování spektrálních čar*. Soustava rovnic kinetické (statistické) rovnováhy (9.53) je soustavou nelineárních rovnic, kdy jednotlivé prvky matice A závisejí na poli záření. Současně s rovnicemi kinetické (statistické) rovnováhy (9.53) je tedy nutné řešit i rovnici přenosu záření (například 3.41), a to pro každou frekvenci. Ve výsledku se pak jedná o ohromnou soustavu rovnic pro záření na všech frekvencích a obsazení všech uvažovaných energetických stavů. Dohromady tyto rovnice tvoří soustavu nelineárních integrodiferenciálních rovnic. Jejich řešení nelze nalézt analyticky, je třeba použít numerických iteračních metod. Některé možné cesty k řešení této soustavy rovnic si v této kapitole ukážeme pro případ rovinné geometrie.

10.1 Dvouhadinový atom

V přiblížení dvouhadinového atomu předpokládáme, že atom má pouze dvě vázané energetické hladiny. Je to aproximace, která je dobře použitelná prakticky jen pro přechody ze základní hladiny. Příkladem mohou být některé velmi silné rezonanční čáry. Může však posloužit i jako velmi názorný příklad, na němž je možné pochopit a vysvětlit základní efekty, které nastávají při řešení složitějších NLTE problémů pro mnohohladinové atomy. Základní vztahy pro vydatnost a rovnici přenosu záření pro dvouhadinový atom formuloval Thomas (1957). Metody řešení NLTE problému využívající dvouhadinového atomu posloužily k sestrojení řady užitečných modelů hvězdných atmosfér (například Avrett and Loeser, 2003).

Spodní hladinu dvouhadinového atomu označíme l , horní hladinu u . Frekvenční závislost opacity dvouhadinového atomu můžeme vyjádřit jako

$$\chi_\nu = \kappa_{lu}\phi(\nu) \quad (10.1)$$

kde s využitím rovnice (5.41)

$$\kappa_{lu} = n_l \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu}, \quad (10.2a)$$

případně se započtením stimulované emise jako záporné absorpce

$$\kappa_{lu} = \frac{\pi e^2}{m_e c} g_l f_{lu} \left(\frac{n_l}{g_l} - \frac{n_u}{g_u} \right) \quad (10.2b)$$

a $\phi(\nu)$ je profil čáry. Pokud budeme uvažovat existenci i opacitu kontinua χ_C (například rozptyl na volných elektronech nebo vázaně-volné a volně-volné přechody jiných prvků), celkovou opacitu (10.1) můžeme zapsat jako

$$\chi_\nu = \kappa_{lu} \phi(\nu) + \chi_C. \quad (10.3)$$

Opacitě χ_C se také říká opacita pozadí (*background opacity*).

10.1.1 Termalizační hloubka ve spektrálních čarách

Střední volná dráha ℓ_ν fotonu dané frekvence ν je dána převrácenou hodnotou opacitu χ_ν (viz rovnice 7.30 a 10.3),

$$\ell_\nu = \frac{1}{\chi_\nu} = \frac{1}{\kappa_{lu} \phi(\nu) + \chi_C}. \quad (10.4)$$

Pro zavedení střední volné dráhy je vhodnější použít opacitu (10.2a), bez započtení stimulované emise. Z rovnice (10.4) je zřejmé, že pokud $\kappa_{lu} \gg \chi_C$, je střední volná dráha pro různé frekvence profilu čáry značně rozdílná, protože $\phi(\nu)$ nabývá hodnot mezi 0 a 1. Ve středu spektrální čáry je střední volná dráha nejkratší a v křídlech nejdelší. Integrací střední volné dráhy (10.4) pro různé frekvence přes profil čáry dostaneme střední hodnotu středních volných pro danou čáru. Tuto veličinu označíme ℓ a nazveme *střední volnou dráhou fotonu v čáře*,

$$\ell = \langle \ell_\nu \rangle = \int_0^\infty \ell_\nu \phi_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{\phi_\nu}{\kappa_{lu} \phi_\nu + \chi_C} d\nu. \quad (10.5)$$

Po absorpci fotonu ve dvouhladinovém atomu dojde k excitaci atomu do horního stavu. Poté může dojít ke srážkové deexcitaci, která vede k tomu, že je energie fotonu převedena do kinetické energie srážející se částice. Této možnosti se říká termální absorpce. Druhou možností je zářivá deexcitace spojená s vyzářením fotonu na některé z frekvencí spektrální čáry popsané profilem $\phi(\nu)$. Tato frekvence se může lišit od frekvence absorbovaného fotonu. Foton vlastně pokračuje ve své

cestě, obecně jiným směrem a na jiné frekvenci. Tato možnost odovídá rozptylu ve spektrální čáře (kapitola 5.8).

Podobně jako v případě rozptylu v kapitole 7.3 nás bude zajímat termalizační délka (hloubka), ale v tomto případě pro celou čáru se zahrnutím rozdílné opacity ve středu čáry a v jejích křídlech. Tato termalizační délka se také někdy nazývá délka zničení (*destruction length*).

Pravděpodobnost zničení fotonu P_d , jinými slovy pravděpodobnost převedení energie absorbovaného fotonu do tepelné energie prostředí, je dána podílem četností srážkových přechodů z hladiny u do hladiny l (C_{ul}) k celkové četnosti přechodů z hladiny u do hladiny l ($C_{ul} + A_{ul}$, kde jsme zanedbali stimulovanou emisi),

$$P_d = \frac{C_{ul}}{C_{ul} + A_{ul}} (\equiv \varepsilon). \quad (10.6)$$

Ve velkých hloubkách v hustém prostředí s velkým množstvím srážejících se částic je $C_{ul} \gg A_{ul}$ a $P_d \rightarrow 1$. Naopak v prostředí nízkou hustotou (a tím i nízkou koncentrací elektronů a $C_{ul} \ll A_{ul}$) je hodnota P_d velmi malá. Označíme $P_e(\tau)$ pravděpodobnost úniku fotonu z místa v optické hloubce τ . V hustém prostředí s velkou pravděpodobností zničení fotonu je $P_e(\tau) \ll P_d$, naopak tam, kde je P_d malá, je $P_e(\tau) \gg P_d$. Rozumná definice **termalizační hloubky** τ_{th} je na rozhraní těchto dvou oblastí, kde

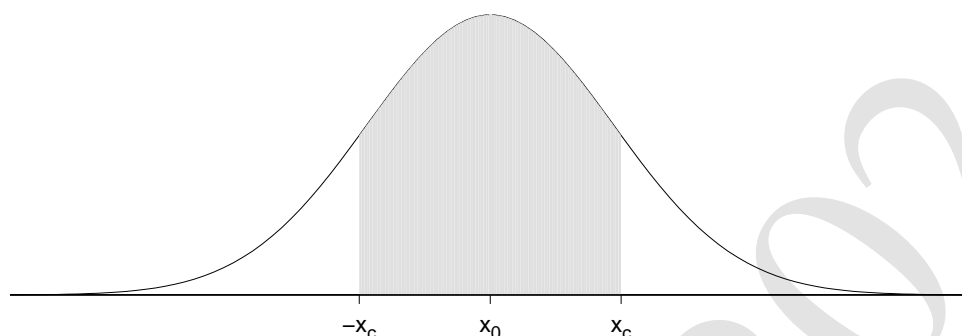
$$P_e(\tau_{th}) \approx P_d \quad (10.7)$$

Určit termalizační délku můžeme řadou různých přístupů, jejich výčet nalezneme v Hubeny and Mihalas (2014, kapitola 14.1). Zde uvedeme její přibližné určení pro homogenní atmosféru (vycházející z práce Osterbrock, 1962). Tento dodatečný předpoklad znamená, že pravděpodobnost zničení fotonu (10.6) se nemění s hloubkou.

Přejdeme k bezrozměrné frekvenci $x = (\nu - \nu_0)/\Delta\nu_D$ (viz 5.52). Čáru rozdělíme na opticky tlustou ($\tau_x > 1$) a opticky tenkou ($\tau_x < 1$) část (viz obr. 10.1). Dělicí frekvenci x_c mezi opticky tlustou a opticky tenkou částí čáry získáme z podmínky

$$\tau\phi(x_c) = 1, \quad (10.8)$$

kde τ zde označuje střední optickou hloubku v čáře. Dále budeme předpokládat, že přechod od opticky tenké k opticky tlusté části profilu je náhlý, tj. že pro opticky tenkou část profilu platí $\tau_x \ll 1$ a pro opticky tlustou část profilu platí $\tau_x \gg 1$. V opticky tenké části profilu unikne polovina vyzářených fotonů (druhá polovina je vyzářena opačným směrem). Pokud je profil čáry symetrický (což v naprosté



Obrázek 10.1: Opticky tlustá a opticky tenká část spektrální čáry, $\tau_x > 1$ v intervalu $\langle -x_c; x_c \rangle$, jinak $\tau_x < 1$.

většinou případů je), pravděpodobnost úniku fotonu je

$$P_e(\tau) \approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-x_c} \phi(x) dx + \frac{1}{2} \int_{x_c}^{\infty} \phi(x) dx = \int_{x_c}^{\infty} \phi(x) dx. \quad (10.9)$$

Vyjádříme tuto pravděpodobnost úniku pro Dopplerův (5.60b) a Voigtův (5.59) profil. Použitím aproximace pro daleká křídla čáry ($|x_c| \gg 1$) dostaneme pro Dopplerův profil

$$P_e^D(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{x_c}^{\infty} e^{-x^2} dx \approx \frac{e^{-x_c^2}}{2\sqrt{\pi}x_c}, \quad (10.10a)$$

a pro Voigtův profil s využitím přibližné rovnice (5.61b)

$$P_e^V(\tau) \approx \frac{a}{\pi x_c}. \quad (10.10b)$$

Dělicí frekvenci určíme z podmínky (10.8). Pro případ Dopplerova profilu dostaneme s využitím (5.60b)

$$x_c^D = \sqrt{\ln \left(\frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \right)}, \quad (10.11a)$$

pro případ Voigtova profilu s využitím (5.61b)

$$x_c^V = \sqrt{\frac{a\tau}{\pi}}. \quad (10.11b)$$

Do rovnic (10.10) dosadíme za x_c z rovnic (10.11) a dostaneme vztahy pro pravděpodobnost úniku pro Dopplerův profil čáry,

$$P_e^D(\tau) \approx \frac{1}{2\tau \sqrt{\ln \left(\frac{\tau}{\sqrt{\pi}} \right)}}, \quad (10.12a)$$

a pro Voigtův profil čáry,

$$P_e^V(\tau) \approx \sqrt{\frac{a}{\pi\tau}}. \quad (10.12b)$$

S využitím rovnic (10.6) a (10.7) dostaneme vztahy pro termalizační délku pro případ Dopplerova profilu čáry (C má hodnotu řádově jednotek a slabě závisí na ε),

$$\tau_{\text{th}}^D \sim \frac{C}{\varepsilon}, \quad (10.13a)$$

a pro případ Voigtova profilu čáry,

$$\tau_{\text{th}}^V \sim \frac{a}{\varepsilon^2}. \quad (10.13b)$$

Pro srovnání připomeňme vztah pro termalizační délku při koherentním rozptylu

$$\tau_{\text{th}}^{\text{coh}} \sim \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}. \quad (7.33)$$

Porovnáním vztahů (7.33) a (10.13) vidíme, že nekoherence rozptylu zvyšuje termalizační délku.

10.1.2 Rovnice pro dvouhladinový atom

vydatnost dvouhladinového atomu

absorpce s následnou emisí je rozptyl ve spektrální čáře (viz kapitola 5.8)

dvouhladinový atom bez kontinua

vydatnost viz rovnice (7.4) v kapitole 7.1

$$S_L = \frac{n_u A_{ul}}{n_l B_{lu} - n_u B_{ul}} = \frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} \frac{1}{\frac{n_l g_u}{n_u g_l} - 1}. \quad (7.4)$$

- jedna rovnice kinetické rovnováhy pomocí (9.13) a (9.22) (stejná pro obě hladiny)

$$n_l (B_{lu} \bar{J}_{lu} + C_{lu}) = n_u (A_{ul} + B_{ul} \bar{J}_{lu} + C_{ul}) \quad (10.14)$$

- \bar{J}_{lu} zavedeno v (9.12)

- kombinací s (7.4),
s užitím Einsteinových relací (5.8)
a vztahu (9.39) ($n_u^* C_{ul} = n_l^* C_{lu}$)

$$S_L = \frac{\bar{J}_{lu} + \varepsilon' B}{1 + \varepsilon'} \quad (10.15)$$

kde

$$\varepsilon' = \frac{C_{ul}}{A_{ul}} \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{lu}}{kT}\right) \right] \quad (10.16)$$

položíme

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{1 + \varepsilon'} \quad (10.17)$$

ε – pravděpodobnost zničení fotonu – stejná jako v (10.6)

$$S_L = (1 - \varepsilon) \bar{J} + \varepsilon B \quad (10.18)$$

pro vysoké hustoty: $C_{ul} \gg A_{ul} \Rightarrow \varepsilon' \gg 1 \Rightarrow \varepsilon \rightarrow 1 \Rightarrow S_L \rightarrow B(\nu_{lu}, T)$
většinou je ale $\varepsilon \ll 1$

rovnice přenosu záření + vydatnost dvouhladinového atomu

současně se řeší rovnice přenosu záření bez kontinua

$$\mu \frac{dI(\tau, \nu)}{d\tau} = \phi(\tau, \nu) [I(\tau, \nu) - S_L(\tau)] \quad (10.19)$$

(τ – optická hloubka v čáře, $d\tau = -\kappa_{lu} ds$)

s vydatností (přepsaná rovnice (10.18) s explicitní závislostí na τ a integrací přes profil čáry)

$$S_L(\tau) = [1 - \varepsilon(\tau)] \int_0^\infty \phi(\tau, \nu) J(\tau, \nu) d\nu + \varepsilon(\tau) B(\tau) \quad (10.20)$$

podobně i pro dvouhladinový atom s opacitou kontinua v pozadí

vlastnosti řešení dvouhladinového atomu bez kontinua

- (i) povrchová hodnota

$$S(0) = \sqrt{\varepsilon} B \quad (10.21)$$

- (ii) pro $\tau \approx 1/\varepsilon$ je $S(\tau) \rightarrow B$ (velké hloubky)

dvouhladinový atom s kontinuem v pozadí

opacita

$$\chi_\nu = (\chi_L)_{lu}(\nu) + \chi_C(\nu) = \kappa_{lu}\phi(\nu) + \chi_C \quad (10.22)$$

κ_{lu} – opacita v čáře
emisivita

$$\eta_\nu = (\eta_L)_{lu}(\nu) + \eta_C(\nu) = (\chi_L)_{lu}(\nu)S_L + \chi_C S_C \quad (10.23)$$

S_L z rovnice (10.18), $S_C \equiv \eta_C/\chi_C$ – vydatnost kontinua, $r \equiv \chi_C/\kappa_{ul}$

$$S_\nu = \frac{\phi_\nu}{\phi_\nu + r} S_L + \frac{r}{\phi_\nu + r} S_C \quad (10.24)$$

lze převést na vztah (7.28)

$$S_\nu = \xi_\nu S_C + (1 - \xi_\nu) \int_0^\infty \phi_{\nu'} J_{\nu'} d\nu', \quad (7.28)$$

kde $\xi_\nu = (r + \varepsilon\phi_\nu)/(r + \phi_\nu)$

ekvivalentní dvouhladinový atom

pro ionty s dominantním rezonančním přechodem, zájemci vizte Hubeny and Michals (2014, kapitola 14.4)

10.2 Iterační řešení dvouhladinového atomu

10.2.1 Λ iterace

Pro případ koherentního rozptylu jsme si Λ -iteraci uvedli v kapitole 7.5.1. Tuto jednoduchou iterační metodu můžeme zformulovat i pro případ rozptylu ve spektrální čáře dvouhladinového atomu. Rovnici (7.29) přepíšeme pro případ dvouhladinového atomu (závislost na hloubkové proměnné τ nebudeme uvádět),

$$\bar{J} = \bar{\Lambda} [S_L] = \bar{\Lambda} [(1 - \varepsilon) \bar{J}] + \bar{\Lambda} [\varepsilon B]. \quad (10.25)$$

Zde $\bar{\Lambda}$ je frekvenčně středovaný Λ -operátor (6.24) pro čáru, \bar{J} je integrovaná střední intenzita přes profil spektrální čáry (6.23) a B je střední hodnota Planckovy funkce v čáře. Podobně jako v kapitole 7.5.1 budeme v iteračním postupu střídavě určovat střední intenzitu \bar{J} a vydatnost S_L , která je vyjádřena pomocí vztahu (10.18).

Jako úvodní iterační hodnotu pro pole záření vezmeme Planckovu funkci

$$\bar{J}^{(0)} = B. \quad (10.26a)$$

Iterační určení střední intenzity zapíšeme

$$\bar{J}^{(n+1)} = \bar{\Lambda} [S_L^{(n)}] = \bar{\Lambda} [(1 - \varepsilon)\bar{J}^{(n)}] + \bar{\Lambda} [\varepsilon B]. \quad (10.26b)$$

Tato iterační metoda má stejné vlastnosti jako v případě koherentního rozptylu. Konverguje pouze pro $\varepsilon \rightarrow 1$ a pokud $\varepsilon \ll 1$, spíše se stabilizuje a pro praktické řešení problému je nepoužitelná.

10.2.2 Urychlená Λ iterace

Pomalost Λ -iterace je možné odstranit, pokud z iteračního procesu odstraníme část informace, která se šíří pomalu. To lze udělat, pokud vhodným způsobem modifikujeme v rovnici (10.25) operátor $\bar{\Lambda}$. Základní myšlenku (Cannon, 1973b,a) můžeme formálně objasnit následujícím způsobem. K operátoru $\bar{\Lambda}$ přičteme a odečteme jiný operátor, který označíme Λ^* .

$$\bar{\Lambda} = \Lambda^* + (\bar{\Lambda} - \Lambda^*). \quad (10.27)$$

Operátor (10.27) dosadíme do (10.25)

$$\bar{J} = \bar{\Lambda} [S_L] = \Lambda^* [S_L] + (\bar{\Lambda} - \Lambda^*) [S_L]. \quad (10.28)$$

S pomocí této rovnice můžeme definovat iterační schéma

$$\bar{J}^{(n+1)} = \Lambda^* [S_L^{(n+1)}] + (\bar{\Lambda} - \Lambda^*) [S_L^{(n)}]. \quad (10.29)$$

V limitě $n \rightarrow \infty$ je tato rovnice splněna přesně. Rozdíl oproti Λ -iteraci spočívá v tom, operátor Λ^* působí i na novou hodnotu $S_L^{(n+1)}$, kterou chceme v odpovídajícím iteračním kroku určit. Do členu $\Lambda^* [S_L^{(n+1)}]$ tak můžeme nějakým vhodným zjednodušeným způsobem zahrnout rozptylový člen. Abychom lépe ocenili konvergenční vlastnosti metody, z rovnice (10.29) dosadíme do (10.18),

$$S_L^{(n+1)} = (1 - \varepsilon) \Lambda^* [S_L^{(n+1)}] + (1 - \varepsilon) (\bar{\Lambda} - \Lambda^*) [S_L^{(n)}] + \varepsilon B \quad (10.30)$$

Odsud vyjádříme vydatnost $S_L^{(n+1)}$,

$$S_L^{(n+1)} = [1 - (1 - \varepsilon) \Lambda^*]^{-1} [(1 - \varepsilon) (\bar{\Lambda} - \Lambda^*) [S_L^{(n)}] + \varepsilon B]. \quad (10.31)$$

Pro konvergenci metody a její rychlost je rozhodující největší vlastní číslo zesilovací matice (amplification matrix)

$$A = [1 - (1 - \varepsilon) \Lambda^*]^{-1} [(1 - \varepsilon) (\bar{\Lambda} - \Lambda^*)], \quad (10.32)$$

které označíme λ_{\max} . Pro $\Lambda^* = 0$ dostaneme Λ -iteraci, pro kterou je $\lambda_{\max} \approx 1$, což znamená velmi pomalou konvergenci. Nejvhodnější volbou Λ^* -operátoru dávající rozumně malé hodnoty λ_{\max} zaručující rychlou konvergenci je diagonála $\bar{\Lambda}$ -operátoru (Olson et al., 1986). Spočítat ho lze jednoduše podobně jako Rybicki and Hummer (1991) jako součást numerického formálního řešení.

Iterační proces lze ještě více urychlit (někdy za cenu stability) nějakou numerickou extrapolací (např. Ng, 1974).

Další iterační metody

- successive overrelaxation method (SOR) – Trujillo Bueno and Fabiani Bendicho (1995)
- FBILI - A Forth-and-Back Implicit Λ -Iteration (Atanacković-Vukmanović et al., 1997)

10.3 Mnohohladinový atom

- pro zjednodušení – planparalelní geometrie
- soustava rovnic kinetické rovnováhy – celkem L rovnic

$$A \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B} \quad (9.53)$$

hledáme obsazení L explicitních hladin, $\mathbf{n} = (n_l), l = 1, \dots, L$

–1 rovnice pro každý atom kvůli lineární závislosti rovnic

+1 uzavírací rovnice pro referenční atom svazující všechny uvažované atomy (rovnice pro počet částic nebo rovnice elektrické neutrality)

+1 uzavírací rovnice pro každý další atom

koeficienty rate matice A závisejí na střední intenzitě záření J_ν

- rovnice přenosu záření pro střední intenzitu

$$\frac{d^2(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu \quad (3.41)$$

opacita (vydatnost) v rovnici přenosu záření závisí na obsazení energetických hladin atomů \mathbf{n} , ty získáme řešením (9.53)

- Eddingtonovy faktory f_ν^K určíme řešením rovnice přenosu se Schusterovými proměnnými (6.50) – popsáno v kapitole 7.5.2
- použijeme diskretizaci
 - F frekvenčních bodů (viz kapitola 6.3.1.3), $f = 1, \dots, F$
 - D hloubkových bodů (viz kapitola 6.3.1.1) v případě jednorozměrného prostředí, $d = 1, \dots, D$
 - celkem F hloubkově diskretizovaných rovnic pro F frekvenčních bodů v (9.53) integrály přes frekvence lichoběžníkovou metodou
- iterační postup $(J_f) \rightarrow (n_l) \rightarrow (J_f) \rightarrow (n_l) \rightarrow J(f) \rightarrow \dots$ je v podstatě Λ -iterace \Rightarrow nepoužitelný
- soustavu rovnic (3.41) a (9.53) je třeba řešit současně pro $n_l, l = 1, \dots, L$ a $J_\nu \forall \nu$ v celém prostředí (například v atmosféře)

10.3.1 Řešení mnohohladinového atomu metodou úplné linearizace

Řešení soustavy tvořené rovnicemi (3.41) a (9.53) hledáme v nějaké diskrétní reprezentaci hloubkových bodů, frekvencí a směrů šíření záření. Tuto soustavu je možné řešit podobně jako v kapitole 4.3.1 linearizací

- řešíme
 - L rovnic kinetické rovnováhy
(počet odpovídá počtu explicitně uvažovaných energetických hladin)
 - F rovnic přenosu záření
(počet vyplývá ze zvolené frekvenční diskretizace)
- formálně zavedeme vektor neznámých (koncentrací energetických stavů a středních intenzit záření ve frekvenčních bodech) jako $\psi = (n_i, J_f)$
($i = 1, \dots, L, f = 1, \dots, F$)
- formálně zapíšeme soustavu řešených rovnic (rovnic přenosu záření a rovnic kinetické rovnováhy)

$$f(\psi) = 0 \tag{10.33}$$

- hledáme řešení ψ iteračně

- necht' máme (po n -té iteraci) nepřesné řešení této soustavy rovnic označíme ho $\boldsymbol{\psi}^{(n)} = (n_i^{(n)}, J_f^{(n)})$

- hledáme přesnější řešení ve tvaru $\boldsymbol{\psi}^{(n+1)} = \boldsymbol{\psi}^{(n)} + \delta\boldsymbol{\psi}$
jinak zapsáno $(n_i^{(n+1)}, J_f^{(n+1)}) = (n_i^{(n)} + \delta n_i, J_f^{(n)} + \delta J_f)$
aby

$$f(\boldsymbol{\psi}^{(n+1)}) = f(\boldsymbol{\psi}^{(n)} + \delta\boldsymbol{\psi}) = 0$$

- použijeme první řád Taylorova rozvoje (\Rightarrow název linearizace)

$$f(\boldsymbol{\psi}^{(n)}) + \frac{\partial f(\boldsymbol{\psi}^{(n)})}{\partial \boldsymbol{\psi}} \delta\boldsymbol{\psi} = 0 \quad (10.34)$$

- rozepíšeme všechny veličiny závislé na linearizovaných neznámých, například opacita $\chi_f^{(n+1)} = \chi_f^{(n)} + \delta\chi_f$, kde

$$\delta\chi_f = \sum_{i=1}^L \frac{\partial \chi_f^{(n)}}{\partial n_i} \delta n_i + \sum_{j=1}^F \frac{\partial \chi_f^{(n)}}{\partial J_j} \delta J_j$$

podobně pro další veličiny (emisivita, vydatnost, ...)

- nakonec vyjádříme z (10.34)

$$\delta\boldsymbol{\psi} = - \left[\frac{\partial f(\boldsymbol{\psi}^{(n)})}{\partial \boldsymbol{\psi}} \right]^{-1} f(\boldsymbol{\psi}^{(n)}) \quad (10.35)$$

- $\frac{\partial f(\boldsymbol{\psi}^{(n)})}{\partial \boldsymbol{\psi}}$ je matice (každá složka vektoru $f(\boldsymbol{\psi}^{(n)})$ se derivuje podle každé nezávislé proměnné z $\boldsymbol{\psi}$)

- (10.34) je soustava lineárních rovnic pro $(\delta n_i, \delta J_f)$, řešíme ji iterativně:

1. známe řešení $\boldsymbol{\psi}^{(n)}$, které není přesné
2. řešíme soustavu lineárních rovnic (10.34) pro $\delta\boldsymbol{\psi} = (\delta n_i, \delta J_f)$, řešení je vyjádřené v (10.35)
3. provedeme korekce: $n_i^{(n+1)} = n_i^{(n)} + \delta n_i, J_f^{(n+1)} = J_f^{(n)} + \delta J_f$

4. určíme nejvyšší relativní změnu iterovaných veličin

$$\varepsilon = \max \left(\max_l \left| \frac{n_l^{(n+1)} - n_l^{(n)}}{n_l^{(n)}} \right|, \max_f \left| \frac{J_f^{(n+1)} - J_f^{(n)}}{J_f^{(n)}} \right| \right)$$

5. pokud $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ (požadovaná přesnost), pokračujeme bodem 1, v opačném případě máme výsledek

- pokud je počáteční hodnota $\psi^{(0)}$ dostatečně blízko řešení, postup konverguje kvadraticky; relativní chyba ε (*fractional error*) se kvadraticky zmenšuje ($\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^4, \dots$)
- při problémech s konvergencí může pomoci
 - v kroku 3 iteračního postupu provést korekci jen pro J_f ;
poté $n_i^{(n+1)}$ určit řešením rovnic kinetické rovnováhy (9.53) pro zadané pole záření
 - provést navíc několik lambda iterací mezi iteračními cykly linearizace (tím se změní hodnoty $\psi^{(n+1)}$)
- mezi jednotlivými iteračními cykly vždy provedeme formální řešení rovnice přenosu záření (tím se změní hodnoty $J_f^{(n+1)}$)

autoři této metody pro modelování hvězdných atmosfér: Auer and Mihalas (1969)

10.3.2 Řešení pomocí urychlené Λ -iterace

použijeme monochromatický Λ - operátor (pro úplnou frekvenční redistribuci můžeme)

- iterační schéma pro určení střední intenzity

$$J_\nu^{(n+1)} = \Lambda_\nu^* [S_\nu^{(n+1)}] + (\Lambda_\nu - \Lambda_\nu^*) [S_\nu^{(n)}]. \quad (10.36)$$

- ve vztazích pro četnosti zářivých přechodů (9.35) v rovnicích kinetické rovnováhy dosadíme za střední intenzitu záření z rovnice (10.36)

$$R_{lu} = 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} (\Lambda_\nu^* [S_\nu^{(n+1)}] + \Delta J_\nu^{(n)}) d\nu.$$

$$R_{ul} = 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + (\Lambda_\nu^* [S_\nu^{(n+1)}] + \Delta J_\nu^{(n)}) \right) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu. \quad (10.37)$$

kde $\Delta J_\nu^{(n)} = (\Lambda_\nu - \Lambda_\nu^*) [S_\nu^{(n)}]$ nazýváme **korekční člen**

- rovnice kinetické rovnováhy (9.53) budou nelineární v n_i , linearizujeme je

$$\left(A + \frac{\partial A}{\partial \mathbf{n}} \delta \mathbf{n} \right) \cdot (\mathbf{n} + \delta \mathbf{n}) = B + \frac{\partial B}{\partial \mathbf{n}} \delta \mathbf{n} \quad (10.38)$$

- rovnici přenosu záření nelinearizujeme, záření je zahrnuto pomocí přibližného operátoru Λ^* přesná hodnota se dopočítá z korekčního členu použitého na *minulou* iteraci
- postupujeme iterativně:

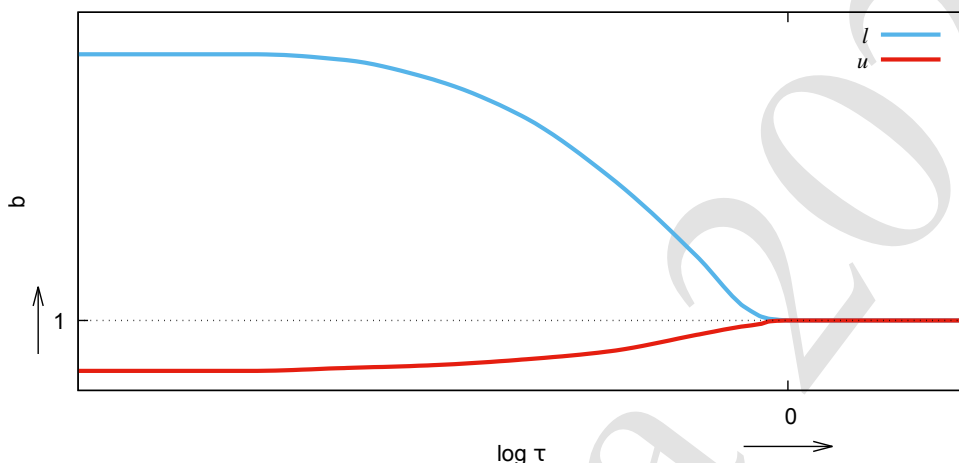
1. známe řešení $(n_i^{(n)})$, které není přesné
2. pro $n_i^{(n)}$ provedeme formální řešení rovnice přenosu záření a spočteme korekční členy v rovnici (10.36): $\Delta J_\nu^{(n)} = (\Lambda - \Lambda^*) S_\nu^{(n)}$, pro počáteční odhad položíme $S_\nu^{(0)} = B_\nu$
3. řešíme linearizované rovnice kinetické rovnováhy pro δn_i
4. provedeme korekci $n_i^{(n+1)} = n_i^{(n)} + \delta n_i$
5. určíme nejvyšší relativní změnu iterovaných veličin

$$\varepsilon = \max_i \left| \frac{n_i^{(n+1)} - n_i^{(n)}}{n_i^{(n)}} \right|$$

6. pokud $\varepsilon > \varepsilon_{\max}$ (požadovaná přesnost), pokračujeme bodem 1, v opačném případě máme výsledek
- užití urychlené lambda iterace (ALI)
 - snižuje velikost invertovaných matic z rozměru $(L + F) \times (L + F)$ na $L \times L$, \Rightarrow snižuje čas potřebný na jednu iteraci
 - zvyšuje potřebný počet iterací
 - výsledek – urychlení výpočtu
 - lze použít další urychlovací metody (například Ng, 1974)

10.4 Základní NLTE efekty v polonekonečné atmosféře

V této části se podrobněji podíváme na některé důsledky NLTE přístupu na obsazení energetických hladin v polonekonečném prostředí, kde ve velkých optických hloubkách je popis pomocí LTE aproximace správný, ale ve vnějších vrstvách nikoli (podle Hubeny and Mihalas, 2014, kapitola 14.6).



Obrázek 10.2: Příklad možné závislosti b -faktorů dvouhladinového atomu na optické hloubce čáry (l – spodní hladina, u – horní hladina).

10.4.1 NLTE efekty v čarách

Dvouhladinový atom Vydátost pro dvouhladinový atom podle (7.4), s využitím b -faktorů (9.9) a Boltzmannovy excitační rovnice (4.5) je

$$S_L = \frac{2h\nu_{lu}^3}{c^2} \frac{1}{\frac{b_l}{b_u} \exp\left(\frac{h\nu_{lu}}{kT}\right) - 1} = \frac{b_u}{b_l} B(\nu_{lu}, T) \frac{1 - \exp\left(-\frac{h\nu_{lu}}{kT}\right)}{1 - \frac{b_u}{b_l} \exp\left(-\frac{h\nu_{lu}}{kT}\right)}. \quad (10.39)$$

kde l označuje spodní hladinu, u označuje horní hladinu a $B(\nu_{lu}, T)$ je Planckova funkce (4.45). Můžeme-li zanedbat stimulovanou emisi (pro $\exp\left(-\frac{h\nu_{lu}}{kT}\right) \ll 1$), rovnice se zjednoduší na

$$S_L \approx \frac{b_u}{b_l} B(\nu_{lu}, T). \quad (10.40)$$

Pro optické hloubky menší než termalizační hloubka čáry ($\tau < \tau_{th}$, kapitola 10.1.1) je vydátost menší než Planckova funkce ($S_L < B$). Na povrchu navíc platí přesný vztah (10.21), z něhož vyplývá

$$\frac{b_u}{b_l} \approx \sqrt{\varepsilon} \ll 1 \quad (10.41)$$

pokud je pravděpodobnost zničení fotonu (10.6) malá. Pokud je však excitační energie $E_{lu} = h\nu_{lu}$ menší než tepelná energie prostředí (kT), zvýší se četnost srážkových procesů a odchylky obsazení uvažovaných hladin od termodynamické rovnováhy budou malé.

V oblastech, kde jsou četnosti srážkových přechodů dvouhadinového atomu menší než četnosti zářivých přechodů, způsobuje přenos záření ve spektrální čáře stav, kdy má spodní hladina přechodu vyšší obsazení než v případě platnosti termodynamické rovnováhy (říkáme, že hladina je *přepopulována* – *overpopulated*) a horní hladina naopak nižší obsazení (je *podpopulována* – *underpopulated*). Excitace a stimulovaná deexcitace jsou totiž úměrné počtu dopadajících fotonů, spontánní deexcitace však ne. Pole záření cestou z hvězdy slábne, což vede ke snížení četnosti zářivých excitací a stimulovaných deexcitací, četnost spontánních deexcitací není zářením ovlivněna. To vede k podpopulování horní hladiny (viz obr. 10.2).

Tříhadinový atom je nejjednodušším zobecněním předcházejícího případu. Jednotlivé hladiny označíme čísly 1, 2 a 3 podle rostoucí excitační energie. Chování tříhadinového atomu se bude lišit podle toho, jakých poměrných hodnot nabývají energie jednotlivých hladin.

V případě, že se excitační energie hladin 2 a 3 ze základní hladiny (1) nebudou příliš lišit, budou srážkové přechody mezi hladinami 2 a 3 výrazně čtenější než zářivé. Po zanedbání četností zářivých přechodů mezi těmito dvěma hladinami můžeme psát $n_2 C_{23} \approx n_3 C_{32}$, přechod mezi hladinami 2 a 3 bude tedy v detailní rovnováze. Protože vždy platí vztah (9.39), dostaneme z definice b -faktorů (9.9) rovnost $b_2 \approx b_3$. Mezi koncentracemi hladin 2 a 3 bude platit vztah

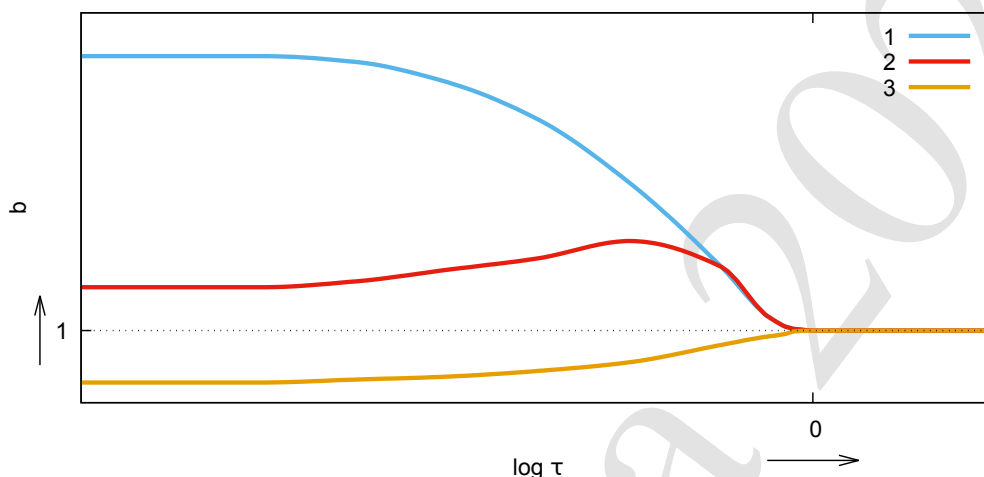
$$\frac{n_2}{n_3} = \frac{g_2}{g_3} \exp\left(\frac{E_{23}}{kT}\right) \approx \frac{g_2}{g_3}$$

(excitační energie E_{23} z hladiny 2 do hladiny 3 je malá). Můžeme definovat společnou hladinu $\overline{23}$, jejíž populaci $n_{\overline{23}}$, statistickou váhu $g_{\overline{23}}$ a Einsteinův koeficient $A_{\overline{23},1}$ definujeme jako

$$\begin{aligned} n_{\overline{23}} &= n_2 + n_3, \\ g_{\overline{23}} &= g_2 + g_3, \\ A_{\overline{23},1} &= \frac{g_2 A_{21} + g_3 A_{31}}{g_2 + g_3}. \end{aligned} \tag{10.42}$$

Pak také platí $n_{\overline{23}} A_{\overline{23},1} = n_2 A_{21} + n_3 A_{31}$. Hladina $\overline{23}$ se pak chová jako horní hladina u v předchozím případě dvouhadinového atomu.

Výše uvedený postup zavedení společných hladin se často využívá ke snížení počtu řešených hladin atomů při studiu multipletů nebo i při zavádění superhadin



Obrázek 10.3: Příklad možné závislosti b -faktorů tříhladinového atomu na optické hloubce.

(středních hladin zjednodušujících velmi složité modely atomů). Nutné je však splnění podmínky detailní rovnováhy mezi jednotlivými hladinami, zde označenými 2 a 3.

V případě, že pro excitační energie hladin neplatí $E_{12} \approx E_{13}$, je situace jiná. Pokud jsou excitační energie E_{12} a E_{23} menší než tepelná energie prostředí, budou odchylky obsazení uvažovaných hladin od termodynamické rovnováhy malé. Pokud však budou zmíněné excitační energie větší než tepelná energie prostředí, je situace zajímavější. Pro velké hloubky je optická hloubka všech uvažovaných přechodů (τ_{12} , τ_{13} a τ_{23}) větší než jejich termalizační hloubka, proto jsou obsazení všech hladin blízka rovnovážné hodnotě ($b_1 \approx 1$, $b_2 \approx 1$, $b_3 \approx 1$). Obsazení základní hladiny je větší než obsazení vyšších hladin ($n_1 \gg n_j$, $j = 2, 3$), opacita (a tedy i optická hloubka) přechodů ze základní hladiny je vyšší než pro přechod $2 \leftrightarrow 3$ ($\tau_{23} < \tau_{12}$, $\tau_{23} < \tau_{13}$). Postupujeme-li k menším hloubkám, optická hloubka τ_{23} klesne pod termalizační hodnotu nejdříve. Podobně jako pro dvouhladinový atom to způsobí snížení obsazení n_3 vzhledem k rovnovážné hodnotě ($b_3 < 1$) a zvýšení obsazení n_1 a n_2 (jsou vůči sobě v detailní rovnováze) vzhledem k jejich rovnovážným hodnotám ($b_1 > 1$, $b_2 > 1$). Pro ještě menší hloubky klesne i optická hloubka τ_{13} pod svou termalizační hodnotu a efekt snížení b_3 a

zvýšení b_1 a b_2 ještě zesílí (přechod mezi hladinami 1 a 2 je stále ještě v detailní rovnováze). Pro ještě nižší hloubky klesne i τ_{12} pod termalizační hodnotu, což způsobí další zvýšení b_1 a současně snížení b_2 (viz obr. 10.3). V kombinaci se zvýšením b_2 díky přechodu $2 \leftrightarrow 3$ to může v závislosti na atomárních parametrech vést jak k hodnotám $b_2 < 1$, tak i k hodnotám $b_2 > 1$ ve vnějších vrstvách. Na obrázku 10.3 je znázorněna pouze druhá z těchto možností.

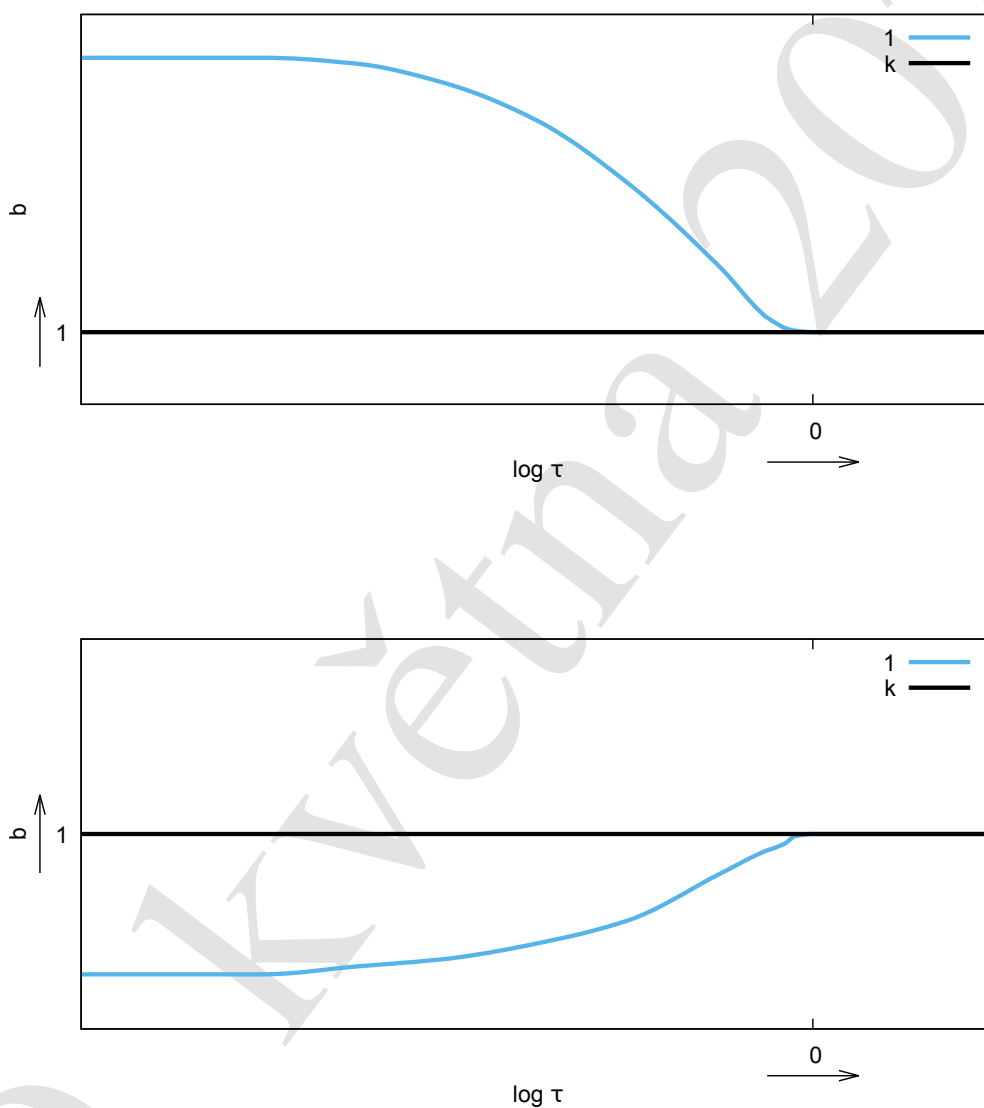
Mnohohladinový atom Pro atom s mnoha energetickým stavy se celkový vliv nerovnovážného rozdělení obsazení energetických hladin (NLTE efekt) získá jako výsledek „soutěže“ srážkových a zářivých procesů všech přechodů mezi energetickými stavy. Základní efekty byly popsány v předcházející části této kapitoly. Interakce v přechodech $l \leftrightarrow u$ s malou pravděpodobností zničení ($C_{lu} \ll R_{lu}$) způsobuje zvýšení obsazení spodní hladiny přechodu vzhledem k její rovnovážné hodnotě ($b_l > 1$) a snížení obsazení horní hladiny přechodu vzhledem k její rovnovážné hodnotě ($b_u < 1$). Pro hladiny l, u s blízkými excitačními energiemi naopak velmi často platí $C_{lu} \gg R_{lu}$. Pro ně srážkové procesy způsobují boltzmannovskou rovnováhu (popsanou rovnicí 4.5) mezi nimi. Takovými hladinami jsou například kromě hladin multipletů i hladiny s vysokým hlavním kvantovým číslem n . Kromě těchto limitních případů vztahů četností zářivých (R_{lu}) a srážkových (C_{lu}) přechodů mohou samozřejmě nastávat situace, kdy $C_{lu} \approx R_{lu}$. Všechny tyto efekty tvoří poměrně nepřehlednou skládku, jejíž výsledek lze v jeho úplnosti jen obtížně předpovědět. Výsledky získané řešením soustavy rovnic kinetické rovnováhy lze ale pomocí těchto efektů vysvětlit.

10.4.2 NLTE efekty pro kontinua

Přechody z vázaných stavů do volných (ionizace) a z volných do vázaných (rekombinace) nazýváme často přechody do a z kontinua. Můžeme je rozdělit podle opacity na přechody s velkou opacitou, které jsou i silným zdrojem záření a tím ovlivňují prostředí, v němž se nacházejí (**aktivní kontinua**), a na přechody s malou opacitou, které jsou poměrně slabým zdrojem záření a spíše jsou zářením pouze ovlivňovány (**pasivní kontinua**).

Aktivní kontinua jsou ionizační přechody vysoce zastoupených prvků. Pro případ atmosfér hvězd hlavní posloupnosti jsou to nejčastěji přechody vodíku a helia. Účinný průřez všech ionizačních přechodů je nulový pro frekvence nižší než je ionizační hrana a zhruba úměrný ν^{-3} pro vyšší frekvence. Velmi přibližně lze na tyto přechody pohlížet jako na široké spektrální čáry s poněkud podivným profilem. Protože výsledné vztahy pro vydatnost (10.40) a b -faktory (10.41) dvouhladinového atomu nezávisí na profilu čáry, můžeme je použít i pro aktivní kontinua.

10. ŘEŠENÍ NLTE PROBLÉMU



Obrázek 10.4: Příklad možné závislosti b -faktorů základní hladiny (1 – modrá čára) na optické hloubce vlivem ionizace. Faktor pro základní hladinu vyššího iontu (k) je roven 1. *Horní obrázek:* aktivní kontinua, *dolní obrázek:* pasivní kontinua.

Obsazení základní hladiny atomu bude vyšší než v rovnovážném případě ($b_1 > 1$) a obsazení základní hladiny vyššího ionizačního stupně (označíme ji k) bude mít nižší obsazení než v rovnovážném případě, což by znamenalo, že $b_k < 1$. Pokud se přidržíme definice LTE populací vzhledem k základní hladině vyššího iontu (5.22), musí být $b_k = 1$ a hodnota b_1 se tím ještě zvýší (viz obr. 10.4).

Pro danou hladinu je ionizační opacita nižší než opacita spektrálních čar. Pro případ hvězdných atmosfér to znamená, že se kontinua formují níže než spektrální čáry se stejnou spodní hladinou. Obsazení základní hladiny bude vykazovat nerovnovážné hodnoty $b_1 > 1$ už v oblasti formování kontinua, což je oblast, kde je optická hloubka v kontinuu přibližně rovna jedné.

Pasivní kontinua jsou ionizační přechody méně zastoupených prvků. Je to většina přechodů v kontinuu. Jsou typické poměrně malým příspěvkem k celkové opacitě, ale mají podstatný vliv na excitační a ionizační rovnováhu svých prvků. Přibližnou ionizační rovnováhu pro základní hladinu můžeme vyjádřit pomocí jednohladinového atomu s kontinuem (kapitola 9.5.1). Při zanedbání stimulované emise můžeme ionizační rovnováhu vyjádřit vztahem (9.60). Pro zanedbatelné četnosti srážkových přechodů dostaneme zjednodušený vztah (9.61). Aproximací celkového fotoionizačního účinného průřezu jeho hodnotou na ionizační hraně dostaneme pro odchylku obsazení základní hladiny od rovnovážného stavu b_1 vztah (9.62), který můžeme přibližně zapsat jako

$$b_1 = \frac{n_1}{n_1^*} \approx \frac{B(\nu_0, T)}{J(\nu_0)} \approx \frac{B(\nu_0, T)}{WB(\nu_0, T_R)}. \quad (10.43)$$

V tomto vztahu jsme vyjádřili intenzitu záření na povrchu atmosféry pomocí faktoru zředění W (9.1) a Planckovy funkce o teplotě T_R , což je teplota v hloubce, z níž záření vychází.

Odhadneme tuto hloubku i faktor zředění pomocí Eddingtonovy-Barbierovy relace (6.6). Na povrchu hvězdné atmosféry lze střední intenzitu vystupujícího záření (předpokládáme nulové záření ve směru dovnitř atmosféry) přibližně vyjádřit jako (ν_0 je frekvence ionizační hrany)

$$J(\nu_0, \tau_{\nu_0} \rightarrow 0) \approx \frac{1}{2} B \left(\nu_0, \tau_{\nu_0} = \frac{1}{2} \right), \quad (10.44)$$

kde jsme navíc aproximovali vydatnost pomocí Planckovy funkce. Odtud dostáváme $W = \frac{1}{2}$, $T_R = T(\tau_{\nu_0} = \frac{1}{2})$. Ve Wienově limitě (pro vysoké frekvence, rovnice 4.46) je Planckova funkce závislá na teplotě exponenciálně a s klesající teplotou rychle klesá. Teplota pro $\tau(\nu_0) \rightarrow 0$ (na povrchu hvězdy) je nižší než teplota pro $\tau(\nu_0) = \frac{1}{2}$ (místo, kde se formuje kontinuum), platí tedy i

$$B(\nu_0, T(\tau_{\nu_0} \rightarrow 0)) \ll \frac{1}{2} B \left(\nu_0, T \left(\tau_{\nu_0} = \frac{1}{2} \right) \right) = \frac{1}{2} B(\nu_0, T_R). \quad (10.45)$$

Ze vztahu (10.43) dostáváme $b_1 \ll 1$. Obsazení základní hladiny bude nižší než v případě termodynamické rovnováhy (viz obr. 10.4). S ohledem na NLTE efekty v čarách (kapitola 10.4.1) bude důsledkem nižší obsazení všech hladin iontu ($b_l < 1$) ve srovnání s rovnovážným rozdělením. Zvýšená ionizace je jedním ze základních NLTE efektů.

Kapitola 11

Přenos záření v pohybujícím se prostředí

Opustíme nyní předpoklad statického prostředí a zjednodušení planparalelní atmosféry a budeme předpokládat, že se studovaná hmota pohybuje rychlostí $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vzhledem k pozorovateli. Foton, který se šíří ve směru \mathbf{n} a jehož frekvence ve vztažné soustavě pozorovatele je ν , bude mít ve vztažné soustavě spojené s pohybující se hmotou frekvenci ν' , která je dopplerovsky posunutá. Za předpokladu $v \ll c$ můžeme psát

$$\nu' = \nu \left(1 - \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} \right). \quad (11.1)$$

Vztahy pro dopplerovský posun pro libovolně velké rychlosti lze nalézt například v knize Castor (2004, rovnice 6.9 a 6.10).

Posun frekvence fotonu znamená, že foton v místě, kde se hmota pohybuje rychlostí $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, „potká“ opacitu odpovídající posunuté frekvenci, kde může mít jinou hodnotu. Pro opacitu v kontinuu to nepředstavuje vážný problém, protože závislost opacity v kontinuu na frekvenci je většinou slabá. V čáře se však opacita mění s frekvencí velmi rychle, někdy až o několik řádů při malé změně frekvence. V důsledku vztahu (11.1) se opacita i emisivita vyjádřené v soustavě pozorovatele stávají i úhlově závislé. Konkrétně závisejí na úhlu, který svírá směr šíření záření \mathbf{n} s vektorem lokální rychlosti $\mathbf{v}(\mathbf{r})$. Tyto vlastnosti je třeba vzít při řešení rovnice přenosu záření v úvahu. Máme v zásadě dvě možnosti, jak to udělat v závislosti na souřadné soustavě, v níž budeme řešit rovnici přenosu záření. Rovnici můžeme řešit buď v soustavě pozorovatele (*observer frame*) nebo v soustavě pohybující se s prostředím (*comoving frame, CMF*).

V prvním případě je rovnice přenosu poměrně jednoduchá (viz rovnice 3.8), při jejím řešení je však třeba zahrnout anizotropní opacitu a v případě numerického řešení vzniká nutnost použití značně vyššího počtu frekvenčních bodů díky

různému dopplerovskému posunu spektrálních čar v místech s rozdílnou makroskopickou rychlostí.

V případě řešení ve spolupohybující se soustavě tyto problémy nenastávají, rovnice přenosu záření získá složitější tvar. Objevuje se v ní například derivace intenzity podle frekvence (Castor, 2004, rovnice 6.83),

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{n}, \nu)}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) - \frac{1}{c} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \nu \frac{\partial I(\mathbf{n}, \nu)}{\partial \nu} \\ - \frac{1}{c} \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} (1 - \mathbf{n}\mathbf{n}) \cdot \nabla_{\mathbf{n}} I(\mathbf{n}, \nu) + \frac{3}{c} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) I(\mathbf{n}, \nu) \\ = \eta(\nu) - \chi(\nu) I(\mathbf{n}, \nu) \end{aligned} \quad (11.2)$$

V této rovnici jsme pro frekvenci ve spolupohybující se soustavě použili označení bez ' (přešli jsme od ν' k ν) a toto značení budeme používat ve zbytku této kapitoly. V nerelativistických prouděních můžeme zanedbat člen s úhlovou derivací specifické intenzity záření (obsahující $\nabla_{\mathbf{n}} I$) a dilatační člen (obsahující I bez derivace). Rovnice (11.2) se tak zjednoduší na

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{\partial I(\mathbf{n}, \nu)}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) - \frac{1}{c} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \nu \frac{\partial I(\mathbf{n}, \nu)}{\partial \nu} \\ = \eta(\nu) - \chi(\nu) I(\mathbf{n}, \nu). \end{aligned} \quad (11.3)$$

Po zanedbání časové derivace (předpokladu stacionárních proudění) dostaneme rovnici

$$\mathbf{n} \cdot \nabla I(\mathbf{n}, \nu) - \frac{1}{c} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \nu \frac{\partial I(\mathbf{n}, \nu)}{\partial \nu} = \eta(\nu) - \chi(\nu) I(\mathbf{n}, \nu). \quad (11.4)$$

což je nejčastěji používaná rovnice přenosu záření ve spolupohybující se souřadné soustavě při studiu hvězdných atmosfér.

11.1 Sobolevova aproximace

V případě prostředí s velkými rychlostními gradienty lze řešení rovnice přenosu záření ve spektrální čáře významně zjednodušit. Pro velké rychlostní gradienty $\nabla \mathbf{v}$ je druhý člen na levé straně rovnice (11.4) mnohem větší než první, můžeme ho také zanedbat,

$$-\frac{1}{c} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) \nu \frac{\partial I(\mathbf{n}, \nu)}{\partial \nu} = \eta(\nu) - \chi(\nu) I(\mathbf{n}, \nu) \quad (11.5)$$

Dále předpokládejme, že jediným zdrojem opacit je spektrální čára (opacita v kontinuu je nulová). Nechť má tato čára profil $\phi(\nu)$, který je „ostrý“ (se slabými křídly

čáry, například dopplerovský 5.60) a normalizovaný ($\int_0^\infty \phi(\nu) d\nu = 1$). Celkovou opacitu v čáře χ_L vyjádříme pomocí vztahů z kapitoly 5.1.1 jako

$$\chi_L = \frac{\pi e^2}{m_e c} g_l f_{lu} \left(\frac{n_l}{g_l} - \frac{n_u}{g_u} \right) \quad (11.6)$$

Pro frekvenčně závislou opacitu a emisivitu v čáře můžeme psát

$$\begin{aligned} \chi(\nu) &= \chi_L \phi(\nu) \\ \eta(\nu) &= \chi_L S_L \phi(\nu), \end{aligned} \quad (11.7)$$

kde S_L je vydatnost v čáře (7.4).

V dalších úvahách o interakci záření s hmotou ve spektrální čáře bez opacity v kontinuu využijeme existence velkých rychlostních gradientů. Při popisu v soustavě pozorovatele se v tomto případě interakce záření s hmotou omezuje na velmi malou prostorovou oblast v okolí rezonanční podmínky vyplývající z Dopplerova posunu. V sousedních místech absorbuje spektrální čára na jiných frekvencích. Velikost této malé oblasti je dána velikostí rychlostního gradientu a profilem spektrální čáry. Čím je rychlostní gradient větší, tím je oblast interakce menší a čím je profil spektrální čáry užší, tím je také tato oblast menší. Čím je oblast menší, tím je Sobolevova metoda řešení rovnice přenosu záření přesnější.

Při popisu ve spolupohybující se soustavě se tento Dopplerův posun transformuje do změny frekvence záření, která je popsána derivací $\partial I / \partial \nu$. Změna frekvence (daná Dopplerovým posunem), na níž absorbuje hmota v rezonanční oblasti, se transformuje do změny frekvence záření přes profil spektrální čáry. Resonanční oblast vymezená v soustavě pozorovatele prostorově je ve spolupohybující se soustavě vymezena frekvenčním intervalem. Řešení rovnice přenosu záření v Sobolevově aproximaci se proto převede na výpočet integrálu rovnice (11.5) přes profil spektrální čáry. Počáteční podmínka pro specifickou intenzitu záření na okraji oblasti se změní na počáteční podmínku na kraji profilu spektrální čáry, tuto intenzitu označíme I_c .

Zavedeme proměnnou y pro integrál profilu, jejíž hodnota se bude měnit od 0 na jednom konci čáry do 1 na druhém konci čáry, přičemž konec čáry s $y = 0$ je ten, kde je definována počáteční intenzita I_c ,

$$y = \int_\nu^\infty d\nu' \phi(\nu') \quad \text{pro} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} > 0 \quad (11.8a)$$

$$y = \int_{-\infty}^\nu d\nu' \phi(\nu') \quad \text{pro} \quad \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} < 0 \quad (11.8b)$$

Pro rovnici (11.8a) je I_c definována v $\nu \rightarrow \infty$, pro rovnici (11.8b) v $\nu \rightarrow -\infty$. Čára se vlivem Dopplerova posunu pohybuje ve spektru (odpovídá to derivaci

$\partial I/\partial \nu$), proto se proměnná y mění od 0 na přicházející straně čáry do 1 na odcházející.

Za předpokladu, že je spektrální čára úzká, můžeme v rovnici (11.5) nahradit činitel ν centrální frekvencí čáry ν_0 . Substitucí y za ν v (11.5) a s využitím vztahů (11.7) a (11.8) dostaneme

$$\frac{\nu_0}{c} |\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| \frac{dI(\mathbf{n}, y)}{dy} = \chi_L [S_L - I(\mathbf{n}, y)]. \quad (11.9)$$

Zavedeme **Sobolevovu optickou hloubku**

$$\tau(\mathbf{n}) = \frac{\chi_L c}{\nu_0 |\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|}. \quad (11.10)$$

Integrací rovnice (11.9) od 0 do y' s okrajovou podmínkou $I(\mathbf{n}) = I_c(\mathbf{n})$ pro $y = 0$ dostaneme pro změnu intenzity $I(\mathbf{n}, y')$ přes profil čáry

$$I(\mathbf{n}, y') = I_c(\mathbf{n}) \exp[-\tau(\mathbf{n})y'] + S_L \{1 - \exp[-\tau(\mathbf{n})y']\} \quad (11.11)$$

Integrací vztahu (11.11) v mezích $0 < y' < 1$ (přes profil čáry) dostaneme pro specifickou intenzitu celé čáry ($\bar{I}(\mathbf{n}) = \int_0^1 I(\mathbf{n}, y') dy'$) ve směru \mathbf{n}

$$\bar{I}(\mathbf{n}) = I_c(\mathbf{n})\beta(\mathbf{n}) + S_L [1 - \beta(\mathbf{n})], \quad (11.12)$$

kde

$$\beta(\mathbf{n}) = \frac{1 - \exp[-\tau(\mathbf{n})]}{\tau(\mathbf{n})}. \quad (11.13)$$

Integrací (11.12) přes úhly dostaneme střední intenzitu záření celé čáry

$$\bar{J} = \frac{1}{4\pi} \oint d\varpi I_c(\mathbf{n})\beta(\mathbf{n}) + S_L (1 - \beta), \quad (11.14)$$

kde β je **Sobolevova pravděpodobnost úniku** fotonu,

$$\beta = \frac{1}{4\pi} \oint d\varpi \beta(\mathbf{n}) = \frac{1}{4\pi} \oint d\varpi \frac{1 - \exp[-\tau(\mathbf{n})]}{\tau(\mathbf{n})}. \quad (11.15)$$

Jak již bylo v úvodu této kapitoly řečeno, pro užití Sobolevovy aproximace (Sobolev, 1947) je nutný velký rychlostní gradient v prostředí. Zabezpečíme to tím, že se vlivem Dopplerova posuvu spektrální čára posune ve frekvenci tak, že lze přenos záření v čáře řešit pouze lokálně přes malou oblast určenou **rezonanční podmínkou**

$$\frac{\nu - \nu_0}{\nu_0} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}}{c} = \frac{v_l}{c}. \quad (11.16)$$

Tuto rovnici diferencujeme,

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{1}{c} \frac{dv_l}{dl} \Delta l. \quad (11.17)$$

Rovnice (11.17) spojuje frekvenční interval $\Delta\nu$ záření, které interaguje s hmotou v dané spektrální čáře, se vzdáleností Δl , na které se změní makroskopická rychlost (velocity scale height). Frekvenční interval $\Delta\nu$ je šířka absorpčního profilu čáry. Vhodným přiblížením této veličiny je dopplerovská pološířka $\Delta\nu_D$ (5.51). Vzdálenost Δl popisuje velikost oblasti, v níž dochází k interakci hmoty a záření v dané spektrální čáře. Této oblasti se často říká rezonanční oblast. Její velikost označíme Δl_S a nazveme ji *Sobolevovou délkou*. Platí pro ni vztah

$$\Delta l_S = \frac{c\Delta\nu_D}{\nu_0 \frac{dv_l}{dl}} \quad (11.18)$$

Derivaci v rovnici (11.18) můžeme *pro velké rychlostní gradienty* napsat přibližně pomocí vztahu

$$\frac{dv_l}{dl} \approx \frac{v_0}{l_0} \quad (11.19)$$

kde v_0 je typická rychlost prostředí, což je rychlost expanze v daném místě, a l_0 je typická délka prostředí (typical length scale). Vyjádříme dopplerovskou pološířku pomocí tepelné rychlosti (5.51) a gradient rychlosti ve směru šíření záření vztahem (11.19), dosadíme do (11.18) a dostaneme kritérium použitelnosti Sobolevovy aproximace

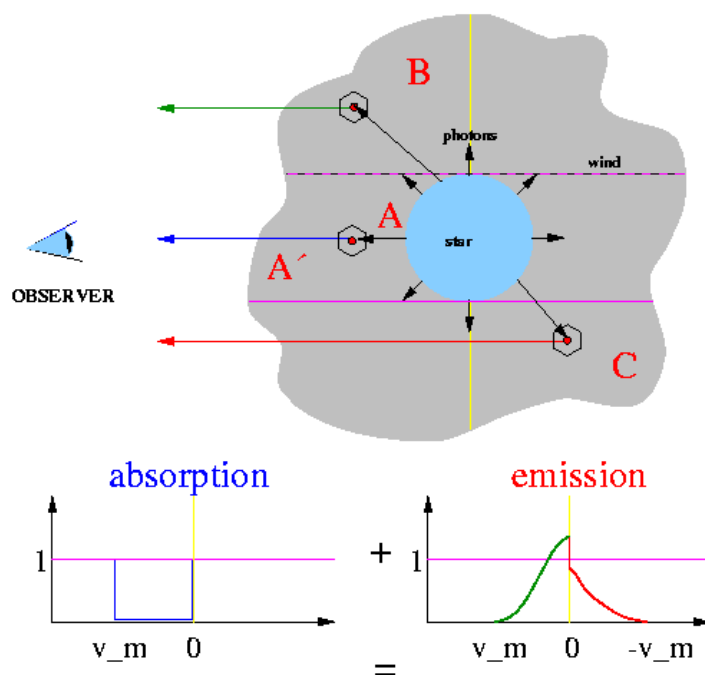
$$\frac{\Delta l_S}{l_0} \approx \frac{v_{th}}{v_0}. \quad (11.20)$$

Rezonanční oblast musí být malá ve srovnání s charakteristickou délkou prostředí, což se stane v případě, že rychlost prostředí je výrazně vyšší, než je tepelná rychlost prostředí, která až na faktor $\sqrt{2}$ odpovídá izotermické rychlosti zvuku ($v_s = v_{th}/\sqrt{2}$). Proto se někdy říká Sobolevově aproximaci také nadzvuková aproximace.

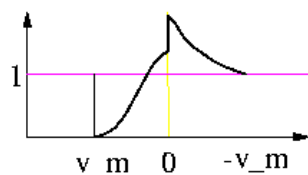
P Cyg profil

P Cyg profil u expandujících obálek hvězd – vysvětlení podle obrázku 11.1

P Cygni profile formation



P Cygni Profil



Obrázek 11.1: Schéma formování P Cygni profilu. Obrázek z <https://www.ifa.hawaii.edu/users/kud/windsfromhotstars/plots/pcyg.gif>. (zkopírováno 16)

Kapitola 12

Přenos záření metodou Monte Carlo

- není to přímé řešení rovnice přenosu záření
- studium záření jako souboru fotonů
- 3 základní kroky
 1. vypuštění fotonových balíčků (photon packets)
 2. sledování průchodu fotonu prostředím
 3. po opuštění prostředí se zaznamená, kde a jak foton prostředí opustil

rozdělovací funkce pravděpodobnosti $p(x) dx$ – pravděpodobnost, že x leží v $\langle x, x + dx \rangle$

kumulativní pravděpodobnostní distribuční funkce

$$\int_a^{x_0} p(\xi) d\xi = \psi(x_0) \quad (12.1)$$

a platí $0 \leq \psi(x_0) \leq 1$, $\int_a^b p(\xi) d\xi = 1$

náhodné číslo ζ se vybírá jako $\zeta = \psi(x_0)$

- z formálního řešení rovnice přenosu záření pravděpodobnost, že foton nebude absorbován (6.31):

$$p(\tau) = e^{-\tau}. \quad (6.31)$$

pravděpodobnost, že foton bude absorbován (6.32):

$$p_a(\tau) = 1 - e^{-\tau}. \quad (6.32)$$

rovnice (6.32) je vlastně kumulativní pravděpodobnostní distribuční funkce

- vybíráme náhodné číslo ζ , které definuje optickou hloubku τ_ζ tu určíme ze vztahu (získáme logaritmováním rovnice 6.32)

$$\tau_\zeta = -\ln(1 - \zeta) \quad (12.2)$$

τ_ζ určuje náhodně vybranému fotonu optickou dráhu, kam až může doletět τ potom počítána („sčítána“) z opacity podél dráhy fotonu když foton proletí dráhu τ_ζ , interaguje s hmotou typ interakce vybírán náhodně podle relativního účinného průřezu

- vypouštění fotonů
rozdělení $I(\nu)$ často popsáno funkcí, která není analytická (například výsledek numerického výpočtu syntetického spektra)

metoda accept-reject – příklad

kolem grafu funkce $I(\nu)$ sestrojíme obdélník

1. náhodně vybíráme body o souřadnicích $[I_{\zeta_1}, \nu_{\zeta_2}]$ (ζ_1 a ζ_2 jsou náhodná čísla)
2. pro $I_{\zeta_1} \leq I(\nu_{\zeta_2})$ (bod je pod grafem funkce) je vypuštěn foton o frekvenci ν_{ζ_2}
3. pro $I_{\zeta_1} > I(\nu_{\zeta_2})$ opakujeme výběr (1.)

metoda accept/reject je pomalejší než užití kumulativní pravděpodobnostní distribuční funkce

- metoda Monte Carlo je pomalá pro přenos záření v opticky tlustém prostředí (příliš mnoho interakcí)
- přehled Monte Carlo přenosu záření – například Whitney (2011)

Část II

Modely hvězdných atmosfér

Kapitola 13

Základní rovnice modelů atmosfér

Zdánlivě jednoduchá úloha přímého určení vlastností hvězdné atmosféry z jejího pozorovaného spektra (někdy nazývaná inverzní problém) je příliš složitá až neřešitelná, navíc nemusí být jednoznačná. Místo ní se řeší úloha určení vystupujícího záření pro definované hvězdné parametry. Výsledek takového teoretického modelování se porovná s pozorováním a na základě shody či neshody se dělají závěry o fyzikálních podmínkách ve hvězdné atmosféře a jejích vlastnostech.

Úloha modelování hvězdných atmosfér spočívá v konstrukci modelu atmosféry ze zadaných globálních hvězdných parametrů – efektivní teploty T_{eff} , zářivosti (luminosity) L_* , hvězdného poloměru R_* , hmotnosti hvězdy M_* , gravitačního zrychlení na povrchu hvězdy g_* , chemického složení hvězdné atmosféry (často nepřesně nazývaného metalicita), případně ještě četnosti ztráty hmoty \dot{M} , koncové rychlosti hvězdného větru v_∞ a dalších parametrů. Výsledkem modelování je určení prostorové závislosti fyzikálních veličin, například teploty $T(\mathbf{r})$, hustoty $\rho(\mathbf{r})$, elektronové hustoty $n_e(\mathbf{r})$, makroskopické rychlosti $\mathbf{v}(\mathbf{r})$, pole záření $J_\nu(\mathbf{r})$ nebo obsazení energetických hladin atomů a molekul $n_i(\mathbf{r})$. Tohoto cíle se dosahuje řešením soustavy rovnic popisujících hvězdnou atmosféru, jako jsou rovnice přenosu záření, pohybové rovnice, rovnice energetické rovnováhy, rovnice kontinuity, stavové rovnice a rovnice statistické rovnováhy. Určíme-li takto strukturu atmosféry, můžeme spočítat záření z ní vystupující.

Základní vlastnosti hvězdné atmosféry

Hvězdnou atmosféru můžeme zjednodušeně popsat jako směs částic hmoty a záření. Tyto dvě základní součásti na sebe vzájemně působí. Vzájemná interakce částic (elektronů, atomů a molekul) a jejich interakce se zářením je poměrně komplikovaný proces studovaný kvantovou fyzikou.

Hvězdná atmosféra je přechod od hustého prostředí uvnitř hvězdy k prostředí významně zředěnému. I když se částice záření (fotony) pohybují rychlostí světla,

je jejich cesta z nitra hvězdy ven velmi dlouhá právě díky různým interakcím s hmotou, které jsou výrazně častější v hustém prostředí, kde je střední volná dráha fotonu velmi malá a k interakcím dochází téměř lokálně. Naopak v řídkém prostředí dochází k tomu, že střední volná dráha fotonu roste, což umožňuje interakci mezi velmi vzdálenými místy. Tato interakce na velké vzdálenosti je pro hvězdné atmosféry typická a umožňuje tak vznik zajímavým efektům, které jsou v laboratorním prostředí na Zemi neuskutečnitelné. Prostředí hvězdných atmosfér je nejlépe studovaným případem vlivu záření na hmotu. Jedním ze zajímavých efektů je přenos hybnosti od fotonů ke hmotě, což vede k urychlování jednotlivých částic a podle dalších podmínek ve hvězdné atmosféře k zářivé difúzi nebo k vzniku hvězdného větru.

Omezující vlastností hvězdných atmosfér je fakt, že nemůžeme provádět žádné experimenty. Jsme při jejich studiu odkázáni na pozorování toho, co nám připravila příroda. Množství hvězd na obloze je však ohromné, máme tak pořád dostatek materiálu pro výzkum za různých fyzikálních podmínek a současně s tím i spoustu dosud nevyřešených problémů.

Modelování hvězdných atmosfér

základní globální parametry –

R_* – *poloměr hvězdy*

M_* – *hmotnost hvězdy*

L_* – *zářivost hvězdy* integrací celkového zářivého toku (2.20) přes povrch hvězdy ($\mathfrak{F}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$, viz rovnice 2.18) dostaneme celkovou zářivost hvězdy

$$L_*(t) = \int \mathfrak{F}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{S}$$

jako globální parametr je vhodnější časově nezávislá zářivost hvězdy (třeba jako střední hodnota časově závislé zářivosti)

$$L_* = \int \mathfrak{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (13.1)$$

T_{eff} – *efektivní teplota* hvězdy – teplota, kterou by hvězda měla, kdyby zářila jako černé těleso

g_* – *gravitační zrychlení na povrchu hvězdy*, vyjadřuje se často jako hloubkově nezávislá veličina $\log g_*$, význam pro planparalelní atmosféry

$$g_* = \frac{GM_*}{R_*^2} \quad (13.2)$$

abundance – popisují chemické složení atmosféry

\dot{M} – *míra ztráty hmoty* (mass-loss rate)

v_∞ – *konečná rychlost větru* (terminal wind velocity)

rovnice – hydrodynamické (zachování hmoty, hybnosti a energie), stavová rovnice, rovnice přenosu záření, rovnice kinetické rovnováhy, ...

závislé proměnné – určení prostorové a časové závislosti $\rho(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, $T(\mathbf{r}, t)$, $e(\mathbf{r}, t)$ (vnitřní energie), $p(\mathbf{r}, t)$, $I(\mathbf{r}, t)$, ...

13.1 Zářivá hybnost a zářivá energie

do rovnic struktury hvězdných atmosfér vstupují hybnost a energie záření

zavedeme *radiation stress-energy tensor* ($\alpha = 0, 1, 2, 3$), viz Hubeny and Miklas (2014, rovnice 19.134)

$$R^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \mathcal{E}_R & \frac{1}{c} (\mathfrak{F})^T \\ \frac{1}{c} \mathfrak{F} & \mathcal{P}_R \end{pmatrix} \quad (13.3)$$

\mathcal{E}_R – celková zářivá energie, zavedena rovnicí (2.16)

\mathfrak{F} – celkový zářivý tok, zavedeno rovnicí (2.20)

\mathcal{P}_R – integrací definice tenzoru tlaku záření (2.23) přes frekvence

horní index ^T – transponovaný vektor

zavedeme zářivou čtyřsílu ($\alpha = 0, 1, 2, 3; n^0 = 1$)

$$\begin{aligned} G^\alpha &= \begin{pmatrix} \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint [\chi_\nu(\mathbf{n}) I_\nu(\mathbf{n}) - \eta_\nu(\mathbf{n})] d\varpi \\ \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint \mathbf{n} [\chi_\nu(\mathbf{n}) I_\nu(\mathbf{n}) - \eta_\nu(\mathbf{n})] d\varpi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint n^\alpha [\chi_\nu(\mathbf{n}) I_\nu(\mathbf{n}) - \eta_\nu(\mathbf{n})] d\varpi \end{aligned} \quad (13.4)$$

složka $\alpha = 0$ (cG^0): celková míra přenosu energie mezi hmotou a zářením

složky $\alpha = 1, 2, 3$ (\mathbf{G}): *hustota čisté zářivé síly* $\mathbf{f}^{\text{rad}} = \mathbf{G}$

Rovnice pro celkovou zářivou energii a rovnici celkové hybnosti záření (3.36) lze zapsat ve tvaru kovariantní derivace

$$R^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = -G^\alpha \quad (13.5)$$

$$\alpha = 0, 1, 2, 3$$

Hustota čisté zářivé síly

hustota čisté zářivé síly (3.36b) – tam značena \mathbf{G}

$$\mathbf{f}^{\text{rad}} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint \mathbf{n} [\chi_\nu(\mathbf{n})I_\nu(\mathbf{n}) - \eta_\nu(\mathbf{n})] d\varpi \quad (13.6)$$

pro izotropní emisivitu

$$\mathbf{f}^{\text{rad}} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint \mathbf{n} \chi_\nu(\mathbf{n}) I_\nu(\mathbf{n}) d\varpi \quad (13.7)$$

pro izotropní emisivitu i opacitu

$$\mathbf{f}^{\text{rad}} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \chi_\nu \oint \mathbf{n} I_\nu(\mathbf{n}) d\varpi = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \chi_\nu \mathcal{F}_\nu \quad (13.8)$$

zářivé zrychlení

$$\mathbf{g}_R = \frac{\mathbf{f}^{\text{rad}}}{\rho} \quad (13.9)$$

Zářivé zisky, zářivé ztráty a zářivá rovnováha

pravá strana rovnice (3.36a) (veličina cG^0 z 13.4) popisuje míru přenosu energie mezi hmotou a zářením

$$-cG^0 = \int_0^\infty d\nu \oint [\eta_\nu(\mathbf{n}) - \chi_\nu(\mathbf{n})I_\nu(\mathbf{n})] d\varpi \quad (13.10)$$

pro izotropní opacitu a emisivitu platí

$$-cG^0 = 4\pi \int_0^\infty (\eta_\nu - \chi_\nu J_\nu) d\nu \quad (13.11)$$

> 0 více zářivé energie pohlceno než vyzářeno \rightarrow **zářivá ztráta** (*radiative loss*)

< 0 více zářivé energie vyzářeno než pohlceno \rightarrow **zářivý zisk** (*radiative gain*)

$= 0$ pohlcená a vyzářená zářivá energie se rovnají \Rightarrow **zářivá rovnováha** (*radiative equilibrium*)

13.2 Hydrodynamické rovnice

hydrodynamika – podrobně popsána v řadě učebnic (například Landau and Lifshitz, 1986, 1987; Mihalas and Weibel-Mihalas, 1984; Castor, 2004, atd.)

hydrodynamické rovnice – lze odvodit z Boltzmannovy kinetické rovnice (F.1) (viz Příloha F.2)

typy časových derivací, které použijeme dále
 prostorové souřadnice $\mathbf{x} = (x_i)$, $i = 1, 2, 3$; f je libovolná veličina

a) časová změna veličiny f v pevném místě \mathbf{x} (**Eulerova časová derivace**)

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} \quad (13.12)$$

b) časová změna veličiny f viděná pozorovatelem pohybujícím se rychlostí \mathbf{v} s elementem hmoty (**Lagrangeova časová derivace**)

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + v_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f \quad (13.13)$$

13.2.1 Rovnice kontinuity

(Rovnice zachování hmoty)
 pomocí Eulerovy časové derivace (Castor 2004, rovnice 2.2; Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 16.13)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (13.14a)$$

pomocí Lagrangeovy časové derivace (Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 16.14)

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (13.14b)$$

13.2.2 Pohybová rovnice

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f}^{\text{ext}} + \nabla \cdot \mathbf{T} = \mathbf{f}^{\text{ext}} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (13.15)$$

\mathbf{f}^{ext} – celková hustota vnějších sil v (F.1) – gravitace, tlak záření, elektromagnetické síly, ...

\mathbf{T} – tenzor napětí (*stress tensor*):

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{1} + \boldsymbol{\sigma} \text{ nebo ve složkách } T_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij},$$

$\mathbf{1}$ – jednotkový tenzor

p – hydrostatický tlak,

$\boldsymbol{\sigma}$ – tenzor viskózního napětí (*viscous stress*)

$$\sigma_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] + \lambda \left(\sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} = 2\mu E_{ij} + \lambda (\nabla \cdot \mathbf{v}) \delta_{ij} \quad (13.16)$$

první člen *shear*, druhý člen *strain*

(Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 16.18)

význam jednotlivých členů (viz také Shore, 2007, kapitola 2.2.2):

shear – diferenciální posunutí přilehlých oblastí (první člen)

μ – koeficient dynamické viskozity (*shear viscosity, dynamical viscosity*),

E_{ij} – tenzor míry napětí (*rate-of-strain tensor*)

$$E_{ij} \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (13.17)$$

strain – roztážení nebo stlačení ve směru působící síly (jednorozměrná změna, druhý člen)

λ – *dilatational viscosity*

„bezstopová formulace“ tenzoru viskózního napětí

$$\sigma_{ij} = \mu \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \left(\sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \right] + \zeta \left(\sum_k \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} \quad (13.18)$$

$\zeta \equiv \lambda + \frac{2}{3}\mu$ – objemová viskozita (*bulk viscosity*),

- pro $\partial v_1/\partial x_1 = \partial v_2/\partial x_2 = \partial v_3/\partial x_3 = 0$ (symetricky dilatující prostředí) a $\partial v_i/\partial x_j = 0, i \neq j \Rightarrow \zeta = 0$
- pro ideální plyn je $\zeta = 0$

Rovnice hybnosti

kombinací pohybové rovnice (13.15) s \mathbf{v} -násobkem rovnice kontinuity (13.14a)

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\mathbf{1} - \sigma] = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (13.19)$$

poznámka: $\mathbf{ab} = a_i b_j$ – vnější součin vektorů \mathbf{a} a \mathbf{b}

typický speciální případ:

hustota vnějších sil zahrnuje gravitaci a záření
z důvodu obecnosti označíme další možné externí síly \mathbf{f}'^{ext}

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \rho\mathbf{g} + \mathbf{f}^{\text{rad}} + \mathbf{f}'^{\text{ext}} \quad (13.20)$$

\mathbf{f}^{rad} – *hustota zářivé síly*, viz (13.4),
dosadíme do (13.19):

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\mathbf{1} - \sigma] = \rho\mathbf{g} + \mathbf{f}^{\text{rad}} + \mathbf{f}'^{\text{ext}} \quad (13.21)$$

\mathbf{f}^{rad} podle (13.6), použijeme (3.36b), místo $\mathbf{G} \rightarrow \mathbf{f}^{\text{rad}}$,

dosadíme do (13.21):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho\mathbf{v} + \frac{\mathfrak{F}}{c^2} \right) + \nabla \cdot [\rho\mathbf{v}\mathbf{v} + p\mathbf{1} - \sigma + \mathcal{P}_R] = \rho\mathbf{g} + \mathbf{f}'^{\text{ext}} \quad (13.22)$$

v řadě případů položíme $\mathbf{f}'^{\text{ext}} = 0$

13.2.3 Energiová rovnice

rovnice pro celkovou energii v objemu \mathcal{V}

$$\frac{D}{Dt} \int_{\mathcal{V}} \rho \left(e + \frac{1}{2}v^2 \right) d\mathcal{V} = \int_{\mathcal{V}} \mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} d\mathcal{V} + \int_S \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} dS - \int_S \mathbf{q} \cdot d\mathbf{S} + \int_{\mathcal{V}} (\epsilon_N + cG^0) d\mathcal{V} \quad (13.23)$$

jednotlivé členy zleva doprava:

změna vnitřní a kinetické energie

práce vnějších sil

práce třecích sil ($\mathbf{t} = -p\mathbf{n}$)

energetické ztráty tepelnou vodivostí

termojaderná energie a zářivá energie

rovnice pro celkovou hustotu energie rozepsáním Lagrangeovy derivace (13.13) a užitím Gaussovy věty (věty o divergenci) pro povrchové integrály

$$\int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV$$

dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \right] + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} + (p\mathbf{1} - \sigma) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} \right] \\ = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}^{\text{ext}} + \epsilon_N + cG^0 \end{aligned} \quad (13.24)$$

$\mathbf{1}$ – jednotkový tenzor

e – vnitřní energie,

ϵ_N – vznik termonukleární energie,

\mathbf{q} – tok energie tepelnou vodivostí

$$\mathbf{q} = -K_q \nabla T \quad (13.25)$$

K_q – koeficient tepelné vodivosti

cG^0 – celková míra přenosu energie mezi hmotou a zářením, podle (13.4),

dosazením za cG^0 do (13.24)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \mathcal{E}_R \right] \\ + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} + (p\mathbf{1} - \sigma) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} + \mathfrak{F} \right] = \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}^{\text{ext}} + \epsilon_N \end{aligned} \quad (13.26)$$

\mathbf{f}^{ext} je podle rovnice (13.20), zahrnuje gravitaci i zářivou sílu

další formy energiové rovnice v Hubeny and Mihalas (2014, kapitola 16.1)

13.2.4 Shrnutí rovnic, proměnných a okrajových podmínek

hydrodynamické rovnice a proměnné

- 4 nezávislé proměnné (\mathbf{x}, t)

- 6 základních závislých proměnných (v, ρ, p, e)
- 5 rovnic (zachování hmoty, 3 složek hybnosti, energie)

přidáme teplotu T , stavovou rovnici (zde Y formálně značí chemické složení):

$$p = p(\rho, T, Y) \quad (13.27)$$

a rovnici pro vnitřní energii

$$e = e(\rho, T, Y) \quad (13.28)$$

počáteční a okrajové podmínky

- počáteční (pro časový vývoj)
- okrajové (2 pro každý rozměr)

Vliv záření

pokud přidáme záření I a rovnici přenosu záření, ovlivní to:

- zachování hybnosti
- zachování energie
- rovnice pro vnitřní energii

přibude

- proměnná intenzity záření $I(\nu)$ – je funkcí frekvence
- rovnice přenosu záření pro každou frekvenci

⇒ nerovnovážné vztahy mezi zářením a hmotou

Vliv elektromagnetického pole

kdybychom přidali ještě elektromagnetické pole

- přibyly by Maxwellovy rovnice,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (13.29a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (13.29b)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (13.29c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_{\alpha} n_{\alpha} q_{\alpha} \mathbf{v}_{\alpha} (= 0) \quad (13.29d)$$

případně rovnice z nich odvozené
rovnice pro elektrický proud (Ohmův zákon)

$$\mathbf{j} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (13.30)$$

σ – elektrická vodivost¹
indukční rovnice

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (13.31)$$

- změníli bychom hydrodynamické rovnice na magnetohydrodynamické – přibyly by členy

$$\frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$$

do pohybové rovnice,

$$\frac{j^2}{\sigma} + \mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$$

do rovnice pro energii (Ohmická disipace + práce síly $\mathbf{j} \times \mathbf{B}$)

magnetohydrodynamikou se zde zabývat nebudeme

13.3 Jednorozměrné hydrodynamické rovnice

nejčastěji používaná geometrická přiblížení

rovinné nebo sféricky symetrické rovnice

použití pro hvězdné atmosféry

⇒ nebudeme uvažovat energii termojaderných reakcí ϵ_N

13.3.1 Jednorozměrné proudění

- rovinné, $\mathbf{v} = (0, 0, v_z)$
- sféricky symetrické, $\mathbf{v} = (v_r, 0, 0)$ (radiální proudění)

¹Ve skutečnosti tenzor popisující různou vodivost ve směru elektrického pole, ve směru kolmém na elektrické pole (Pedersenova vodivost) a ve směru kolmém k magnetickému i elektrickému poli (Hallova vodivost).

rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (13.32)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho v_r)}{\partial r} = 0 \quad (13.33)$$

rovnice hybnosti

vyjdeme z rovnice (13.19)

vnější síly budou zahrnovat jen gravitaci $\rho \mathbf{g}$ a zářivou sílu \mathbf{f}^{rad} , budou mít složku jen ve směru z nebo r

tenzor viskózního napětí pro nulovou objemovou viskozitu ζ (viz rovnice 13.18)

$$\sigma_{zz} = \mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = \frac{4}{3} \mu \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yx} = \sigma_{yy} = \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = \sigma_{zy} = 0$$

tlak označíme p_g – tlak plynu

rovninná geometrie

obecně $\mathbf{g} = (0, 0, -g(z))$, v planparalelním případě můžeme zanedbat závislost gravitační síly na z (díky předpokladu, že tloušťka atmosféry je mnohem menší než poloměr hvězdy), pak

$$\mathbf{g} = (0, 0, -g_*) \quad (13.34)$$

$$\frac{\partial (\rho v_z)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_z^2)}{\partial z} + \frac{\partial p_g}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{4}{3} \mu \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = f_z^{\text{rad}} - \rho g_* \quad (13.35)$$

sférická geometrie

$$\mathbf{g} = \left(\frac{GM_*}{r^2}, 0, 0 \right)$$

$$\frac{\partial (\rho v_r)}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 \rho v_r^2)}{\partial r} + \frac{\partial p_g}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{4}{3} \mu r^3 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r}{r} \right) \right] = f_r^{\text{rad}} - \rho \frac{GM_*}{r^2} \quad (13.36)$$

jednorozměrná hustota zářivé síly z (13.8)

rovinná geometrie

$$f_z^{\text{rad}} = \frac{1}{c} \int_0^\infty \chi_\nu \mathcal{F}_z(\nu) d\nu \quad (13.37)$$

sférická geometrie

$$f_r^{\text{rad}} = \frac{1}{c} \int_0^\infty \chi_\nu \mathcal{F}_r(\nu) d\nu \quad (13.38)$$

rovnice pro energii – 1-D varianta rovnice (13.26)

rovinná geometrie

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v_z^2 \right) + \mathcal{E}_R \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \rho v_z \left[\left(e + \frac{p_g}{\rho} \right) + \frac{1}{2} v_z^2 - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial z} \right] - \left(K_q \frac{\partial T}{\partial z} - \mathfrak{F}_z \right) \right\} \\ & = -\rho v_z g_* \quad (13.39) \end{aligned}$$

sférická geometrie

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v_r^2 \right) + \mathcal{E}_R \right] \\ & + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ r^2 \rho v_r \left[\left(e + \frac{p_g}{\rho} \right) + \frac{1}{2} v_r^2 - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_r}{r} \right) \right] - r^2 \left(K_q \frac{\partial T}{\partial r} - \mathfrak{F}_r \right) \right\} \\ & = -\rho v_r \frac{GM_*}{r^2} \quad (13.40) \end{aligned}$$

v obou posledních rovnicích (13.39 a 13.40)

$$e + \frac{p_g}{\rho} = h \quad \text{– entalpie}$$

$$\frac{\mu}{\rho} \equiv \nu \quad \text{– kinematická viskozita}$$

13.3.2 Jednorozměrné stacionární proudění

- rovnice nezávislé na čase – $\partial/\partial t = 0$

rovnice kontinuity

rovinná geometrie

$$\frac{d(\rho v_z)}{dz} = 0 \quad (13.41)$$

odtud

$$\rho v_z = \text{konstanta}$$

sférická geometrie

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \rho v_r)}{dr} = 0 \quad (13.42)$$

odtud

$$4\pi \rho r^2 v_r = \text{konstanta}$$

rovnice hynosti

(zanedbáním časových derivací v 13.35 a 13.36, první členy v obou rovnicích jsou zjednodušeny pomocí rovnice kontinuity)

rovinná geometrie

$$\rho v_z \frac{dv_z}{dz} + \frac{d}{dz} \left(p_g - \frac{4}{3} \mu \frac{dv_z}{dz} \right) = f_z^{\text{rad}} - \rho g_* \quad (13.43)$$

sférická geometrie

$$\rho v_r \frac{dv_r}{dr} + \frac{dp_g}{dr} - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[\frac{4}{3} \mu r^3 \frac{d}{dr} \left(\frac{v_r}{r} \right) \right] = f_r^{\text{rad}} - \rho \frac{GM_*}{r^2} \quad (13.44)$$

rovnice pro energii (zanedbáním časových derivací v 13.39 a 13.40)

rovinná geometrie

$$\frac{d}{dz} \left\{ \rho v_z \left[\left(e + \frac{p_g}{\rho} \right) + \frac{1}{2} v_z^2 - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} \frac{dv_z}{dz} \right] \right\} - \frac{d}{dz} \left(K_q \frac{dT}{dz} - \mathfrak{F}_z \right) = -\rho v_z g_* \quad (13.45)$$

sférická geometrie

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left\{ r^2 \rho v_r \left[\left(e + \frac{p_g}{\rho} \right) + \frac{1}{2} v_r^2 - \frac{4}{3} \frac{\mu}{\rho} r \frac{d}{dr} \left(\frac{v_r}{r} \right) \right] \right\} \\ - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(K_q \frac{dT}{dr} - \mathfrak{F}_r \right) \right] = -\rho v_r \frac{GM_*}{r^2} \quad (13.46) \end{aligned}$$

13.3.3 Jednorozměrná stacionární statická atmosféra

Ve statické atmosféře přidáme omezení, že v prostředí nejsou žádné makroskopické pohyby, tj. že pro makroskopickou rychlost platí $v = 0$. Nadále však existují mikroskopické pohyby, které jsou zodpovědné za vnitřní kinetickou energii hmoty, ale v součtu dají nulovou makroskopickou rychlost.

S ohledem na nulovou makroskopickou rychlost není ve statických atmosférách rovnici kontinuity třeba uvažovat. Pohybová rovnice (13.43) se pro nulovou makroskopickou rychlost zredukuje na statickou rovnici,

$$\frac{dp_g}{dz} = f_z^{\text{rad}} - \rho g_*, \quad (13.47)$$

které se často říká také *rovnice hydrostatické rovnováhy*. Pro sférickou symetrii dostaneme z rovnice (13.44) pro nulovou makroskopickou rychlost sférickou rovnici hydrostatické rovnováhy,

$$\frac{dp_g}{dr} = f_r^{\text{rad}} - \rho \frac{GM_*}{r^2}. \quad (13.48)$$

V případě, že je vliv zářivé síly zanedbatelný, rovnice (13.47) a (13.48) se zjednoduší na

$$\frac{dp_g}{dz} = -\rho g_*, \quad (13.49)$$

$$\frac{dp_g}{dr} = -\rho \frac{GM_*}{r^2}. \quad (13.50)$$

Rovnice pro energii (13.45) se pro $v = 0$ zredukuje pouze na členy popisující vedení tepla a tok zářivé energie,

$$-\frac{d}{dz} \left(K_q \frac{dT}{dz} - \mathfrak{F}_z \right) = 0. \quad (13.51)$$

Podobně se zjednoduší i sféricky symetrická rovnice pro energii (13.46),

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(K_q \frac{dT}{dr} - \mathfrak{F}_r \right) \right] = 0. \quad (13.52)$$

Ve hvězdných atmosférách bývá člen popisující vedení tepla většinou zanedbatelný vzhledem k toku zářivé energie. Výjimkou jsou prostředí s velkým teplotním gradientem, jako je například přechod ze sluneční fotosféry do koróny (viz dále]. Proto můžeme rovnici pro energii ve většině případů dále zjednodušit na tvar

$$\frac{d\mathfrak{F}_z}{dz} = 0 \quad (13.53)$$

pro rovinnou geometrii a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \tilde{\mathfrak{F}}_r)}{dr} = 0 \quad (13.54)$$

pro sférickou geometrii. Situaci, kterou popisují rovnice (13.53) a (13.54) říkáme **zářivá rovnováha**, rovnicím pak **rovnice zářivé rovnováhy (v diferenciálním tvaru)**, případně **rovnice zachování zářivého toku**. Z rovnice (3.36a) pro $\partial/\partial t = 0$ vyplývá, že v případě platnosti rovnic (13.53) a (13.54) platí pro obě geometrie vztah

$$\int_0^\infty d\nu \oint [\eta_\nu(\mathbf{n}) - \chi_\nu(\mathbf{n}) I_\nu(\mathbf{n})] d\varpi = 0, \quad (13.55)$$

kterému říkáme **integrální tvar rovnice zářivé rovnováhy**. V souladu se vztahem (13.10) jde o situaci, kdy jsou jak zářivé zisky, tak i zářivé ztráty nulové. Pro izotropní opacitu a emisivitu získá tento vztah jednodušší tvar

$$4\pi \int_0^\infty (\eta_\nu - \chi_\nu J_\nu) d\nu = 0. \quad (13.56)$$

Ve statické planoparalelní časově nezávislé atmosféře mají rovnice (13.53) a (13.55) ekvivalentní použití, v případě sférické symetrie pak rovnice (13.54) a (13.55).

V případě, že je naopak zanedbatelný vliv záření na energetickou rovnováhu, zůstane v rovnicích (13.51) a (13.52) pouze člen s tepelnou vodivostí. Tato rovnice vedení tepla je

$$\frac{d}{dz} \left(K_q \frac{dT}{dz} \right) = 0 \quad (13.57)$$

v rovinné geometrii a

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(K_q \frac{dT}{dr} \right) \right] = 0 \quad (13.58)$$

ve sférické geometrii. Tyto rovnice se například používají pro zjednodušený popis energetické rovnováhy ve sluneční koróně.

Kapitola 14

Jednoduché statické atmosféry

V této a v několika následujících kapitolách (15, 16, 17) se budeme zabývat jednorozměrnými (planparalelními nebo sféricky symetrickými) horizontálně homogenními modely atmosfér. Budeme dále předpokládat, že modely jsou stacionární ($\partial/\partial t = 0$) a statické ($v = 0$). Pro statické prostředí budeme předpokládat, že modely jsou s výjimkou popisu konvekce v zářivé rovnováze.

14.1 Šedá statická planparalelní atmosféra v LTE

Ačkoli se jedná o značně zjednodušený případ modelu hvězdné atmosféry, má obrovskou výhodu, že ji lze analyticky vyřešit a sestavit analytickou závislost teploty na optické hloubce. S pomocí šedé atmosféry můžeme pochopit základy stavby hvězdných atmosfér.

Základním předpokladem šedé atmosféry je opacita nezávislá na frekvenci,

$$\chi_\nu \equiv \chi. \quad (14.1)$$

Tomuto přiblížení se také říká *šedá aproximace*. V šedé aproximaci je i optická hloubka τ nezávislá na frekvenci (v planparalelním případě popsaném rovnicí 3.22 můžeme psát $d\tau = -\chi dz$). Budeme navíc předpokládat, že atmosféra je v zářivé rovnováze (13.56), což je ekvivalentní požadavku na zachování toku záření (13.53). S využitím definice vydatnosti (3.25) dostaneme z rovnice (13.56) vztah

$$\int_0^\infty \chi_\nu J_\nu d\nu = \int_0^\infty \chi_\nu S_\nu d\nu, \quad (14.2)$$

který se pro šedou atmosféru díky frekvenčně nezávislé opacitě redukuje na

$$J = S \quad (14.3)$$

Veličinami popisující záření bez uvedené frekvenční závislosti zde budeme značit jejich integrály přes frekvence od 0 do ∞ ,

$$\begin{aligned} I_\mu &= \int_0^\infty I_{\nu\mu} d\nu & J &= \int_0^\infty J_\nu d\nu, \\ H &= \int_0^\infty H_\nu d\nu, & K &= \int_0^\infty K_\nu d\nu, \\ S &= \int_0^\infty S_\nu d\nu, & B(T) &= \int_0^\infty B_\nu(T) d\nu \end{aligned} \quad (14.4)$$

V lokální termodynamické rovnováze (kapitola 4.6) je vydatnost rovna Planckově funkci, proto pro střední intenzitu záření integrovanou přes všechny frekvence proto platí (viz 4.48)

$$J = S = B(T) = \frac{\sigma_R T^4}{\pi}. \quad (14.5)$$

Jednorozměrná planparalelní rovnice přenosu záření (3.27) díky nezávislosti opacity na frekvenci v šedé aproximaci je

$$\mu \frac{dI_\mu}{d\tau} = I_\mu - S. \quad (14.6)$$

První dvě momentové rovnice přenosu (3.39) mají v šedé aproximaci tvar

$$\frac{dH}{d\tau} = J - S = 0, \quad (14.7a)$$

$$\frac{dK}{d\tau} = H. \quad (14.7b)$$

Integrací rovnice (14.7b) dostaneme

$$K(\tau) = H\tau + C \quad (14.8)$$

kde C je integrační konstanta. Ve velkých hloubkách ($\tau \gg 1$) platí Eddingtonova aproximace $J = 3K$ (viz kapitola 2.7.3). Potom pro střední intenzitu záření J můžeme v této oblasti psát

$$J \sim 3H\tau \quad (14.9)$$

Šedá atmosféra v Eddingtonově aproximaci Jedná se o limitní případ šedé atmosféry. Eddingtonova aproximace ($J = 3K$) platí poměrně dobře pro velké optické hloubky, kde je záření blízké izotropnímu. Střední intenzitu J_E v Eddingtonově aproximaci budeme hledat ve tvaru (viz 14.8),

$$J_E = 3H(\tau + q_E). \quad (14.10)$$

Konstantu q_E určíme ze vztahu pro Eddingtonův tok na povrchu $H(0)$ vyjádřený pomocí Φ operátoru (6.25). S využitím vztahů mezi exponenciálními integrály a jejich derivacemi (A.2) a (A.3) dostaneme

$$H(0) = \frac{1}{2} \int_0^\infty 3H(t + q_E) E_2(t) dt = \frac{3}{2} H q_E E_3(0) + \frac{3}{2} H [1 - 2E_4(0)] \quad (14.11)$$

Odtud za použití vztahu (A.5) pro $E_n(0) = 1/(n - 1)$ a požadavku $H(0) = H$ dostáváme $q_E = 2/3$. Střední intenzita záření šedé atmosféry v Eddingtonově aproximaci je tedy

$$J_E = 3H \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (14.12)$$

Celkový Eddingtonův tok $H = \sigma_R T_{\text{eff}}^4 / (4\pi)$, střední intenzita záření za předpokladu lokální termodynamické rovnováhy integrovaná přes frekvence $J = B = \sigma_R T^4 / \pi$, což platí i pro J_E . Odpovídající teplotní struktura je dána vztahem

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right). \quad (14.13)$$

Teplota T v optické hloubce $\tau = 2/3$, což je přibližná *oblast formování záření v kontinuu*, je rovna efektivní teplotě hvězdy.

Analytické řešení V obecném případě, pokud Eddingtonova aproximace neplatí, budeme hledat závislost střední intenzity na optické hloubce v šedé atmosféře v obecnějším tvaru

$$J(\tau) = 3H(\tau + q(\tau)), \quad (14.14)$$

kde $q(\tau)$ je nějaká funkce optické hloubky. Této funkci se říká **Hopfova funkce** a její tvar dostaneme řešením rovnice (6.18) pro frekvenčně nezávislý případ a $J = S$,

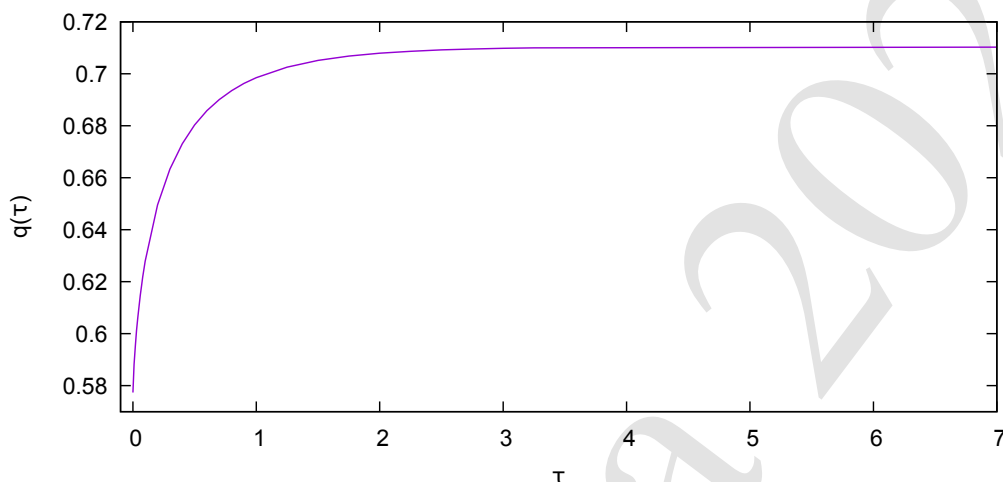
$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty J(t) E_1(|t - \tau|) dt, \quad (14.15)$$

což s dosazením z (14.14) dává

$$\tau + q(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^\infty [t + q(t)] E_1(|t - \tau|) dt. \quad (14.16)$$

Rovnice (14.16) se nazývá **Milneho rovnice**. Řešení rovnice (14.16) je na obrázku 14.1 a lze ho analyticky zapsat jako (viz kap. 3.4. v Mihalas, 1978)

$$q(\tau) = q(\infty) - \frac{1}{2\sqrt{3}} \int_0^1 \frac{\exp(-\tau/\mu) d\mu}{H(\mu)Z(\mu)}, \quad (14.17)$$



Obrázek 14.1: Hopfova funkce (číselné hodnoty z Viik, 1986).

kde $H(\mu)$ je zde teoretická funkce okrajového ztemnění (odvodil Hopf, 1934, viz také Placzek 1947),

$$H(\mu) = \frac{I(0, \mu)}{I(0, 0)} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu}} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\theta \arctan(\mu \tan \theta)}{1 - \theta \cot \theta} d\theta \right] \quad (14.18)$$

a

$$Z(\mu) = \left[1 - \frac{1}{2} \mu \ln \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \right]^2 + \frac{\pi^2 \mu^2}{4}. \quad (14.19)$$

Pro limitní hodnotu Hopfovy funkce v nekonečnu $q(\infty)$ platí (Placzek and Seidel, 1947)

$$q(\infty) = \frac{6}{\pi^2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{3}{\theta^2} - \frac{1}{1 - \theta \cot \theta} \right) d\theta = 0.7104460896. \quad (14.20)$$

Hodnota Hopfovy funkce na horním okraji atmosféry je dána Hopfovým-Bronsteinovým vztahem (Bronstein, 1930; Hopf, 1930)

$$q(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}. \quad (14.21)$$

Teplotní strukturu šedé atmosféry určíme snadno z rovnice (14.14). Podobně jako při odvození rovnice (14.13) po dosazení $H = \sigma_{\text{R}} T_{\text{eff}}^4 / (4\pi)$ a $J = \sigma_{\text{R}} T^4 / \pi$ do (14.14) dostaneme

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 (\tau + q(\tau)). \quad (14.22)$$

Ze vztahů (14.22) nebo (14.13) vyplývá, že teplota T je rostoucí funkcí optické hloubky τ . Zdůvodněme si nyní tento výsledek. Ze zákona zachování energie, což je v našem případě rovnice zářivé rovnováhy, vyplývá zachování celkového zářivého toku. Tok je vektorová veličina a je mírou anizotropie záření. Pro anizotropní záření vně hvězdy (hvězda svítí) je tok velký. Naproti tomu ve vnitřních vrstvách hvězdy je záření blízké rovnovážnému a tedy i izotropnímu a celkový tok se blíží k nule. Abychom tok zachovali, musíme zvýšit teplotu. Růst teploty směrem dovnitř hvězdy je důsledkem *jen rovnice přenosu záření a rovnice zářivé rovnováhy* (hydrostatická rovnováha zde nevystupuje). Velmi zajímavý je fakt, že pro šedou atmosféru teplota $T(\tau)$ nezávisí na povrchové gravitaci, závisí jen na střední opacitě.

Zářivý tok (2.19) v optické hloubce τ v šedé atmosféře můžeme pomocí Φ -operátoru (6.25) pro případ LTE (tj. $S_{\nu} = B_{\nu}$) zapsat jako

$$\mathcal{F}_{\nu}(\tau) = 2\pi \left\{ \int_{\tau}^{\infty} B_{\nu} [T(\tau)] E_2(t - \tau) dt - \int_0^{\tau} B_{\nu} [T(\tau)] E_2(\tau - t) dt \right\}, \quad (14.23)$$

liší se tedy od Planckovy funkce a tím neopovídá rovnovážnému rozdělení zářivé energie.

14.2 Šedá atmosféra se skokem opacity

Ohřevové a chladící frekvence

Fakt, že pro šedou atmosféru v LTE platí $J = B$ (vztahy 14.3 a 14.5) ještě nemusí znamenat, že pro *každou* frekvenci ν platí $J_{\nu} = B_{\nu}$. Existují frekvence, pro něž je $J_{\nu} > B_{\nu}$, a existují také frekvence, pro něž je $J_{\nu} < B_{\nu}$. Podívejme se na důsledky této vlastnosti.¹

Střední intenzita záření J_{ν} je úměrná počtu absorbovaných fotonů na jednotkovou optickou délku (viz rovnice 3.31). Podobně vydatnost S_{ν} je úměrná počtu emitovaných fotonů za jednotkovou optickou délku (3.30). Je-li $J_{\nu} > B_{\nu}$, je více

¹Kromě knihy Hubeny and Mihalas (2014) lze následující úvahy nalézt i v práci Hubeny (1997, část 5.3).

fotonů absorbováno než emitováno. Pohlcená zářivá energie zvýší vnitřní energii prostředí, čímž jeho teplota vzroste. Frekvenci, pro kterou tento případ nastane, můžeme nazvat **ohřevovou frekvencí**. V opačném případě, kdy $J_\nu < B_\nu$, dochází podobným způsobem ke snížení teploty a příslušnou frekvenci můžeme nazvat **chladící frekvencí**.

Pro specifickou intenzitu vystupujícího záření s lineární vydatností platí Edingtonův-Barbierův vztah (6.6). Integrací tohoto vztahu přes úhly (pro $0 \leq \mu \leq 1$) dostaneme pro vystupující záření (kvůli předpokladu LTE je $S_\nu = B_\nu$)

$$J_\nu(\tau = 0) = \frac{1}{2} B_\nu \left(\tau = \frac{1}{2} \right). \quad (14.24)$$

Pro vysoké frekvence ($h\nu / (kT) \gg 1$) platí pro B_ν Wienův vztah (4.46). V této limitě Planckova funkce s klesající teplotou rychle klesá, $B \sim \exp(1/T)$, proto je na povrchu šedé atmosféry mnohem menší než v oblasti přechodu mezi opticky tenkým a opticky tlustým prostředím ($B(\tau = 0) \ll B(\tau = \frac{1}{2})$). Z rovnice (14.24) pak dostáváme, že

$$J_\nu(\tau = 0) > B_\nu(\tau = 0),$$

vysoké frekvence jsou tudíž „ohřevové“.

Pro nízké frekvence ($h\nu / (kT) \ll 1$) platí pro B_ν Rayleighův-Jeansův vztah (4.47). V této limitě je Planckova funkce lineárně závislá na teplotě. Pro teplotu šedé atmosféry na povrchu podle rovnice (14.22) platí $T(\tau = 0) \approx 0.8T(\tau = \frac{1}{2})$, pro Planckovu funkci proto platí $B_\nu(\tau = 0) \approx 0.8B_\nu(\tau = \frac{1}{2})$, tj. klesne jen málo. Porovnáním s (14.24) je

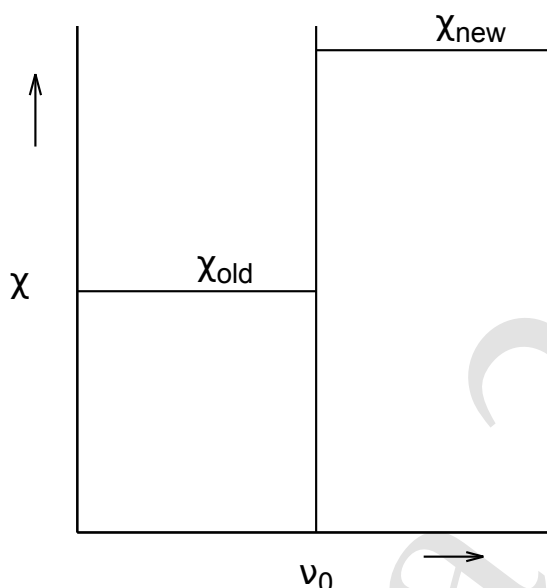
$$J_\nu(\tau = 0) < B_\nu(\tau = 0),$$

protože činitel $1/2$ v rovnici (14.24) je dominantní. Nízké frekvence jsou proto „chladící“.

Šedá opacita se skokem

Tento modelový příklad zjednodušeným způsobem popisuje situaci, která nastává v případě opacit fotoionizačních přechodů, kdy na ionizační hraně dochází k náhlé změně hodnoty opacit. Necht' tato ionizační hrana je na frekvenci ν_o . Předpokládejme, že pro opacitu χ_ν platí

$$\begin{aligned} \chi_\nu &= \chi = \chi_{\text{old}} & \text{pro } \nu < \nu_o \\ \chi_\nu &= a\chi = \chi_{\text{new}} & \text{pro } \nu \geq \nu_o \quad (a \gg 1) \end{aligned} \quad (14.25)$$



Obrázek 14.2: Schéma šedé opacitě se skokem.

Opacitě χ_{old} pro $\nu < \nu_0$ odpovídá škála optických hloubek τ_{old} , opacitě χ_{new} pro $\nu \geq \nu_0$ škála optických hloubek τ_{new} . Dále předpokládáme, že ν_0 je „ohřevová“ frekvence (je ve vysokofrekvenční části spektra).

Nejprve se podíváme na situaci v povrchových vrstvách atmosféry, kde jsou obě optické hloubky (τ_{old} i τ_{new}) menší než 1. Opacita χ_{new} pro $\nu \geq \nu_0$ je mnohem větší než opacita χ_{old} , takže menší opacitu můžeme zanedbat. Rovnici zářivé rovnováhy můžeme zapsat pouze pro frekvence $\nu \geq \nu_0$,

$$\int_{\nu_0}^{\infty} J_{\nu} d\nu = \int_{\nu_0}^{\infty} B_{\nu} d\nu. \quad (14.26)$$

Napišeme tuto rovnici pro $\tau_{\text{new}} = 0$. Použijeme Eddingtonovu-Barbierovu relaci integrovanou přes úhly (14.24) pro škálu optických hloubek τ_{new} . Jejím dosazením do rovnice (14.26) dostaneme vztah platící v „nové“ teplotní struktuře

$$\frac{1}{2} \int_{\nu_0}^{\infty} B_{\nu} \left[T \left(\tau_{\text{new}} = \frac{1}{2} \right) \right] d\nu = \int_{\nu_0}^{\infty} B_{\nu} [T(\tau_{\text{new}} = 0)] d\nu \quad (14.27)$$

kde $T(\tau_{\text{new}} = 0)$ je „nová“ teplota na povrchu. Je zřejmé, že $T(\tau_{\text{new}} = 0) < T(\tau_{\text{new}} = \frac{1}{2})$. Jelikož $\tau_{\text{new}} \gg \tau_{\text{old}}$, je teplota v místě $\tau_{\text{new}} = \frac{1}{2}$ blízká teplotě na povrchu šedé atmosféry se škálou optických hloubek τ_{old} . Povrchová teplota je vlivem zvýšení opacitě pro $\nu \geq \nu_0$ nižší, dochází k efektu zvanému **povrchové ochlazování**.

Přidáním opacity do „ohřevové“ části spektra v povrchových vrstvách jsme potlačili ohřev, došlo k ochlazení. Obdobně přidáním opacity do „chladící“ části spektra potlačíme chlazení, čímž dojde k ohřevu.

Podívejme se nyní, jaká je situace v hloubkách. Pokud se budeme zajímat o velké hloubky, kde je $\tau_{\text{new}} \gg 1$ i $\tau_{\text{old}} \gg 1$, žádný efekt přidané opacity nebude patrný, protože v obou případech bude bezpečně platit difúzní přiblížení.

Zajímavá situace však nastane v místě, kde je prostředí opticky tenké v τ_{old} a opticky tlusté v τ_{new} , tedy když platí

$$\begin{aligned} \tau_{\text{new}} &\gg 1 && \text{pro } \nu \geq \nu_0, \\ \tau_{\text{old}} &< 1 && \text{pro } \nu < \nu_0. \end{aligned} \quad (14.28)$$

Pro $\nu \geq \nu_0$ (τ_{new} velké) je $J_\nu \approx B_\nu$. Potom je pro tyto frekvence i tok $H_\nu \approx 0$. Proto můžeme tento interval frekvencí z rovnice zářivé rovnováhy vyloučit. Podmínka zářivé rovnováhy se v této oblasti atmosféry redukuje na

$$\int_0^{\nu_0} J_\nu d\nu = \int_0^{\nu_0} B_\nu d\nu. \quad (14.29)$$

Označíme $J' = \int_0^{\nu_0} J_\nu d\nu$. V Eddingtonově aproximaci ($J = 3K$) dostáváme z (14.7b)

$$\frac{dJ'}{d\tau} = 3H' = 3H. \quad (14.30)$$

Poznamenejme, že $H = H'$ platí, protože pro $\nu \geq \nu_0$ je tok zanedbatelný. Využijeme (14.5) a formálně zapíšeme $J' = (\sigma'/\pi) T^4$, kde σ' je konstanta obdobná konstantě σ_R , ale pozměněná kvůli kratšímu integračnímu intervalu. Řešení rovnice (14.30) je $J' = 3H(\tau + 2/3)$ (viz 14.12). Dosadíme $H = \sigma_R T_{\text{eff}}^4 / (4\pi)$ a dostaneme

$$T^4 = \frac{3}{4} \frac{\sigma_R}{\sigma'} T_{\text{eff}}^4 \left(\tau + \frac{2}{3} \right) \quad (14.31)$$

Protože $J' < J$, je i $\sigma' < \sigma_R$ a z výše uvedené rovnice (14.31) vyplývá, že „nová“ teplota v této oblasti atmosféry je vyšší. Tomuto jevu se říká **zpětný ohřev** (*backwarming*).

Jinými slovy můžeme říct, že přidáním opacity v oblasti $\nu \geq \nu_0$ by klesl v této části tok. Tok musí ale být zachován, takže musí vzrůst jiným způsobem, což lze pouze zvýšením teploty.

14.3 Střední opacity

Skutečná opacita je silně závislá na frekvenci, proto je předpoklad frekvenčně nezávislé opacity, který je nutný pro sestavení modelu šedé atmosféry, nereálný.

Pomocí může zavedení frekvenčně středovaných opacit, které nebudou na frekvenci závislé a budou popisovat střední schopnost hmoty absorbovat záření. Pro takové frekvenčně nezávislé opacity bude možné sestavit šedý model.

Vyjdeme z první momentové rovnice přenosu záření v rovinné geometrii (3.39b). Její integrací přes frekvence ν od 0 do ∞ dostaneme

$$-\frac{dK}{dz} = \int_0^\infty \chi_\nu H_\nu d\nu = \bar{\chi}_H H, \quad (14.32)$$

kde jsme zavedli **tokovou střední opacitu**

$$\bar{\chi}_H \equiv \frac{1}{H} \int_0^\infty \chi_\nu H_\nu d\nu. \quad (14.33)$$

Rovnici (3.39a) pro dH/dz už však tak snadno pomocí $\bar{\chi}_H$ zjednodušit nemůžeme. Kromě toho pro výpočet tokové střední opacity vztahem (14.33) potřebujeme znát tok H_ν , který ale na začátku řešení problému neznáme, získáme ho až vyřešením rovnice přenosu záření. Pomocí tokové střední opacity ale můžeme zavést odpovídající optickou hloubku $\tau_H = -\bar{\chi}_H dz$ a vyjádřit velikost síly generované zářením a působící na hmotu (gradient tlaku záření)

$$\frac{dp_R}{d\tau_H} = -\bar{\chi}_H^{-1} \frac{dp_R}{dz} = \frac{4\pi}{c} \frac{1}{\bar{\chi}_H} \int_0^\infty \chi_\nu H_\nu d\nu = \frac{4\pi H}{c} = \frac{\sigma_R T_{\text{eff}}^4}{c}. \quad (14.34)$$

Kromě tokové střední opacity (14.33), kterou jsme zavedli pomocí Eddingtonova toku H , můžeme zavést i tokovou střední opacitu $\bar{\chi}_F$ pomocí astrofyzikálního toku F a platí $\bar{\chi}_H = \bar{\chi}_F$. Pro zavedení tokové střední opacity lze použít i tok \mathcal{F} . Definiční vztahy těchto tokových středních opacit jsou analogické rovnici (14.33).

Kromě již uvedených středních opacit můžeme zavést i **planckovskou střední opacitu**

$$\bar{\kappa}_B \equiv \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T) d\nu}{B(T)} = \frac{\pi}{\sigma_R T^4} \int_0^\infty \kappa_\nu B_\nu(T) d\nu \quad (14.35)$$

a **přímou střední opacitu**

$$\bar{\kappa}_J \equiv \frac{\int_0^\infty \kappa_\nu J_\nu d\nu}{J}. \quad (14.36)$$

Tyto střední opacity nacházejí uplatnění v některých procedurách pro určování teplotní struktury hvězdných atmosfér (kapitola 15.2.2). Integrací rovnice (3.39a) přes frekvence můžeme získat vztah

$$\frac{dH}{dz} = \int_0^\infty \eta_\nu d\nu - \bar{\kappa}_J J$$

kde jsme použili přímou střední opacitu (14.36). Pokud budeme ještě navíc předpokládat LTE (což znamená $S_\nu = B_\nu$), můžeme tuto rovnici přepsat

$$\frac{dH}{dz} = \bar{\kappa}_B B - \bar{\kappa}_J J$$

kde jsme použili planckovskou střední opacitu (14.35). Pro použití v modelu šedé atmosféry se však tyto střední opacity také nehodí.

Rosselandova střední opacita

Rosselandovu střední opacitu jsme již uvedli vztahem (6.14). Zde si ukážeme její souvislost s modelem šedé atmosféry. Rovnici (3.39b) vydělíme opacitou χ_ν a zintegrujeme přes frekvence od 0 do ∞ , čímž dostaneme

$$-\int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dK_\nu}{dz} d\nu = \int_0^\infty H_\nu d\nu = H = -\frac{1}{\bar{\chi}} \frac{dK}{dz}, \quad (14.37)$$

kde K je integrál veličiny K_ν přes všechny frekvence (viz vztahy 14.4). Odsud vyjádříme střední opacitu $\bar{\chi}$,

$$\frac{1}{\bar{\chi}} = \frac{\int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dK_\nu}{dz} d\nu}{\int_0^\infty \frac{dK_\nu}{dz} d\nu}, \quad (14.38)$$

nicméně máme stejný problém jako v případě tokové střední opacity, neznáme K_ν dříve, než vyřešíme rovnici přenosu záření. Můžeme ho však přibližně určit ve velkých hloubkách, kde lze použít difúzní přiblížení (kapitola 6.1). Do (14.38) dosadíme za dK_ν/dz z (3.39b) s H_ν vyjádřeným z rovnice (6.12),

$$\frac{1}{\bar{\chi}_R} = \frac{\frac{1}{3} \frac{dT}{dz} \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}{\frac{1}{3} \frac{dT}{dz} \int_0^\infty \frac{dB_\nu}{dT} d\nu}, \quad (14.39)$$

odtud (viz také vztah 6.14)

$$\frac{1}{\bar{\chi}_R} \frac{dB}{dT} = \int_0^\infty \frac{1}{\chi_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} d\nu. \quad (14.40)$$

Těmito vztahy je nejen pro velké optické hloubky zavedena Rosselandova střední opacita. Vztahem $d\bar{\tau}_R = -\bar{\chi}_R dz$ (6.16) je zavedena Rosselandova střední optická hloubka. Ve velkých hloubkách atmosféry (nejen šedé) platí

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{eff}}^4 (\bar{\tau}_R + q(\bar{\tau}_R)) \quad (14.41)$$

a pro gradient tlaku tam můžeme psát

$$\frac{dp_R}{d\bar{r}_R} = \frac{16\sigma_R T^3}{3c\bar{\chi}_R} \left(-\frac{dT}{dz} \right). \quad (14.42)$$

Kapitola 15

Hydrostatické modely atmosfér

15.1 Rovnice hydrostatické rovnováhy

Do hydrostatické rovnice v rovinné geometrii (13.47) dosadíme za hustotu zářivé síly f_z^{rad} z (13.37) a zářivý tok vyjádříme pomocí Eddingtonova toku (2.34). Dostaneme tak rovnici hydrostatické rovnováhy ve tvaru

$$\frac{dp_g}{dz} = -\rho g_* + \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \chi_\nu H_\nu d\nu \quad (15.1)$$

kde z -složka gravitačního zrychlení (g_*) je uvedena v (13.34). Zavedeme **sloupcovou hmotnostní hloubku** (*column mass depth*) vztahem

$$dm = -\rho dz. \quad (15.2)$$

a rovnici můžeme přepsat do tvaru s nezávisle proměnnou m

$$\frac{dp_g}{dm} = g_* - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{\chi_\nu}{\rho} H_\nu d\nu, \quad (15.3)$$

Sloupcová hmotnostní hloubka se často používá jako nezávislá proměnná při modelování statických hvězdných atmosfér. Zářivou sílu v planparalelní atmosféře můžeme vyjádřit také jako $f_z^{\text{rad}} = -dp_R/dz$ (z 3.39b a 2.37). Zavedeme-li celkový tlak p_{tot} , pro který v tomto případě platí

$$p_{\text{tot}} = p_g + p_R, \quad (15.4)$$

můžeme rovnici hydrostatické rovnováhy přepsat jako

$$\frac{dp_{\text{tot}}}{dm} = g. \quad (15.5)$$

Tuto rovnici lze snadno integrovat podle m ,

$$p_{\text{tot}}(m) = gm + p_0, \quad (15.6)$$

kde p_0 je integrační konstanta odpovídající celkovému tlaku na horním okraji atmosféry. Z jednoduchosti rovnice (15.6) je vidět užitečnost zavedení m jako nezávislé proměnné.

Pomocí planparalelní momentové rovnice přenosu záření (3.39b) a definice sloupcové hmotnostní hloubky (15.2) můžeme vyjádřit

$$\frac{\chi_\nu}{\rho} H_\nu = \frac{dK_\nu}{dm} \quad (15.7)$$

a rovnici hydrostatické rovnováhy přepsat

$$\frac{dp_g}{dm} = g_* - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{dK_\nu}{dm} d\nu. \quad (15.8)$$

K -integrál K_ν se může vyjádřit pomocí Eddingtonových činitelů (2.46) a střední intenzity J_ν a planparalelní rovnice hydrostatické rovnováhy získá tvar

$$\frac{dp_g}{dm} = g_* - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{d(f_\nu^K J_\nu)}{dm} d\nu. \quad (15.9)$$

Ve sférické symetrii zavádíme sloupcovou hmotnostní hloubku vztahem

$$dm = -\rho \left(\frac{R_*^2}{r^2} \right) dr. \quad (15.10)$$

S touto definicí pak můžeme z hydrostatické rovnice ve sférické geometrii (13.48), v níž gravitační zrychlení závisí na radiální rouřadnici r , odvodit rovnici analogickou rovnici (15.3),

$$\frac{dp_g}{dm} = g_* - \frac{4\pi}{c} \left(\frac{r^2}{R_*^2} \right) \int_0^\infty \frac{\chi_\nu}{\rho} H_\nu d\nu, \quad (15.11)$$

kde g_* je dáno vztahem (13.2). Pomocí sféricky symetrické momentové rovnice přenosu záření (3.44) a definice sloupcové hmotnostní hloubky (15.10) můžeme vyjádřit

$$\left(\frac{r^2}{R_*^2} \right) \frac{\chi_\nu}{\rho} H_\nu = \frac{1}{q_\nu} \frac{d(q_\nu K_\nu)}{dm} \quad (15.12)$$

a sféricky symetrickou rovnici hydrostatické rovnováhy (15.11) přepsat

$$\frac{dp_g}{dm} = g_* - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{1}{q_\nu} \frac{d(q_\nu K_\nu)}{dm} d\nu. \quad (15.13)$$

Podobně jako v planparalelním případě je možné vyjádřit K_ν jako součin proměnných Eddingtonových činitelů a střední intenzity záření,

$$\frac{dp_g}{dm} = g_* - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{1}{q_\nu} \frac{d(q_\nu f_\nu^K J_\nu)}{dm} d\nu. \quad (15.14)$$

Tato sféricky symetrická rovnice hydrostatické rovnováhy přejde na planparalelní pro $q_\nu = 1$.

Rovnici hydrostatické rovnováhy doplníme vhodnou okrajovou podmínkou. Tu získáme z rovnice (15.3) použité pro oblast nad nejvyšším bodem modelu atmosféry. Pro $m = 0$ můžeme předpokládat, že tlak plynu v tom místě je nulový ($p_g = 0$), odkud pro derivaci tlaku plynu podle m v nejvyšším bodě modelu (označíme ho indexem $_1$) dostáváme

$$\left. \frac{dp_g}{dm} \right|_1 = \frac{(p_g)_1}{m_1}. \quad (15.15)$$

Tok $H_{\nu 1}$ dostaneme jako rozdíl toku vycházejícího z atmosféry (ten můžeme vyjádřit pomocí povrchového Eddingtonova činitele 7.46) a toku H_ν^- dopadajícího z vnějšku (horní okrajová podmínka momentové rovnice přenosu záření),

$$H_{\nu 1} = f_{\nu 1}^H J_{\nu 1} - H_\nu^-. \quad (15.16)$$

Horní okrajovou podmínku planparalelní rovnice hydrostatické rovnováhy můžeme potom psát

$$\frac{(p_g)_1}{m_1} = g_* - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \left(\frac{\chi_{\nu 1}}{\rho_1} \right) (f_\nu^H J_{\nu 1} - H_\nu^-) d\nu \quad (15.17)$$

Pro případ sféricky symetrické atmosféry vyjdeme z rovnice (15.11) a podobným způsobem jako v planparalelním případě odvodíme horní okrajovou podmínku pro sféricky symetrickou rovnici hydrostatické rovnováhy,

$$\frac{(p_g)_1}{m_1} = g_* - \frac{4\pi}{c} \left(\frac{r_1^2}{R_*^2} \right) \int_0^\infty \left(\frac{\chi_{\nu 1}}{\rho_1} \right) (f_\nu^H J_{\nu 1} - H_\nu^-) d\nu. \quad (15.18)$$

Sféricky symetrická okrajová podmínka se od planparalelní liší jen o faktor r_1^2/R_*^2 u hustoty zářivé síly.

15.2 Energetická rovnováha

Přenos energie ve hvězdné atmosféře probíhá směrem z hvězdy do mezihvězdného prostředí. V jednorozměrné atmosféře je energetická rovnováha popsána

rovnici (13.51) pro planparalení případ a rovnici (13.52) pro sféricky symetrický případ. Obě tyto rovnice zahrnují přenos energie zářením a vedením. Ve většině případů můžeme přenos energie vedením při modelování hvězdných atmosfér zanedbat. Výjimku tvoří například sluneční koróna, kde vysoká teplota okolo 10^7K je příčinou i velkého gradientu teploty. Podrobně je přenos energie vedením rozebrán v knize Mihalas and Weibel-Mihalas (1984).

K uvedeným dvěma způsobům přenosu energie v jednorozměrné statické atmosféře přidáváme přenos energie konvekcí. Konvekce je makroskopické proudění hmoty, což je v rozporu s předpokladem statické atmosféry. Kromě toho pro popis konvekce nestačí jednorozměrný popis. V atmosféře s makroskopickými rychlostmi mohou být konvektivní pohyby obecně zahrnuty v hydrodynamických rovnicích, ale ve statické atmosféře je nutné tyto makroskopické pohyby a jejich důsledky zahrnout nějak přibližně. Při zahrnutí konvekce do jednorozměrné statické atmosféry uvažujeme pouze vliv na přenos energie, který je popsán konvektivním tokem $\mathfrak{F}_{\text{conv}}$. Tento přenos energie následně může způsobit vertikální změny závislosti teploty a hustoty na poloze. Přímé změny teploty a hustoty způsobené konvektivním prouděním neuvažujeme. Tento model nám umožní řešit strukturu atmosfér chladných hvězd (spektrálních tříd F, G, K, M, L, T) pomocí statických jednorozměrných modelů. Planparalelní rovnice energetické rovnováhy (13.51) získá započtením konvektivního toku energie tvar

$$-\frac{d}{dz} \left(K_q \frac{dT}{dz} - \mathfrak{F}_z - \mathfrak{F}_{\text{conv}} \right) = 0, \quad (15.19)$$

sféricky symetrická rovnice (13.52) tvar

$$-\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \left(K_q \frac{dT}{dr} - \mathfrak{F}_r \right) - \mathfrak{F}_{\text{conv}} \right] = 0. \quad (15.20)$$

Tyto rovnice popisují celkový tok energie v jednorozměrné atmosféře. V následujících podkapitolách se na jednotlivé členy těchto rovnic podíváme podrobněji.

15.2.1 Zářivá rovnováha

V případě absence konvekce (podmínkami vzniku konvekce se budeme zabývat v kapitole 15.3) vyplývá z rovnice (3.36a) pro zachovávající se tok v případě izotropní opacity rovnice (13.56), kterou si zde přepíšeme

$$4\pi \int_0^\infty (\eta_\nu - \chi_\nu J_\nu) d\nu = 0 \quad (15.21)$$

Tento vztah vyjadřuje rovnost mezi celkovou absorbovanou energií a celkovou vyzářenou energií. Tomuto vztahu říkáme integrální tvar rovnice zářivé rovnováhy. Alternativně lze použít vztah vyjadřující zachování celkového zářivého toku

($d\mathfrak{F}/dz = 0$, z čehož vyplývá $\mathfrak{F} = \text{const}$, diferenciální tvar rovnice zářivé rovnováhy). Přepíšeme tok pomocí Eddingtonova toku, který je v jednorozměrném případě častěji používán,

$$\int_0^\infty H_\nu d\nu = \frac{\sigma_R}{4\pi} T_{\text{eff}}^4 = \frac{L_*}{(4\pi R_*)^2}, \quad (15.22)$$

alternativně pomocí proměnných Eddingtonových činitelů

$$\int_0^\infty \frac{\rho}{\chi_\nu} \frac{d(f_\nu^K J_\nu)}{dm} d\nu = \frac{L_*}{(4\pi R_*)^2}. \quad (15.23)$$

nebo pro sférickou symetrii

$$\int_0^\infty \frac{\rho}{q_\nu \chi_\nu} \frac{d(q_\nu f_\nu^K J_\nu)}{dm} d\nu = \frac{L}{(4\pi R_*)^2} \quad (15.24)$$

I když pro určení teplotní struktury atmosféry stačí použít libovolnou z rovnic (15.21) a (15.22), používáme při řešení obě rovnice. Každá z těchto dvou rovnic má jiné numerické vlastnosti a funguje spolehlivě jen v části atmosféry. Integrovaný tvar (15.21) je stabilní, ale nezaručuje numerické zachování zářivého toku, což vadí v opticky tlustých spodních částech atmosféry. Naopak diferenciální tvar (15.22) zachovává zářivý tok, ale pro malé optické hloubky je nestabilní. Stabilní numerické schéma poskytuje superpozice obou tvarů. Označíme-li I rovnicí (15.21) a D rovnicí (15.22), superponovaný tvar lze vyjádřit jako $\alpha I + \beta D = 0$, kde α a β jsou vhodná čísla.

Nejvhodnější metodou pro řešení těchto rovnic je s ohledem na provázanost s rovnicí přenosu záření linearizační metoda (Newtonova-Raphsonova metoda), kdy se řeší současně s rovnicí přenosu záření. Existuje však i řada jiných metod pro určení teploty, také většinou iteračních, jako například metody korekce teploty Unsölda a Lucyho a Avretta a Krooka (viz Mihalas, 1978, kapitola 7-2), které používají různé druhy středních opacit. Na některé z těchto metod se podíváme v následujících kapitolách.

15.2.2 Unsöldova-Lucyho metoda korekce teplot

Lucy (1964) upravil Unsöldovu metodu pro šedou atmosféru (Unsöld, 1948, 1951) použil astrofyzikální tok F místo Eddingtonova toku H použitého zde

integrujeme momentové rovnice (3.39) pro vydatnost v LTE s rozptylem (7.23);

za předpokladu izotropního rozptylu (pro opacitu platí $\chi_\nu = \kappa_\nu + \sigma_\nu$, členy obsahující rozptyl se v první rovnici odečtou)

$$\begin{aligned}\frac{dH_\nu}{dz} &= -\kappa_\nu(J_\nu - B_\nu) \\ \frac{dK_\nu}{dz} &= -\chi_\nu H_\nu\end{aligned}$$

integroujeme přes frekvence, využijeme definice středních opacit $\bar{\chi}_H$ (14.33), $\bar{\kappa}_B$ (14.35), $\bar{\kappa}_J$ (14.36)

$$\begin{aligned}\frac{dH}{dz} &= -(\bar{\kappa}_J J - \bar{\kappa}_B B) \\ \frac{dK}{dz} &= -\bar{\chi}_H H\end{aligned}\tag{15.25}$$

zavedeme optickou hloubku, použijeme (14.35) $d\tau \equiv -\bar{\kappa}_B dz$

$$\begin{aligned}\frac{dH}{d\tau} &= \frac{\bar{\kappa}_J}{\bar{\kappa}_B} J - B \\ \frac{dK}{d\tau} &= \frac{\bar{\chi}_H}{\bar{\kappa}_B} H\end{aligned}\tag{15.26}$$

iterační postup

rovnice (15.26) splněné, ale tok $H^{\text{tot}} = (\sigma_R T_{\text{eff}}^4)/(4\pi)$ nezachován

korekce $H(\tau) + \Delta H(\tau) = H^{\text{tot}}$

rovnice s korekcemi

$$\frac{d(H + \Delta H)}{d\tau} = \frac{\bar{\kappa}_J}{\bar{\kappa}_B} (J + \Delta J) - (B + \Delta B)\tag{15.27a}$$

$$\frac{d(K + \Delta K)}{d\tau} = \frac{\bar{\chi}_H}{\bar{\kappa}_B} (H + \Delta H)\tag{15.27b}$$

z rovnice (15.27b) s užitím Eddingtonovy aproximace $\Delta J = 3\Delta K$ dostaneme

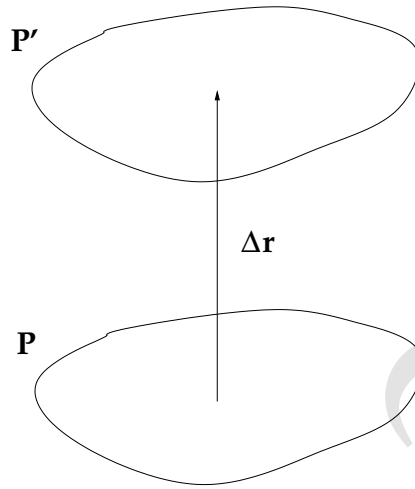
$$\Delta J(\tau) = \Delta J(0) + 3 \int_0^\tau \frac{\bar{\chi}_H}{\bar{\kappa}_B} \Delta H(\tau') d\tau'\tag{15.28}$$

dosadíme do (15.27a) a použijeme povrchovou Eddingtonovu aproximaci $\Delta J(0) = 2\Delta H(0)$ (srovnej s 7.46):

$$\Delta B(\tau) = -\frac{d\Delta H(\tau)}{d\tau} + \frac{\bar{\kappa}_J}{\bar{\kappa}_B} \left[3 \int_0^\tau \frac{\bar{\chi}_H}{\bar{\kappa}_B} \Delta H(\tau') d\tau' + 2\Delta H(0) \right]\tag{15.29}$$

rovnice pro teplotu; pro malé korekce ΔB použijeme lineární přiblížení

$$\Delta B = \frac{4\sigma_R T^3}{\pi} \Delta T$$



Obrázek 15.1: Ilustrační schéma konvektivní nestability.

bez Eddingtonovy aproximace

$$K = \int_0^\infty K_\nu d\nu = \int_0^\infty f_\nu^K J_\nu d\nu \equiv f^K J \quad (15.30a)$$

$$H(0) = \int_0^\infty H_\nu(0) d\nu = \int_0^\infty f_\nu^H J_\nu(0) d\nu \equiv f^H J(0) \quad (15.30b)$$

V (15.29) nahradíme 3 \rightarrow $1/f^K$ a 2 \rightarrow $f^K(0)/(f^K f^H)$

$$\Delta B(\tau) = -\frac{d[\Delta H(\tau)]}{d\tau} + \frac{\bar{\kappa}_J}{\bar{\kappa}_B} \frac{1}{f^K} \left[\int_0^\tau \frac{\bar{\chi}_H}{\bar{\kappa}_B} \Delta H(\tau') d\tau' + \frac{f^K(0)\Delta H(0)}{f^H} \right] \quad (15.31)$$

15.3 Konvekce

Konvekce je důležitým mechanismem přenosu energie ve hvězdné atmosféře zejména pro chladnější hvězdy (včetně Slunce). Naopak pro horké hvězdy lze konvekci ve hvězdné atmosféře ve většině případů zanedbat. Zde si odvodíme podmínku nutnou pro spuštění konvekce. V nějakém bodě, který označíme P , zvolíme objemový element hmoty a posuneme ho vzhůru (proti orientaci gravitačního zrychlení) do bodu P' (viz obr. 15.1). Podmínku nestability získáme porovnáním hustoty elementu ρ_{el} v bodě P' s hustotou ρ_{bg} v jeho okolí (tlaky elementu p_{el} a okolí p_{bg} jsou stejné). Předpokládáme, že pohyb objemového elementu je *pomalý*, takže zůstává v *tlakové rovnováze* s okolím. Dále předpokládáme, že nedochází

k výměně energie s okolím, jedná se tedy o *adiabatický děj*. Po posunu bude mít hustota objemového elementu v bodě P' hodnotu ρ_{el} , která bude o $(\Delta\rho)_{el}$ jiná než v bodě P , kde (index ad označuje adiabatický děj)

$$(\Delta\rho)_{el} = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{el} \Delta r = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{ad} \Delta r. \quad (15.32)$$

Pokud bude v bodě P' platit nerovnost $\rho_{el} < \rho_{bg}$, bude element pokračovat v pohybu vzhůru, čímž vznikne **konvektivní nestabilita**. Pokud ale $\rho_{el} > \rho_{bg}$, element se vrátí zpět, což znamená, že prostředí je konvektivně stabilní.

Podívejme se nyní blíže na podmínku konvektivní *nestability*. Připomeňme, že gradient hustoty plynu $(d\rho/dr)_{bg} < 0$, neboť hustota atmosféry směrem vzhůru klesá. Atmosféra bude konvektivně nestabilní, pokud v bodě P' bude platit

$$(\Delta\rho)_{el} - (\Delta\rho)_{bg} = \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{el} \Delta r - \left(\frac{d\rho}{dr}\right)_{bg} \Delta r < 0 \quad (15.33)$$

což je **podmínka nestability**.

Často bývá výhodné vyjádřit tuto podmínku pomocí gradientů tlaku a teploty v atmosféře, zejména pokud hustota ρ není jednou ze základních proměnných popisujících hvězdnou atmosféru. Stavovou rovnici napíšeme ve tvaru (viz Kippenhahn et al., 2012, rovnice 4.22)

$$p = NkT = \frac{\mathcal{R}_A}{\mu} \rho T \quad (15.34)$$

kde μ je molekulární hmotnost, $\mathcal{R}_A = k/m_u$ (m_u je atomová hmotnostní jednotka) je univerzální plynová konstanta vyjádřená na jednotkovou hmotu ($\mathcal{R}_A = 8.31 \times 10^7 \text{ erg K}^{-1} \text{ g}^{-1}$), nikoli na mol, jak bývá obvyklé. Tuto rovnici vyjádříme formálně jako $\rho = \rho(p, T, \mu)$. V diferenciálním tvaru ji můžeme zapsat jako (viz Kippenhahn et al., 2012, rovnice 6.5)

$$\frac{d\rho}{\rho} = \alpha \frac{dp}{p} - \delta \frac{dT}{T} + \varphi \frac{d\mu}{\mu}. \quad (15.35)$$

Takto zapsaná rovnice zahrnuje i možnou změnu chemického složení, která se projeví změnou molekulární hmotnosti. Zde

$$\alpha = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln p}\right)_{T, \mu}, \quad \delta = - \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln T}\right)_{p, \mu}, \quad \varphi = \left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial \ln \mu}\right)_{p, T}, \quad (15.36)$$

kde indexy označují konstantní proměnné při parciálním derivování. V ideálním plynu by bylo $\alpha = \delta = \varphi = 1$. Ke změně chemického složení nedochází v pohybujícím se elementu (nese si své složení s sebou a proto $(d\mu/dr)_{el} = 0$), ale může

k němu docházet v jeho okolí. Dosadíme do (15.33)

$$\left(\frac{\alpha dp}{p dr}\right)_{el} - \left(\frac{\delta dT}{T dr}\right)_{el} < \left(\frac{\alpha dp}{p dr}\right)_{bg} - \left(\frac{\delta dT}{T dr}\right)_{bg} + \left(\frac{\varphi d\mu}{\mu dr}\right)_{bg} \quad (15.37)$$

Díky předpokládanému pomalému pohybu je $p_{el} = p_{bg}$, členy s gradientem tlaku se proto odečtou. Zavedeme **výškovou škálu tlaku** (*pressure scale height*) H_p vztahem (Kippenhahn et al., 2012, rovnice 6.8)

$$\frac{1}{H_p} = -\frac{d \ln p}{dr} = -\frac{1}{p} \frac{dp}{dr}. \quad (15.38)$$

V případě hydrostatické atmosféry bez záření $H_p = p/(\rho g)$, což vyplývá z rovnice hydrostatické rovnováhy. Vynásobíme (15.37) H_p (pozor na znaménko), dostaneme

$$\left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{el} < \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{bg} - \frac{\varphi}{\delta} \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln p}\right)_{bg}. \quad (15.39)$$

Zavedeme označení

$$\nabla_{el} = \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{el} \quad (15.40a)$$

$$\nabla = \left(\frac{d \ln T}{d \ln p}\right)_{bg} \quad (15.40b)$$

$$\nabla_{\mu} = \left(\frac{d \ln \mu}{d \ln p}\right)_{bg}. \quad (15.40c)$$

Podmínku nestability (15.39) můžeme přepsat

$$\nabla > \nabla_{el} + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_{\mu}. \quad (15.41)$$

Pomocí ∇ označujeme gradient teploty v prostředí, kde se energie přenáší jak konvekcí, tak zářením. Gradient teploty při čistě zářivém přenosu označíme ∇_{rad} . Platí, že $\nabla_{rad} \geq \nabla$, rovnost nastává v prostředí bez konvekce. Gradient ∇_{rad} používáme při vyhodnocování kritéria nestability, abychom zjistili, zda v daném prostředí může dojít ke konvekci. Předpokládali jsme, že při posunu elementu nedochází k výměně energie s okolím, což znamená adiabatický děj. Proto pro vyhodnocování podmínky nestability použijeme adiabatický gradient, $\nabla_{el} \rightarrow \nabla_{ad}$. Kritérium nestability bude pak

$$\nabla_{rad} > \nabla_{ad} + \frac{\varphi}{\delta} \nabla_{\mu} \quad (15.42a)$$

což je **Ledouxovo kritérium nestability**. Pro případ chemicky homogenního prostředí, kde nedochází ke změnám chemického složení, dostáváme jednodušší **Schwarzschildovo kritérium nestability**,

$$\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}. \quad (15.42b)$$

Tyto podmínky vyjadřují, kdy v prostředí nastává konvekce. Jinými slovy lze také říci, že prostředí je konvektivně stabilní, když je teplotní gradient menší než adiabatický gradient (je subadiabatický). Adiabatický gradient teploty můžeme pro jednoatomový plyn vyjádřit jako (viz Kippenhahn et al., 2012, rovnice 4.36)

$$\nabla_{\text{ad}} = \frac{\gamma - 1}{\gamma}, \quad (15.43)$$

kde γ je **adiabatický exponent ideálního plynu**, pro jednoatomový plyn $\gamma = c_p/c_V$ (viz také F.10), kde c_p je specifické teplo při konstantním tlaku a c_V je specifické teplo při konstantním objemu. Pro plyny, které obsahují více ionizačních stupňů, musíme nahradit γ **Chandrasekharovým adiabatickým indexem (exponentem) Γ_2** .

Pro jednoatomové plyny je tento index $\Gamma_2 = \frac{5}{3}$ (viz například Cox and Giuli, 1968, kapitola 9.15), pro záření $\Gamma = \frac{4}{3}$ (viz například Cox and Giuli, 1968, kapitola 9.16). Pro směs plynu, kde navíc probíhá ionizace, a záření je určeno adiabatických indexů složitější (Cox and Giuli, 1968, kapitola 9.18). V oblastech, kde je přibližně stejné množství neutrálního a ionizovaného vodíku (tzv. **oblast ionizace vodíku – hydrogen ionization zone**), je $\Gamma \sim 1.1$. V těchto oblastech také klesá adiabatický gradient ∇_{ad} , podle podmínky (15.42) se tam prostředí snadno stává konvektivně nestabilní.

Konvekce není v atmosféře přítomná u všech typů hvězd. U horkých hvězd jsou atmosféry konvektivně stabilní, slabá konvekce se může objevit v oblastech ionizace He I a He II. U chladnějších hvězd spektrální třídy A bývá slabá konvektivní zóna okolo optických hloubek $\tau \sim 0.2$. Ve hvězdách spektrální třídy F a chladnějších se konvektivní zóna zvětšuje a stává se podstatnou částí atmosféry. U nejchladnějších hvězd spektrální třídy M je prakticky celá struktura atmosféry určena konvekcí.

15.3.1 Modelování konvekce

Modelování konvekce je poměrně složitý hydrodynamický problém. Jedná se o řešení přenosu energie v turbulentním prostředí, což je matematicky nesnadné. Navíc se snažíme zabudovat obecně třírozměrný konvektivní pohyb do jednorozměrného modelu hvězdné atmosféry. Mezi gradienty zavedenými vztahy (15.40) a (15.43) platí nerovnost

$$\nabla_{\text{ad}} \leq \nabla_{\text{el}} \leq \nabla \leq \nabla_{\text{rad}} \quad (15.44)$$

Cílem modelování konvekce je nalezení gradientu ∇ .

Často používanou aproximací je tzv. *teorie směšovací délky* (*mixing length theory*). Je to přibližný popis turbulentního prostředí jedním vírem. K popisu se využívá parametr α , který svazuje *směšovací délku* l s výškovou škálou tlaku H_p (15.38) vztahem

$$l = \alpha H_p. \quad (15.45)$$

Parametr α je volný parametr. Existuje více formulací teorie směšovací délky. Pro konvektivní tok energie můžeme v přiblížení směšovací délky psát (podle Hubeny and Mihalas, 2014, kapitola 16.5)

element konvektivního proudění (el) má o ΔT vyšší teplotu než jeho okolí (bg)

$\Delta p = p_{el} - p_{bg} = 0$ – jeho tlak je v rovnováze s okolím

předá okolí energii $\rho c_p \Delta T$

$\langle v \rangle$ – střední hodnota rychlosti konvektivního přenosu

\Rightarrow konvektivní tok

$$\mathcal{F}_{conv} = \rho c_p \langle v \rangle \Delta T = \rho c_p \langle v \rangle \left[\left(-\frac{dT}{dr} \right) - \left(-\frac{dT}{dr} \right)_{el} \right] \Delta r \quad (15.46)$$

přes dané místo putují elementy, jejich dráhy jsou náhodně rozděleny, průměrná hodnota všech takových drah $\Delta r = l/2$

použijeme H_p (15.38)

$$\mathcal{F}_{conv} = \frac{1}{2} \rho c_p \langle v \rangle T (\nabla - \nabla_{el}) \frac{l}{H_p} \quad (15.47)$$

určíme $\langle v \rangle$:

vztlaková síla na element:

$$f_b = -g \Delta \rho \quad (15.48)$$

μ proměnné se z (vliv ionizace a záření) – vyjdeme z (15.35)

$$d \ln \rho = d \ln p - Q d \ln T, \quad \text{zavedeme } Q \equiv 1 - \left(\frac{\partial \ln \mu}{\partial \ln T} \right)_p$$

rovnováha tlaků (to jsme předpokládali) $\Delta p = 0$, pak $\Delta \rho = -Q \rho \Delta T / T$ a:

$$f_b = -\frac{\rho g Q}{T} \Delta T \quad (15.49)$$

ΔT vyjádříme jako v rovnici (15.46)

střední práce vykonaná vztlakovou silou (celkové posunutí elementu $\Delta = l/2$)

$$\langle w \rangle = \int_0^\Delta f_b(\Delta r) d\Delta r = \frac{1}{8} \rho g Q H_p (\nabla - \nabla_{el}) \left(\frac{l}{H_p} \right)^2$$

pokud polovina práce převedena do kinetické energie $-\frac{1}{2} \langle w \rangle = \frac{1}{2} \rho \langle v^2 \rangle$ (a polovina do tření – odtlačování sousedních elementů)

$$\langle v^2 \rangle = \frac{1}{8} \rho g Q H_p (\nabla - \nabla_{el}) \left(\frac{l}{H_p} \right)^2 \quad (15.50)$$

konvektivní tok:

$$\mathcal{F}_{conv} = \sqrt{\frac{g Q H_p}{32}} \rho c_p T (\nabla - \nabla_{el})^{3/2} \left(\frac{l}{H_p} \right)^2 \quad (15.51)$$

Přesnější je metoda, která pro popis konvekce využívá celého spektra turbulentních vírů. Její autoři Canuto and Mazzitelli (1991) ji nazvali **metoda turbulentní konvekce**. V tomto přiblížení můžeme pro konvektivní tok psát výsledný konvektivní tok lze aproximovat jako

$$F_c = \frac{kT}{H_p} (\nabla - \nabla_{ad}) \Phi, \quad (15.52)$$

kde

$$K = \frac{16\sigma T^3}{3\bar{\chi}_R} \quad (15.53a)$$

$$H_p = \frac{p}{\rho g} \quad (15.53b)$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial \ln p} \right) \quad (15.53c)$$

$$\Phi = 24.868 \Sigma^{0.14972} [(1 + 0.097666 \Sigma)^{0.18931} - 1]^{1.8503} \quad (15.53d)$$

$$\Sigma = 4A^2 (\nabla - \nabla_{ad}) \quad (15.53e)$$

$$A = \frac{l^2 c_p \rho}{9k} \sqrt{\frac{g}{H_p}}. \quad (15.53f)$$

Protože metoda předpokládá, že l je vzdálenost k hornímu okraji konvektivní zóny, nemá žádný volný parametr.

Hydrodynamické modely s konvekcí

3-D modely – stručně v kapitole 23.1.1

15.4 Rovnice přenosu záření

Pole záření, které je třeba znát pro všechny frekvence v každém místě atmosféry, získáme v rovinné geometrii řešením momentové rovnice přenosu záření (3.41),

$$\frac{d^2(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu. \quad (3.41)$$

Optická hloubka pro frekvenci ν je zavedena vztahem (3.22) $d\tau_\nu = -\chi_\nu dz = -(\kappa_\nu + \sigma_\nu) dz$, kde χ_ν je celková opacita (3.1), κ_ν je termální opacita a σ_ν je opacita rozptylu. Využíváme faktu, že v rovnicích hydrostatické, zářivé a kinetické rovnováhy se nevysktuje specifická intenzita záření, tudíž můžeme použít momentovou rovnici. Neznamena to ale, že úhlovou závislost pole záření nebereme v úvahu. Ta je zahrnuta pomocí Eddingtonova činitele f_ν^K (2.46), který získáme z řešení úhlově závislé rovnice pro specifickou intenzitu záření s izotropní opacitou a emisivitou zapsanou pomocí optické hloubky (3.28)

$$\mu \frac{dI_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} = I_{\nu\mu} - S_\nu \quad (3.28)$$

a integrací $I_{\nu\mu}$ přes úhly podle rovnic (2.31) a (2.36) a vztahu (3.40). Pro přesné určení f_ν^K používáme metodu proměnných Eddingtonových činitelů (kapitola 7.5.2). Vydatnost S_ν zahrnuje i rozptylový člen,

$$S_\nu = \frac{\eta_\nu + \sigma_\nu J_\nu}{\kappa_\nu + \sigma_\nu}. \quad (7.23)$$

Pokud využijeme Schusterovy-Feautrierovy proměnné (6.48), můžeme použít rovnici pro $j_{\nu\mu}$ (6.50)

$$\mu^2 \frac{d^2 j_{\nu\mu}}{d\tau_\nu^2} = j_{\nu\mu} - S_\nu \quad (6.50)$$

kterou doplníme o okrajové podmínky (6.52),

$$\mu \left. \frac{dj_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\min}} = j_{\nu\mu}(\tau_{\min}) - I_{\nu\mu}^- \quad (6.52a)$$

na horním okraji a

$$\mu \left. \frac{dj_{\nu\mu}}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\max}} = I_{\nu\mu}^+ - j_{\nu\mu}(\tau_{\max}). \quad (6.52b)$$

na spodním okraji. Záření dopadající na horní okraj $I_{\nu\mu}^-$ a záření dopadající na spodní okraj $I_{\nu\mu}^+$ byly zavedeny v rovnicích (6.51). Pro hvězdné atmosféry se často využívá podmínka nulového dopadajícího záření na horním okraji (6.53)

$$I_{\nu\mu}^- = 0 \quad (6.53)$$

a difúzního přiblížení na spodním okraji (6.54)

$$I_{\nu\mu}^+ = B_\nu(\tau_{\max}) + \mu \left. \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\max}}. \quad (6.54)$$

V tom případě volíme spodní okraj počítaného modelu atmosféry tak, aby byly podmínky pro difúzní přiblížení splněny pro všechny frekvence. Pokud zvolíme spodní okraj atmosféry tam, kde hodnota sloupcové hmoty $m \sim 10^3 - 10^4$, bývá difúzní přiblížení pro všechny frekvence většinou splněné.

Pokud na horním okraji pro všechny frekvence neplatí, že $\tau_{\min} \ll 1$, může to způsobit numerické problémy při řešení modelu. Můžeme se jim vyhnout použitím trochu pozměněné horní okrajové podmínky, jak navrhl Nordlund (1984, rovnice III.8). Pro případ, že zvolíme horní okraj tak, že $\tau_{\min} > 0$, bude přesnější okrajová podmínka mít tvar

$$I_{\nu\mu}^- [\tau_{\min}(\nu)] = S_\nu [\tau_{\min}(\nu)] \{1 - \exp[-\tau_{\min}(\nu)]\} + I_{\nu\mu}^-(\tau_\nu = 0) \exp[-\tau_{\min}(\nu)]. \quad (15.54)$$

Tato rovnice přibližně zahrnuje interakci hmoty se zářením mezi optickými hloubkami 0 a τ_{\min} . $I_{\nu\mu}^-(\tau_\nu = 0)$ označuje záření dopadající na atmosféru, například z vnějšího zdroje záření.

Okrajové podmínky pro momentovou rovnici přenosu záření (3.41) na spodním i horním okraji atmosféry jsou dány rovnicemi (7.47)

$$\left. \frac{d(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\min}} = f_\nu^H J_\nu(\tau_{\min}) - H_\nu^- \quad (7.47a)$$

$$\left. \frac{d(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\max}} = H_\nu^+ - f_\nu^H J_\nu(\tau_{\max}) \quad (7.47b)$$

Veličina f_ν^H je povrchový Eddingtonův faktor (7.46). Toky dopadajícího záření na horním (H_ν^-) a spodním (H_ν^+) okraji získáme integrací specifických intenzit dopadajícího záření přes úhly (viz 7.48). Pokud na spodním okraji platí difúzní přiblížení, je okrajový tok dán vztahem (7.49)

$$H_\nu^+ = \frac{1}{3} \frac{dB_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (7.49)$$

V difúzním přiblížení platí i $S_\nu \approx B_\nu$, můžeme proto vztahy pro specifickou intenzitu $I_{\nu\mu}^+$ (6.54) a tok H_ν^+ (7.49) záření psát také pomocí vydatnosti

$$I_{\nu\mu}^+ = S_\nu(\tau_{\max}) + \mu \left. \frac{dS_\nu}{d\tau_\nu} \right|_{\tau_{\max}}, \quad (15.55a)$$

$$H_\nu^+ = \frac{1}{3} \frac{dS_\nu}{d\tau_\nu}. \quad (15.55b)$$

Pokud jsou splněny podmínky pro difúzní přiblížení, tak jsou rovnice (15.55) ekvivalentní rovnicím (6.54) a (7.49). Pokud je použijeme během iteračního procesu, kdy se lokální hodnoty vydatnosti mohou měnit a i lišit od správných hodnot, zajistí nám vyšší stabilitu řešení za cenu dočasně nekonzistentního modelu. Zkonvergovaný model atmosféry již ale takovými nedostatky netrpí.

15.5 Rovnice pro obsazení energetických hladin

Pro výpočet opacity a emisivity (kterou podrobněji rozebereme v kapitole 16) musíme znát obsazení energetických hladin atomů a molekul. V případě lokální termodynamické rovnováhy jsou tato obsazení funkcí pouze lokální teploty a hustoty $n_l = n_l(N, T)$, l je zde obecný index hladiny. Obsazení hladiny i iontu j získáme v tomto případě jednoduše pomocí Boltzmannova,

$$\frac{n_{ij}^*}{N_j^*} = \frac{g_{ij}}{U_j(T)} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_{ij}}{kT}\right), \quad (4.2)$$

a Sahova rozdělení,

$$\frac{N_j^*}{N_{j+1}^*} = n_e \frac{U_j(T)}{U_{j+1}(T)} C_I T^{-\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{\mathcal{E}_{Ij}}{kT}\right) = n_e \tilde{\Phi}_j(T), \quad (4.25)$$

které jsou odvozeny v kapitole 4. V případě, kdy nemůžeme předpokládat lokální termodynamickou rovnováhu, musíme zahrnout i závislost obsazení hladin na poli záření. Za tohoto předpokladu statistické (kinetické) rovnováhy jsou obsazení funkcí nejen lokální teploty a hustoty, ale i pole záření v daném místě, $n_l = n_l(N, T, J_\nu)$. V tomto případě musíme řešit i soustavu rovnic statistické (kinetické) rovnováhy pro $L = \sum_k L_k$ hladin, každý zahrnutý atom k má L_k hladin. Pro každou hladinu l máme rovnici

$$n_l \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq l}}^{L_k} (R_{lu} + C_{lu}) - \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq l}}^{L_k} n_u (R_{ul} + C_{ul}) = 0 \quad (9.51)$$

Pro každý atom k můžeme soustavu doplnit rovnicí určující celkovou koncentraci daného atomu

$$\sum_{u=1}^{L_k} n_u = \tilde{\alpha}_k \tilde{N}_N. \quad (9.52a)$$

Soustavu (9.51) můžeme doplnit i některou z dalších podmínek (9.52), rovnicí elektrické neutrality

$$\sum_k \sum_{u=1}^{L_k} n_u q_u = n_e \quad (9.52d)$$

nebo rovnicí pro počet celkový částic

$$\sum_k \sum_{u=1}^{L_k} n_u = \tilde{N}_N \quad (9.52c)$$

a případně i abundanční rovnicí vzhledem k referenčnímu atomu (vodíku)

$$\sum_{u=1}^{L_k} n_u = \mathcal{Y}_k N_H. \quad (9.52b)$$

V rovnicích (9.52) sčítáme přes všechny hladiny každého atomu k . Více o soustavě rovnic kinetické rovnováhy je napsáno v kapitole 9.2.

Pro četnosti zářivých a srážkových přechodů mezi hladinami l a u v rovnicích (9.51) platí

$$R_{lu} = 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} J_\nu d\nu. \quad (9.35a)$$

$$R_{ul} = 4\pi \int_0^\infty \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + J_\nu \right) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) d\nu. \quad (9.35b)$$

$$C_{lu} = n_e q_{lu}(T). \quad (9.38)$$

$$C_{ul} = \left(\frac{n_l^*}{n_u^*} \right) n_e q_{lu}(T). \quad (9.41)$$

Pole záření v rovnicích (9.35) určuje rovnice přenosu záření (3.41) s okrajovými podmínkami (7.47).

15.6 Rovnice pro hustotu

rovnice pro hustotu

$$\rho = \sum_i n_i m_i = n_m m_H \quad (15.56)$$

n_m – hustota fiktivní homotné částice

$$n_m \equiv (N - n_e)\mu \quad (15.57)$$

$$\mu = \sum_I \alpha_I \frac{m_I}{m_H} \quad (15.58)$$

α_I – relativní abundance iontu I

15.7 Diskretizace

diskretizace rovnice přenosu: optická hloubka, frekvence, úhly – diskutováno v kapitole 6.3.1

diskretizace hloubek pro 1-D modely atmosfér viz také kapitola 6.3.1.1

m zavedená v (15.2) – nezávislá proměnná:

D hloubkových bodů
 $m_d, d = 1, \dots, D$

pro řešení rovnice přenosu záření jsme vybírali optickou hloubku
 vztah mezi optickou hloubkou a sloupcovou hmotou

$$d\tau_\nu = -\chi_\nu dz = \frac{\chi_\nu}{\rho} dm \quad (15.59)$$

podle (3.2) $d\tau_\nu = \kappa_\nu dm$ (κ_ν – hmotnostní absorpční koeficient)

podobné chování m a τ při diskretizaci
 (ρ i χ_ν jsou úměrné hustotě n)
 – nejvýhodnější logaritmicky ekvidistantní (ekvidistantní v $\ln m$) diskretizace

na horním okraji atmosféry $m_1 > 0$, malé – musí být, jinak máme vakuum

horní okraj zvolit nejlépe tak, že $\tau_\nu \ll 1 \forall \nu$
 opticky tlusté frekvence mohou způsobovat numerické problémy
 (viz kapitola 15.4)

volba spodního okraje: m_D – tak, že $\tau_{\nu,D} \gg 1 \forall \nu$
 frekvence, kde se nedosáhne difúzního přiblížení, mohou způsobit numerické problémy
 (viz kapitola 15.4)

diskretizace frekvencí diskutována v kapitole 6.3.1.3, tam je vše nejnútnejší popsáno

F frekvenčních bodů

- vybíráme je tak, aby dobře vystihly změny opacity (a tím i změny intenzity záření)
- „hodně“ frekvenčních bodů použijeme ve spektrální čárách
- na ionizačních hranách použijeme dva body numericky blízko sebe
- v oblastech „mírných změn“ opacity může být vzdálenost mezi frekvenčními body větší

diskretizace úhlů popsána v kapitole 6.3.1.2

- M směrů, v nichž řešíme rovnici přenosu záření pro specifickou intenzitu záření $I_{\nu\mu}$
- v každém frekvenčním bodě řešíme rovnici přenosu záření pro M směrů

15.7.1 Diskretizace rovnice přenosu záření

- rovnici přenosu záření diskretizujeme v bodech definovaných diskretizací v m
- jako nezávislou proměnnou používáme optickou hloubku τ_ν (přeočítáme podle rovnice 15.59)

numerické derivace ve tvaru podobně jako v Apendixu C.1
první derivace podle rovnice (C.4)

$$\left. \frac{dj}{d\tau} \right|_{d+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta j_{d+\frac{1}{2}}}{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}}} = \frac{j_{d+1} - j_d}{\tau_{d+1} - \tau_d}$$

druhá derivace podle rovnice (C.7)

$$\left. \frac{d^2 j}{d\tau^2} \right|_d = \frac{1}{\Delta \tau_d} \left(\frac{j_{d+1} - j_d}{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}}} - \frac{j_d - j_{d-1}}{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2}}} \right).$$

kde (viz C.6)

$$\Delta \tau_d = \frac{1}{2} \left(\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}} + \Delta \tau_{d-\frac{1}{2}} \right)$$

diferenciované tvary

rovnice přenosu záření pro hloubkový bod $1 < d < D$

$$\begin{aligned} \frac{f_{d-1,n}^K}{\Delta\tau_{d-\frac{1}{2},n}\Delta\tau_{d,n}} J_{d-1,n} - \frac{f_{d,n}^K}{\Delta\tau_{d,n}} \left(\frac{1}{\Delta\tau_{d-\frac{1}{2},n}} + \frac{1}{\Delta\tau_{d+\frac{1}{2},n}} \right) J_{d,n} + \\ \frac{f_{d+1,n}^K}{\Delta\tau_{d+\frac{1}{2},n}\Delta\tau_{d,n}} J_{d+1,n} = \left(1 - \frac{\kappa_{d,n}^{\text{sc}}}{\chi_{d,n}} \right) J_{d,n} - \frac{\eta_{d,n}}{\chi_{d,n}} \end{aligned} \quad (15.60a)$$

pro hloubkový bod $d = 1$ (se započtením okrajové podmínky a s přesností do 2. řádu – rovnice 17.229 v Hubeny and Mihalas 2014)

$$\frac{f_{2,n}^K J_{2,n} - f_{1,n}^K J_{1,n}}{\Delta\tau_{\frac{3}{2},n}} = f_n^H J_{1,n} - H_n^{\text{inc}} + \frac{\Delta\tau_{\frac{3}{2},n}}{2} \left[\left(1 - \frac{\kappa_{1,n}^{\text{sc}}}{\chi_{1,n}} \right) J_{1,n} - \frac{\eta_{1,n}}{\chi_{1,n}} \right] \quad (15.60b)$$

pro hloubkový bod $d = D$ (s difúzním přiblížením)

$$\frac{f_{D,n}^K J_{D,n} - f_{D-1,n}^K J_{D-1,n}}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2},n}} = \frac{H}{\chi_n} \frac{\partial B_n}{\partial T} \bigg|_D - \sum_{n'} \frac{w_{n'}}{\chi_{n'}} \frac{\partial B_{n'}}{\partial T} \bigg|_D \quad (15.60c)$$

pro hloubkový bod $d = D$ (s difúzním přiblížením a přesností do 2. řádu)

$$\begin{aligned} \frac{f_{D,n}^K J_{D,n} - f_{D-1,n}^K J_{D-1,n}}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2},n}} = f_n^H (B_{D,n} - J_{D,n}) \\ + \frac{1}{3} \frac{B_{D,n} - B_{D-1,n}}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2},n}} - \frac{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2},n}}{2} \left[\left(1 - \frac{\kappa_{D,n}^{\text{sc}}}{\chi_{D,n}} \right) J_{D,n} - \frac{\eta_{D,n}}{\chi_{D,n}} \right] \end{aligned} \quad (15.60d)$$

s využitím sloupcové hmoty m

$$\begin{aligned} \Delta\tau_{d\pm\frac{1}{2},n} &\equiv \frac{1}{2} \left(\frac{\chi_{d\pm 1,n}}{\rho_{d\pm 1}} + \frac{\chi_{d,n}}{\rho_d} \right) |m_{d\pm 1} - m_d| \\ \Delta\tau_{d,n} &\equiv \frac{1}{2} \left(\Delta\tau_{d+\frac{1}{2},n} + \Delta\tau_{d-\frac{1}{2},n} \right) \end{aligned} \quad (15.61)$$

15.7.2 Diskretizace rovnice hydrostatické rovnováhy

rovnice hydrostatické rovnováhy diskretizace rovnice (15.9)

použití stavové rovnice ideálního plynu $p = NkT$

$$N_d k T_d - N_{d-1} k T_{d-1} = g(m_d - m_{d-1}) - \frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^F w_n (f_{d,n}^K J_{d,n} - f_{d-1,n}^K J_{d-1,n})$$

(15.62)

okrajová podmínka (15.17) bez členu s H_ν^-

$$N_1 k T_1 = m_1 \left[g - \frac{4\pi}{c} \sum_{n=1}^F w_n \left(\frac{\chi_{1,n}}{\rho_1} f_n^H J_{1,n} - H_n^- \right) \right] \quad (15.63)$$

15.7.3 Diskretizace rovnice zářivé rovnováhy

rovnice zářivé rovnováhy pro $d = 1, \dots, D$

$$\sum_{n=1}^F w_n (\eta_{n,d} - \kappa_{n,d} J_{n,d}) = 0 \quad (15.64)$$

konvekce když $\nabla_{\text{rad}} > \nabla_{\text{ad}}$
modifikace zářivé rovnováhy

$$\int_0^\infty H_\nu d\nu + \frac{\mathcal{F}_{\text{conv}}}{4\pi} = \frac{\sigma_R}{4\pi} T_{\text{eff}}^4 \quad (15.65)$$

derivací podle m

$$\int_0^\infty (\kappa_\nu J_\nu - \eta_\nu) d\nu + \frac{\rho}{4\pi} \frac{d\mathcal{F}_{\text{conv}}}{dm} = 0 \quad (15.66)$$

nejdříve test konvektivní stability

$$\begin{aligned} \nabla_{d-\frac{1}{2}} &= \frac{T_d - T_{d-1} p_d + p_{d-1}}{T_d + T_{d+1} p_d - p_{d+1}} \\ \nabla_{\text{ad}, d-\frac{1}{2}} &= \nabla_{\text{ad}} \left(\frac{1}{2}(T_d + T_{d-1}), \frac{1}{2}(p_d + p_{d-1}) \right) \end{aligned} \quad (15.67)$$

(∇_{ad} je funkcí teploty a tlaku)

diskretizace

$$\sum_{n=1}^F w_n (\kappa_{n,d} J_{n,d} - \eta_{n,d}) + \frac{\rho_d}{4\pi} \frac{\tilde{\mathcal{F}}_{\text{conv}, d+\frac{1}{2}} - \tilde{\mathcal{F}}_{\text{conv}, d-\frac{1}{2}}}{\Delta m_d} = 0 \quad (15.68)$$

$$\Delta m_d = \frac{1}{2} (m_{d+\frac{1}{2}} - m_{d-\frac{1}{2}})$$

15.7.4 Diskretizace rovnic kinetické rovnováhy

$$n_{l,d} \sum_u (R_{lu,d} + C_{lu,d}) = \sum_u n_{u,d} (R_{ul,d} + C_{ul,d}) \quad (15.69)$$

lokální, diskretizace ve frekvencích

$$R_{lu,d} = \frac{4\pi}{h} \sum_{n=1}^F w_n \frac{\alpha_{lu}(\nu_n)}{\nu_n} J_{d,n} \quad (15.70a)$$

$$R_{ul,d} = \frac{4\pi}{h} \sum_{n=1}^F w_n \frac{\alpha_{lu}(\nu_n)}{\nu_n} \frac{g_l}{g_u} \left(\frac{2h\nu_n^3}{c^2} + J_{d,n} \right) \quad (15.70b)$$

15.8 Metoda úplné linearizace

Soustava těchto diskretizovaných nelineárních rovnic se může řešit vícerozměrnou Newtonovou-Raphsonovou metodou, kterou Auer and Mihalas (1969) nazvali metodou úplné linearizace.

Hvězdná atmosféra diskretizována na D hloubkových bodů, frekvenční spektrum reprezentujeme pomocí F frekvenčních bodů. Do řešení zahrneme L energetických hladin. V každém hloubkovém bodě d ($d = 1, \dots, D$) hledáme řešení systému modelových rovnic (15.60), (15.62) s okrajovou podmínkou (15.63), (15.64) a (15.69) pro všechny frekvenční body, hustotu, teplotu a všechny energetické hladiny. Celou soustavu neznámých můžeme formálně zapsat pomocí vektoru

$$\psi_d = (J_1, \dots, J_F, N, T, n_1, \dots, n_L). \quad (15.71)$$

Soustavu rovnic modelových rovnic můžeme formálně zapsat jako

$$\mathbf{f}_d(\psi_d) = 0 \quad (15.72)$$

Metoda linearizace spočívá v tom, že předpokládáme, že máme nějaké řešení této soustavy ψ_d^0 , které splňuje soustavu, ale s nějakou chybou. Budeme hledat $\delta\psi_d$ takové, aby soustava byla splněná lépe. V soustavě (15.72) nahradíme

$$\psi_d \rightarrow \psi_d^0 + \delta\psi_d. \quad (15.73)$$

Budeme předpokládat, že řešení $\psi_d^0 + \delta\psi_d$ soustavu splňuje, tedy

$$\mathbf{f}_d(\psi_d^0 + \delta\psi_d) = 0. \quad (15.74)$$

Budeme hledat $\delta\psi_d$. Soustava (15.74) je nelineární, její přesné řešení je stejně pracné jako řešení soustavy (15.72). Pokud jsou však $\delta\psi_d$ malé, můžeme všechny

členy, které obsahují některou ze složek tenzoru $\delta\psi_d\delta\psi_d$, v soustavě zanedbat a ponechat pouze členy obsahující složky vektoru $\delta\psi_d$ v nejvýše první mocnině. Napíšeme rozvoj do prvního řádu,

$$\mathbf{f}_d(\psi_d) = \mathbf{f}_d(\psi_d^0 + \delta\psi_d) = \mathbf{f}_d(\psi_d^0) + \sum_j \frac{\partial \mathbf{f}_d}{\partial \psi_{dj}} \delta\psi_{dj} = 0. \quad (15.75)$$

Tuto soustavu řešíme pro $\delta\psi_{dj}$ a určíme nové hodnoty ψ_d . Korekce všech odvozených proměnných vyjádříme pomocí korekcí členů vektoru ψ_d . Například pro korekci opacit ve frekvenčním bodě n dostaneme

$$\delta\chi_{d,n} = \left. \frac{\partial \chi_n}{\partial T} \right|_d \delta T_d + \left. \frac{\partial \chi_n}{\partial n_e} \right|_d \delta(n_e)_d + \sum_{l=1}^L \left. \frac{\partial \chi_n}{\partial n_l} \right|_d \delta(n_l)_d. \quad (15.76)$$

Tímto způsobem dostaneme systém soustav rovnic pro jednotlivé hloubkové body. Některé rovnice (přenosu záření, hydrostatické rovnováhy) obsahují derivace, tím svazují sousední hloubkové body. Soustavu rovnic pro $\delta\psi_d$ můžeme formálně zapsat

$$-\mathbb{A}_d \delta\psi_{d-1} + \mathbb{B}_d \delta\psi_d - \mathbb{C}_d \delta\psi_{d+1} = \mathbf{L}_d, \quad (15.77a)$$

přičemž

$$\mathbb{A}_1 = 0, \quad \mathbb{C}_D = 0. \quad (15.77b)$$

vektor pravých stran $\mathbf{L}_d = -\mathbf{f}_d(\psi_d^0)$

pokud konvergence: $\mathbf{L} \rightarrow 0, \delta\psi_d \rightarrow 0$

řešení soustavy rovnic

postupujeme od $d = 1$ do $d = D$

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_1 &= \mathbb{B}_1^{-1} \mathbb{C}_1 \\ \mathbf{E}_1 &= \mathbb{B}_1^{-1} \mathbf{L}_1 \end{aligned} \quad (15.78)$$

(\mathbb{D} – matice, \mathbf{E} – vektor)

$$\begin{aligned} \mathbb{D}_d &= (\mathbb{B}_d - \mathbb{A}_d \mathbb{D}_{d-1})^{-1} \mathbb{C}_d \\ \mathbf{E}_d &= (\mathbb{B}_d - \mathbb{A}_d \mathbb{D}_{d-1})^{-1} (\mathbf{L}_d + \mathbb{A}_d \mathbf{E}_{d-1}) \end{aligned} \quad (15.79)$$

(ekvivalentní $\mathbb{D}_0 = 0, \mathbf{E}_0 = 0$);

„zpětný chod“ (*backsolution*)

$$\begin{aligned} \delta\psi_D &= \mathbf{E}_D \\ \delta\psi_d &= \mathbb{D}_d \delta\psi_{d+1} + \mathbf{E}_d \end{aligned} \quad (15.80)$$

Po určení nových hodnot vektoru ψ_d prověříme, zda jsou hodnoty $\delta\psi_d$ dostatečně malé. Pokud ne, vrátíme se ke kroku (15.73).

15.8.1 Užítí urychlené Λ iterace

Výpočet můžeme urychlit pomocí přibližného lambda operátoru, kdy pole záření vyjádříme pomocí vydatnosti (n) zde značí pořadí iterace, ($n - 1$) jsou hodnoty z předchozí iterace)

$$J_{\nu}^{(n)} = \Lambda_{\nu}^* S_{\nu}^{(n)} + \underbrace{(\Lambda_{\nu} - \Lambda_{\nu}^*) S_{\nu}^{(n-1)}}_{\Delta J_{\nu}^{(n-1)}}. \quad (15.81)$$

Tímto postupem odstraníme pole záření J z vektoru neznámých ψ_d a snížíme výpočetní čas potřebný pro řešení soustavy rovnic pro $\delta\psi_d$, protože zmenšíme rozměr matic, které musíme invertovat.

některé rovnice se změň:

rovnice kinetické rovnováhy

četnosti zářivých přechodů

$$R_{lu} = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} (\Lambda_{\nu}^* S_{\nu} + \Delta J_{\nu}) d\nu \quad (15.82a)$$

$$R_{ul} = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\alpha_{lu}(\nu)}{h\nu} \left(\frac{2h\nu^3}{c^2} + \Lambda_{\nu}^* S_{\nu} + \Delta J_{\nu} \right) d\nu \quad (15.82b)$$

soustava rovnic kinetické rovnováhy teď nelineární v n_i , protože $S(n_i)$

rovnice zářivé rovnováhy

$$\int_0^{\infty} \kappa_{\nu} [(\Lambda_{\nu}^* - 1) S_{\nu} + \Delta J_{\nu}] d\nu = 0 \quad (15.83)$$

v diferenciálním tvaru

$$\int_0^{\infty} \frac{\chi_{\nu}}{\rho} \frac{d[f_{\nu} (\Lambda_{\nu}^* S_{\nu} + \Delta J_{\nu})]}{dm} d\nu = 0 \quad (15.84)$$

rovnice hydrostatické rovnováhy

$$\frac{dp_g}{dm} = g - \frac{4\pi}{c} \int_0^{\infty} \frac{\chi_{\nu}}{\rho} \frac{d[f_{\nu}^K (\Lambda_{\nu}^* S_{\nu} + \Delta J_{\nu})]}{dm} d\nu. \quad (15.85)$$

15.8.2 Některé podrobnosti výpočetní procedury

explicitní atomy a ionty řešíme rovnice kinetické rovnováhy

fixní četnosti přechodů – četnosti se nelinearizují; pokud jich je mnoho → chování podobné Λ -iteraci
lépe přibližnou Λ -iteraci

počáteční model iterační postup → je třeba někde začít (model šedé atmosféry, jiný dříve spočítaný model)

výpočetní strategie LTE-šedý → LTE-(C?) → NLTE-C → NLTE-L

iterační postup jedna iterace zahrnuje:

1. výpočet matic $\mathbb{A}_d, \mathbb{B}_d, \mathbb{C}_d$ a vektoru \mathbf{L}_d
2. řešení linearizovaného systému pro $\delta\psi_d$ (15.80)
3. → nové n_e, N, T, J_n, n_i
4. řešení rovnic kinetické rovnováhy (určení n_i – stabilnější než určit novou hodnotu přímo v kroku 3)
5. formální řešení rovnice přenosu záření (určení I_n, J_n, f_n^K)
6. případné dodatečné Λ nebo Λ^* iterace → konzistentní určení populací a pole záření (vyhlazení řešení)
7. zpět na 1

urychlování předpověď nové hodnoty bez podrobného výpočtu (Ng, 1974)

$$\psi_d^* = (1 - a - b)\psi_d^{(n-1)} + a\psi_d^{(n-2)} + b\psi_d^{(n-3)} \quad (15.86)$$

kde

$$a = \frac{\delta_{01}\delta_{22} - \delta_{02}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} \quad (15.87)$$

$$b = \frac{\delta_{02}\delta_{11} - \delta_{01}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}} \quad (15.88)$$

$$\delta_{ij} = \frac{\Delta\psi^{(n)} - \Delta\psi^{(n-i)}}{\Delta\psi^{(n)} - \Delta\psi^{(n-j)}} \quad (15.89)$$

$$\Delta\psi^{(n)} = \psi^{(n)} - \psi^{(n-1)} \quad (15.90)$$

funguje, pokud už „jsme na správné cestě“

vynechání výpočtu Jakobiánu – Kantorovičovo urychlení
 vynechání kroku 1 z iteračního postupu
 funguje, pokud „jsme na správné cestě“

hybridní metody ALI/CL (urychlená Λ -iterace / úplná linearizace)
 pole záření v některých frekvencích se linearizuje

15.9 Sféricky symetrické modely atmosfér

rovnice přenosu záření

řešíme momentovou rovnici (3.47) s okrajovými podmínkami (7.50)
 podél paprsků řešíme rovnici (6.58) s okrajovými podmínkami (6.59)

rovnice hydrostatické rovnováhy

použijeme sféricky symetrickou rovnici hydrostatické rovnováhy (15.14) s horní okrajovou podmínkou (15.18)

rovnice zářivé rovnováhy

diferenciální tvar (analogicky planparalelní rovnici 15.23)

$$\frac{L}{(4\pi R)^2} = \int_0^\infty \frac{\rho}{q_\nu \chi_\nu} \frac{d(q_\nu f_\nu^K J_\nu)}{dm} d\nu, \quad (15.91)$$

nebo integrální tvar (15.21)

rovnice pro optickou hloubku použijeme definiční rovnici pro sloupcovou hmotnostní hloubku (15.10), svazuje m a r

sféricky symetrické modely řešíme linearizací (Mihalas and Hummer, 1974) nebo pomocí ALI (Kubát, 1996)

15.10 NLTE ohřev

Teplota v LTE modelech atmosfér s rostoucí vzdáleností od hvězdy monotonně klesá. V případě NLTE modelů atmosfér je mechanismus vytváření teplotní struktury poněkud složitější. Jednotlivé atomární procesy různým způsobem ovlivňují teplotní rovnováhu jak směrem k vyšším, tak směrem k nižším teplotám (viz Hubeny and Lanz, 1995). Zde se podíváme na základní mechanismus ohřevu (Cayrelův mechanismus), který je popsán v knize Mihalas (1978, kap.7-5).

Předpokládejme zjednodušený model jednohladinového atomu (viz kapitola 9.5.1). V povrchových vrstvách atmosféry můžeme očekávat nízkou hustotu hmoty. Intenzitu záření na povrchu můžeme přibližně vyjádřit ve zjednodušené formě pomocí faktoru zředění jako $J_\nu = W B_\nu(T_R)$, kde T_R je teplota záření. Rovnice zářivé rovnováhy za předpokladu LTE na povrchu je (Mihalas, 1978, rovnice 7.160)

$$n_1^* \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu B_\nu(T_0) d\nu = n_1^* \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu J_\nu d\nu = n_1^* W \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu B_\nu(T_R) d\nu \quad (15.92)$$

Protože na povrchu platí $W < 1$, je i povrchová teplota $T_0 < T_R$, kde T_R je teplota záření. Pokud $W = \frac{1}{2}$ a $T_R = T_{\text{eff}}$, má povrchová teplota T_0 přibližně hodnotu povrchové teploty šedé atmosféry ($0.8T_{\text{eff}}$).

Dovolíme-li odchylky od LTE, změní se obsazení hladiny na svou NLTE hodnotu, $n_1 = b_1 n_1^*$, a rovnice zářivé rovnováhy (15.92) na

$$n_1^* \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu B_\nu(T_0) d\nu = b_1 n_1^* \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu J_\nu d\nu = b_1 n_1^* W \int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu B_\nu(T_R) d\nu \quad (15.93)$$

V případě nízkých hustot (tj. při zanedbatelných srážkách, $n_e q_{1k} \approx 0$) platí z rovnice statistické rovnováhy (při zanedbání stimulované emise, viz 9.61)

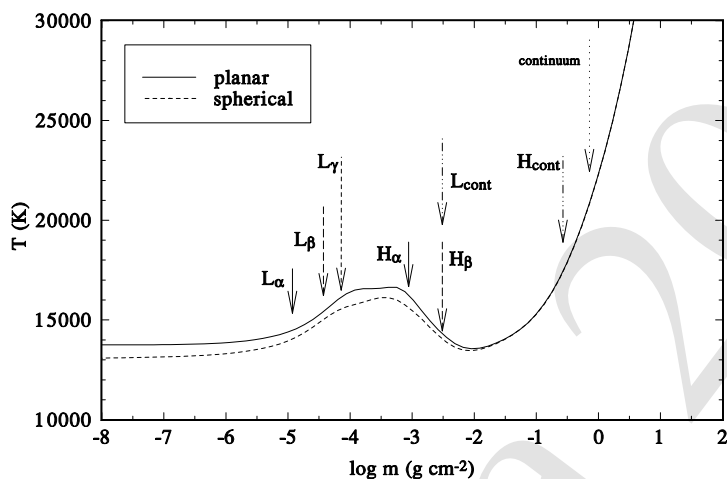
$$b_1 = \frac{n_1}{n_1^*} = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\alpha_\nu B_\nu}{h\nu} d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\alpha_\nu J_\nu}{h\nu} d\nu} \quad (15.94)$$

Kombinací rovnic (15.93) a (15.94) dostaneme

$$\frac{\int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu B_\nu(T_0) d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu B_\nu(T_0) \frac{d\nu}{\nu}} = \frac{\int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu B_\nu(T_R) d\nu}{\int_{\nu_0}^{\infty} \alpha_\nu B_\nu(T_R) \frac{d\nu}{\nu}} \quad (15.95)$$

z čehož vyplývá, že povrchová teplota v případě NLTE nezávisí na faktoru zředění W a je určena teplotou záření, $T_0 = T_R$.

Oblasti formování čar Díky rozdílné optické hloubce pro různé frekvence nemůžeme očekávat, že záření hvězdy bude pocházet vždy ze stejné geometrické hloubky. Jako ilustraci této situace je na obrázku 15.2 teplotní struktura modelu hvězdné atmosféry pro hvězdu s efektivní teplotou $T_{\text{eff}} = 19600\text{K}$ a $\log g = 3.2$.



Obrázek 15.2: Teplotní struktura čistě vodíkového NLTE modelu atmosféry pro hvězdnou atmosféru s parametry odpovídající hvězdě ϵ CMa ($T_{\text{eff}} = 19600\text{K}$, $\log g = 3.2$). Šipky označují oblasti formování jednotlivých vodíkových čar a fotoionizačních přechodů.

15.11 Zářivá difúze ve statických hvězdných atmosférách

radiative diffusion

rovnice hydrostatické rovnováhy

$$\frac{dp_g}{dm} = g - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{\chi_\nu}{\rho} H_\nu d\nu \quad (15.3)$$

různé prvky \Rightarrow různá opacita \Rightarrow různé zářivé zrychlení
 \Rightarrow hloubkově proměnná abundance

Difúze se projevuje i u hvězd spektrální třídy A – na povrch se dostávají “nečekané” prvky: Hg, Sb, Gd, Pr, ... \rightarrow CP hvězdy

gravitational settling gravitační usazování (sedimentace)
 analogie zářivé difúze

DB mezera (*DB gap*) nejsou pozorováni helioví bílí trpaslíci mezi $T_{\text{eff}} = 30\,000\text{ K}$
a $T_{\text{eff}} = 45\,000\text{ K}$

vysvětlení stále chybí – podezření na difúzi

Světlem indukovaný drift (*light induced drift*, Aret and Sagar, 2002)

kombinovaný efekt rozdílného zářivého toku v modrém a červeném křídle spektrální čáry a rozdílu srážkových koeficientů elastických srážek atomů v různých energetických stavech

významný pro spektrální čáry izotopů, které mají velmi blízké frekvence

Kapitola 16

Opacita v modelech atmosfér

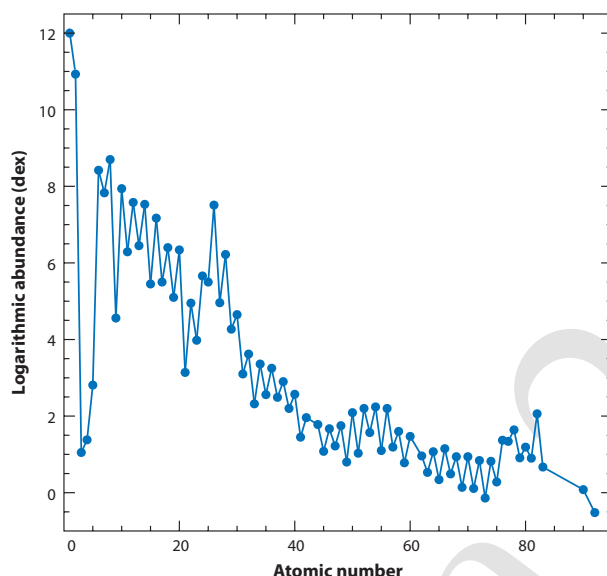
Potřebné opacity $\chi_{\nu\mu}$ a emisivity $\eta_{\nu\mu}$ získáme sečtením všech příspěvků od jednotlivých procesů. Pro zjednodušení zde předpokládáme, že všechny procesy interakce záření s hmotou jsou úhlově nezávislé. Opacita se skládá z příspěvků od všech vázaně-vázaných přechodů, vázaně-volných přechodů, volně volných přechodů a rozptylu,

$$\chi_{\nu} = \sum_i \sum_{j \neq i} \left[n_i - \frac{g_i}{g_j} n_j \right] \alpha_{ij}(\nu) + \sum_i \left[n_i - n_i^* \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] \alpha_{ik}(\nu) + \sum_k n_e n_k \alpha_{kk}(\nu, T) \left[1 - \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] + n_e \sigma_e. \quad (16.1)$$

Zde první člen na pravé straně zahrnuje všechny vázaně-vázané přechody ($\alpha_{ij}(\nu)$) je účinný průřez přechodu mezi hladinami i a j , druhý člen na pravé straně zahrnuje všechny ionizační přechody (vázaně-volné, $\alpha_{ik}(\nu)$ je účinný průřez ionizace z hladiny i a k označuje volné stavy – kontinuum), třetí člen na pravé straně představuje všechny volně-volné přechody ($\alpha_{kk}(\nu, T)$ je účinný průřez volně-volného přechodu vystředovaný přes maxwellovské rozdělení rychlostí volných elektronů) a čtvrtý člen je Thomsonův rozptyl na volných elektronech. Všechny členy kromě posledního obsahují korekci na stimulovanou emisi (stimulovaná emise je brána jako záporná absorpce).

Podobně emisivitu vyjádříme jako součet příspěvků od všech vázaně-vázaných přechodů, vázaně-volných přechodů, volně volných přechodů,

$$\eta_{\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \left[\sum_i \sum_{j \neq i} n_j \frac{g_i}{g_j} \alpha_{ij}(\nu) + \sum_i n_i^* \alpha_{ik}(\nu) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) + \sum_k n_e n_k \alpha_{kk}(\nu, T) \exp\left(-\frac{h\nu}{kT}\right) \right] + n_e \sigma_e J(\nu). \quad (16.2)$$



Obrázek 16.1: Závislost logaritmické abundance (D.4) prvků ve sluneční atmosféře na atomovém čísle. Obrázek z Asplund et al. (2009, Fig. 4). (zkopírováno 18)

Pro určení opacity potřebujeme znát excitační a ionizační rovnováhu, která může být rovnovážná (LTE), ale také nemusí (non-LTE). Dalším faktorem určujícím počet iontů vstupujících do vztahů (16.1) a (16.2) je celkové zastoupení daného atomu (abundance). Množina abundancí pro jednotlivé chemické prvky definuje chemické složení atmosféry, které je zejména důsledkem procesů při hvězdném vývoji a při konstrukci modelu je volným parametrem. Za standardní chemické složení hvězdných atmosfér bývá považováno chemické složení Slunce, které je určeno nejpřesněji. Nejnovější chemické složení Slunce bylo odvozeno na základě porovnání záření vystupujícího z 3-D hydrodynamických modelů sluneční atmosféry (Asplund et al., 2005, 2009).

V závislosti na teplotě hvězdy a její atmosféry jsou dominantními zdroji opacity různé ionizační stupně jednotlivých prvků (viz Mihalas, 1978, kap. 7-2). Základní význam mají přechody v kontinuu, které mohou v každém přechodu zachycovat záření o širokém spektru energií. Z prvků hraje nejdůležitější roli vodík hlavně díky svému velkému zastoupení v celém vesmíru. Pro hvězdy slunečního typu a chladnější je nejvýznamnějším zdrojem vázaně-volné opacity v kontinuu (ionizace) záporný iont vodíku (H^-). Pro teplejší hvězdy spektrální třídy A je to neutrální vodíkový iont $H I$, pro hvězdy spektrální třídy B význam vodíku klesá (převážná část vodíku je ionizována a ionizovaný vodík nemůže absorbovat zá-

ření) a na ionizační opacitě v kontinuu se stále více podílí neutrální helium He I. Pro ještě teplejší hvězdy spektrální třídy O je dominantní zdroj opacity ionizace jednou ionizovaného helia He II. Dominantním volně-volným zdrojem opacity pro velmi chladné hvězdy je záporná molekula vodíku H_2^- . Pro hvězdy slunečního typu dominuje volně-volná opacita záporného vodíkového iontu H^- . Pro hvězdy okolo spektrální třídy A je dominantní volně-volná opacita vodíku H I, pro ještě teplejší hvězdy (třídy O) se k ní přidává volně-volná opacita neutrálního a ionizovaného helia (He I, He II). Významným zdrojem opacity je i rozptyl na elektronech, a to Rayleighův rozptyl na elektronech vázaných ve vodíku pro chladné hvězdy a Thomsonův rozptyl na volných elektronech pro horké hvězdy. Pro hvězdy spektrální třídy O je to vůbec nejsilnější zdroj opacity. Z čárových (vázaně-vázaných) přechodů jsou pro horké hvězdy třídy O významnými zdroji opacity přechody vodíku i helia He I a He II, pro chladnější hvězdy spektrální třídy A jsou dominantní čáry vodíku H I, pro hvězdy slunečního typu dominují v opacitě čáry neutrálních i ionizovaných kovů a u pozdních hvězd získávají na významu čáry a pásy molekul (CO , CN , H_2O , ...).

16.1 Pokrývkový efekt spektrálních čar

počet spektrálních čar prvků (viz kapitola B.5)

závisí na počtu energetických hladin

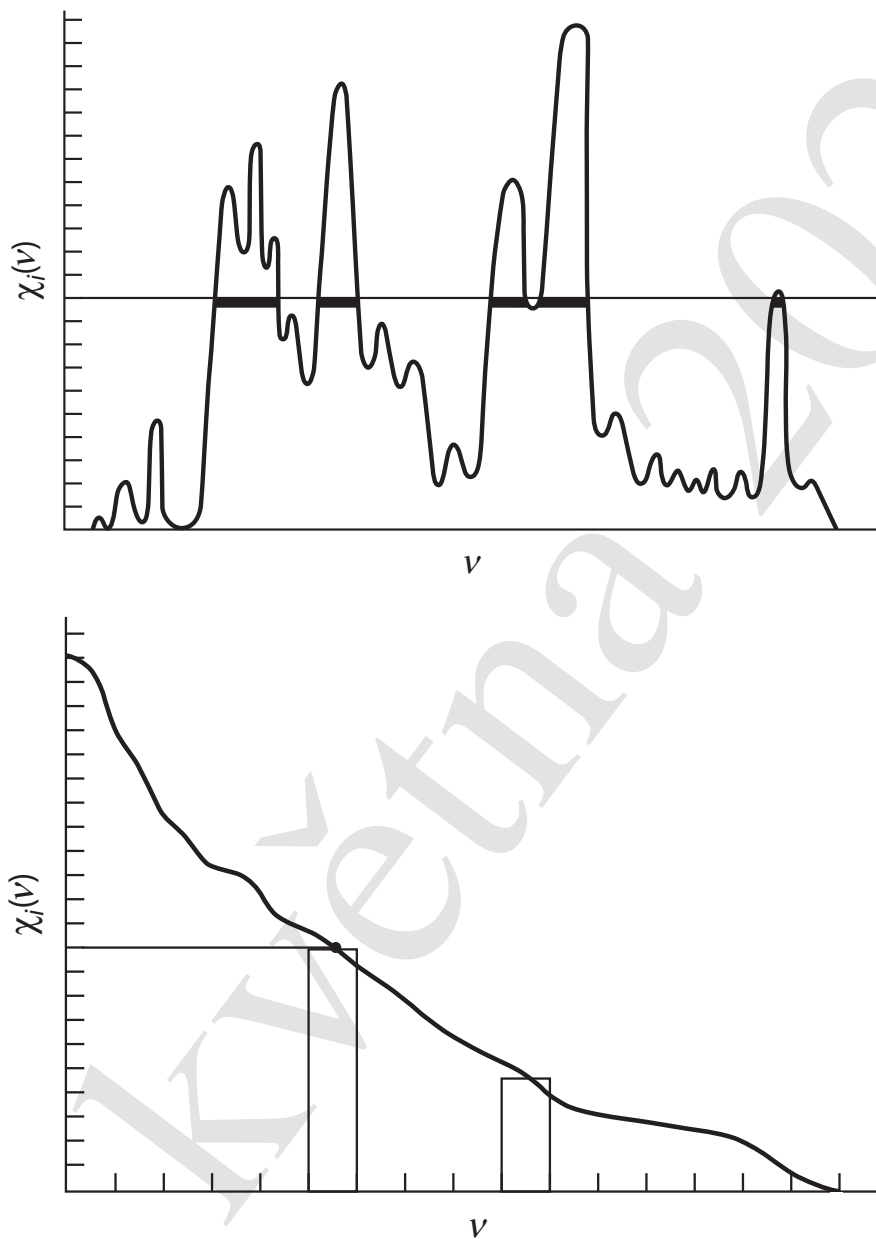
“standardní” pro prvky s podslupkami s a p

velký pro prvky, které mají navíc částečně zaplněnou podslupku d

extrémně veliký pro prvky s částečně zaplněnou podslupkou f

- velké množství spektrálních čar v ultrafialové oblasti spektra – **pokrývkový jev** (anglicky *line blanketing*)
- velké množství spektrálních čar → zvýšená absorpce záření
záření přesunuto do vlnových délek, kde je opacita menší
blokovací efekt
- zvýšená opacita → snížení zářivého toku
podmínka zachování toku ⇒ zvýšení teploty spodních vrstev
zpětný ohřev (*backwarming*)

Line blanketing je efekt způsobený velkým množstvím čar kovů v ultrafialové části spektra. Množství čar je tak velké, že jednotlivé čáry se vzájemně překrývají a tvoří v této oblasti spektra ve frekvenci souvislý zdroj opacity. Odtud pramení i název line blanketing (blanket = přikrývka). Počet spektrálních čar závisí na struktuře atomu, jejich nejvyšší počet se vyskytuje u železa a niklu (zejména ionty Fe II



Obrázek 16.2: Opacitní distribuční funkce. *Horní obrázek:* Schematický náčrt závislosti opacit na frekvenci v oblasti s velkým množstvím spektrálních čar. Obrázek zkopírován z Hubeny and Mihalas (2014, obr. 17.7), (zkopírováno 21). *Dolní obrázek:* Schematický náčrt opacitní distribuční funkce vyzhájící z horního obrázku. Obrázek zkopírován z Hubeny and Mihalas (2014, obr. 17.8), (zkopírováno 22).

a Ni II) a dosahuje hodnot několika desítek milionů. Důsledkem tohoto množství čar je vysoká opacita v ultrafialové oblasti spektra. Záření pohlcené v této oblasti se musí někde vyzářit, což se děje v oblasti s menší opacitou. Tou oblastí je zejména viditelná a infračervená část spektra. Intenzita záření vystupujícího z této oblasti se ve srovnání s případem bez line blanketingu znatelně zvýší. Tento efekt je výrazný zejména u horkých hvězd, protože jejich záření má maximum právě v ultrafialové oblasti spektra.

Vzhledem k vysokému počtu spektrálních čar není zahrnutí line blanketingu snadné, i když jde v podstatě jen o využití rovnic (16.1) a (16.2). Problémem je, že při podrobném zahrnutí všech spektrálních čar musíme pro popis každé čáry použít několik frekvenčních bodů, které popíší profil čáry. Při vysokém počtu spektrálních čar jsou pak i velmi vysoké nároky na numerické výpočty, protože je nutné pro každý frekvenční bod řešit rovnici přenosu záření. K zahrnutí line blanketingu se používají dvě metody, které významným způsobem sníží počet potřebných frekvenčních bodů (a tím i počet rovnic přenosu záření, které musíme řešit). Jedná se o metody nazývané opacitní distribuční funkce a opacitní vzorkování (opacity sampling).

Metodu *opacitní distribuční funkce* navrhli Strom and Kurucz (1966). Její podstatou je přerozdělení opacit tak, aby výsledná opacita mohla být ve vybraném intervalu frekvencí reprezentovatelná nízkým počtem frekvenčních bodů. Nejdříve ve vybraném intervalu, který označíme $\langle \nu_1; \nu_2 \rangle$, zvolíme frekvenční body tak, aby nám pokud možno dobře popisovaly funkci $\chi(\nu)$ pro zvolenou referenční teplotu a hustotu. Potom přerovnáme všechny frekvenční body v daném intervalu tak, aby opacita byla monotónní funkcí frekvence, čímž vytvoříme monotónní funkci opacity $\chi_{\text{ODF}}(\nu)$. Celkové množství pohlcené zářivé energie při použití obou opacitních funkcí by mělo být stejné,

$$\int_{\nu_1}^{\nu_2} \chi(\nu) J(\nu) d\nu = \int_{\nu_1}^{\nu_2} \chi_{\text{ODF}}(\nu) J(\nu) d\nu. \quad (16.3)$$

Monotónní funkci $\chi_{\text{ODF}}(\nu)$ můžeme popsat postatně nižším počtem frekvenčních bodů než původní závislost. Tím dosáhneme značné úspory při výpočtu opacity.

Metoda opacitní distribuční funkce je často používaná při výpočtech modelů atmosfér za předpokladu lokální termodynamické rovnováhy. Nejznámější jsou často používané modely, které spočítal Kurucz (1979) pomocí svého programu ATLAS (Kurucz, 1970). Byla také úspěšně využita při výpočtech modelů atmosfér chladných hvězd programem MARCS (Gustafsson et al., 1975, 2008) i v řadě dalších případů.

Tato metoda však má svá omezení. Opacita v každé hvězdné atmosféře se mění s hloubkou podle toho, jak se mění teplota a hustota. Pokud tato změna bude výrazná, budeme potřebovat více opacitních distribučních funkcí pro daný frekvenční interval a výhodnost zavedení opacitní distribuční funkce bude klesat. Ná-

zorně je vliv těchto změn vidět, pokud vyjádříme opacitu pomocí hustoty a hmotnostní opacitní (viz rovnice 3.2), $\chi_\nu = \rho \kappa_\nu$. Lineární závislost opacitní na hustotě ρ nemění tvar opacitní distribuční funkce, ale je jen částí závislosti. Hmotnostní opacita κ závisí na teplotě i hustotě nelineárně díky Sahovu a Boltzmannovu rozdělení. Tato závislost může zesilovat a zeslabovat jednotlivé čáry a tím měnit tvar opacitní distribuční funkce.

Podobnou komplikaci způsobí zahrnutí rychlostních gradientů, kde opacita každé čáry je dopplerovsky posunuta a tím by se měla posunout i opacitní distribuční funkce. Výraznější komplikaci představuje opuštění předpokladu lokální termodynamické rovnováhy, kdy je zářením ovlivněna opacita v různých frekvenčních bodech různým způsobem a užití opacitní distribuční funkce by řešení problému spíše komplikovalo.

Alternativním postupem je snížit počet frekvenčních bodů potřebných pro výpočet integrálu v integrální rovnici zářivé rovnováhy (15.21) nebo při výpočtu celkového toku \mathcal{F} (2.20). Tento postup vyzkoušel Peytremann (1974) a zjistil, že pro LTE model atmosféry hvězd slunečního typu stačí 600 bodů v oblasti s čarami a 63 ve zbytku, kde je jen kontinuum. Postup pak použili Sneden et al. (1976) a Johnson and Krupp (1976) i na molekulární opacitní. Tato metoda se nazývá **opacitní vzorkování** (*opacity sampling*), frekvenční body v této metodě se většinou vybírají náhodně. Phillips and Wright (1980) vylepšili metodu přidáním explicitního zahrnutí silných čar (čímž snížili chybu vznikající při jejich náhodném vynechání), ve zbytku ultrafialového čarového spektra použili metodu vzorkování. Metoda nebo její různé varianty byly pak použity v řadě programů pro modelování atmosfér chladných hvězd, jako například verze Kuruczova programu s názvem ATLAS12 (Kurucz, 1993, 1996), modifikovaný program MARCS (Plez et al., 1992) nebo program MAFAGS-OS (Grupp, 2004a,b). V této metodě jsou opacita a přenos záření počítány pro vybrané frekvence. Výběr bývá prováděn náhodně, vzhledem k ohromnému množství současných atomárních a molekulových dat bývá počet frekvenčních bodů o několik řádů vyšší než byl v prvních pracích, což poskytuje uspokojivou přesnost řešení.

dlouholetý rozpor v modelování hvězdných atmosfér:

- LTE – možnost zahrnutí pokrývkového jevu, nekonzistentní fyzika
- NLTE – konzistentní fyzika, potíže při zahrnutí pokrývkového jevu

16.1.1 NLTE line blanketing

Samostatným problémem je zahrnutí line blanketingu pro případ, kdy nemůžeme předpokládat rovnovážné rozdělení excitačních a ionizačních stupňů. Pro řešení tohoto problému NLTE line blanketingu byla vyvinuta metoda *superhadin* a *su-*

perčar (Anderson, 1985, 1989; Dreizler and Werner, 1993; Hubeny and Lanz, 1995).

Podstatou této metody je snížení počtu energetických hladin atomů, které dosahuje pro některé ionty, například Fe II až deseti tisíc. V této metodě se energeticky blízké hladiny (pro které lze předpokládat, že pro poměr jejich obsazení platí přibližně Boltzmannův excitační zákon) sdruží do jedné superhladiny. Lze využít i dodatečnou podmínku, že budeme sdružovat pouze hladiny se stejnou paritou (Hubeny and Lanz, 1995). Rovnice statistické rovnováhy pak řešíme pro soustavu superhladin s přenosem záření v superčarách. Profil superčar není ani lorentzovský ani dopplerovský, ale je dán superpozicí profilů všech jednotlivých složek superpřechodu. Pro každý takový profil superčáry pak použijeme metodu opacitní distribuční funkce s tou modifikací, že maximální opacita není na kraji, ale ve středu superčáry a od středu klesá opacita monotonně k oběma krajům čáry.

superhladiny

formální spojení více energetických hladin do jedné (podobně jako v případě multipletů nebo hladin se stejným kvantovým číslem),

obsazení superhladiny L s podhladinami l

$$n_L \equiv \sum_{l \in L} n_l \quad (16.4)$$

n_L nemusí mít rovnovážnou hodnotu

můžeme předpokládat, že pro populace hladin l, l' patřících do superhladiny L platí Boltzmannovo rozdělení

\mathcal{E}_l – excitační energie hladiny l

$$\frac{n_l}{n_{l'}} = \frac{g_l}{g_{l'}} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_l - \mathcal{E}_{l'}}{kT}\right) \quad (16.5)$$

analogicky k rovnici (4.2) také rozdělení obsazení podhladin

$$\frac{n_l}{N_L} = \frac{g_l}{U_L(T)} \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_l}{kT}\right). \quad (16.6)$$

kde

$$U_L(T) = \sum_{l \in L} g_l \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_l}{kT}\right) \quad (16.7)$$

všechny hladiny patřící do superhladiny mají stejné b -faktory (9.9)

$$\forall l \text{ platí : } b_l = b_L \quad (16.8)$$

zavedeme g_L (statistickou váhu superhladiny L)

$$g_L = \sum_{l \in L} g_l \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_l}{kT}\right) \quad (16.9)$$

(excitační) energie superhladiny

$$\mathcal{E}_L = \frac{\sum_{l \in L} \mathcal{E}_l g_l \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_l}{kT}\right)}{\sum_{l \in L} g_l \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_l}{kT}\right)} \quad (16.10)$$

pokud jsou energie hladin l blízké, lze vztah pro g_L zjednodušit

$$g_L = \sum_{l \in L} g_l \quad (16.11)$$

(podobně jako ve vztazích 10.42)

vhodné podmínky pro superhladiny

- blízkost energií hladin
- podobné vlastnosti hladin (stejný multiplet)

možnosti zavedení superhladin

- menší počet superhladin podle jejich energií (Anderson, 1989; Dreizler and Werner, 1993)
 - jednodušší model atomu (typicky stačí 6-7 hladin na iont)
 - větší rozpětí energií uvnitř superhladiny \Rightarrow
 - * existují nezanedbatelné zářivé přechody uvnitř superhladin
 - * tím mohou vznikat odchylky od Boltzmannova rozdělení uvnitř superhladin
 - problematické zahrnutí metastabilních hladin do superhladin
 - * také mohou vznikat odchylky od Boltzmannova rozdělení
- větší počet superhladin s minimálním rozpětím jejich energií a stejnou paritou (Hubeny and Lanz, 1995)
 - model atomu má více hladin
 - zářivé přechody mezi podhladinami nejsou dipólově dovolené

superčáry přechody mezi superhladinami L a U
absorpční koeficient

$$\kappa_{LU}(\nu) = \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} n_l \sigma_{lu}(\nu) \quad (16.12)$$

$\sigma_{lu}(\nu)$ – účinný průřez pro přechod $l \rightarrow u$ ($\sigma_{lu} = \frac{\pi e^2}{m_e c} f_{lu} \phi_{lu}$)

σ_{LU} – absorpční účinný průřez pro přechod $L \rightarrow U$, určíme z $\kappa_{LU} = n_L \sigma_{LU}$

emisní koeficient

$$\eta_{UL}(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \sum_{l \in L} \sum_{u \in U} n_u \frac{g_l}{g_u} \sigma_{lu}(\nu) \quad (16.13)$$

$\sigma_{UL}(\nu)$ – emisní účinný průřez pro přechod $U \rightarrow L$, určíme

$$z \eta_{UL}(\nu) = n_U \frac{g_L}{g_U} \sigma_{UL}(\nu)$$

- složené z koeficientů pro jednotlivé přechody
- obecně složitá závislost na frekvenci (obr. 16.3)

volba frekvenčních bodů

opacitní vzorkování (opacity sampling)

- body vybírány náhodně
- nutný dostatečný počet frekvenčních bodů
- odhad: počet úměrný hodnotě fiktivní dopplerovské pološířky čáry

$$\Delta\nu_D^* = \frac{\nu v^*}{c}$$

$$v^* = \max(v_{\text{th}}^*, v_{\text{turb}}^*)$$

v_{th}^* – tepelná rychlost charakteristických částic (např. železa),

v_{turb}^* – charakteristická turbulentní rychlost

- počet frekvenčních bodů

$$F \approx \int_{\nu_{\min}}^{\nu_{\max}} \frac{1}{a \Delta\nu_D^*} d\nu = \frac{c}{a v^*} \ln \left(\frac{\nu_{\max}}{\nu_{\min}} \right) \quad (16.14)$$

celkem $\sim 10^5$ pro horké hvězdy, 10^6 pro chladné hvězdy

- používána v Dreizler and Werner (1993) – základ programového balíku TMAP
- použita i v novější verzi programu TLUSTY (Lanz and Hubeny, 2003b,a, 2007)

Přiblížení prvků skupiny železa

souhrnné započtení opacity „prvků skupiny železa“ (*iron group elements*) – jejich ionizační energie jsou velmi podobné
Dreizler and Werner (1993) uvažují Sc, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni

zavedeme

$$g_l^* = a_s g_l \exp\left(-\frac{\mathcal{E}_l}{kT}\right) \quad (16.15)$$

a_s – abundance prvku železné skupiny vzhledem k železu
energie superhladiny (upravený vztah 16.10)

$$\mathcal{E}_L = \frac{\sum_{l \in L} \mathcal{E}_l g_l^*}{\sum_{l \in L} g_l^*} \quad (16.16)$$

statistická váha superhladiny

$$g_L = \exp\left(\frac{\mathcal{E}_L}{kT}\right) \sum_{l \in L} g_l^* \quad (16.17)$$

velmi jednoduché zahrnutí pokrývkového efektu prvky skupiny železa

ve vztazích se teplota nahrazuje hodnotou T^* (efektivní ionizační teplota) – teplota vhodná pro přítomnost daného ionizačního stupně

pro řešení přenosu záření se používá metoda opacitního vzorkování

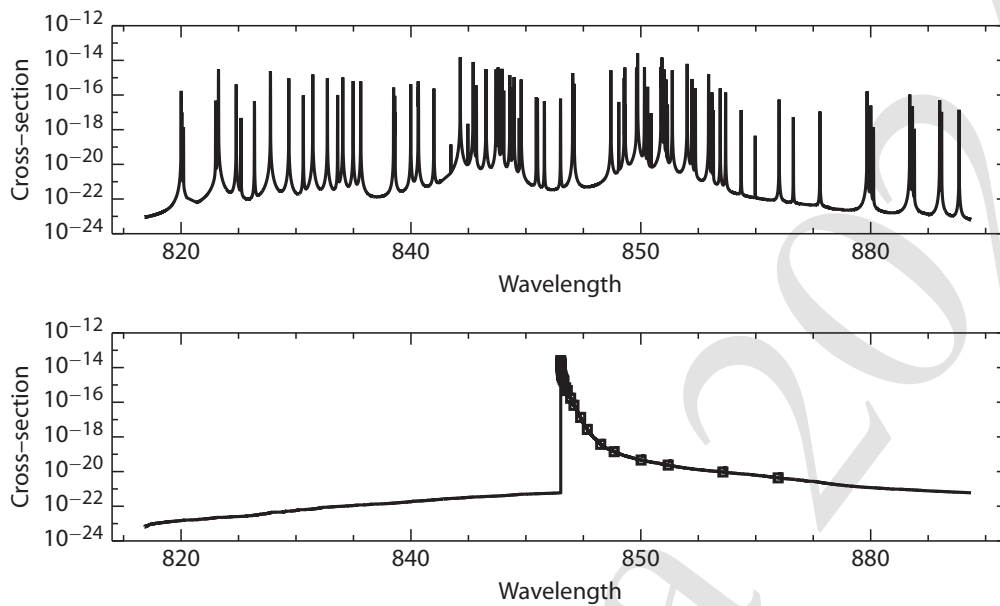
Užití superatomů

větší počet superhladin, rozdíly mezi energiemi v superhladině menší (Hubeny and Lanz, 1995)

statistická váha superhladiny (hloubkově nezávislá, dána vztahem 16.11)

energie superhladiny (dána vztahem 16.10)

Hubeny and Lanz (1995) používají navíc i pravděpodobnosti existence superhladin w_L (použité pro normální hladiny v rovnici 4.8)



Obrázek 16.3: Příklad profilu superčáry (horní obrázek) a ilustrace NLTE opacitní distribuční funkce (dolní obrázek). Obrázek z Hubeny and Mihalas (2014, obr 18.3), (zkopírováno 24).

NLTE opacitní distribuční funkce

- přerovnání frekvencí, viz obr. 16.3
- problémy:
 - překryvy superčáry s normální čarou – řešení změnou opacitní distribuční funkce, nesnadná algoritmizace
 - překryv dvou a více superčar – prakticky neřešitelné
- úspěšně používána v programu TLUSTY, podrobný popis v Hubeny and Lanz (1995)

Kapitola 17

Užití jednorozměrných modelů atmosfér

17.1 Programy pro výpočet statických 1-D modelů

Jedním z nejpopulárnějších programů je program pro počítání planparalelních LTE modelů atmosfér s line blanketingem je program ATLAS (Kurucz, 1970), který je používán prakticky ve své původní verzi. Planparalelní NLTE modely s line blanketingem počítá program TLUSTY¹ (Hubeny, 1988), kterého autor neustále rozvíjí a v současné době je svými možnostmi nejrobustnější program pro řešení modelů atmosfér. Výpočty NLTE modelů však trvají nesrovnatelně déle než výpočty LTE modelů. Na současných počítačích se potřebné výpočetní časy NLTE modelů vyjadřují v hodinách, LTE modelů v sekundách. V balíku programů TMAP² je i program pro výpočet planparalelních NLTE modelů s line-blanketingem (Werner and Dreizler, 1999), který byl vyvinut především pro modelování atmosfér bílých trpaslíků, lze jej ale použít i pro jiné hvězdy. Existuje řada dalších poměrně složitých výpočetních programů řešících buď celou soustavu rovnic z kapitoly 15 nebo jen její část.

17.2 Některá užití jednorozměrných modelů atmosfér

Modely atmosfér horkých hvězd

- A – extrémně široké čáry vodíku

¹<http://nova.astro.umd.edu/>

²<http://astro.uni-tuebingen.de/~TMAP/>

- extrémně klidné atmosféry
- zářivá difúze
- některé hvězdy magnetické
- B – čáry vodíku a neutrálního helia
 - Be hvězdy s rotujícími disky – statické modely omezené použitím
- O – čáry vodíku a ionizovaného helia
 - všechny čáry H I se překrývají s čarami He II
 - statické modely použitelné pro modely fotosfér
 - čáry formující se ve větru nesedí
- WR – hvězdy s opticky tlustým silným větrem – statické modely nevhodné
- dominantní opacity: H, He, C, N, O, Fe, Ni
- modely s line blanketingem
- LTE – naprosto nevhodná aproximace – přesto používané
- NLTE často pro stopové prvky (pro A hvězdy NLTE pro vzácné prvky)

Modely atmosfér chladných hvězd

- F, G, K, M, L, T
- konvekce \Rightarrow 3-D modely, zářivá hydrodynamika v LTE
- velký vliv molekul
- LTE používáno, pro chladné veleobry nevhodné

Modely atmosfér bílých trpaslíků a podtrpaslíků

- klasifikace
 - DA – vodíkové bílé trpaslíci
 - DB, DO – helioví bílé trpaslíci
 - DC
 - DQ – chladní bílé trpaslíci

- DAZ, DBZ, ... – s čarami kovů
- dominantní vodík nebo helium (existují helioví bílí trpaslíci)
- velké hodnoty gravitačního zrychlení
- tenká atmosféra – $\sim 19\text{km}$
- pro horké trpaslíky NLTE nutností
- typický NLTE efekt – emise v centru vodíkových čar
- extrémně široké čáry – nutnost započtení Starkova rozšíření
- chladní trpaslíci – LTE často dostačující

Modely atmosfér prvních hvězd

- modely hvězd Populace III
- odlišné chemické složení od současných hvězd (Populace I) – převážně vodík a helium (nic jiného tehdy ve vesmíru nebylo)

Modely atmosféry Slunce

- hodně detailů
- semiempirické modely (řeší se po částech, pro zadanou teplotní strukturu, určení teploty z profilů čar)
 - VAL1,2,3,FAL – speciální modely řešící NLTE line formation metodou dvouhadinových atomů
jiné modely pro klidné Slunce, jiné pro aktivní oblast (i modely bez magnetického pole)
 - modely chromosféry ...
- 3-D LTE radiation hydrodynamics

Jednorozměrné modely povrchových struktur hvězd

hvězdy s povrchovými skvrnami

hvězdy bez sférické symetrie

ozařované hvězdy

17.3 Užití modelů atmosfér v analýze

1. výpočet modelu atmosféry

vstupem je T_{eff} , R , M , L + rovnice

řešení všech rovnic – zahrnutí H, He, C, N, O, Fe, Ni (to, co ovlivňuje atmosféru)

výstupem je $T(\mathbf{r})$, $\rho(\mathbf{r})$, $n_e(\mathbf{r})$, $n_i(\mathbf{r})$, ...

2. výpočet NLTE obsazení stopových prvků podrobnosti ve sborníku Monnier et al. (2010)

řešení ESE+RTE (např. Na, Ca, Mg, Si, Li, Hg, ...)

3. výpočet syntetického spektra

pouze řešení RTE, vše ostatní zadáno (spočteno dříve)

4. porovnání s pozorováním

určení základních parametrů hvězd (T_{eff} , $\log g$; L , R , M)

- sítě modelů
- interpolace výsledků

17.4 Klasifikace hvězdných spekter

první krok analýzy spekter

založena na vzájemném porovnávání pozorovaných spekter mezi sebou

MK spektrální typy zavedli

Morgan et al. (1943) (OBAFGKM)

Kirkpatrick et al. (1999) (LT)

cíl :

dát hvězdy do souvislosti s ostatními hvězdami

najít případné zvláštnosti

metoda : porovnání spekter se „standardsy“

příklad postupu při klasifikaci: Gray (2014)

Kapitola 18

Zobecněné jednorozměrné modely atmosfér

18.1 Rotace hvězd

Slunce rotuje rychlostí $1.9 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

B-hvězdy rotují až s $v_{\text{rot}} \sim 300 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

Dynamické důsledky rotace

při rychlé rotaci dochází k deformaci hvězdy

první interferometrické pozorování deformované hvězdy – Achernar (α Eri)
– Domiciano de Souza et al. (2003)

rovnice pro poloměr rotující hvězdy za předpokladu tuhého tělesa rotujícího úhlovou rychlostí Ω a radiální gravitační síly (Lamers and Cassinelli, 1999, rovnice 11.3)

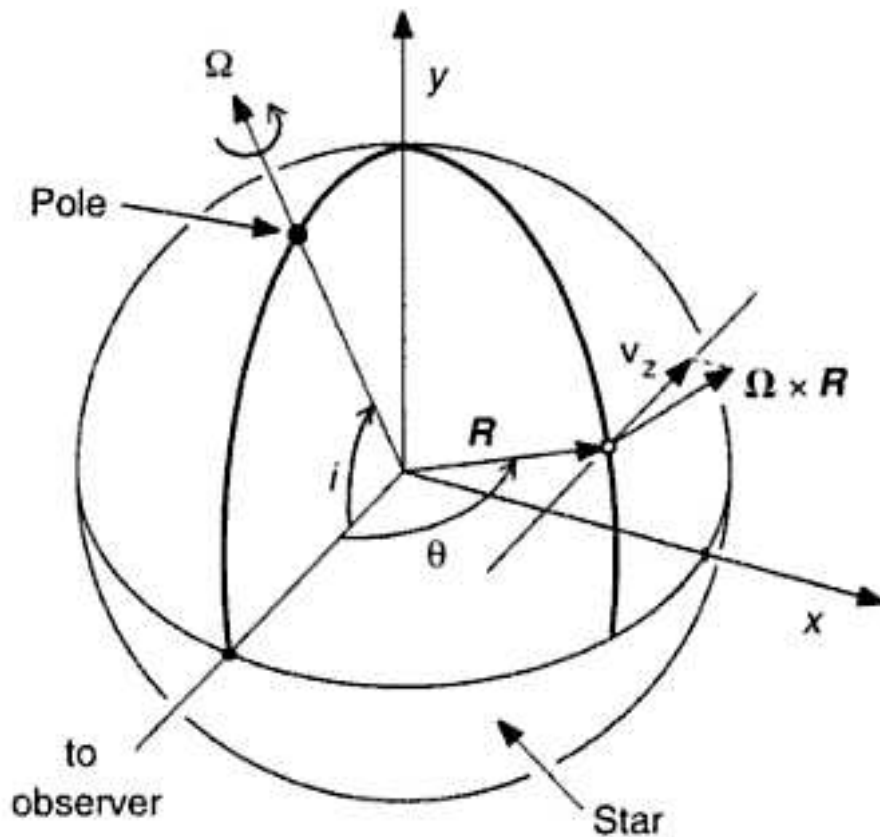
$$R(\theta)^3 - \frac{2GM_*}{R_0\Omega^2 \sin^2 \theta} R(\theta) + \frac{2GM_*}{\Omega^2 \sin^2 \theta} = 0 \quad (18.1)$$

R_0 je polární poloměr

von Zeipelův teorém, gravitační ztemnění

Vliv rotace na vystupující záření

- dopplerovský posun spektrálních čar v důsledku pohybu
- přibližující se a vzdalující se části atmosféry
⇒ rozšíření spektrální čáry



Obrázek 18.1: Geometrie rotující hvězdy. Obrázek zkopírován z Gray (2005, Fig. 18-2). (zkopírováno 26)

- obecně potřeba řešení rovnice přenosu záření v pohybujícím se prostředí
- v dalším budeme považovat hvězdu za kouli s tenkou slupkou (atmosférou)

planparalelní atmosféra

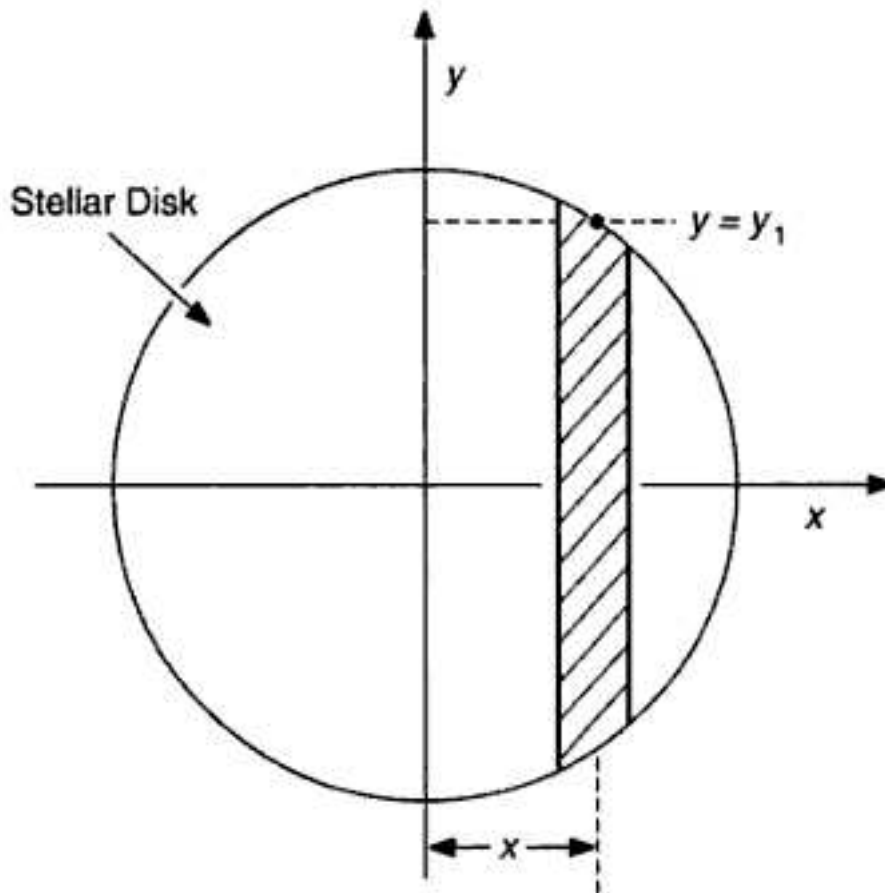
kontinuum – vliv není pozorovatelný

čáry – rotační rozšíření díky Dopplerovu posuvu

efekt podobný pro všechny čáry,

nezávisí na kvantověmechanických vlastnostech jednotlivých přechodů

geometrie a úhly v rotující hvězdě (obrázek 18.1, také např. Unsöld 1955, Abb. 167)

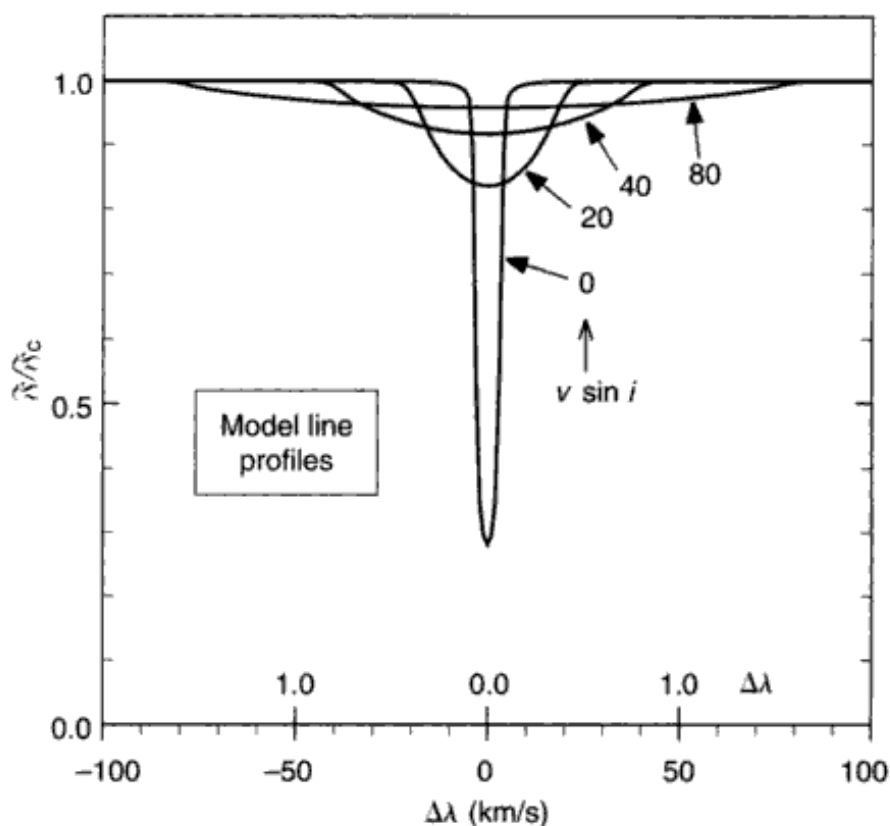


Obrázek 18.2: Zdánlivý hvězdný disk rotující hvězdy. Obrázek zkopírován z Gray (2005, Fig. 18-3). (zkopírováno 28)

- úhlová rychlost rotace – $\boldsymbol{\Omega} = (0, \Omega \sin i, \Omega \cos i)$ – vybereme orientaci rotační osy
- polohový vektor $\boldsymbol{R} = (x, y, z)$
- rotační rychlost na povrchu hvězdy $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}$,
 - z složka (směrem k pozorovateli) – $v_z = \Omega_x y - \Omega_y x = -x\Omega \sin i$
($i = 0^\circ$ – pole on, $i = 90^\circ$ – edge on)

Dopplerův posuv závisí pouze na x (ne na y):

$$\Delta\nu = v_z \frac{\nu}{c} = \left(\frac{\nu\Omega \sin i}{c} \right) x \quad (18.2)$$



Obrázek 18.3: Profily spektrální čáry pro různé rotační rychlosti. Obrázek zkopírován z (Gray, 2005, Fig. 18-6). (zkopírováno 30)

maximální Dopplerův posuv (rotační pološířka čáry)

$$\Delta\nu_L = \left(\frac{\nu\Omega \sin i}{c} \right) R_* = \frac{\nu}{c} (v \sin i) = \frac{\nu}{c} v_L \quad (18.3)$$

v_L – maximální promítnutá rychlost (směrem k pozorovateli)

pro popis záření z daleké hvězdy můžeme použít tok (viz kapitola 2.7.4)

tok podle (2.19)

$$\mathcal{F}_\nu = \oint I_\nu \cos \theta \, d\varpi = \iint I_\nu \frac{dx \, dy}{R_*^2} \quad (18.4)$$

$$(d\varpi = \frac{dS}{R_*^2}; \, dx \, dy = dS \cos \theta),$$

I_ν závisí na x a y

I_ν je dopplerovsky posunutá v závislosti na v_z

- nejlepší je numerická integrace intenzity přes zdánlivý hvězdný disk

analytický vztah pro planoparalelní atmosféru

- zavedeme:
relativní intenzita \bar{A}_ν (nejčastější výsledek měření)

$$\bar{A}_\nu = \frac{I_\nu}{I_c}$$

I_c – intenzita kontinua (záření vzniklé po nezapočtení opacity v čarách)

tok pomocí relativní intenzity

$$\mathcal{F}_\nu = \oint \bar{A}_\nu I_c \cos \theta \, d\varpi = \iint \bar{A}_\nu I_c \frac{dx \, dy}{R_*^2}$$

natočíme hvězdu tak, aby osa rotace byla v rovině yz
dopplerovský posun jako funkce x : $\Delta\nu(x)$, nezávisí na y

zavedeme $y_1 = \sqrt{R_*^2 - x^2}$ (viz obrázek 18.2)

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu &= \iint \bar{A} [\nu - \Delta\nu(x)] I_c(x, y) \frac{dx \, dy}{R_*^2} \\ &= \int_{-R_*}^{R_*} \frac{dx}{R_*} \bar{A} [\nu - \Delta\nu(x)] \int_{-y_1}^{y_1} I_c(x, y) \frac{dy}{R_*} \end{aligned}$$

použijeme substituci $dx = \frac{d\Delta\nu}{\Delta\nu_L} R_*$

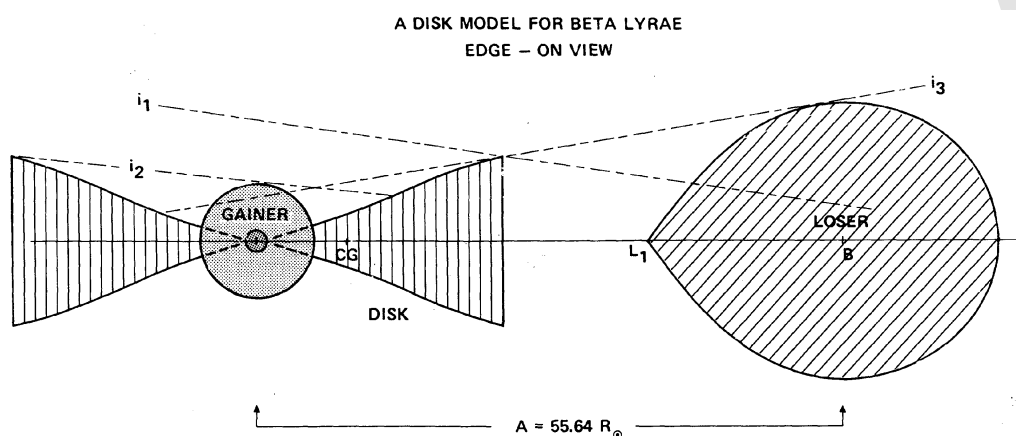
$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\nu &= \int_{-R_*}^{R_*} \frac{d\Delta\nu}{\Delta\nu_L} \bar{A} (\nu - \Delta\nu) \int_{-y_1}^{y_1} I_c(\Delta\nu, y) \frac{dy}{R_*} \\ &= \int_{-R_*}^{R_*} \bar{A} (\nu - \Delta\nu) \underbrace{\left[\frac{1}{\Delta\nu_L} \int_{-y_1}^{y_1} I_c(\Delta\nu, y) \frac{dy}{R_*} \right]}_{G(\Delta\nu)} d\Delta\nu \end{aligned}$$

rotačně rozšířený profil čáry

$$\mathcal{F}_\nu = \int_{-\Delta\nu_L}^{\Delta\nu_L} \bar{A} (\nu - \Delta\nu) G(\Delta\nu) d\Delta\nu \quad (18.5)$$

poznámky:

- $dx = \frac{d\Delta\nu}{\Delta\nu_L} R_*$



Obrázek 18.4: Zjednodušený model dvojhvězdy β Lyr. Vlevo planparalelní model akrečního disku, vpravo složka ztrácející hmotu. Obrázek z Hubeny and Plavec (1991). (zkopírováno 32)

- x je od $-R_*$ do R_*
- y je od $-y_1$ do y_1

$$y_1 = \sqrt{R_*^2 - x^2} = \sqrt{R_*^2 - R_*^2 \left(\frac{v_z}{v_L} \right)^2}$$

konvoluce

$G(\Delta\nu)$ – rotační profil

$$G(\Delta\nu) = \frac{1}{\Delta\nu_L} \int_{-y_1}^{y_1} I_c(\Delta\nu, y) \frac{dy}{R_*} \quad (18.6)$$

závisí na funkci okrajového ztemnění

18.2 Jednorozměrné modely okolohvězdných disků

- disk je 2-D a pohybuje se
- 1-D model disku, planparalelní atmosférou, podrobněji Hubeny (1990) – LTE modely
- radiální gravitační síla v rovnováze s odstředivou silou (Keplerovská rotace), zanedbání vlastní gravitace disku

- soubor soustředných prstenců, každý z nich je nezávislá konečná planparalelní atmosféra

rovnice hydrostatické rovnováhy souřadná osa z je rovnoběžná s tečnou k povrchu hvězdy (Hubeny, 1990, rovnice 2.1)

$$\frac{dp}{dz} = -g(z)\rho \quad (18.7)$$

$g(z) = Qz$, $Q = GM_*/r^3$, r vzdálenost daného prstence od centrální hvězdy,

rovnice energetické rovnováhy (Hubeny, 1990, rovnice 2.6a, 2.7, 2.8)

$$\frac{9}{4}Qw\rho = 4\pi \int_0^\infty [\eta_\nu(z) - \chi_\nu(z)J_\nu(z)] d\nu + \frac{d\mathfrak{F}_{\text{conv}}}{dz} \quad (18.8)$$

- levá strana – energie uvolněná radiálním posunem keplerovského pohybu (Kříž and Hubený, 1986), w – kinematická viskozita
- pravá strana
 - zářivé ztráty
 - vertikální konvekce

rovnice přenosu záření

$$\mu \frac{\partial I_{\nu\mu}(z)}{\partial z} = -\chi_\nu(z)I_{\nu\mu}(z) + \eta_\nu(z) \quad (18.9a)$$

s okrajovými podmínkami: uprostřed disku

$$I_{\nu\mu}(z=0) = I_{\nu,-\mu}(z=0) \quad (18.9b)$$

na okraji disku

$$I_{\nu,-\mu}(z=z_{\text{max}}) = I_{\nu\mu}^- \quad \text{pro } \mu > 0 \quad (18.9c)$$

Kapitola 19

Hvězdný vítr

hvězdný vítr stabilní odtok hmoty z hvězdy
na rozdíl od krátkodobých výronů hmoty a explozí

druhy hvězdného větru (podle dominantních mechanismů urychlování)

- koronální vítr (*coronal wind*) – tepelně hnaný vítr – u hvězd s korónou (například hvězdy slunečního typu)
- prachem urychlovaný vítr (*dust-driven wind*) – chladné hvězdy, absorpce záření prachem
- zářením urychlovaný vítr (*radiation-driven wind*)
 - vítr urychlovaný kontinuem (*continuum-driven wind*) – LBV hvězdy, zářivá síla kontinua převyšuje gravitační
 - vítr urychlovaný čarami (*line-driven wind*) – u horkých hvězd, zářivá síla spektrálních čar
- vítr urychlovaný zvukovými vlnami
- vítr urychlovaný Alfvénovskými vlnami – v magnetických polích
- vítr urychlovaný pulsacemi – u pulsujících hvězd (Mira, AGB)

Rovnice sféricky symetrického stacionárního hvězdného větru

časově nezávislé rovnice

$v_\theta = v_\phi = 0$, radiální složku vektoru rychlosti v_r označíme v

rovnice kontinuity (rovnice 13.42, vynecháme index r u rychlosti)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \rho v)}{dr} = 0 \quad (19.1)$$

pohybová rovnice (rovnice 13.44 bez členu s viskozitou, vynecháme index r u radiálních složek vektorů)

$$\rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dp_g}{dr} - \frac{GM_* \rho}{r^2} + f^{\text{rad}} \quad (19.2)$$

energieová rovnice (rovnice 13.46 bez členu s viskozitou a bez termojaderných reakcí, s vynecháním indexu r u vektorů)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \rho v \left(\frac{1}{2} v^2 + e + \frac{p_g}{\rho} \right) \right] = -\rho v \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 K_q \frac{dT}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \mathfrak{F}) \quad (19.3)$$

$(e + p/\rho) = h$ – specifická entalpie
 K_q – koeficient tepelné vodivosti

Rovnice pro hybnost

postup podobný odvození rovnice (13.19)

přepíšeme rovnici kontinuity

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} - \frac{2}{r} \quad (19.4)$$

zavedeme: **izotermická rychlost zvuku** a_s :

(stavová rovnice $p_g = NkT = \mathfrak{R}\rho T/\mu$, \mathfrak{R} – plynová konstanta, μ – střední atomová váha v jednotkách m_H)

$$a_s = \sqrt{\frac{p_g}{\rho}} \left(= \sqrt{\frac{\mathfrak{R}T}{\mu}} \right) \quad (19.5)$$

μ – střední molekulová váha

kombinací stavové rovnice s rovnicí kontinuity

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} = \frac{da_s^2}{dr} - \frac{2a_s^2}{r} - \frac{a_s^2}{v} \frac{dv}{dr} \quad (19.6)$$

kombinací s pohybovou rovnicí (19.2) – dosazení za $(1/\rho)dp_g/dr$

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2} \right) v \frac{dv}{dr} = \frac{2a_s^2}{r} - \frac{da_s^2}{dr} - \frac{GM_*}{r^2} + \frac{f^{\text{rad}}}{\rho} \quad (19.7)$$

rovnice pro hybnost (*momentum equation*) – jednorozměrná verze časově nezávislé rovnice (13.22) bez tření

19.1 Izotermické větry

$$\frac{dT}{dr} = 0$$

nepotřebujeme řešit rovnici pro energii

19.1.1 Izotermický vítr bez přidané síly

pohybová rovnice (19.2) bez přidané síly

$$\rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dp_g}{dr} - \frac{GM_* \rho}{r^2} \quad (19.8)$$

rovnice pro hybnost (19.7)

- pro ideální izotermický plyn ($da_s^2/dr = 0$, viz 19.5)
- a bez zářivé síly

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2}\right) v \frac{dv}{dr} = \frac{2a_s^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} \quad (19.9)$$

pravá strana je nulová pro $r = r_c$ (kritický poloměr)

$$r_c = \frac{GM_*}{2a_s^2} \quad (19.10)$$

i levá strana nulová, pro

$$\left. \frac{dv}{dr} \right|_{r_c} = 0 \quad (19.11)$$

nebo

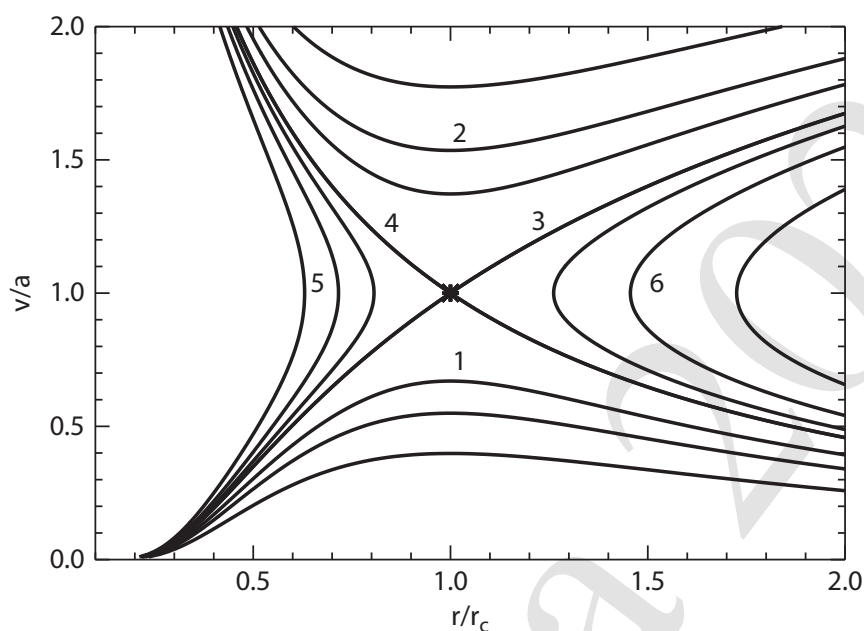
$$v(r_c) = v_c = a_s$$

- **kritický bod** (*critical point*) [r_c, v_c],
- **zvukový bod** (*sonic point*) – tam, kde v je rovna rychlosti zvuku pro izotermický vítr je zvukový bod i kritickým bodem
- úniková rychlost (*escape velocity*)

$$v_{\text{esc}}(r) = \sqrt{\frac{2GM_*}{r}} \quad (19.12)$$

– pro izotermický vítr platí $v_c = \frac{1}{2}v_{\text{esc}}(r_c)$

$$v_{\text{esc}}(r_c) = \sqrt{\frac{2GM_*}{r_c}}$$



Obrázek 19.1: Závislost $v(r)$ pro řešení izotermického větru. Obrázek z Hubeny and Mihalas (2014, Fig. 20.2). (zkopírováno 34)

oblasti řešení podle obr. 19.1

- jednoznačná řešení
 - $dv/dr = 0$
 - 2 celé nadzvukové (nadkritické)
 - 1 celé podzvukové
 - $v = v_c$
 - 3 transzvukové rostoucí
 - 4 transzvukové klesající
- víceznačná řešení – 5,6 – nemají fyzikální význam

chceme určit dv/dr v kritickém bodě, přepíšeme (19.9)

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\frac{2a_s^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2}}{(v^2 - a_s^2)}$$

použijeme l'Hospitalovo pravidlo a (19.10)

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} \Big|_{r_c} = \frac{-\frac{2a_s^2}{r_c^2} + \frac{2GM_*}{r_c^3}}{2v \frac{dv}{dr} \Big|_{r_c}} = \frac{a_s^2}{r_c^2} \frac{1}{v \frac{dv}{dr} \Big|_{r_c}} = \left(\frac{2a_s^2}{GM_*} \right)^2 \frac{1}{v \frac{dv}{dr} \Big|_{r_c}}$$

odtud

$$\frac{dv}{dr} \Big|_{r_c} = \pm \frac{2a_s^3}{GM_*}$$

„singularita typu X”

Energie izotermického větru (viz Lamers and Cassinelli, 1999, kap. 3.1.2):

rovnice (19.3) bez tepelné vodivosti a zářivé energie

její integrál – celková energie odtékající hmoty (energie na jednotku hmoty)

$$e(r) = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_*}{r} + e + \frac{p_g}{\rho} = \frac{v^2}{2} - \frac{GM_*}{r} + \frac{5 \mathfrak{R}T}{2 \mu} \quad (19.13)$$

e – vnitřní energie $\left(= \frac{3}{2} kT = \frac{3 \mathfrak{R}T}{2 \mu} \right)$,

$$\frac{p_g}{\rho} = a_s^2 = \frac{\mathfrak{R}T}{\mu} \quad (\text{z rovnice 19.5})$$

$$\text{dohromady} = \frac{5 \mathfrak{R}T}{2 \mu}$$

kinetická energie + potenciální energie + enthalpie

r_0 – spodní okraj větru

napíšeme rozdíl energií v místech r a r_0 (enthalpie v r a r_0 se odečtou – stejná teplota)

$$e(r) = e(r_0) + \frac{v^2 - v_0^2}{2} - \frac{GM_*}{r} \left(1 - \frac{r}{r_0} \right) \quad (19.14)$$

energie izotermického větru není konstantní (závisí na r),

pro udržení izotermičnosti je třeba nějaký zdroj energie (například tepelná energie nebo práce vnějších sil)

energie v jednotlivých částech větru:

spodní část větru

$$e(r_0) \approx -\frac{GM_*}{r_0} \quad \text{pro } v^2 < a_s^2 \ll v_{\text{esc}}^2 \quad \text{potenciální energie}$$

v r_c – součet kinetické, potenciální a vnitřní energie nulový (jen pro izotermický případ)

$$e(r_c) = \frac{RT}{\mu}$$

daleká část větru

$$e(r \rightarrow \infty) \approx \frac{v^2}{2} \quad \text{pro } v \gg a_s \quad \text{kinetická energie}$$

Rychlost izotermického větru analytické řešení rovnice (19.9) procházející kritickým bodem

(viz Lamers and Cassinelli, 1999, kap. 3.1.3): použijeme:

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2}\right) v \frac{dv}{dr} = \frac{d\left(\frac{v^2}{2}\right)}{dr} - a_s^2 \frac{d \ln v}{dr} = \frac{d}{dr} \left(\frac{v^2}{2} - a_s^2 \ln v\right)$$

integrace rovnice (19.9) (izotermický vítr $\rightarrow a_s$ konstantní)

$$\frac{v^2}{2} - a_s^2 \ln v = 2a_s^2 \ln r + \frac{GM_*}{r} + \text{constant} \quad (19.15)$$

vydělíme a_s^2 a použijeme vztah (19.10: $r_c = GM_*/(2a_s^2)$)

$$-\frac{v^2}{2a_s^2} + \ln v = -2 \ln r - \frac{2r_c}{r} + \text{constant}$$

použijeme kritickou podmínku $v(r_c) = a_s$ pro určení konstanty (dosadíme r_c do předcházející rovnice) a zapíšeme pomocí exponenciely

$$v \exp\left(-\frac{v^2}{2a_s^2}\right) = a_s \left(\frac{r_c}{r}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r_c}{r} + \frac{3}{2}\right) \quad (19.16)$$

pro r_0 (spodní okraj větru) $v_0 \ll a_s < v_{\text{esc}}$ (podzvuková část větru)

$$v_0 \approx a_s \left(\frac{r_c}{r_0}\right)^2 \exp\left(-\frac{2r_c}{r_0} + \frac{3}{2}\right) \quad (19.17)$$

což je podmínka pro v_0 , aby transzvukové řešení existovalo

výsledné řešení pro celý vítr

$$\frac{v}{v_0} \exp\left(-\frac{v^2}{2a_s^2}\right) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \exp\left\{\frac{GM_*}{a_s^2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right\} \quad (19.18)$$

asymptotické řešení pro $r \gg r_0$

$$v(r \rightarrow \infty) \approx 2a_s \sqrt{\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)} \quad (19.19)$$

roste neomezeně, nereálné

požadavek izotermicity \rightarrow neustálý přísun energie na udržení teploty

Hustota izotermického větru (viz Lamers and Cassinelli, 1999, rovnice 3.26) z (19.18) a integrálu rovnice kontinuity (19.1) dostaneme

$$\frac{\rho(r)}{\rho_0} \exp\left\{\frac{1}{2} \left(\frac{v_0 \rho_0 r_0^2}{a_s \rho r^2}\right)^2\right\} = \exp\left\{-\frac{GM_*}{a_s^2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right\} \quad (19.20)$$

oblast pod zvukovým bodem – lze použít hydrostatické řešení, ukážeme:

z rovnice (19.2) bez zářivé síly vypustíme ještě i člen s dv/dr ,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = 0 \quad (19.21)$$

(viz Lamers and Cassinelli, 1999, rovnice 3.29)

$$\frac{\rho(r)}{\rho_0} = \exp\left\{-\frac{GM_*}{a_s^2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right\} \quad (19.22)$$

se liší od řešení z rovnice kontinuity nejvýše o faktor $1/\sqrt{e}$ v kritickém bodě

pod kritickým bodem – hustota téměř hydrostatická

člen $v \frac{dv}{dr}$ v pohybové rovnici \ll gradient tlaku

Míra ztráty hmoty (*mass-loss rate*)

$$\dot{M} = 4\pi r_c^2 \rho(r_c) v_c = 4\pi r_0^2 \rho(r_0) v(r_0) \quad (19.23)$$

dosadíme za $v(r_0) = v_0$ z (19.17), použijeme i vztah pro únikovou rychlost (19.12)

$$\dot{M} = 4\pi r_0^2 \rho(r_0) a_s \left(\frac{v_{\text{esc}}(r_0)}{2a_s} \right)^4 \exp \left(-\frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{2a_s^2} + \frac{3}{2} \right) \quad (19.24)$$

pro daná $\rho(r_0)$ a $T(r_0)$ (T je konstantní pro izotermický vítr) existuje jen jedno rostoucí řešení $v(r)$ procházející kritickým bodem

shrnutí poloha zvukového bodu (r_c) a míra ztráty hmoty (*mass-loss rate* \dot{M})

- závisí na podmínkách pod zvukovým bodem
- nezávisí na podmínkách nad zvukovým bodem

19.1.2 Izotermický vítr s přidanou silou

pohybová rovnice s přidanou silou $f(r)$ – závisí na r
(viz Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 20.21)

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} - \frac{GM_*}{r^2} + \frac{f(r)}{\rho} \quad (19.25)$$

nebo z rovnice (19.9)

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2} \right) v \frac{dv}{dr} = \frac{2a_s^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} + \frac{f(r)}{\rho} \quad (19.26)$$

přepíšeme (viz Lamers, 1997)

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\frac{2a_s^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} + \frac{f(r)}{\rho}}{v^2 - a_s^2} \quad (19.27)$$

důsledky:

nadzvuková oblast $v > a_s$ – jmenovatel kladný, přidání síly zvýší gradient rychlosti

podzvuková oblast $v < a_s$ – jmenovatel záporný, přidání síly *sniží* gradient rychlosti
 síla „nadnáší“ – snižuje efekt gravitace – zvětšuje „škálovou výšku tlaku“ – hustota klesá s výškou pomaleji \Rightarrow vyšší míra ztráty hmoty (podle 19.23)

kritická podmínka

$$\begin{aligned} v_c &= a_s \\ r_c &= \frac{GM_*}{2a_s^2} - \frac{f(r_c) r_c^2}{2a_s^2 \rho} \end{aligned} \quad (19.28)$$

poloha kritického bodu závisí na funkční závislosti síly, obecně třeba vyřešit kvadratickou rovnici pro r_c

\Rightarrow rychlost pro dané r v oblasti pod r_c vyšší
 \Rightarrow míra ztráty hmoty vyšší (z rovnice kontinuity 19.23)

přidání síly v podzvukové oblasti vede ke zvýšení míry ztráty hmoty

přidaná síla funguje jako “scaling faktor” rychlosti a míry ztráty hmoty

Přidaná síla klesající se čtvercem vzdálenosti

$$f(r) = A/r^2$$

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2}\right) v \frac{dv}{dr} = \frac{2a_s^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{\rho} \frac{A}{r^2} \quad (19.29)$$

snižuje vliv gravitační síly

pokud je menší než gravitační síla – stejné řešení jako bez přidané síly (vztahy pro $v(r)$ a \dot{M} stejné)

příklad: síla způsobená rozptylem záření (kapitola 20.2)

kritický bod

$$r_c = \frac{GM_* - A/\rho}{2a_s^2} \quad (19.30)$$

- je blíže k hvězdě o $A/(2\rho a_s^2)$, kritická rychlost je stejná ($= a_s$)
- vyšší ztráta hmoty, ale pomalejší vítr

síla přidaná až nad kritickým bodem neovlivňuje míru ztráty hmoty, jen urychluje vítr

Přibližný rychlostní profil hvězdného větru

(Milne, 1926; Chandrasekhar, 1934) necht' proti gravitaci působí síla, jejíž velikost je f -násobkem gravitační síly (například síla záření kontinua), pak je pohybová rovnice (zrychlení)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = (1 - f) g \frac{R_*^2}{r^2} \quad (19.31)$$

integrací podle r

$$\int \frac{d^2r}{dt^2} dr = \int \frac{dt}{dr} \frac{dr}{dt} \frac{d^2r}{dt^2} dr = \int \frac{dt}{dr} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 dr = \frac{1}{2} \int \frac{d}{dr} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 dr = \frac{1}{2} \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 + C$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = C - 2(f - 1) g \frac{R_*^2}{r} \quad (19.32)$$

předpokládáme nulovou rychlost na povrchu hvězdy, z (19.32) máme

$$C = 2(f - 1) g$$

dosadíme

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{2(f - 1) R_* g \left(1 - \frac{R_*}{r} \right)} \quad (19.33)$$

rychlost, s níž částice opouštějí hvězdu je

$$v_\infty = \sqrt{2(f - 1) R_* g} \quad (19.34)$$

Rovnici (19.33) můžeme přepsat jako

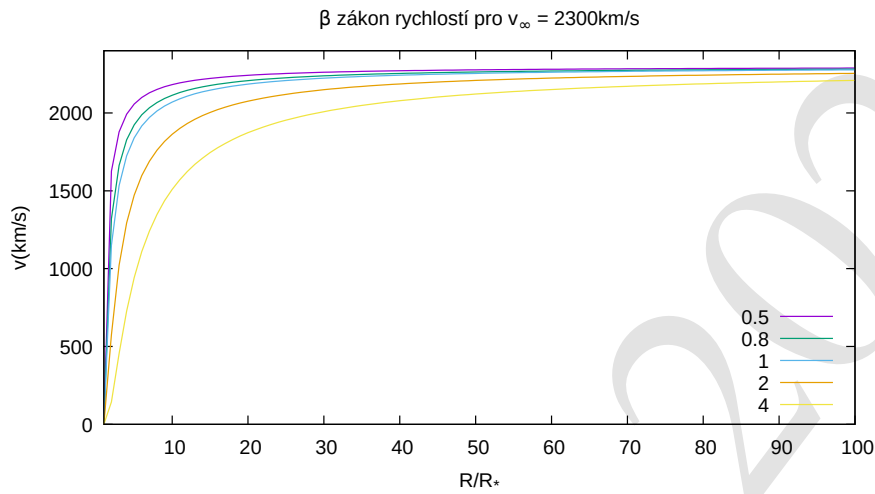
$$v = v_\infty \sqrt{1 - \frac{R_*}{r}} \quad (19.35)$$

zjednodušení tzv. $-\beta$ zákon

$$v(r) = v_0 + (v_\infty - v_0) \left(1 - \frac{R_*}{r} \right)^\beta \quad (19.36)$$

kde $\beta \sim 0.8$, ale může být i až ~ 3

velmi často používaná aproximace



Obrázek 19.2: Závislost $v(r)$ pro β -zákon rychlostí s různými hodnotami parametru β .

Přidaná síla úměrná součinu rychlosti a jejího gradientu

$$\frac{f(r)}{\rho} \sim v dv/dr$$

pohybová rovnice (19.2)

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} - \frac{GM_*}{r^2} + Bv \frac{dv}{dr} \tag{19.37}$$

příklad – síla způsobená rozptylem záření ve spektrálních čarách v Sobolevově aproximaci (kapitola 22.3)

kombinací s rovnicí kontinuity

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dr} = \frac{\frac{2a_s^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2}}{v^2(1-B) - a_s^2}$$

kritický bod

$$r_c = \frac{GM_*}{2a_s^2} \tag{19.38}$$

$$v(r_c) = v_c = \frac{a_s}{\sqrt{1-B}}$$

v_c rychlost větru v kritickém bodě není rychlost zvuku
(kritický bod \neq zvukový bod)

v_{esc} stejná jako bez přidané síly

míra ztráty hmoty (podobně s 19.24)

$$\dot{M} = \frac{4\pi r_0^2 \rho(r_0) a_s}{\sqrt{1-B}} \left(\frac{v_{\text{esc}}(r_0)}{2a_s} \right)^4 \exp\left(-\frac{v_{\text{esc}}^2(r_0)}{2a_s^2} + \frac{3}{2}\right) \quad (19.39)$$

míra ztráty hmoty $(1-B)^{-\frac{1}{2}}$ vyšší

Kombinace přidaných sil

– kombinace efektů

analogie s raketovými tryskami (*rocket nozzle*)

podobné rovnice

místo $2a_s^2/r - GM_*/r^2$ v rovnici hybnosti člen $(1/A)(dA/dl)$,
 A průřez trysky

existuje podmínka pro transzvukové řešení proudění tryskou

Kapitola 20

Základní mechanismy urychlování větru

- vítr s dodáním hybnosti (přítomností vnější síly)
- vítr s dodáním tepelné energie

20.1 Koronální vítr

tepelně urychlovaný vítr

pro hvězdy s $T_{\text{eff}} \lesssim 6500\text{K}$, pokud jiný mechanismus (například prachem urychlovaný vítr – kapitola 21) neochladí koronu

tok energie tepelnou vodivostí (*conductive flux*) $\mathcal{F}_{\text{cond}}$ (v radiálním směru, v rovnici (13.25) vektor toku energie tepelnou vodivostí značen \mathbf{q})

$$\mathcal{F}_{\text{cond}} = -K_q \frac{dT}{dr} \quad (20.1)$$

- tok energie z míst s vyšší teplotou do míst s nižší teplotou
- kladný tok, pokud teplota s rostoucím r klesá
- **koeficient tepelné vodivosti**, $K_q = K_0 T^{5/2}$, je funkcí teploty, vztah pro ionizovaný plyn (Spitzer, 1956, kapitola 5.5)

tok energie tepelnou vodivostí

$$\mathcal{F}_{\text{cond}} = -K_0 T^{5/2} \frac{dT}{dr} \quad (20.2)$$

tepelně vodivostní zářivost (*conductive luminosity*)

$$L_{\text{cond}} = 4\pi r^2 \mathcal{F}_{\text{cond}} = -4\pi r^2 K_0 T^{5/2} \frac{dT}{dr} = -\frac{8\pi K_0}{7} r^2 \frac{dT^{7/2}}{dr} \quad (20.3)$$

pro $T \sim r^{-2/7} \rightarrow$ konstantní vodivostní zářivost
rovnice pro energii (19.3) bez zářivého členu:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \rho v \left(\frac{1}{2} v^2 + e + \frac{p_g}{\rho} \right) \right] = -\rho v \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 K_q \frac{dT}{dr} \right)$$

poslední výraz na pravé straně je $\nabla \cdot \mathbf{q}$ z rovnice (13.24)

- redistribuce energie ve větru pomocí vedení tepla
- řešíme spolu s rovnicí kontinuity (19.1) a pohybovou rovnicí (19.2), případně rovnicí pro hybnost (19.7), oboje bez zářivé síly viz například Hundhausen (1972, kapitola III.4), (Mihalas and Weibel-Mihalas, 1984, kapitola 5.4)

Model slunečního větru

- koronální vítr – řešení 3 z obrázku 19.1 – všeobecně přijímaný model míra ztráty hmoty $1.07 \cdot 10^{-14} M_{\odot} \text{ year}^{-1}$ (Lamers and Cassinelli, 1999, Table 5.1)
- alternativní model – řešení 1 z obrázku 19.1 – podzvuková koronální expanze (**sluneční vánek** – *solar breeze*)
toto řešení vede k $p(r \rightarrow \infty) \gg p_{\text{interstellar}}$, což se nepozoruje

vícesložkový popis slunečního větru

- 2 složky – elektrony a protony (případně ionty)
- řeší se hydrodynamické rovnice pro každou složku, obsahují navíc interakční členy mezi složkami
- interakce prostřednictvím coulombických interakcí

20.2 Urychlování hvězdného větru zářením

sférická symetrie – rovnice (13.38) – indexy r nepíšeme

$$f^{\text{rad}} = \rho g_{\text{R}} = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \chi_{\nu} \mathcal{F}_{\nu} d\nu \quad (20.4)$$

pohybová rovnice (19.2)

zavedeme **Eddingtonův parametr**, někdy také nazývaný Eddingtonův faktor, ale tento název se může plést s Eddingtonovým faktorem zavedeným rovnicí (2.46), který vyjadřuje poměr zářivého tlaku a zářivé energie

$$\Gamma = \frac{g_{\text{R}}}{g} \left(= \frac{f^{\text{rad}}}{\rho g} \right) \quad (20.5)$$

g_{R} – zářivé zrychlení (20.4),

g – gravitační zrychlení, $g = GM_*/r^2$

f^{rad} vyjádříme pomocí tokové střední opacity (14.33), použijeme $L_* = 4\pi r^2 \mathfrak{F}$ vyplývající z (13.1)

$$\Gamma = \frac{\bar{\kappa}_F L_*}{4\pi c G M_*} \quad (20.6)$$

kde $\bar{\kappa}_F = \rho \bar{\chi}_F$ je toková střední hmotnostní opacita pohybová rovnice (19.2) přejde na tvar

$$\rho v \frac{dv}{dr} + \frac{dp_g}{dr} = \rho \frac{GM_*}{r^2} (\Gamma - 1) \quad (20.7)$$

rovnice hybnosti (19.7)

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2} \right) v \frac{dv}{dr} = \frac{2a_s^2}{r} - \frac{da_s^2}{dr} - \frac{GM_* (1 - \Gamma)}{r^2} \quad (20.8)$$

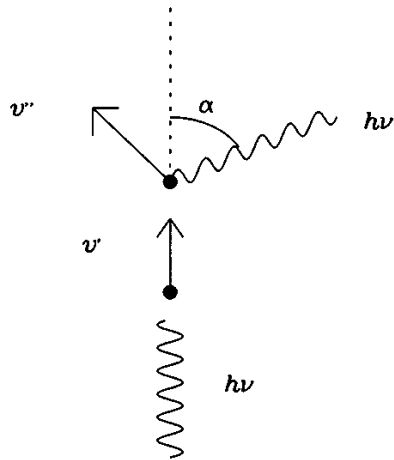
speciální případ : opacita nerelativistického izotropního elektronového rozptylu (kapitola 5.7.1) – frekvenčně nezávislá opacita ($\chi_e = n_e \sigma_e$, $\varkappa_e = \chi_e / \rho$, $\varkappa_e = n_e \sigma_e / \rho$)

$$f^{\text{rad}} = \frac{1}{c} \chi_e \int_0^{\infty} d\nu \mathcal{F}(\nu) = \frac{\chi_e}{c} \frac{L_*}{4\pi r^2} = \frac{\rho \varkappa_e}{c} \frac{L_*}{4\pi r^2}$$

místo \varkappa_e se někdy používá označení κ_e nebo s_e případně i σ_e^{ref}

Eddingtonův parametr pro rozptyl na volných elektronech

$$\Gamma_e = \frac{\chi_e}{\rho} \frac{L_*}{4\pi c G M_*} = \frac{\varkappa_e L_*}{4\pi c G M_*} \quad (20.9)$$



Obrázek 20.1: Přenos hybnosti při interakci záření s hmotou. Obrázek z Lamers and Cassinelli (1999, obrázek 8.1). (zkopírováno 36)

pro $\Gamma_e = 1$ – *Eddingtonova zářivost* (Eddington luminosity):

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi cGM_*\rho}{\chi_e} \quad (20.10)$$

Lze zavést i Eddingtonův parametr pro opacitu v kontinuu, která kromě rozptylu na volných elektronech zahrnuje volně-volnou a vázaně-volnou absorpci. Případně jej lze zavést i pro jinou opacitu.

Mechanismus přenosu hybnosti od záření k hmotě

(Lamers and Cassinelli, 1999, kapitola 8.1.1.)

izotropní rozptyl

mv – hybnost před rozptylem

$mv' = mv - \frac{h\nu}{c} \cos \alpha$ – hybnost po rozptyle fotonu o frekvenci ν , průmět do radiálního směru,

směr fotonu svírá s radiálním směrem úhel α

rozdíl radiálních rychlostí před a po rozptyle

(pro $v \ll c$ a $h\nu \ll mc$, ν_0 – frekvence fotonu v CMF)

$$\Delta v = v' - v = \frac{h\nu_0}{m_e c} (1 - \cos \alpha) \quad (20.11)$$

vystředujeme přes všechny směry rozptylu

$$\langle \Delta(mv) \rangle = \frac{h\nu_0}{c} \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 - \cos \alpha) 2\pi \sin \alpha \, d\alpha = \frac{h\nu_0}{c} \quad (20.12)$$

20.2.1 Hybnost větru získaná od záření

integrujeme (20.7) podělené hustotou ρ

přes hmotu odtékajícího plynu $dm = 4\pi r^2 \rho \, dr$,

od povrchu hvězdy (R_*) ven (do $r \rightarrow +\infty$)

zářivé zrychlení v oblasti pod kritickým bodem zanedbáno (zanedbatelné pro většinu této oblasti), integrujeme jen v intervalu $\langle r_c, \infty \rangle$

$$\int_{R_*}^{\infty} 4\pi r^2 \rho v \frac{dv}{dr} \, dr + \int_{R_*}^{r_c} \left(\frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} \right) dm + \int_{r_c}^{\infty} \frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} dm + \int_{r_c}^{\infty} \frac{GM_*}{r^2} (1 - \Gamma) \rho 4\pi r^2 \, dr = 0$$

r_c je kritický bod

- pod kritickým bodem
 - přibližně platí hydrostatická rovnováha (druhý člen vypadne)
- nad kritickým bodem
 - tlakový člen zanedbatelný (třetí člen zmizí)
- Eddingtonův parametr Γ je z rovnice (20.6), nezávisí na hustotě aproximujeme ho jako hloubkově nezávislý (tj. toková střední hmotnostní opacita nezávisí na hloubce)
- využijeme integrál rovnice kontinuity $\dot{M} = 4\pi r^2 \rho v$

$$\dot{M} v_{\infty} = 4\pi GM_* (\Gamma - 1) \int_{r_c}^{\infty} \rho \, dr \quad (20.13)$$

optická tloušťka (hloubka) větru nad kritickým bodem

$$\tau_W = \int_{r_c}^{\infty} \bar{\kappa}_F \rho \, dr \quad (20.14)$$

hybnost přenášená větrem

$$\dot{M}v_{\infty} = \frac{L_* \Gamma - 1}{c} \tau_W \quad (20.15)$$

L_*/c – hybnost světla opouštějícího fotosféru za 1s (*light momentum*)

$\dot{M}v_{\infty}$ – koncová hybnost větru za jednotku času (*final wind momentum per second*)

parametr účinnosti větru (*wind efficiency parameter*)

$$\eta_{\text{wind}} = \frac{\dot{M}v_{\infty}}{\left(\frac{L_*}{c}\right)} \quad (20.16)$$

často se zavádí *single scattering maximum mass-loss rate*

$$\dot{M}_{\text{max},1} = \frac{L_*}{v_{\infty} c} \quad (20.17)$$

single scattering – každý foton jen jedna interakce (absorpce nebo rozptyl)

Kapitola 21

Vítr urychlovaný prachem

- *dust driven wind*
 - chladné zářivé hvězdy – AGB (přehled Höfner and Olofsson, 2018), RSG
 - $T_{\text{eff}} \approx 2000 - 3000\text{K}$ (Lamers and Cassinelli, 1999, str. 146)
 - $v_{\infty} \sim 10 - 30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
 - v podstatě kontinuem (zářením v kontinuu) urychlovaný vítr
 - 2 složky, plyn a prach
 - urychlován je hlavně prach
 - prach se musí nejdřív vytvořit (zkondenzovat a nerozpadnout se), to se děje až dál od hvězdy
 - oblast pod kondenzačním poloměrem bez prachu;
 - kondenzační poloměr – náhlé zvýšení opacity, zrychlení hmoty na nadzvukové rychlosti
⇒ kondenzační poloměr r_{cond} (místo, kde se začíná tvořit prach) \approx zvukový bod r_c
 - podrobně také Gail and Sedlmayr (2014, zejména kapitola 15)
- vznik prachu** v okolohvězdném prostředí
- formování prachu – nerovnovážený proces
 - teploty $500\text{K} < T < 2000\text{K}$

- tlaky $10^{-11} - 10^{-9}$ barů
velmi nízké, vznikají jen pevné látky (žádné kapaliny), stačí studovat rovnováhu plyn-pevná látka
- nejdříve formování molekul – souhrn Gail and Sedlmayr (2014, str. 253-255); nejdříve molekuly se silnou vazbou a z hojně zastoupených prvků (H_2 , CO, N_2 , SiO, ...), některé atomy zbydou osamocené (Fe, Mg, Ca, Na, Ni, ...)
- důležitost CO, podle toho, co zbyde po formování CO je carbon-rich chemistry a oxygen-rich chemistry
- možnost „nerovnovážné chemie“ – obdoba NLTE pro atomární hladiny

kondenzace prachu

- směs bohatá na kyslík, směs bohatá na uhlík – rozdílné pevné částice

růst prachových zrn

zachytávání plynných částic na povrchu prachových zrn (*adsorpce*)
opačný proces je *desorpce*

- vznik zárodků (seeds) – částice obsahující desítky atomů
- připojování dalších částic – třeba zahrnout statisticky

opacita prachových zrn (Lamers and Cassinelli, 1999, kapitola 7.3)

- dochází k absorpci i rozptylu
- velká opacita ve viditelném a UV oboru, menší na dlouhých vlnových délkách (IR, radio)
- prachová zrna různě velká, a – poloměr prachových zrn
- účinný průřez pro interakci: $\pi a^2 \{Q_A(a, \lambda) + Q_S(a, \lambda)\}$
- Q_A, Q_S – účinnost absorpce, rozptylu
- absorpční koeficient $\kappa(\lambda)$, rozptyl $\sigma(\lambda)$

$$\begin{aligned}\kappa(\lambda) &= \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} n(a) \pi a^2 Q_A(a, \lambda) da \\ \sigma(\lambda) &= \int_{a_{\min}}^{a_{\max}} n(a) \pi a^2 Q_S(a, \lambda) da\end{aligned}\tag{21.1}$$

- $n(a) da$ – rozdělení velikostí prachových zrn
- a_{\min}, a_{\max} – poloměr nejmenšího a největšího zrna

střední opacita tlaku záření

- *radiation pressure mean opacity* – uvažuje anizotropní rozptyl na prachových zrnech

$$\rho \kappa_{\text{rp}} = \frac{\int_0^{\infty} [\kappa_{\nu} + (1 - g_{\nu}) \sigma_{\nu}] \mathcal{F}_{\nu} d\nu}{\int_0^{\infty} \mathcal{F}_{\nu} d\nu} \quad (21.2)$$

g_{λ} (zavedl Whitworth, 1975)

1 rozptyl dopředu

-1 rozptyl dozadu

0 izotropní rozptyl

pro izotropní rozptyl je to toková střední opacita (14.33)

2 složky větru – prach a plyn (Lamers and Cassinelli, 1999, kapitola 7.5)

prach – urychlovaný zářením

$$v_d \frac{dv_d}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_d}{dr} = -\frac{GM_*}{r^2} + \frac{\kappa_{\text{rp}} L_*}{4\pi r^2 c} - \frac{f_{\text{Drag}}}{m_d} \quad (21.3)$$

m_d – hmotnost prachových zrn

v_d – rychlost prachu

v_g – rychlost plynu

f_{Drag} – drag force, závislá na rozdílu v_d a v_g

prach získá velmi rychle koncovou rychlost v_{∞}

dominantní v rovnici jsou poslední dva členy (Lamers and Cassinelli, 1999, str. 166), pohybová rovnice prachu se zjednoduší

$$\frac{\kappa_{\text{rp}} L_*}{4\pi r^2 c} = \frac{f_{\text{Drag}}}{m_d} \quad (21.4)$$

drift $w_{\text{dr}} = v_d - v_g > 0$

$$f_{\text{Drag}} = \pi a^2 \rho w_{\text{dr}} \sqrt{w_{\text{dr}}^2 + v_{\text{th}}^2} \quad (21.5)$$

pokud $v_{\text{th}} \ll w_{\text{dr}}$

$$w_{\text{dr}} = \sqrt{\frac{Q_{\text{rp}} L_*}{4\pi r^2 \rho c}} \quad (21.6)$$

kde $Q_{\text{rp}} = \kappa_{\text{rp}} / (\pi a^2)$

plyn – urychlovaný interakcí s prachem
pro urychlování důležitá interakce mezi částicemi plynu a prachem (Gilman, 1972)

$$v_g \frac{dv_g}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = n_d \frac{f_{\text{Drag}}}{\rho} \quad (21.7)$$

n_d – koncentrace prachových zrn, můžeme přepsat pomocí (21.4)

$$v_g \frac{dv_g}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = \frac{\kappa_{\text{rp}} L_*}{4\pi r^2 c} \quad (21.8)$$

zavedeme (Lamers and Cassinelli, 1999, rovnice 7.1)

$$\Gamma_d = \frac{\kappa_{\text{rp}} L_*}{4\pi c GM_*}, \quad (21.9)$$

a (21.8) přepíšeme

$$v_g \frac{dv_g}{dr} + \frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} = \frac{GM_*}{r^2} (\Gamma_d - 1) \quad (21.10)$$

hybnost přenášená větrem

postupem podobným jako v kapitole 20.2.1 dostaneme pro hybnost unášenou prachovým větrem rovnici podobnou rovnici (20.15)

$$\dot{M} v_\infty = \frac{L_*}{c} \frac{\Gamma_d - 1}{\Gamma_d} \tau_W \quad (21.11)$$

použijeme Γ_d z rovnice (21.9)

pro optickou tloušťku větru (20.14) použijeme místo tokové střední opacity $\bar{\kappa}_F$ střední opacitu tlaku záření κ_{rp}

$$\tau_W = \int_{r_c}^{\infty} \kappa_{\text{rp}} \rho dr \quad (21.12)$$

rychlost větru

předpokládáme:

κ_{rp} je ve větru konstantní

gradient tlaku zanedbatelný v rovnici (21.10)

$$v_g \frac{dv_g}{dr} = \frac{GM_*}{r^2} (\Gamma_d - 1) \quad (21.13)$$

napíšeme řešení pro v_g^2

integrační konstantu určíme pro $r = r_c$

$$v_g^2(r) = v_c^2 + \frac{2GM_*(\Gamma_d - 1)}{r_c} \left(1 - \frac{r_c}{r}\right) \quad (21.14)$$

v_c je malá (rychlost významně roste až nad r_c), zanedbáme a upravíme, dostaneme β -zákon s $\beta = \frac{1}{2}$ (srovnej s 19.35)

$$v_g(r) = v_\infty \left(1 - \frac{r_c}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (21.15)$$

a koncová rychlost větru v_∞ (*wind terminal velocity*)

$$v_\infty = \sqrt{\frac{2GM_*}{r_c} (\Gamma_d - 1)} \quad (21.16)$$

obecnější případ: pokud $\kappa_{\text{rp}}(r)$ (závisí na r), musíme integrovat

$$v_g^2(r) = 2GM_* \int_{r_c}^{\infty} \frac{\Gamma_d(r) - 1}{r^2} dr \quad (21.17)$$

Míra ztráty hmoty \dot{M}

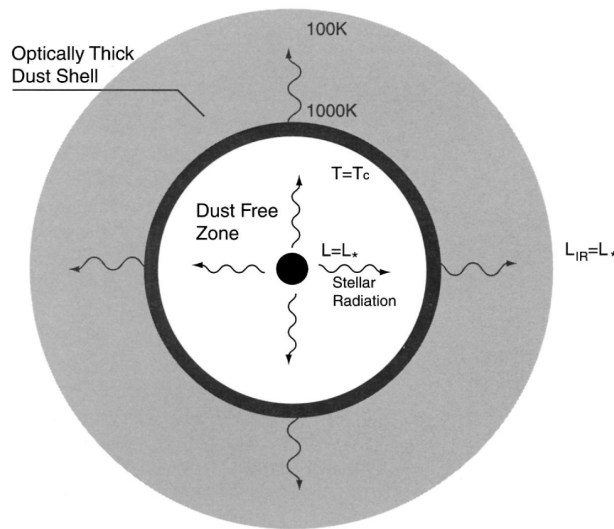
$$\dot{M} = 4\pi r_c^2 \rho(r_c) a_s(r_c) \quad (21.18)$$

$\rho(r_c)$ – určena strukturou podzvukové oblasti
možná „pomoc“ od pulsací (Mira)

nízká hustota prachu – značný rozdíl rychlostí mezi plynem a prachem

Γ_d se snižuje

21. VÍTR URYCHLOVANÝ PRACHEM



Obrázek 21.1: Kokonový model opticky tlusté prachové slupky. Obrázek z Lamers and Cassinelli (1999, obr. 7.8). (zkopírováno 38)

lze psát

$$\Gamma_d = \Gamma_{d0} \frac{v_g}{v_g + w_{dr}} \quad (21.19)$$

Γ_{d0} – hodnota Γ_d na kondenzačním poloměru

minimální hodnota \dot{M} z podmínky $\Gamma_d > 1$

$$\dot{M} \sim 10^{-7} M_{\odot} \text{ year}^{-1}$$

vysoká hustota prachu – prachová vrstva opticky tlustá
kokonový model (obrázek 21.1)

viditelné záření absorbováno, infračervené emitováno (optické vlastnosti prachu)

vrstvu lze aproximovat šedou atmosférou, teplotní struktura podle (14.22) je

$$T^4 = \frac{3}{4} T_{\text{surf}}^4 \left(\bar{\tau}_R + \frac{2}{3} \right) \quad (21.20)$$

T_{surf} – efektivní teplota prachové slupky

klesá zářivé urychlování prachu

pokud rychlost vyšší než úniková, vítr existuje

$$\dot{M} \sim 10^{-5} M_{\odot} \text{ year}^{-1}$$

míra ztráty hmoty závisí na kondenzačních vlastnostech prachu
(formování a růst prachových zrn)

modely získávání hmoty, která může kondenzovat:

PEDDRO – Pulsation Enhanced dust driven outflow
(posilování ztráty hmoty pulsacemi)

SCRA – Steady Circumstellar Radiative Acceleration
(stálý odtok hmoty z hvězdy)

Kapitola 22

Vítr urychlovaný čarami

vítr urychlovaný absorpcí nebo rozptylem zářením v čarách → vítr urychlovaný čarami (*line-driven wind*)

pozorování v ultrafialovém oboru pomocí raket Aerobee – překvapivý objev P-Cygni profilů čar

⇒ hvězdný vítr – hledala se analogie se slunečním větrem

u Slunce – důsledek vysoké teploty koróny a nízkého tlaku mezihvězdného prostředí (vítr je hnán tlakem plynu)

u O hvězd pozorovány čáry C IV, N IV, Si IV; při vysoké koronální teplotě ale nemohou existovat, proto nutný jiný mechanismus

hvězdný vítr horkých hvězd – vítr urychlovaný zářením v čarách (zkráceně vítr urychlovaný čarami – *line driven wind*)

22.1 Urychlování větru pomocí interakce hmoty a záření

Vliv opacity a toku na zářivou sílu

zářivá síla (20.4)

$$f^{\text{grad}} = \rho g_{\text{R}} = \frac{1}{c} \int_0^{\infty} \chi_{\nu} \mathcal{F}_{\nu} d\nu \quad (20.4)$$

efekty zářivé síly:

ve statických atmosférách – zářivá difúze (kapitola 15.11)

22. VÍTR URYCHLOVANÝ ČARAMI

selektivní urychlování atomů záření a jejich možný únik (Johnson, 1925) – analogie zářivé difúze nebo gravitačního usazování

hluboko v atmosféře ($\tau_\nu \gg 1$)

- opticky tlusté prostředí \Rightarrow velká opacita
- téměř izotropní záření \Rightarrow malý tok

vysoko v atmosféře ($\tau_\nu \ll 1$)

- silně anizotropní záření \Rightarrow velký tok
- opticky tenké prostředí \Rightarrow malá opacita

urychlování dopplerovsky posunutými čarami

(pro $\tau_{\text{cont}} \ll 1$ a $\tau_{\text{line}} \gg 1$)

zesílené urychlování pomocí Dopplerova posunu (Milne, 1926)

- silně anizotropní záření \Rightarrow velký tok
- opticky tlusté prostředí v čáře \Rightarrow velká opacita
- Dopplerův posun efektivně „rozšíří“ čáru
- čáry v UV oblasti – pro O hvězdy maximum toku

Přenos hybnosti od záření k hmotě

absorpce a rozptyl v kontinuu – kapitola 20.2

absorpce v čarách

$$\Delta(mv) = \frac{h\nu_0}{c}$$

rozptyl v čarách (hlavně v rezonančních, obr. 20.1) – vystředováním rozptylu do všech směrů (rozptyl = absorpce, emise), viz rovnice (20.12)

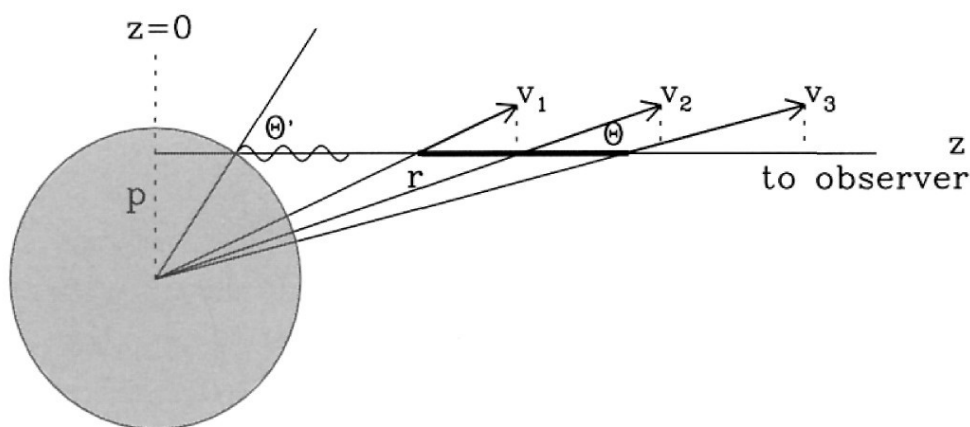
$$\langle \Delta(mv) \rangle = \frac{h\nu_0}{c} .$$

Opacita v čarách

shrnutí:

$$\chi_\nu = \chi_L \phi_\nu, \text{ zavedení } \chi_L \text{ viz (11.6);}$$

ve větru nízká hustota, profil ϕ_ν je dopplerovský (5.60a)



Obrázek 22.1: Schéma interakční oblasti, je vyznačena tlustou čarou. Interakční oblast odpovídá oblasti s nenulovou opacitou v obrázku 22.2. Směr šíření záření \mathbf{n} je podél čáry označené písmenem z . Obrázek z Lamers and Cassinelli (1999, obrázek 8.3). (zkopírováno 40)

zahrnutí turbulentních pohybů ve větru (viz například Lamers and Cassinelli, 1999, rovnice 8.29)

tepelná rychlost v dopplerovské pološířce (5.51) se často nahrazuje $v_{\text{th}} \rightarrow \sqrt{v_{\text{th}}^2 + v_{\text{turb}}^2}$,

Interakční oblast

prostředí s rychlostním gradientem

hmota interaguje se zářením ve své klidové soustavě (=CMF)

mezi soustavou pozorovatele a CMF – Dopplerův posun

k interakci může dojít pouze, pokud frekvence záření odpovídá dopplerovsky posunuté frekvenci čáry

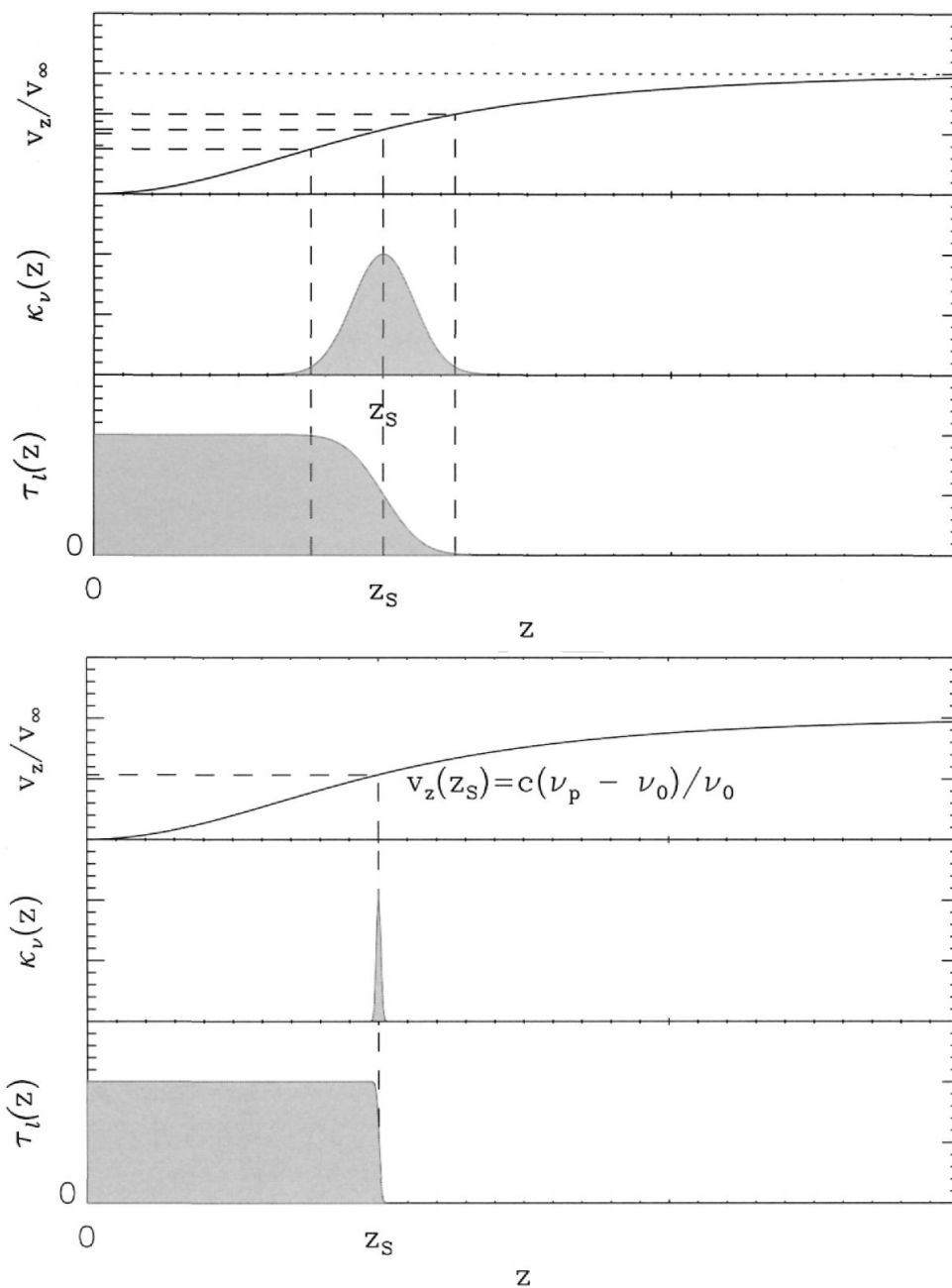
interakční oblast (*interaction region*)

definována pomocí frekvence fotonu letícího směrem \mathbf{n} (rezonanční podmínka)

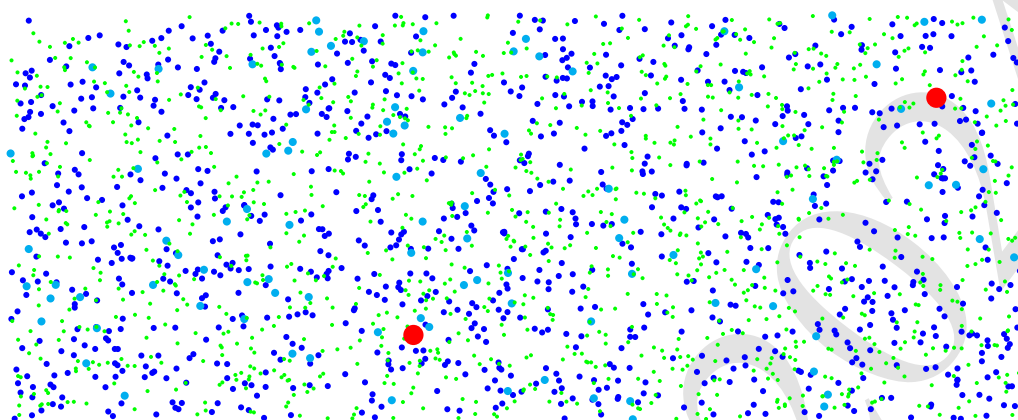
$$\nu_0 - \tilde{c}\Delta\nu_D \leq \nu_{\text{photon}} \left(1 - \frac{v_z}{c}\right) \leq \nu_0 + \tilde{c}\Delta\nu_D$$

$v_z = \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}$ (v souladu s obrázkem 22.1, kde je směr šíření záření označen z)
 $\tilde{c} = 1.5$ se započtením tubulentního rozšíření (podle Lamers and Cassinelli,

22. VÍTR URYCHLOVANÝ ČARAMI



Obrázek 22.2: Složka rychlosti $v_z(z)$, opacita v čáře $\kappa_\nu(z)$ a optická hloubka v čáře $\tau_l(z)$ jako funkce *prostorové* souřadnice. Obrázek z Lamers and Cassinelli (1999, obrázky 8.4 a 8.5). (zkopírováno 43) (zkopírováno 44)



Obrázek 22.3: Schematické zobrazení chemického složení hmoty hvězdného větru. Zastoupení prvků se předpokládá přibližně sluneční. Je zobrazeno 1000 atomů vodíku (modré tečky), 100 atomů helia (tyrkysové tečky), 1200 elektronů (zelené tečky) a 2 atomy kovů (červené tečky). Jedině kovy jsou urychlovány interakcí ve spektrálních čarách. Obrázek připraven podle obrázku 1 v přehledu Krτίčka and Kubát (2007).

1999, rovnice 8.30)

pro $\Delta\nu_D \rightarrow 0$: malá interakční oblast

nákres interakční oblasti – obr. 22.1

opacita a optická hloubka při průchodu rezonanční oblastí – obrázek 22.2

„čára“ je znázorněna závislá na prostorové souřadnici, ne na frekvenci

Sobolevova aproximace pro velké rychlostní gradienty

22.2 Urychlování pasivní složky

zářením urychlovány jen některé atomy (C, N, O, Fe, ...)

slabé urychlování H (příliš široké čáry), He, elektrony, ...

přenos hybnosti pomocí Coulombických srážek mezi urychlovanými ionty (i) a pasivními zářením neurychlovanými (p) částicemi (ionizovaným vodíkem, ionizovaným heliem a elektrony)

třecí síla mezi nabitými složkami plynu

$$f_{ip} \approx n_p n_i \frac{4\pi q_p^2 q_i^2}{kT_{ip}} \ln \Lambda G(x_{ip}), \quad (22.1)$$

kde

- n_p, n_i – číselné hustoty složek větru,
- q_p, q_i – náboje složek větru
- x_{ip} – rozdíl rychlostí

$$x_{ip} = \frac{|v_i - v_p|}{\alpha_{ip}}, \quad (22.2)$$

- v_i, v_p – rychlosti složek větru

$$\alpha_{ip}^2 = \frac{2k(m_i T_p + m_p T_i)}{m_i m_p}. \quad (22.3)$$

- T_p, T_i – teploty složek větru
- m_i, m_p – hmotnosti částic složek větru
- $T_{ip} = \frac{m_i T_p + m_p T_i}{m_p + m_i}$
- $G(x_{ip})$ – Chandrasekharova funkce, obr. 22.4 (Chandrasekhar, 1942, rovnice 2.356) (Spitzer, 1956, rovnice 5-20)

$$G(x) = \frac{\Phi(x) - x\Phi'(x)}{2x^2} \quad (22.4)$$

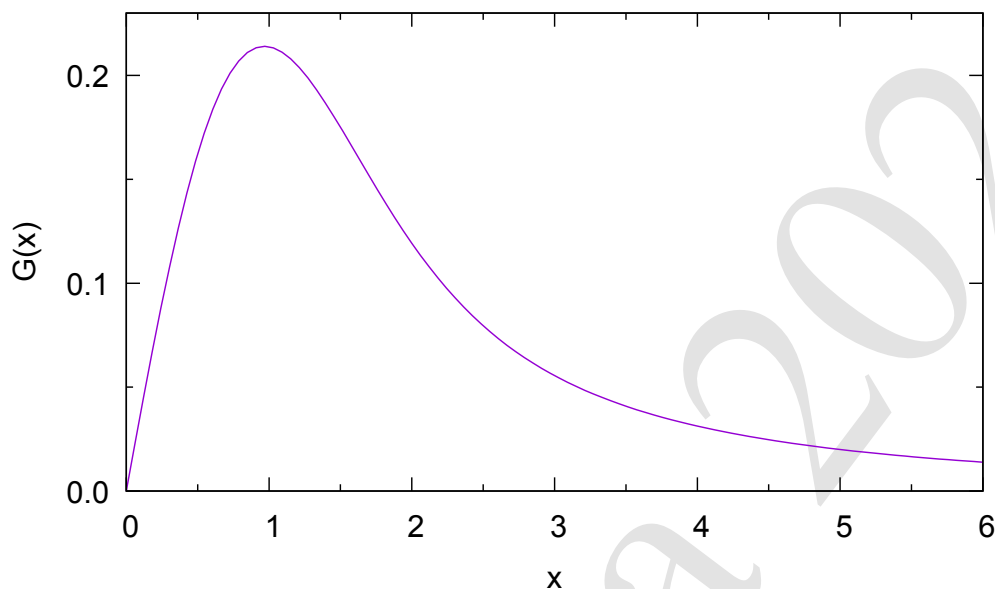
a

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \quad (22.5)$$

je chybová funkce erf.

- $\ln \Lambda$ – Coulombický logaritmus (Spitzer, 1956, rovnice 5-14)

$$\ln \Lambda = \ln \left(\frac{3}{2q_p q_i e^3} \sqrt{\frac{k^3 T_{ip}^3}{\pi n_e}} \right) \quad (22.6)$$



Obrázek 22.4: Chandrasekharova funkce (rovnice 22.4).

účinnost přenosu hybnosti coulombickými srážkami

pro O hvězdy (hodně iontů) – účinný

pro B hvězdy (chladnější – méně iontů) → méně účinný, může docházet k úniku iontů

spíš však dochází ke zbrždění celého větru

hydrodynamické rovnice pro složky

rovnice kontinuity (19.1)

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \rho_a v_a)}{dr} = 0 \quad (22.7)$$

$a = p, i$

pohybová rovnice

$$\rho_i v_i \frac{dv_i}{dr} = -\frac{d(p_g)_i}{dr} + f_i^{\text{rad}} - \rho_i \frac{GM_*}{r^2} - f_{ip} \quad (22.8a)$$

$$\rho_p v_p \frac{dv_p}{dr} = -\frac{d(p_g)_p}{dr} - \rho_p \frac{GM_*}{r^2} + f_{ip} \quad (22.8b)$$

a rovnice pro energii (zde neuvedena)

22.3 Zářivá síla čar

Vektor zářivého zrychlení zahrnující veškerou opacitu (o níž předpokládáme, že je izotropní, stejně jako emisivita) je dán vztahem $\mathbf{g}_R = \mathbf{f}^{\text{rad}}/\rho$, kde \mathbf{f}^{rad} je popsána rovnicí (13.8). Celkovou opacitu χ_ν můžeme rozdělit na opacitu kontinua $\chi_{C\nu}$ a na opacitu čar $\chi_{L\nu}$,

$$\chi_\nu = \chi_{C\nu} + \chi_{L\nu}. \quad (22.9)$$

Zářivá síla způsobená absorpcemi v kontinuu bývá často odečítána od gravitační síly, výsledná veličina $g_{\text{eff}} = GM_*(1 - \Gamma)/r^2$ se pak nazývá efektivní gravitační síla, kde

$$\Gamma = \frac{r^2 \int_0^\infty \chi_{C\nu} \mathcal{F}_\nu d\nu}{\rho GM_*} \quad (22.10)$$

je poměr zářivého zrychlení z kontinua g_R^C a gravitačního zrychlení. Na rozdíl od Eddingtonova parametru pro elektronový rozptyl (20.9) zde Γ zahrnuje veškerou opacitu v kontinuu. Pohybová rovnice (19.2) pak získá tvar

$$\rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dp_g}{dr} + \rho g_R^L - \rho \frac{GM_*(1 - \Gamma)}{r^2}. \quad (22.11)$$

Dále budeme předpokládat platnost Sobolevovy aproximace, která značným způsobem zjednoduší vyjádření zářivého zrychlení. Za předpokladu, že ve spektru je jen jedna čára (označíme ji indexem l) na kterou dopadá záření $I_c(\mathbf{n})$, integrací (13.8) přes profil čáry ($\int_0^\infty \chi_L \phi_\nu I_\nu(\mathbf{n}) d\nu = \chi_L \bar{I}(\mathbf{n})$) a dosazením (11.12) za integrovanou specifickou intenzitu dostaneme

$$\mathbf{f}_l^{\text{rad}} = \frac{\chi_L}{c} \oint d\varpi \mathbf{n} (I_c(\mathbf{n})\beta(\mathbf{n}) + S_L [1 - \beta(\mathbf{n})]), \quad (22.12)$$

kde $\beta(\mathbf{n})$ je zavedeno vztahem (11.13) Toto je obecný tvar pro zářivou sílu způsobenou absorpcí v jedné čáře. První člen na pravé straně se nazývá přímý (*direct*), druhý je difúzní (*diffuse*). Dominantní zdroj zářivé síly je přímý člen, difúzní člen je jeho korekcí a často se zanedbává. Jeho zanedbáním získá zářivá síla jedné čáry tvar

$$\mathbf{f}_l^{\text{rad}} = \frac{\chi_L}{c} \oint d\varpi \mathbf{n} I_c(\mathbf{n})\beta(\mathbf{n}) = \frac{\chi_L}{c} \oint d\varpi \mathbf{n} I_c(\mathbf{n}) \frac{1 - e^{-\tau(\mathbf{n})}}{\tau(\mathbf{n})}. \quad (22.13)$$

Sobolevova optická hloubka $\tau(\mathbf{n})$ závisí na *gradientu rychlosti* (viz 11.10), proto na něm závisí i zářivé zrychlení způsobené absorpcí v jedné čáře.

22.3.1 Limitní případy Sobolevovy optické hloubky

Zajímavá vlastnost vyplývá ze vztahu (22.13) pro limitní případy opticky tlustých a opticky tenkých čar. V případě opticky tlustých čar ($\tau(\mathbf{n}) \gg 1$) je (viz 11.13) $\beta(\mathbf{n}) \approx 1/\tau(\mathbf{n})$ a rovnice (22.13) získá s využitím vztahu (11.10) tvar

$$\mathbf{f}_l^{\text{rad}} = \frac{\nu_0}{c^2} \oint d\varpi \mathbf{n} I_c(\mathbf{n}) |\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|. \quad (22.14)$$

Z tohoto vztahu je vidět, že pro opticky tlusté čáry v Sobolevově aproximaci zářivé zrychlení nezávisí na opacitě čáry, ale závisí jen na gradientu rychlosti. Naopak pro opticky tenké čáry ($\tau(\mathbf{n}) \ll 1$) platí $\beta(\mathbf{n}) \approx 1$ a rovnice (22.13) získá tvar

$$\mathbf{f}_l^{\text{rad}} = \frac{\chi_L}{c} \oint d\varpi \mathbf{n} I_c(\mathbf{n}) \quad (22.15)$$

a zářivé zrychlení závisí na opacitě čáry, ale nezávisí na gradientu rychlosti.

22.3.2 Zářivá síla souboru čar

Obecně má každá čára l jinou opacitu χ_{Ll} , jinou Sobolevovu optickou hloubku $\tau_l(\mathbf{n})$ a dopadá na ni jiné záření $I_{cl}(\mathbf{n})$. Výsledné zářivé zrychlení dostaneme sečtením příspěvků od všech čar,

$$\mathbf{f}_L^{\text{rad}} = \sum_l \mathbf{f}_l^{\text{rad}} = \frac{1}{c} \sum_l \chi_{Ll} \oint d\varpi \mathbf{n} I_{cl}(\mathbf{n}) \frac{1 - e^{-\tau_l(\mathbf{n})}}{\tau_l(\mathbf{n})}. \quad (22.16)$$

Parametrizace zářivé síly Výpočet součtu v rovnici (22.16) je poměrně náročný. Proto výpočty zářivé síly většinou využívají aproximaci. Nejrozšířenější aproximace využívá tři parametrů, které poměrně dobře popisují zářivou sílu pro značné množství horkých hvězd. Tyto parametry, k , α a δ , se nazývají CAK parametry podle prvních písmen příjmení autorů práce, kde byla poprvé tato aproximace zářivé síly použita (Castor et al., 1975). Pomocí těchto parametrů můžeme zářivou sílu souboru čar vyjádřit jako

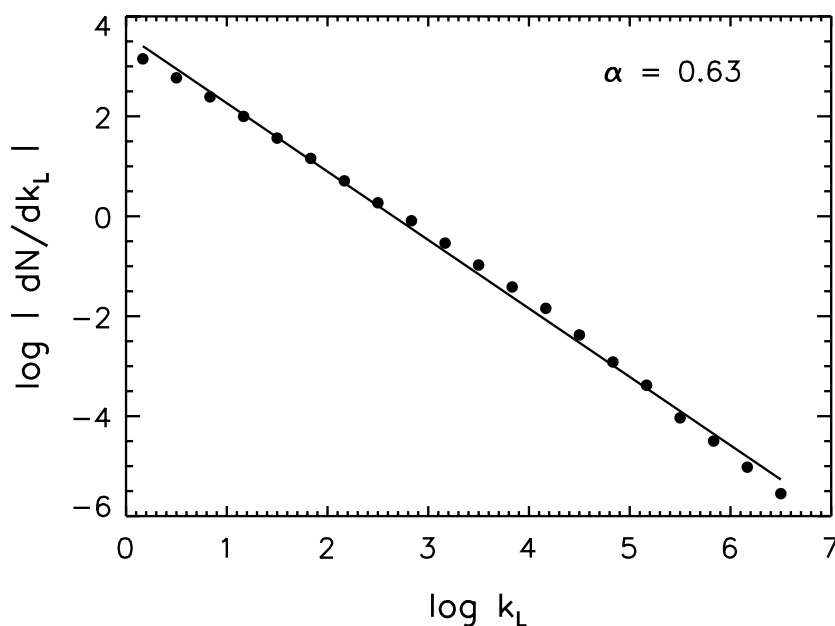
$$\mathbf{f}_L^{\text{rad}} = \mathbf{f}_e^{\text{rad}} M(t) = \rho g_e M(t), \quad (22.17)$$

kde

$$g_e = \frac{\kappa_e L_*}{4\pi r^2 c} \quad (22.18)$$

je referenční zářivé zrychlení rozptylu na volných elektronech, v němž

$$\kappa_e = \frac{\sigma_e n_e}{\rho}$$



Obrázek 22.5: Závislost počtu čar na jejich síle k_L (22.21). Obrázek z Puls et al. (2008, obrázek 1). (zkopírováno 46)

je opacita elektronového rozptylu na jednotkovou hmotu (použitá i v kapitole 20.2). Tato veličina má rozměr cm^2g^{-1} . Veličina

$$M(t) = kt^{-\alpha} \left(\frac{10^{-11} n_e}{W} \right)^\delta \quad (22.19)$$

se nazývá **silový činitel** (*force multiplier*). Ve vztahu (22.19) je W faktor zředění (9.1),

$$t = \kappa_e v_{\text{th}} \rho \left(\frac{dv}{dr} \right)^{-1} \quad (22.20)$$

je proměnná odpovídající optické hloubce, v_{th} je zavedena pomocí efektivní teploty hvězdy a hmotnosti vodíkového atomu, $v_{\text{th}} = \sqrt{2kT_{\text{eff}}/m_{\text{H}}}$, a k , α a δ jsou volné parametry nazývané **parametry silového činitele** (*force multiplier parameters*) a popisující sílu způsobenou zářením absorbovaným nebo rozptýleným ve spektrálních čarách. Parametry α , který odpovídá rozdělení čar ve spektru, a k , který popisuje sílu čáry, byly zavedeny v původní práci Castor et al. (1975), třetí parametr δ popisující ionizační rovnováhu zavedl později Abbott (1982).

souvislost síly čar a rozdělení čar ve spektru

síla jedné čáry (*line strength*)

$$k_L = \frac{\chi_L}{\rho \chi_e \Delta \nu_D} \quad (22.21)$$

rozdělovací funkce počtu a síly čar

(počet čar v intervalech $\langle \nu; \nu + d\nu \rangle$ a $\langle k_L; k_L + dk_L \rangle$)

zavedli Castor et al. (1975, Eq. 51), tvar podle Puls et al. (2000, Eq. 10)

$$dN(\nu, k_L) = -N_o f_\nu(\nu) k_L^{\alpha-2} d\nu dk_L \quad (22.22)$$

$f_\nu(\nu)$ – rozdělení čar ve spektru

N_o – normalizační konstanta

důsledky rozdělení čar ve spektru:

typická hodnota $\alpha \approx \frac{2}{3}$

platí $\alpha + \delta \approx 1$

$$k = \frac{v_{th}}{c} \frac{N_o}{\alpha(1-\alpha)} \quad (\text{Castor et al., 1975, Eq. 52})$$

Alternativní parametrizace zářivé síly (Gayley, 1995)

základní myšlenka

$$M(t) = \bar{Q} \bar{P} \quad (22.23)$$

\bar{Q} – celková síla čar

\bar{P} – střední korekce samostínění čar

dále využijeme rozdělení sil čar ve spektru (analogie rovnice 22.22)
s využitím (22.19) bez členu s δ dostaneme

vztah mezi k , α a \bar{Q} (Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 20.61)

$$k = \left(\frac{v_{th}}{c} \right)^\alpha \frac{\bar{Q}^{1-\alpha}}{1-\alpha} \quad (22.24)$$

odstraňuje v_{th} z proměnné t (rovnice 22.20)

zářivá síla je parametrizována pomocí \bar{Q} , α , δ

vlastnosti: typická hodnota pro O a B hvězdy $\bar{Q} \approx 2000$

\bar{Q} je přibližně úměrná metalicitě, $\bar{Q} \propto Z$

Podrobný výpočet zářivé síly

- zářivou sílu lze počítat i bez parametrizace
- výpočet v podstatě podle rovnice (22.16)
- potřebujeme znát obsazení energetických hladin a pole záření (tj. řešení NLTE problému)
- nutný krok pro určení parametrů (k , α , δ nebo \bar{Q} , α , δ).

22.4 Řešení hydrodynamických rovnic

rovnice kontinuity (19.1)

pohybová rovnice (19.2)

a zářivá síla (20.4)

rozdělíme zářivou sílu

$$f^{\text{rad}} = f_e^{\text{rad}} + f_C^{\text{rad}} + f_L^{\text{rad}} \quad (22.25)$$

f_e^{rad} – způsobená rozptylem na volných elektronech

f_C^{rad} – způsobená absorpcí a rozptylem v kontinuu (ionizace, rekombinace, volně-volné přechody)

f_L^{rad} – způsobená absorpcí a rozptylem v čarách

člen f_e^{rad} vyjádříme pomocí Eddingtonova parametru pro rozptyl na volných elektronech Γ_e (20.9)

$$\rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dp_g}{dr} - \rho \frac{GM_*(1 - \Gamma_e)}{r^2} + f_C^{\text{rad}} + f_L^{\text{rad}} \quad (22.26)$$

použijeme

- rychlost zvuku $a_s = \sqrt{p_g/\rho}$ (19.5)

kombinací (19.1) a (22.26) získáme momentovou rovnici

$$\left(v - \frac{a_s^2}{v}\right) \frac{dv}{dr} = -\frac{GM_*(1 - \Gamma_e)}{r^2} + \frac{2a_s^2}{r} - \frac{da_s^2}{dr} + \frac{f_C^{\text{rad}}}{\rho} + \frac{f_L^{\text{rad}}}{\rho} \quad (22.27)$$

22.4.1 CAK řešení

opacita v kontinuu – jen rozptyl na volných elektronech (pro O hvězdy)
 f_C^{rad} neuvažujeme

předem daná závislost $T(r)$, konzistentní s LTE atmosférou v zářivé rovnováze
 (Castor et al., 1975) \Rightarrow neřeší se rovnice pro energii

zářivá síla čar pomocí (22.17) a rovnic po ní následujících

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2}\right) v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM_*(1 - \Gamma_e)}{r^2} + \frac{2a_s^2}{r} - \frac{da_s^2}{dr} + \frac{C}{r^2} \left(r^2 v \frac{dv}{dr}\right)^\alpha \quad (22.28)$$

„konstanta”

$$C = \frac{\kappa_e L_* k}{4\pi c} \left(\frac{\kappa_e v_{\text{th}} \dot{M}}{4\pi}\right)^{-\alpha} \left(\frac{10^{-11} n_e}{W}\right)^\delta \quad (22.29)$$

poslední člen v závorce konstantní není, ale mění se jen velmi málo
 případně s využitím Gayleyho parametrizace a vztahu (20.9) pro Γ_e

$$C = \frac{(\bar{Q} GM_* \Gamma_e)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \left(\frac{L_*}{\dot{M} c^2}\right)^\alpha \quad (22.30)$$

rovnice (22.28) nelineární v dv/dr , jiné vlastnosti než izotermické řešení

zavedeme proměnné

$$w \equiv \frac{1}{2} v^2, \quad u \equiv -\frac{1}{r}, \quad w' \equiv \frac{dw}{du} \quad (22.31)$$

rovnici přepíšeme

$$F(u, w, w') \equiv \left[1 - \frac{1}{2} \frac{a_s^2}{w}\right] w' - h(u) - C (w')^\alpha = 0 \quad (22.32)$$

kde

$$h(u) \equiv -GM_*(1 - \Gamma_e) - \frac{2a_s^2}{u} - \frac{da_s^2}{du} \quad (22.33)$$

(22.32) má singulární bod, kde řešení končí nebo je nespojité (viz obr. 22.6)

poloha singulárního bodu

$$\frac{\partial F(u, w, w')}{\partial w'} = 1 - \frac{1}{2} \frac{a_s^2}{v} - \alpha C (w')^{\alpha-1} = 0 \quad (22.34)$$

podmínka regularity (zaručí, aby w' bylo spojitě v r_c)

$$\frac{\partial F}{\partial u} \Big|_c + \left[w' \frac{\partial F}{\partial w} \right]_c = 0 \quad (22.35)$$

rovnice (22.32), (22.34) a (22.35) jednoznačně určují C pro dané r_c nebo r_c pro dané C

- pro zvolené u a w hledáme řešení w'
- oblasti řešení
 - I $w < \frac{1}{2} a_s^2, h < 0$ (oblast vlevo dole na obr. 22.6)
 → 1 řešení
 pro pokračování za Parkerův bod je třeba $r^2 v v' = 0$, což nejde
 - II $w > \frac{1}{2} a_s^2, h < 0, 1 - a^2/w > \alpha (1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} C^{1/\alpha} (-h)^{-(1-\alpha)/\alpha}$
 (nevyšrafovaná oblast vlevo nahoře na obr. 22.6)
 → 2 řešení
 - III $w > \frac{1}{2} a_s^2, h > 0$ (oblast vpravo nahoře na obr. 22.6)
 → 1 řešení
 pro $v < a_s$ je nekonečný gradient rychlosti
 - IV $w > \frac{1}{2} a_s^2, h < 0, 1 - a^2/w < \alpha (1 - \alpha)^{(1-\alpha)/\alpha} C^{1/\alpha} (-h)^{-(1-\alpha)/\alpha}$
 (vyšrafovaná oblast vlevo nahoře na obr. 22.6, označena A)
 → 0 řešení
 (jako II, třetí nerovnost obrácená)
 - V $w < \frac{1}{2} a_s^2, h > 0$ (vyšrafovaná oblast vpravo dole na obr. 22.6, označena B)
 → 0 řešení
- pro nulovou zářivou sílu řešení přejde na X-type řešení (obr. 19.1)

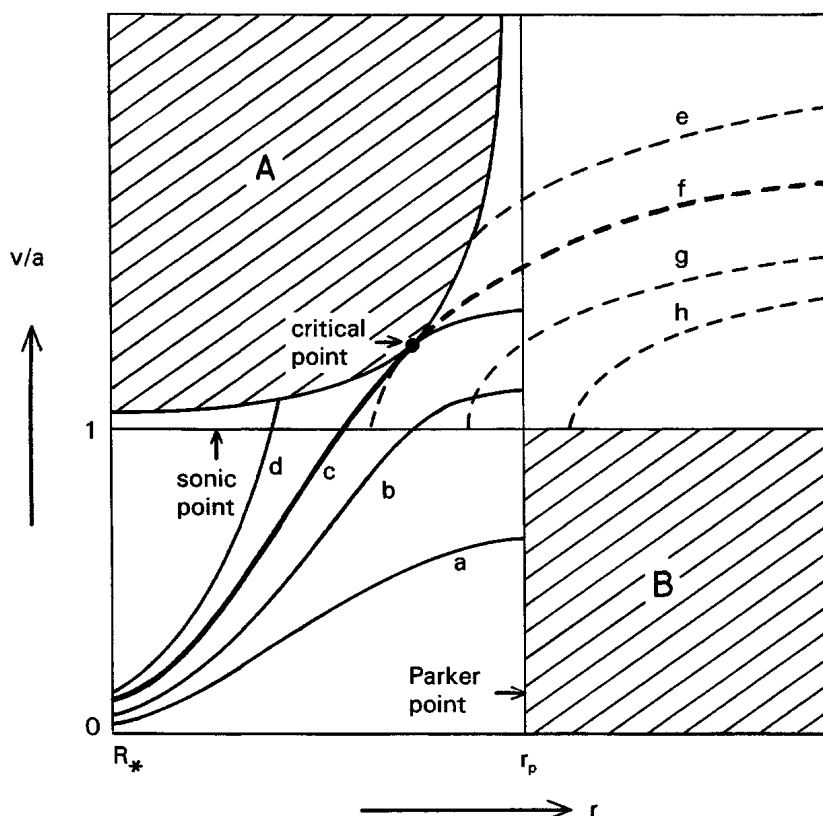
z tohoto řešení vyplývají přibližné vztahy pro \dot{M} a v_∞ :

míra ztráty hmoty (Castor et al., 1975, rovnice (46))

$$\dot{M} = \frac{4\pi G M_*}{\kappa_e v_{th}} \alpha \left(\frac{1 - \alpha}{1 - \Gamma_e} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} (k \Gamma_e)^{1/\alpha} \quad (22.36)$$

rychlost větru (Castor et al., 1975, rovnice (47))

$$v^2(r) = \frac{\alpha}{1 - \alpha} 2GM_* (1 - \Gamma_e) \left(\frac{1}{r_s} - \frac{1}{r} \right) \quad (22.37)$$



Obrázek 22.6: Schéma CAK řešení momentové rovnice (22.28). Parkerův bod (*Parker point*) je místo, kde $GM_*(1 - \Gamma_e) = 2a_s^2 r$, zvukový bod (*sonic point*) je pro $v = a_s$. Řešení popisující hvězdný vítr je vyznačeno tučnou čarou, pod kritickým bodem plnou (křivka c), nad kritickým bodem čárkovanou (křivka f). Obrázek z Lamers and Cassinelli (1999, obr. 8.13). (zkopírováno 48)

β -zákon rychlosti s $\beta = 1/2$

r_s – zvukový poloměr (*sonic radius*)
($r_s \ll r_c$)

Fotonová únava

limitní hodnota Eddingtonova parametru

$$\Gamma_e \rightarrow 1 \Rightarrow \dot{M} \rightarrow \infty, v_\infty \rightarrow 0$$

fotonová únava (*photon tiring*)

všechna zářivá energie převedena na hybnost odtoku z hvězdy

$$\frac{1}{2} \dot{M} v_{\text{esc}}^2 = L_* \quad (22.38)$$

odtud nejvyšší možná míra ztráty hmoty, označíme ji \dot{M}_{tir}

$$\dot{M}_{\text{tir}} = \frac{2L_*}{v_{\text{esc}}^2} = \frac{L_* r}{GM_*} \quad (22.39)$$

úniková rychlost (19.12): $v_{\text{esc}}(r) = \sqrt{2GM_*/r}$

22.4.2 Korekce na nebodový zdroj záření

přiblížení bodového zdroje *point source approximation*

- hvězda je hmotný bod
- záření přichází jen z jednoho směru (radiálně)
- dobrá aproximace daleko od hvězdy, blízko hvězdy nepřesná
příliš velké urychlování, ve skutečnosti záření i z neradiálních směrů

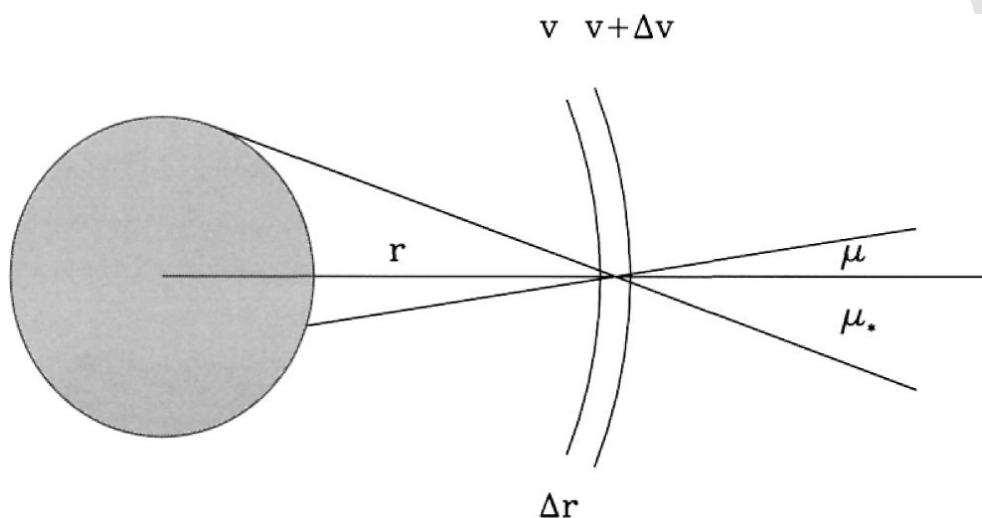
oprava na konečný disk

- upravený silový činitel (rovnice 22.19)

$$M(t) = kt^{-\alpha} \left(\frac{10^{-11} n_e}{W} \right)^\delta D_f \quad (22.40)$$

kde **korekční činitel konečného disku** (*finite disk correction factor*) (Castor et al., 1975, rovnice (50))

$$D_f = \frac{(1 + \sigma)^{1+\alpha} - (1 + \sigma \mu_c^2)^{1+\alpha}}{(1 - \mu_c^2) (1 + \alpha) \sigma (1 + \sigma)^\alpha} \quad (22.41)$$



Obrázek 22.7: Korekce konečného disku. Obrázek z Lamers and Cassinelli (1999, obr. 8.14). (zkopírováno 50)

kde

$$\sigma = \frac{d \ln v}{d \ln r} - 1 \quad (22.42)$$

$$\mu_c = \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{r^2}}$$

• důsledky

- zářivé zrychlení v blízkosti hvězdy menší
 $\Rightarrow \dot{M}$ asi $2 \times$ menší
- nižší hustota \Rightarrow kratší Sobolevova délka \Rightarrow větší g_R (protože $g_R \sim t^{-\alpha}$)
 a $D_f > 1$ v nadzvukové oblasti
 $\Rightarrow v_\infty$ asi $2 \times$ větší
- $v(r)$ pozvolnější, $\beta \approx 0.8$ místo 0.5 (viz obrázek 19.2)

22.4.3 Hybnost větru získaná od záření

podobně jako při odvození (20.15) integrujeme pohybovou rovnici (22.26), v níž je zářivá síla rozdělena podle (22.25) na příspěvek od rozptylu na volných elektronech a na příspěvek od spektrálních čar, opacitu v kontinuu zanedbáme

integrál ze zářivé síly od čar po dosažení z (22.17) a (22.18) a vyjádření dr z (22.20) je

$$\int_{R_*}^{\infty} 4\pi r^2 \rho f_L^{\text{rad}} dr = \frac{L_*}{cv_{\text{th}}} \int_0^{\infty} tM(t) dv \quad (22.43)$$

nakonec dostaneme následující vztah (viz Abbott 1980, také v Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 20.88)

$$\dot{M}v_{\infty} = \frac{L_*}{c} \frac{\Gamma_e - 1}{\Gamma_e} \tau_e + B \frac{L_*}{c} \quad (22.44)$$

Γ_e – Eddingtonův parametr (20.9)

τ_e – optická tloušťka větru pro rozptyl na volných elektronech

$$\tau_e = \int_{r_c}^{\infty} \kappa_e \rho dr \quad (22.45)$$

B – blocking factor spektrálních čar

$$B = \frac{1}{v_{\text{th}}} \int_0^{\infty} M(t)t dv \quad (22.46)$$

22.4.4 Jednonásobný a vícenásobný rozptyl

- v dané čáře může být foton ve větru rozptýlen jen jednou
- pokud je jiná čára blíže než $(2v_{\infty}/c)\nu$, může dojít k dalšímu rozptylu
- parametr účinnosti větru (20.16)
- jednonásobný rozptyl: $\eta_{\text{wind}} < 1$
- vícenásobný rozptyl: η_{wind} může být větší než 1, pro WR hvězdy je třeba $\eta_{\text{wind}} \sim 10$

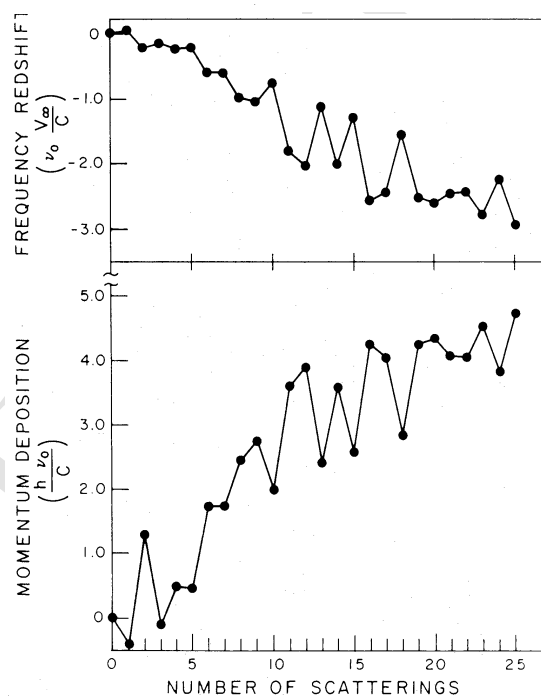
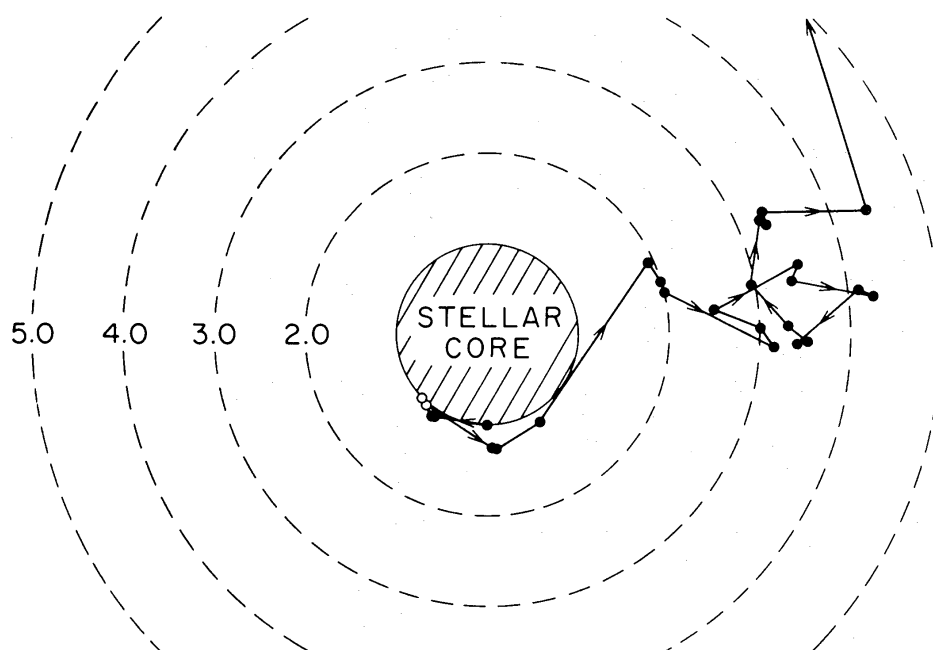
22.4.5 Rotující zářením urychlovaný vítr

přidání odstředivé síly do (22.28)

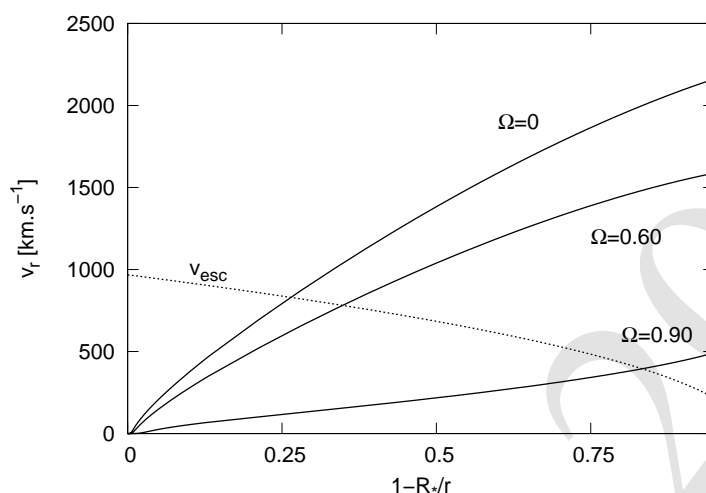
$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2}\right) v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM_*(1 - \Gamma_e)}{r^2} + \frac{v_{\phi}^2}{r} + \frac{2a_s^2}{r} - \frac{da_s^2}{dr} + \frac{C}{r^2} \left(r^2 v \frac{dv}{dr}\right)^{\alpha} \quad (22.47)$$

důsledky

22. VÍTR URYCHLOVANÝ ČARAMI



Obrázek 22.8: Dráha fotonu (horní obrázek), posun ve frekvenci (prostřední obrázek) a předaná hybnost (dolní obrázek) při vícenásobném rozptylu. Obrázky z Abbott and Lucy (1985, obr. 5 a 6). (zkopírováno 52)



Obrázek 22.9: Závislost radiální rychlosti rotujícího větru v na $1 - R_*/r$ pro různé Ω – poměry rotační a kritické rotační rychlosti hvězdy. Modely větru byly spočteny pro hvězdu s $T_{\text{eff}} = 30\,000\text{K}$, $\log g = 3.45$, $R_* = 29R_{\odot}$ a parametry silového činitele $k = 0.17$, $\alpha = 0.59$ a $\delta = 0.09$. Pro porovnání je zakreslena i úniková rychlost v_{esc} . Obrázek z Ceniga (2012, obr. 5.13).

- odstředivá síla působí proti gravitační síle
- rotace zvyšuje míru ztráty hmoty \dot{M}
- rotace snižuje koncovou rychlost větru v_{∞}
- existuje rotační rychlost (okolo 0.75 kritické rotační rychlosti – v závislosti na typu hvězdy), kde dochází ke skokovým změnám vlastností větru (Curé, 2004; Ceniga, 2012), viz obr. 22.9
 - skokový pokles v_{∞}
 - změna polohy kritického bodu řešení (přesun z těsné blízkosti hvězdy do 15 až 25 R_*)
 - modely pro rotační rychlosti okolo skokové rotační rychlosti mají problémy s konvergencí

22.5 Modelování větrů urychlovaných čarami

- základní globální parametry: R_* , M_* , L_* (T_{eff} , $\log g$), \dot{M} , v_{∞} , $\tilde{\alpha}_k$ (abundance – chemické složení)

- další parametry: v_{turb}
- získáme prostorovou závislost $T(\mathbf{r}), \rho(\mathbf{r}), n_e(\mathbf{r}), n_i(\mathbf{r}), J(\nu, \mathbf{r}), \mathbf{v}(\mathbf{r}), \dots$
- řešením množiny rovnic popisujících hvězdnou atmosféru a vítr

Cíle modelování

- hlavní cíl modelování: předpověď teoretického spektra (jediné, co můžeme pozorovat)
porovnání s pozorováním
- porozumění fyzikálním procesům v atmosféře a ve větru
understanding of physical processes in stellar atmospheres

1-D modelování větru urychlovaného zářením v čarách

- předpoklad sférické symetrie
- stacionární vítr ($\partial/\partial t = 0$)
- oddělené modelování větru a fotosféry (*core-halo approximation*)

rovnice k řešení (souhrn)

(A) rovnice kontinuity

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \rho v)}{dr} = 0 \quad (19.1)$$

(B) pohybová rovnice

rovnice hybnosti (22.28)

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2}\right) v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM_*(1 - \Gamma_e)}{r^2} + \frac{2a_s^2}{r} - \frac{da_s^2}{dr} + \frac{C}{r^2} \left(r^2 v \frac{dv}{dr}\right)^\alpha \quad (22.28)$$

(C) rovnice pro energii

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left[r^2 \rho v \left(\frac{1}{2} v^2 + e + \frac{p_g}{\rho} \right) \right] = -\rho v \frac{GM_*}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 K_q \frac{dT}{dr} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \mathfrak{F})}{dr} \quad (19.3)$$

často jen rovnice zářivé rovnováhy

$$4\pi \int_0^\infty (\chi_\nu J_\nu - \eta_\nu) d\nu = 0, \quad (15.21)$$

(D) rovnice přenosu záření

v soustavě pozorovatele, úhlově závislé opacita a emisivita (3.19)

$$\mu \frac{\partial I(r, \mu, \nu)}{\partial r} + \frac{1 - \mu^2}{r} \frac{\partial I(r, \mu, \nu)}{\partial \mu} = \eta(r, \mu, \nu) - \chi(r, \mu, \nu) I(r, \mu, \nu). \quad (3.19)$$

ve spolupohybující se soustavě, index $_0$ označuje veličiny v této soustavě, opacita i emisivita úhlově nezávislé

$$\begin{aligned} & \mu_0 \frac{\partial I_0(r, \mu_0, \nu_0)}{\partial r} + \frac{1 - \mu_0^2}{r} \frac{\partial I_0(r, \mu_0, \nu_0)}{\partial \mu} \\ & - \frac{\nu_0 v}{cr} \left[(1 - \mu_0^2) + \mu_0^2 \left(\frac{\partial \ln v}{\partial \ln r} \right) \right] \frac{\partial I_0(r, \mu_0, \nu_0)}{\partial \nu_0} \\ & = \eta_0(r, \nu_0) - \chi_0(r, \nu_0) I_0(r, \mu_0, \nu_0) \end{aligned} \quad (22.48)$$

Sobolevova aproximace (11.12)

$$\bar{I}(\mathbf{n}) = I_c(\mathbf{n})\beta(\mathbf{n}) + S_L [1 - \beta(\mathbf{n})], \quad (11.12)$$

kde (11.13)

$$\beta(\mathbf{n}) = \frac{1 - e^{-\tau(\mathbf{n})}}{\tau(\mathbf{n})}. \quad (11.13)$$

(E) rovnice kinetické rovnováhy (9.51) doplněné o (9.52)

L_k – počet energetických hladin prvku k

$l = 1, \dots, L_k$

$$n_l \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq l}}^{L_k} (R_{lu} + C_{lu}) - \sum_{\substack{u=1 \\ u \neq l}}^{L_k} n_u (R_{ul} + C_{ul}) = 0 \quad (9.51)$$

$$\sum_k \sum_{u=1}^{L_k} n_u q_u = n_e \quad (9.52d)$$

$$\sum_k \sum_{u=1}^{L_k} n_u = \tilde{N}_N \quad (9.52c)$$

$$\sum_{u=1}^{L_k} n_u = \mathcal{Y}_k N_H \quad (9.52b)$$

$$\sum_{u=1}^{L_k} n_u = \tilde{\alpha}_k \tilde{N}_N \quad (9.52a)$$

- ideálně řešení všech rovnic (A) (B) (C) (D) (E)
- častěji se řeší jen některé
- CAK řešení – řešení pohybové rovnice (B) (implicitně též (A))

Řešení NLTE problému pro hvězdný vítr

základní problém modelování hvězdných větrů

zadaná hydrodynamická struktura $(v(r), \rho(r))$

řeší se

(D) rovnice přenosu záření

(E) rovnic statistické rovnováhy

(C) někdy teplota (rovnice zářivé rovnováhy)

zadání hydrodynamické struktury

- a) použijeme spočtený hydrodynamický model $(v(r), \rho(r))$
- b) 1. předpokládáme β -zákon pro rychlost (19.36)

$$v(r) = v_0 + (v_\infty - v_0) \left(1 - \frac{R_*}{r}\right)^\beta \quad (19.36)$$

a zvolíme nějaké β

2. řešíme rovnici kontinuity (A) – získání $\rho(r)$
3. řešíme (D) a (E), případně i (C)
4. porovnáme s pozorovaným spektrem
 \Rightarrow *pozorovaná míra ztráty hmoty (observed mass-loss rate)*

programy pro řešení:

CMFGEN – John Hillier (Hillier and Miller, 1998; Hillier, 2003)

- daný $v(r)$ – β zákon s modifikacemi
- selfkonzistentní řešení NLTE problému v pohybujícím se prostředí
- přenos záření v CMF
- line blanketing

FASTWIND – Joachim Puls (Santolaya-Rey et al., 1997; Puls et al., 2005)

- převážně pro O hvězdy
- Sobolevova aproximace

PoWR – Wolf-Rainer Hamann (Gräfener et al., 2002; Hamann and Gräfener, 2003; Sander et al., 2015)

- převážně pro WR hvězdy
- Sobolevova aproximace i CMF
- line blanketing

Hydrodynamické modelování hvězdného větru

- řešení hydrodynamických rovnic
 - (A) kontinuity
 - (B) pohybové rovnice
 - (C) pro energii \dot{M} a v_∞ výsledkem
 \Rightarrow **předpovězená míra ztráty hmoty** (*predicted mass-loss rate*)
- problém – konzistentní výpočet zářivé síly
 - parametry silového činitele k , α , δ nebo \bar{Q} , α , δ rovnice
 - (D) přenosu záření
 - (E) kinetické rovnováhy
 - se neřeší \Rightarrow nelze přímo porovnat s pozorováním
- porovnávání pozorované a předpovězené míry ztráty hmoty

Zářivě hydrodynamické modelování hvězdného větru

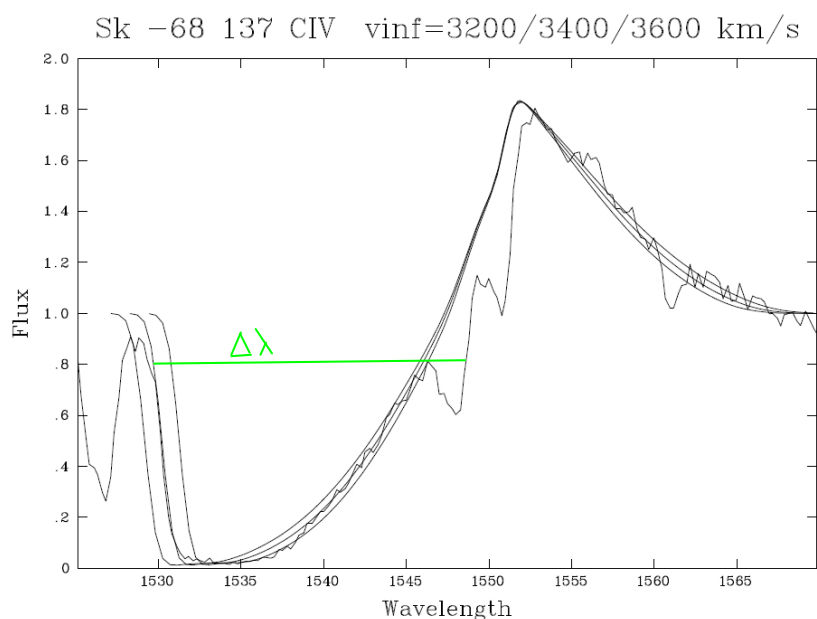
zahrnuty všechny rovnice – (A) (B) (C) (D) (E)

výsledek – \dot{M} , v_∞ i vystupující záření

WMbasic – Adalbert Pauldrach (Pauldrach, 2012, a odkazy tam uvedené))

- analýza vybraných hvězd (ζ Pup, Pauldrach et al., 2012)

22. VÍTR URYCHLOVANÝ ČARAMI



Obrázek 22.10: Určování v_∞ z P Cyg profilu spektrální čáry, $v_\infty = c\Delta\lambda/\lambda_0$.
Obrázek z Kudritzki (1998).

METUJE – Jiří Krtička (Krtička and Kubát, 2010, 2017)

- řešení rovnic kinetické rovnováhy

PoWR – hydrodynamická verze (Gräfener and Hamann, 2005; Sander et al., 2017)

FASTWIND – hydrodynamická verze (Sundqvist et al., 2019)

22.6 Použití modelů větrů urychlovaných čarami

22.6.1 Určování koncové rychlosti větru a míry ztráty hmoty

v_∞ se určuje z UV P-Cyg profilů čar (obr. 22.10)

\dot{M} se určuje porovnáním vystupujícího záření s teorií, a to:

- porovnáním profilů spektrálních čar získaných z modelů s pozorovanými
 - z profilů Balmerovských čar vodíku – zejména čáry $H\alpha$

- z profilů UV rezonančních čar (saturovaných a nesaturovaných)
- z radiových měření (záření z rozsáhlé okolohvězdné oblasti), předpoklady:
 - úplně ionizovaný plyn
 - konstantní elektronová teplota
 - sférická symetrie
 - LTE
 - konstantní rychlost expanze
 - $n_e \sim r^{-2}$

pro tok v radiové oblasti (dlouhovlnná aproximace Planckovy funkce $h\nu \ll kT$, použitá jednotka Jansky) lze psát přibližný vztah (Wright and Barlow, 1975)

$$F_\nu = 23.2 \left(\frac{Z\dot{M}}{\mu v_\infty} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{\left(\nu \frac{n_e}{n_{\text{ion}}} g_{\text{ff}}(\nu, T) \right)^{2/3}}{d^2} [\text{Jy}] \quad (22.49)$$

μ – střední atomová hmota

Z – atomové číslo

n_e – koncentrace elektronů

n_{ion} – koncentrace iontů

$g_{\text{ff}}(\nu, T)$ – Gauntův faktor pro volně-volné přechody (viz kap. 5.5)

d – vzdálenost hvězdy

známe-li tok F_ν (z radiových měření), v_∞ (z P-Cygni profilů čar) a d , určíme \dot{M}

22.6.2 Vztah mezi hybností větru a zářivostí hvězdy

(*Wind-momentum-luminosity relation*)

z CAK popisu vyplývá (viz Kudritzki et al. 1989 a také 22.37)

$$v_\infty \approx 2.25 \frac{\alpha}{1 - \alpha} v_{\text{esc}}$$

$$\dot{M} \propto k^{1/\alpha'} L_*^{1/\alpha'} [M_* (1 - \Gamma_e)]^{1-1/\alpha'}$$

kde $\alpha' = \alpha - \delta$

definujeme modifikovanou hybnost větru (Puls et al., 1996), viz také Kudritzki and Puls (2000, rovnice 18) nebo Puls et al. (2008, rovnice 15)

$$D_{\text{mom}} = \dot{M} v_{\infty} \sqrt{\frac{R_*}{R_{\odot}}} \propto \left(k \frac{L_*}{L_{\odot}} \right)^{\frac{1}{\alpha'}} \quad (22.50)$$

D_{mom} – **modifikovaná četnost hybnosti větru**
(*modified wind-momentum rate*)
nezávisí na M_*

vztah ověřen pomocí hodnot v_{∞} a \dot{M} odvozených z pozorování metodami popsanými v kapitole 22.5

typická hodnota: $\alpha = \frac{2}{3}$

závislost složitější, modifikované vztahy zahrnují i metalicitu (přehled viz Vink, 2022, Appendix)

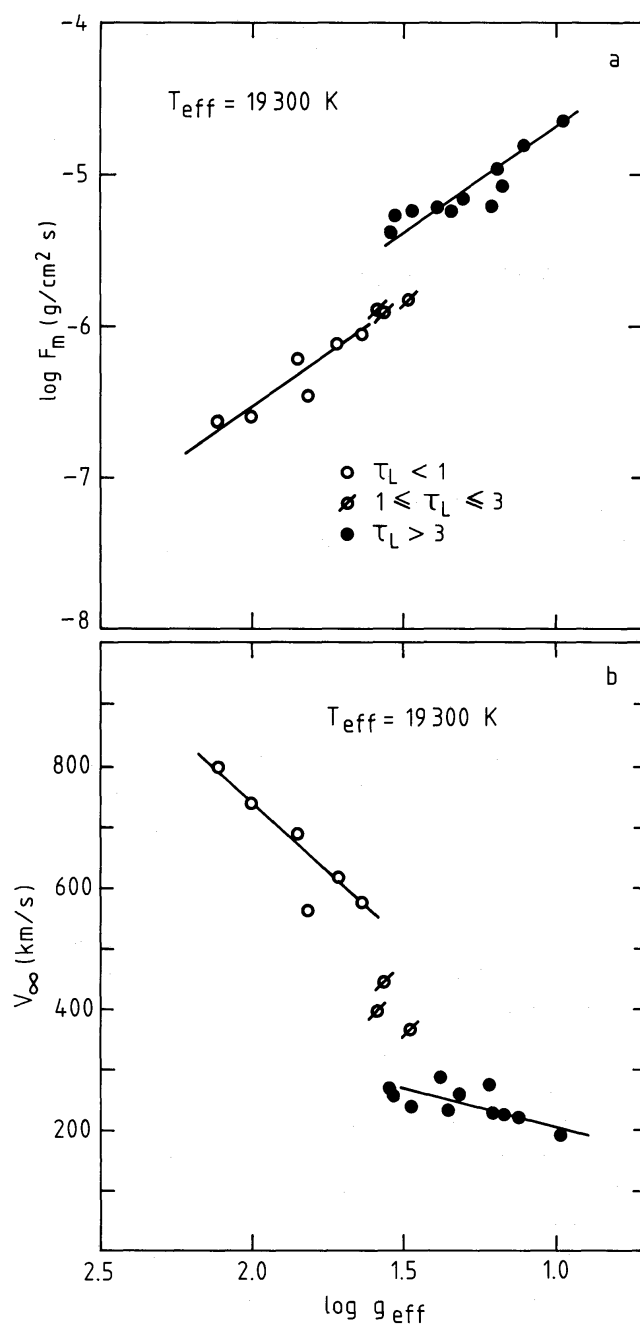
22.6.3 Oblast bistability parametrů větru

- Pauldrach and Puls (1990) při modelování větru P Cyg ($T_{\text{eff}} \approx 19\,300\text{ K}$) našli skok v \dot{M} (*bistability jump*)
- při malé změně hvězdných parametrů dochází ke značné změně vlastností větru
- důvodem je změna opacity ve vodíkovém Lymanovském kontinuu
- ilustrační příklad obr. 22.11
- skok v hodnotách v_{∞} vychází i z pozorování (Lamers et al., 1995)
- nedávné výpočty spíše podporují pozvolnější změnu než skok
- souvislost s různými typy větrů v rovníkové a polární oblasti (obr. 22.12)

22.7 Nestabilita větru urychlovaného čarami

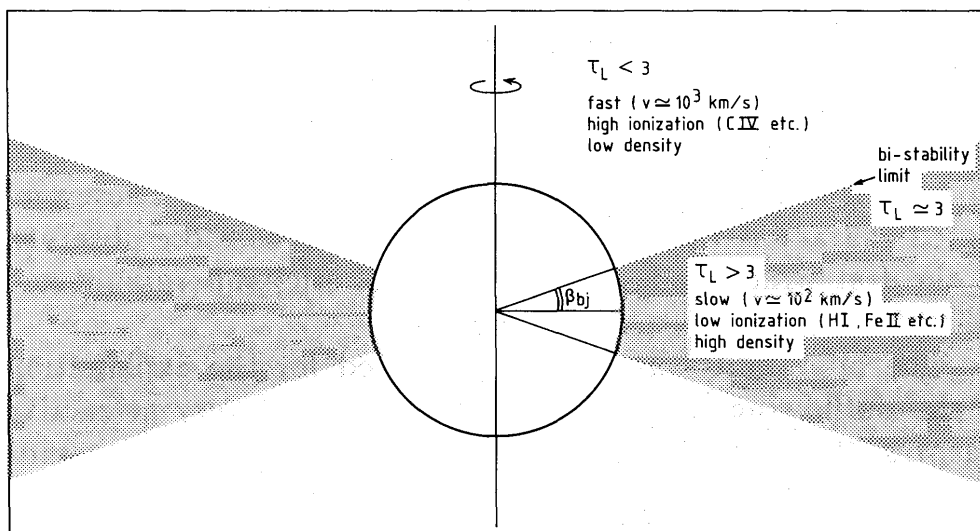
- zářivé zrychlení závislé na gradientu rychlosti $g(v')$, $v' = dv/dr$
- předpoklad – platí Sobolevova aproximace

22. VÍTR URYCHLOVANÝ ČARAMI



Obrázek 22.11: Odtok hmoty (*mass flux*) F_m (horní obrázek) a koncová rychlost větru v_∞ (dolní obrázek) v závislosti na $g_{\text{eff}} = GM_*(1 - \Gamma_e)/r^2$ pro efektivní teplotu hvězdy $T_{\text{eff}} = 19300 \text{ K}$. Obrázek z Lamers and Pauldrach (1991, obr. 1). (zkopírováno 54)

22. VÍTR URYCHLOVANÝ ČARAMI



Obrázek 22.12: Schematický náčrt rozdílného větru v polární a rovníkové oblasti hvězdy. Obrázek z Lamers and Pauldrach (1991, obr. 2). (zkopírováno 56)

- předpoklad – sinusoidální perturbace (Puls et al., 2008, rovnice 48)

$$\begin{aligned} v(z, t) &= +\delta v(z, t) \exp [i(kz - \omega t)] \\ \rho(z, t) &= \rho_0(z) + \delta \rho(z, t) \exp [i(kz - \omega t)] \\ g_R(z, t) &= g_{R0}(z) + \delta g_R(z, t) \exp [i(kz - \omega t)] \end{aligned} \quad (22.51)$$

$\rho_0, g_{R0}, v_0 = 0$ – (mean flow quantities)

k – vlnčet (wavenumber)

ω – úhlová frekvence (angular frequency)

linearizovaná rovnice kontinuity

$$-i\omega \frac{\delta \rho}{\rho_0} + ik\delta v = 0 \quad (22.52a)$$

linearizovaná pohybová rovnice

$$-i\omega = a^2 ik \frac{\delta \rho}{\rho_0} + \delta g_R \quad (22.52b)$$

odtud disperzní relace

$$\omega^2 - i\omega \frac{\delta g_R}{\delta v} - a^2 k^2 = 0 \quad (22.53)$$

zanedbání perturbací tlaku a hustoty

$$\omega \approx i \frac{\delta g_R}{\delta v} \quad (22.54)$$

vlnová délka pertubace větší než Sobolevova délka ($\lambda \gg L_{\text{Sobolev}}$) $L_{\text{Sobolev}} = v_{\text{th}} / (dv/dr)$, $k = 2\pi/\lambda$, perturbovaný tok splňuje Sobolevovu aproximaci se započtením perturbací tlaku a hustoty (s akustickými vlnami) – Abbott (1980)

fázová rychlost Abbottových vln

$$\frac{\omega}{k} = -\frac{1}{2} \frac{\delta g_R}{\delta v'} + \sqrt{\pm \left(\frac{\delta g_R}{\delta v'} \right)^2 + a^2} \quad (22.55)$$

vznik vln, stabilní situace

vlnová délka pertubace menší než Sobolevova délka ($\lambda \ll L_{\text{Sobolev}}$) perturbovaný tok nesplňuje Sobolevovu aproximaci
nestabilní situace

obecný vztah

$$\frac{\delta g_R}{\delta v} \approx \omega_b \frac{ik}{\chi_b + ik} \quad (22.56)$$

χ_b – opacita studované spektrální čáry

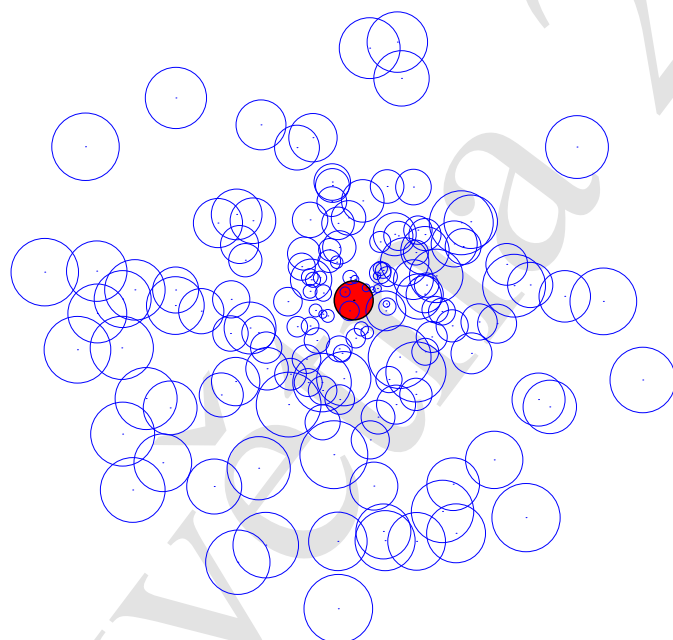
vlnová délka pertubace trochu větší než Sobolevova délka ($\lambda > L_{\text{Sobolev}}$) – zesiluje Abbottovy vlny

- nestabilní vzhledem k perturbacím druhého řádu
- umožňuje vznik struktur ve hvězdném větru

jen 1-D analýza stability existuje

22.8 Nehomogenní čarami urychlované větry

- nehomogenity v čarami urychlovaném větru (*clumping*) – pravděpodobně důsledek nestabilit z kapitoly 22.7
- existují i jiné možnosti vzniku nehomogenit
- 1-D model – 2 složky: chuchvalce s vyšší hustotou a prostor mezi nimi s nižší hustotou nebo i bez hmoty



Obrázek 22.13: Schematický nákres chuchvalců ve hvězdném větru pro stejnou hodnotu D v celém větru. Červené kolečko označuje hvězdu.

- (*volume*) *filling factor* – (**objemový**) **faktor plnění** – je to volný parametr

$$f = \frac{V_{\text{clumps}}}{V_{\text{wind}}} \quad (22.57)$$

V_{clumps} – objem chuchvalců

V_{wind} – objem celého větru

- *clumping factor*

$$D = C_c = f_{\text{cl}} = \frac{\langle \rho_{\text{clumps}} \rangle}{\langle \rho_{\text{wind}} \rangle} = \frac{1}{f} \quad (22.58)$$

ρ_{clumps} – hustota hmoty v chuchvalcích

ρ_{wind} – střední hustota hmoty ve větru (hustota hmoty ve větru bez chuchvalců)

- prostor mezi chuchvalci (*interclump medium*)

ρ_{ic} – hustota hmoty mezi chuchvalci

$$\begin{aligned} \langle \rho_{\text{ic}} \rangle &= d \langle \rho_{\text{wind}} \rangle \\ f &= \frac{1-d}{D-d} \end{aligned} \quad (22.59)$$

častý předpoklad: $d = 0$ (prázdné prostředí mezi chuchvalci)

- konstantní D ve větru a předpoklad zachování chuchvalců znamená zvětšující se chuchvalce se vzdáleností od hvězdy
- předpoklad: chuchvalce se pohybují stejnou rychlostí jako vítr bez chuchvalců

microclumping – všechny chuchvalce jsou opticky tenké (*optically thin clumping*)

opacita a emisivita v clumpech – závislost na hustotě

pro zjednodušení: $d = 0$

hustota $D \times$ větší \Rightarrow opacita $D^n \times$ větší

(nějaká hustota $n \times$ ve výrazu pro opacitu)

příklad:

free-free: $\chi^{\text{ff}} \sim n_e n_k \Rightarrow n = 2$

bound-bound: $\chi^{\text{ff}} \sim n_i \Rightarrow n = 1$

podobně pro emisivitu

střední hodnota opacity (χ_{mean}) a emisivity (η_{mean})

$$\begin{aligned}\chi_{\text{mean}} &= f\chi_{\text{cl}}, \\ \eta_{\text{mean}} &= f\eta_{\text{cl}}.\end{aligned}\tag{22.60}$$

$$\begin{aligned}\chi_{\text{mean}}^{\text{bb}} &= f\chi_{\text{cl}}^{\text{bb}} = fD\chi_{\text{sm}}^{\text{bb}} = \chi_{\text{sm}}^{\text{bb}} \\ \eta_{\text{mean}}^{\text{bb}} &= f\eta_{\text{cl}}^{\text{bb}} = fD\eta_{\text{sm}}^{\text{bb}} = \eta_{\text{sm}}^{\text{bb}} \\ \chi_{\text{mean}}^{\text{bf}} &= f\chi_{\text{cl}}^{\text{bf}} = fD\chi_{\text{sm}}^{\text{bf}} = \chi_{\text{sm}}^{\text{bf}} \\ \eta_{\text{mean}}^{\text{bf}} &= f\eta_{\text{cl}}^{\text{bf}} = fD^2\eta_{\text{sm}}^{\text{bf}} = D\eta_{\text{sm}}^{\text{bf}} \\ \chi_{\text{mean}}^{\text{ff}} &= f\chi_{\text{cl}}^{\text{ff}} = fD^2\chi_{\text{sm}}^{\text{ff}} = D\chi_{\text{sm}}^{\text{ff}} \\ \eta_{\text{mean}}^{\text{ff}} &= f\eta_{\text{cl}}^{\text{ff}} = fD^2\eta_{\text{sm}}^{\text{ff}} = D\eta_{\text{sm}}^{\text{ff}} \\ \chi_{\text{mean}}^{\text{sc}} &= f\chi_{\text{cl}}^{\text{sc}} = fD\chi_{\text{sm}}^{\text{sc}} = \chi_{\text{sm}}^{\text{sc}}.\end{aligned}\tag{22.61}$$

$\sim \rho$ – absorpce a emise v čarách, fotoionizace
clumping nemá na opacitu vliv

$\sim \rho^2$ – fotorekombinace, volně-volné přechody
clumping zvyšuje opacitu

v NLTE dochází k vzájemnému ovlivňování všech přechodů
příklad: vodíková $H\alpha$ čára – rekombinační čára

výhoda microclumpingu –

- změna opacity je popsána přidáním jednoho parametru, který může být i hloubkově závislý (například Hillier and Miller, 1999, Eq. 5)

$$f(r) = f_{\infty} + (1 - f_{\infty}) \exp\left(-\frac{v(r)}{v_{\text{cl}}}\right)\tag{22.62}$$

- lze použít v 1-D přiblížení (programy CMFGEN, POWR)

macroclumping chuchvalce mohou být opticky tlusté

- opacita se „překrývá“ → efektivní snížení opacity
dva opticky tlusté chuchvalce za sebou neabsorbují více než jeden, ale mohou ponechat prázdný prostor bez chuchvalců
- v 1-D přiblížení popis obtížný
- 3-D Monte Carlo přenos záření (Šurlan et al., 2012)

nehomogenity rychlostí (“vorosity”)

způsobují nemonotónní rychlostní pole
jejich důsledkem změny opacity vlivem Dopplerova posuvu

Pórovité větry

Owocki and Shaviv (2012), jedna z možností pro vysvětlení extrémních větrů LBV hvězd

překonání fotonové únavy (photon tiring) – kapitola 22.4.1

větry urychlované zářením v kontinuu s $\Gamma > \Gamma_e$

$$L > L_{\text{Edd}}$$

zářivost větší než Eddingtonova zářivost (20.10)

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi c G M_* \rho}{\chi_e}$$

v hustých vrstvách hvězdy způsobí konvekci
tím sníží zářivý tok

nad konvektivní vrstvou by měl vzniknout únik hmoty (*mass-loss*),
provedeme odhady: položíme zvukový bod na kraj konvektivní zóny (index conv označuje veličiny na horním kraji konvektivní zóny)

$$\dot{M}_{\text{conv}} \approx 4\pi r_{\text{conv}}^2 \rho_{\text{conv}} v_s \approx \frac{L - L_{\text{Edd}}}{v_s^2} \quad (22.63)$$

ale $\dot{M}_{\text{conv}} > \dot{M}_{\text{tir}}$, což nejde

nelze vytvořit konzistentní homogenní super-Eddingtonovský tok

hmota začne padat zpět

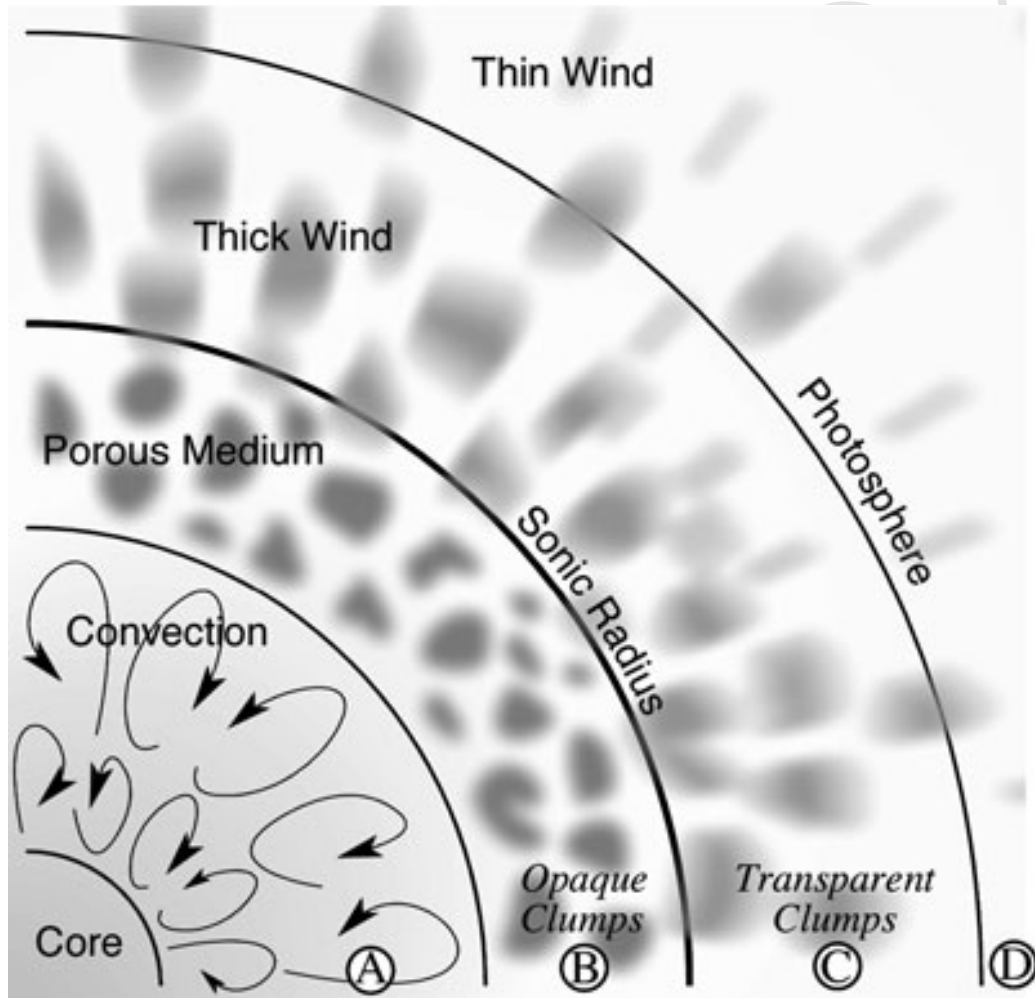
vlivem hydrodynamických nestabilit vzniknou „díry“ s menší opacitou a chuchvalce s vysokou opacitou (obr. 22.14)

efektivní snížení opacity

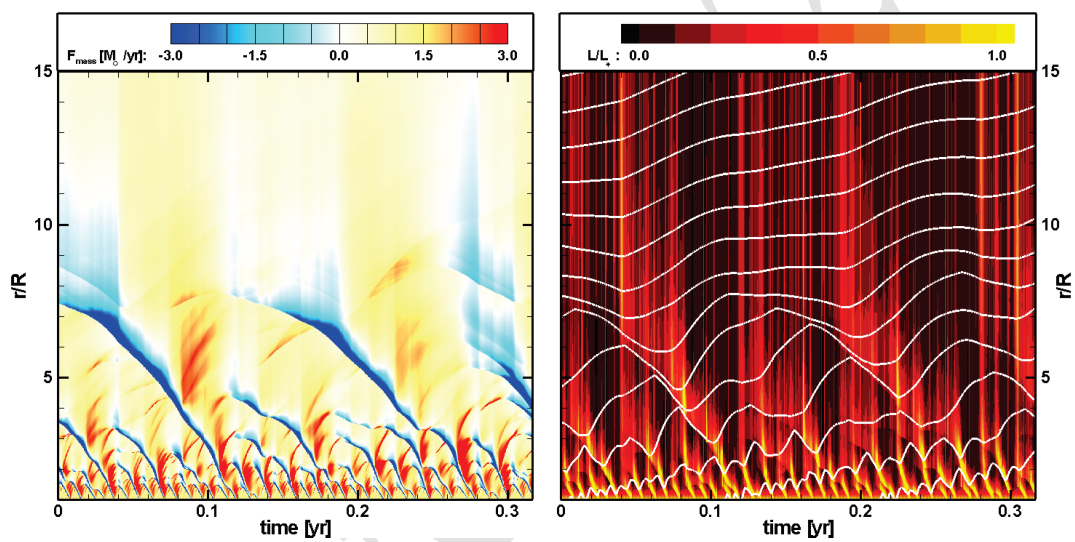
dovoluje větší toky bez zvětšení zářivé síly

modelování pomocí 1-D hydrodynamických simulací (obr. 22.15)

3-D hydrodynamické simulace vhodnější, ale pracnější



Obrázek 22.14: Schéma pórovitého větru. Obrázek z Owocki and Shaviv (2012, obr. 12.2) nebo z Shaviv (2005, Fig. 2). (zkopírováno 58)



Obrázek 22.15: Časový vývoj pórovitého větru. Vlevo vývoj odtoku hmoty, vpravo vývoj zářivosti. Obrázek z van Marle et al. (2009, obr. 2) nebo z Owocki and Shaviv (2012, obr. 12.4). (zkopírováno 60)

Kapitola 23

Vícerozměrné modely hvězdných atmosfér

23.1 Hydrodynamické modely s LTE přenosem záření

23.1.1 LTE modely chladných hvězd

- 3-D atmosféra v krabici (in a box) pro modelování sluneční konvekce
- časově závislé hydrodynamické rovnice
- LTE přenos záření

program STAGGER

- 3 časově závislé hydrodynamické rovnice (kontinuity, pohybová, energie) s viskozitou σ , rovnice (1) v Trampedach et al. (2013)
 - záření jen v rovnici pro energii (zářivé zisky/ztráty Magic et al., 2013, rovnice (4))
- LTE přenos záření (3-D) - není časově závislý
- opacity binning – snížení počtu „frekvencí“, pro které se řeší rovnice přenosu záření
- stavová rovnice – podle Mihalas et al. (1988)
- výpočet sítě 3-D modelů (Magic et al., 2013)

program CO5BOLD

- řešené rovnice
 - buď hydrodynamika nebo magnetohydrodynamika se zářivou energií (rovnice (19) v Freytag et al., 2012)
 - časově závislé rovnice
 - záření v pohybové rovnici se neuvažuje
- LTE přenos záření
nutno řešit pro každý časový krok
- *opacity binning* (poprvé použil Nordlund, 1982) – přibližné zahrnutí frekvenční závislosti („multi-gray” metoda)
- dlouhé charakteristiky – vhodné pro přenos záření „zezdola nahoru” (například u Slunce)
- krátké charakteristiky – pro obecnější problémy se zdroji záření z více směrů vhodnější
- vylepšení popisu mikroturbulence (diskuse v Ludwig and Steffen, 2016)
- (pro AGB hvězdy modeluje celou atmosféru, Freytag et al., 2019)

23.1.2 LTE modely horkých hvězd

- zjednodušující předpoklady (kap. 3)
 - řeší model v krabici (*model in a box*)
 - grey radiation hydrodynamics
 - gravitační zrychlení g konstantní
 - lokální termodynamická rovnováha
- Jiang et al. (2015, rovnice (4)) jsou časově závislé hydrodynamické rovnice (kontinuity, pohybová a pro energii) a momentové pro záření (energie a tok) záření i v pohybové rovnici
- *mixed-frame* formulace (například Mihalas and Klein, 1982; Lowrie et al., 1999, a odkazy tam uvedené)
 - zářivé veličiny, úhly a frekvence v soustavě pozorovatele,

- opacity a emisivity ve spoluputující soustavě (CMF)
tok v CMF: $\mathcal{F}_0 = \mathcal{F} - (\mathbf{v}E_R + \mathbf{v} \cdot \mathbf{P}_R)$
(jen tok v CMF urychluje hmotu)
- používají VET (variable Eddington tensor – rovnice 2.26) – analogie metody proměnných Eddingtonových faktorů (kapitola 7.5.2)
- opacita z opacitních tabulek
- počáteční podmínky – hodnoty podle výsledku vývojových výpočtů
- okrajové podmínky
 - *reflecting* – pomocí hodnot ve virtuální zóně (vně řešené oblasti)
 - * dolní okraj: hustota, opacita, horizontální rychlost stejná, vertikální rychlost opačná; zářivý tok \mathcal{F} fixed, zářivá energie E_R pomocí difúzní rovnice
 - * horní okraj: plynové veličiny a zářivý tok \mathcal{F} stejné; zářivá energie E_R podle optické tloušťky na horním okraji (stejná pro malou, difúzní pro velkou)
 - *periodic*
 - * na okrajích ve vodorovném směru
- řešení viz obrázky v Jiang et al. (2015), např. obr. 3
 - pro 1-D modely – inverze hustoty, počáteční stav
 - pro 3-D modely – konvektivní a zářivý tok energie, turbulence

23.2 Modely s NLTE přenosem záření

program MULTI3D (Björger and Leenaarts, 2017)

- první zmínka v Leenaarts and Carlsson (2009)
překrývající se čáry nejsou dovoleny
- řešení rovnic kinetické rovnováhy s rovnicí přenosu záření (kapitola 10.3)
- rovnice kinetické rovnováhy – MALI (*multilevel* ALI), časově nezávislé (kapitola 10.3.2)
- rovnice přenosu záření – krátké charakteristiky (kapitola 6.3.2)

- (nelineární) multigrid
- paralelizovaný

Bergemann et al. (2019) porovnává 1-D a 3-D výpočty

program NLTE3D (Steffen et al., 2015)

- řešení rovnic kinetické rovnováhy s rovnicí přenosu záření (kapitola 10.3)
- používá 3-D LTE modely atmosfér
- urychlená Λ -iterace (kapitola 10.3.2)
- několik dalších aproximací pro výpočet četností přechodů

NLTE modelování masivních hvězd Hennicker et al. (2018, 2020) – 3-D přenos záření jen s rozptylem v kontinuu a v čarách

23.3 Monte Carlo modely

23.3.1 Modely záření obálek supernov

- zadaná rychlost (*homologous expansion*) $v = r/t$, t je čas od exploze
- zadaná hustota
- Monte Carlo přenos záření
- spodní okraj
 - generovány γ -pakety z radioaktivního rozpadu – ARTIS (Kromer and Sim, 2009)
 - spodní okrajová podmínka pro záření – TARDIS (Kerzendorf and Sim, 2014)
- energiové pakety (r -, i -, k -pakety)
- pakety se přeměňují interakcemi (absorpce, emise, srážky) (viz Fig. 1 v Kromer and Sim, 2009)
- při interakcích ovlivňují obsazení energetických hladin, teplotu
- výsledek modelování: časový vývoj spekter

23.3.2 Modely hvězdných větrů

- zatím jen zjednodušené modely (Noebauer and Sim, 2015)
- sférická symetrie
- Monte Carlo zářivá hydrodynamika (Noebauer et al., 2012)
- jen přibližné NLTE
- 3-D modely v přípravě (Fišák et al., 2023)

23.3.3 2-D modely disků

(Carciofi and Bjorkman, 2006, 2008)

- model disku kolem Be hvězd:
- v cylindrických souřadnicích (r, ϕ, z)

pohybová rovnice

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_g}{\partial r} &= \frac{v_\phi^2}{r} + f_r \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_g}{\partial z} &= f_z \end{aligned} \quad (23.1)$$

gravitační síla

$$\begin{aligned} f_r &= -\frac{GM_* r}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \\ f_z &= -\frac{GM_* z}{(r^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \end{aligned} \quad (23.2)$$

stavová rovnice $p_g = nkT = kT\rho/(\mu m_H)$
pro tenký disk ($Z \ll R_*$, Z je tloušťka disku)

$$\begin{aligned} v_\phi &= V_{\text{crit}} \sqrt{\frac{R_*}{r}} \\ \frac{\partial \ln(a^2 \rho)}{\partial z} &= -\frac{V_{\text{crit}}^2 R_* z}{a^2 r^3} \end{aligned} \quad (23.3)$$

kde $V_{\text{crit}} = \sqrt{GM_*/R_*}$ – keplerovská rotační rychlost na povrchu hvězdy

řešením hustota disku

HDUST

- řeší přenos záření a zářivou rovnáhu
- metoda nedělitelných energiových balíků (r -pakety, k -pakety)
- řeší také kinetickou rovnáhu
- zjednodušený model hvězdy (LTE statický model – Kurucz)

Část III

Přílohy

19. Května 2024

Příloha A

Speciální matematické funkce

A.1 Exponenciální integrální funkce

V kapitole 6.2 jsme použili funkce $E_1(x)$, $E_2(x)$ a $E_3(x)$. Tato funkce se nazývá *n -tá exponenciální integrální funkce* (*n -th exponential integral*) $E_n(x)$ a je pro $n \geq 1$ definována jako

$$E_n(x) = \int_1^\infty t^{-n} e^{-tx} dt = \int_0^1 e^{-\frac{x}{\mu}} \mu^{n-1} \frac{d\mu}{\mu}. \quad (\text{A.1})$$

Mezi jednotlivými exponenciálními integrálními funkcemi platí rekurentní vztah (pro $n \geq 1$)

$$nE_{n+1}(x) = e^{-x} - xE_n(x) \quad (\text{A.2})$$

Derivace lze jednoduše vyjádřit jako

$$E'_{n+1}(x) = -E_n(x) \quad (\text{A.3})$$

a

$$E'_1(x) = \frac{e^{-x}}{x} \quad (\text{A.4})$$

Pro $n > 1$ platí užitečný vztah

$$E_n(0) = \int_0^1 \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1} \quad (\text{A.5})$$

Více o exponenciálních integrálních funkcích je možno nalézt v Appendixu I v Chandrasekhar (1950).

A.2 Gaussova funkce

$$f(x) = \exp(-x^2) \quad (\text{A.6})$$

A.2.1 Některé integrály Gaussovy funkce

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-x^2) = \sqrt{\pi} \quad (\text{A.7})$$

$$\int_0^{\infty} \exp(-x^2) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Příloha B

Doplňky k atomární fyzice

B.1 Rydbergovy konstanty a jednotky energie

V literatuře lze nalézt sousloví „Rydbergova konstanta” (*Rydberg constant*) v různých spojeních a souvislostech a navíc k jejímu číselnému vyjádření se používají různé jednotky, což může vést k nejasnostem, pokud se snažíme pomocí Rydbergovy konstanty něco spočítat a nejsme zbláhli v atomové fyzice.

Rydbergova konstanta pro atom nekonečné hmotnosti \mathcal{R}_∞ souvisí s ostatními základními fyzikálními konstantami vztahem (v soustavě CGS, viz například Sobelman, 1992, List of Symbols)

$$\mathcal{R}_\infty = \frac{m_e e^4}{4\pi c \hbar^3}, \quad (\text{B.1})$$

kde m_e je hmotnost elektronu, e je elementární náboj, c je rychlost světla ve vakuu, $\hbar = h/(2\pi)$ a h je Planckova konstanta. Hodnota Rydbergovy konstanty (2018) podle CODATA¹ je $10973731.568160 \pm 0.000021 \text{ m}^{-1}$, což je $109737.31568160 \pm 0.00000021 \text{ cm}^{-1}$ v soustavě CGS.

Zavádí se i **Rydbergova konstanta pro vodík** \mathcal{R}_H nahrazením hmotnosti elektronu m_e jeho redukovanou hmotností $\mu_H^{-1} = m_e^{-1} + m_p^{-1}$ (m_p je hmotnost protonu) m která s konstantou \mathcal{R}_∞ souvisí vztahem

$$\mathcal{R}_H = \frac{m_p}{m_e + m_p} \mathcal{R}_\infty \quad (\text{B.2})$$

Tuto konstantu pak můžeme použít ve známém vztahu pro energii E_n hladiny atomu vodíku s hlavním kvantovým číslem n ,

$$E_n = -\frac{\mathcal{R}_H}{n^2} \quad (\text{B.3})$$

¹<http://www.codata.org>

s tím, že výsledná energie bude vyjádřena v Rydberzích ($Ry = hc\mathcal{R}_\infty$, $1Ry = 2.1798723611035 \cdot 10^{-18}$ erg). Pokud chceme energii vyjádřit v jednotkách CGS (v erzích), musíme Rydbergovu konstantu vynásobit hc ,

$$E_n = -\frac{hc\mathcal{R}_H}{n^2} = -\frac{\bar{\mathcal{R}}_H}{n^2}. \quad (\text{B.4})$$

Konstanta $\bar{\mathcal{R}}_H = hc\mathcal{R}_H$ se také nazývá Rydbergovou konstantou, je to Rydbergova konstanta pro vodík vyjádřená v jednotkách energie.

Můžeme zavést **Rydbergovu konstantu pro libovolný atom** $\bar{\mathcal{R}}_Z$ vyjádřenou v jednotkách energie,

$$\bar{\mathcal{R}}_Z = hc \frac{m_Z}{m_Z + m_e} \mathcal{R}_\infty \quad (\text{B.5})$$

kde m_Z je hmotnost atomu s atomovým číslem Z . Tuto konstantu pak použijeme v pozměněném vztahu (B.4) pro energii vodíkpodobných iontů.

$$E_n = -Z^2 \frac{\bar{\mathcal{R}}_Z}{n^2}. \quad (\text{B.6})$$

B.2 Klasický oscilátor

- Hubeny and Mihalas (2014, str. 146)
- klasický oscilátor o hmotnosti m oscilující na úhlové frekvenci ω_0 v elektromagnetickém poli, které má intenzitu elektrického pole $\mathbf{E}_0(\omega)$, přičemž $\omega \neq \omega_0$
- pohybová rovnice tohoto oscilátoru (Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 6.10)

$$m(\ddot{\mathbf{x}} + \omega_0^2 \mathbf{x}) = e\mathbf{E}_0(\omega) - m\gamma\dot{\mathbf{x}}$$

- má řešení

$$\mathbf{x}(t) = -\frac{e}{m} \Re \left[\frac{\mathbf{E}_0(\omega) e^{i\omega t}}{(\omega^2 - \omega_0^2) + i\gamma\omega} \right] \quad (\text{B.7})$$

kde ($\nu_0 = \omega_0/(2\pi)$)

$$\gamma = \frac{4\pi e^2 \nu_0^2}{3mc^3} \quad (\text{B.8})$$

je **klasická konstanta útlumu**.

- celkový zářivý výkon (z Poyntingových vektorů) do všech směrů (Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 6.4)

$$P(t) = \frac{2e^2 [\ddot{x}(t)]^2}{3c^3}$$

- střední výkon (vystředováno přes čas po dosažení z (B.7))

$$\langle P(\omega) \rangle_T = \frac{e^4 \omega^4}{3m^2 c^3} \frac{E_0^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

- použijeme (2.58: $I_0 = cE_0^2/(8\pi)$), ze vztahu $\langle P(\omega) \rangle_T = \oint \sigma(\omega) I_0 d\varpi = \sigma(\omega) cE_0^2/(8\pi)$ dostaneme účinný průřez

$$\sigma(\omega) = \frac{8\pi e^4 \omega^4}{3m^2 c^4} \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}$$

- aproximace $(\omega^2 - \omega_0^2) = (\omega - \omega_0)(\omega + \omega_0) \approx 2\omega_0(\omega - \omega_0)$

$$\sigma(\omega) = \frac{\pi e^2}{mc} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2} \quad (\text{B.9})$$

- vyjádříme jako funkci ν pomocí $\omega = 2\pi\nu$,

$$\sigma(\nu) = \frac{\pi e^2}{mc} \frac{1}{\pi} \frac{\frac{\gamma}{4\pi}}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2} \quad (\text{B.10})$$

- integrujeme přes všechny frekvence, máme **celkový účinný průřez klasického oscilátoru** σ_{cl} :

$$\sigma_{\text{cl}} = \frac{\pi e^2}{m_e c} \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\frac{\gamma}{4\pi} d\nu}{(\nu - \nu_0)^2 + \left(\frac{\gamma}{4\pi}\right)^2} = \frac{\pi e^2}{m_e c} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} = \frac{\pi e^2}{m_e c}, \quad (\text{B.11})$$

kde $x = 4\pi(\nu - \nu_0)/\gamma$ a platí, že $4\pi\nu_0/\gamma \rightarrow -\infty$

B.3 Fotoionizační příčný průřez

B.3.1 Vodíkupodobné ionty

- fotoionizační příčný průřez z hladiny s hlavním kvantovým číslem n (Seaton, 1959, rovnice 3) pro iont s atomovým číslem Z

$$\alpha_{\text{bf}}(n, Z, \nu) = \frac{2^6 \alpha \pi a_0^2}{3\sqrt{3}} \frac{n}{Z^2} \left(\frac{\mathcal{R}_\infty c Z^2}{\nu n^2} \right)^3 g_{\text{bf}}(n, \nu) \quad (\text{B.12})$$

kde

$g_{\text{bf}}(n, \nu)$ – Gauntův faktor

a_0 – Bohrov poloměr

$$a_0 = \hbar^2 / (m_e e^2)$$

α – konstanta jemné struktury

$$\alpha = e^2 / (\hbar c)$$

\mathcal{R}_∞ – Rydbergova konstanta (B.1)

- po dosazení

$$\alpha_{\text{bf}}(n, \nu) = \frac{64\pi^4 m_e e^{10}}{\underbrace{3\sqrt{3}ch^6}_{2.815 \cdot 10^{29}}} Z^4 \frac{1}{n^5 \nu^3} g_{\text{bf}}(n, \nu), \quad (\text{B.13})$$

viz také (Pradhan and Nahar, 2011, kapitoly 6.1 až 6.4)

B.4 Interakce atomů s vnějším magnetickým polem

Zeemanův efekt (Sobelman 1992, Chapter 8.1; Landi Degl'Innocenti 2014, Chapter 9.6; Landi Degl'Innocenti and Landolfi 2004, Chapter 3.1)

- magnetický Hamiltonián (Landi Degl'Innocenti, 2014, Chapter 9.6), B – magnetická indukce

$$\mathcal{H}_M = \mu_0 (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \quad (\text{B.14})$$

- pokud je perturbací neperturovaného Hamiltoniánu \mathcal{H} (pro slabá magnetická pole)

- hladina se rozštěpí na $2J + 1$ podhladin
posun energie v závislosti na $M = -J, \dots, J$,

$$\Delta E_M = \mu_0 g B M \quad (\text{B.15})$$

μ_0 Bohrov magneton (5.40)

g Landého faktor

- pro LS vazbu (Landi Degl'Innocenti and Landolfi, 2004, rovnice 3.8)

$$g_{LS} = 1 + \frac{1}{2} \frac{J(J+1) + S(S+1) - L(L+1)}{J(J+1)} \quad (\text{B.16})$$

- pro jj vazbu složitější (viz Landi Degl'Innocenti and Landolfi, 2004; Sobelman, 1992), tam vztahy i pro intermediate coupling

výběrové pravidlo $\Delta M = 0, \pm 1$ (viz 5.33c)

$\Delta M = -1$ složka σ_r (red)

$\Delta M = +1$ složka σ_b (blue)
elipticky polarizované záření, kruhově polarizované ve směru magnetického pole, lineárně polarizované ve směru kolmém k magnetickému poli

$\Delta M = 0$ složka π
lineární polarizace ve směru magnetického pole

podrobněji Sobelman (1992, Chapter 8.1); Landi Degl'Innocenti and Landolfi (2004, Chapter 3.1)

Paschenův-Backův efekt (Sobelman 1992, Chapter 8.2; Landi Degl'Innocenti 2014, Chapter 9.7; Landi Degl'Innocenti and Landolfi 2004, Chapter 3.4)

- pro ΔE_B alespoň srovnatelné s ΔE_J (mezi jednotlivými hladinami)

parametr

$$\gamma = \frac{\mu_0 B}{\zeta} \quad (\text{B.17})$$

ζ charakterizuje spin-orbitální interakci, závisí na kvantových číslech hladiny (Landi Degl'Innocenti and Landolfi, 2004, rovnice 3.59)

1. $\gamma \ll 1$ – režim Zeemanova efektu
2. $\gamma \sim 1$ neúplný Paschenův-Backův režim
3. $\gamma \gg 1$ úplný Paschenův-Backův režim

pro 3. je spin-orbitální interakce perturbací magnetické interakce

změna energie rozštěpených hladin

$$\Delta E_M = \mu_0 B (M_L + 2M_S) \quad (\text{B.18})$$

M_L, M_S průměty L a S do směru magnetického pole

přechody mezi složkami splňují výběrová pravidla $\Delta M_S = 0, \Delta M_L = \pm 1, 0$

B.5 Poznámky ke struktuře jednotlivých atomů

B.5.1 He II

- čáry objeveny ve spektru ζ Pup (Pickering, 1896)
- nový prvek, označen „proto-vodík” (Lockyer, 1899)
- Bohr (1913) – čáry přiřazeny ionizovanému heliu

B.5.2 Struktura alkalických atomů

například Tennyson (2005, kapitola 6), Sobelman (1992, kapitola 3.2),

- Li, Na, K, Rb, Fr
- jeden valenční elektron
- příklad sodík Na I
konfigurace základní hladiny $1s^2 2s^2 2p^6 3s^1 \ ^2S_{\frac{1}{2}}$
- známé čáry sodíku: přechody $3s \ ^2S_{\frac{1}{2}} \leftrightarrow 3p \ ^2P_{\frac{1}{2}}^o$ (5896 Å), $3s \ ^2S_{\frac{1}{2}} \leftrightarrow 3p \ ^2P_{\frac{3}{2}}^o$ (5890 Å)

konfigurace	term	hladina	
3s	2S	$^2S_{\frac{1}{2}}$	
3p	$^2P^o$	$^2P^o_{\frac{1}{2}}$	$^2P^o_{\frac{3}{2}}$
4s	2S	$^2S_{\frac{1}{2}}$	
3d	2D	$^2D_{\frac{3}{2}}$	$^2D_{\frac{5}{2}}$
4p	$^2P^o$	$^2P^o_{\frac{1}{2}}$	$^2P^o_{\frac{3}{2}}$
5s	2S	$^2S_{\frac{1}{2}}$	
4d	2D	$^2D_{\frac{3}{2}}$	$^2D_{\frac{5}{2}}$
4f	$^2F^o$	$^2F^o_{\frac{5}{2}}$	$^2F^o_{\frac{7}{2}}$
5p	$^2P^o$	$^2P^o_{\frac{1}{2}}$	$^2P^o_{\frac{3}{2}}$

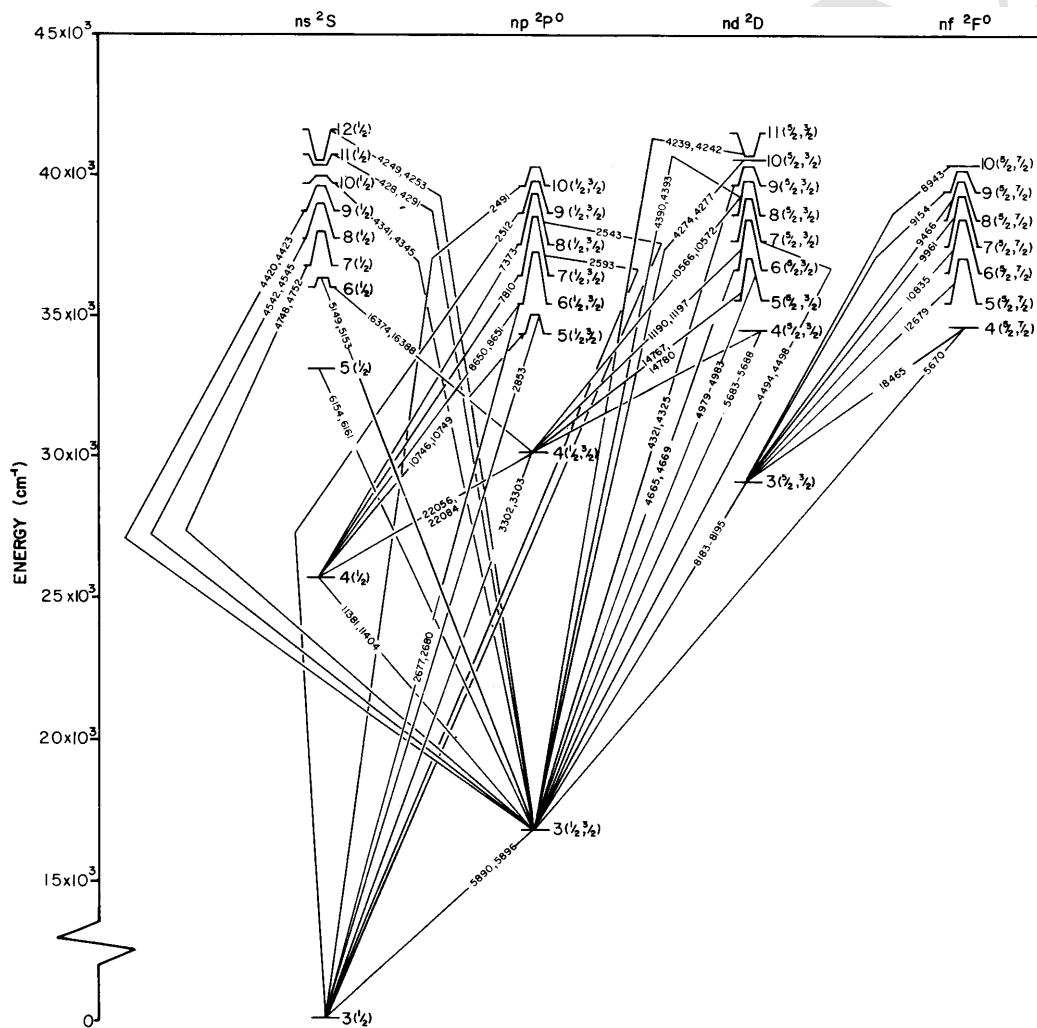
Tabulka B.1: Nejnižší hladiny neutrálního sodíku Na I vzestupně podle excitační energie.

- spektrum alkalických kovů – původ označení *spdf*, série čar analogické Balmerově sérii vodíku, název podle toho, jak vypadaly čáry: principal (z *p* stavů do základního stavu), sharp (z *s* stavů), diffuse (z *d* stavů), fundamental (z *f* stavů)
historie v Jensen (2007)
- příklad Na I, obr. B.1
- podobná spektra jiných prvků
 - K I** : Ca II (obr.B.4)
 - Na I** : Mg II
 - Li I** : C IV

B.5.3 Struktura kovů alkalických zemin

například Tennyson (2005, kapitola 7.3), Sobelman (1992, kapitola 3.3.2)

- Be, Mg, Ca, Sr, Ba, Ra
- 2 valenční elektrony ns^2 , jako He
- podobné spektrum



Obrázek B.1: Grotrianův diagram Na I. Zkopírováno z Bashkin and Stoner (1975).

- rozdíly:
 - pravděpodobnější interkombinační čáry
 - dvouexcitované stavy (obr. 5.5)
zmíněno v kapitole 5.2.7
 - více ionizačních hran

B.5.4 Struktura prvků s částečně zaplněnými p -slupkami

Sobelman (1992, kapitola 3.4)

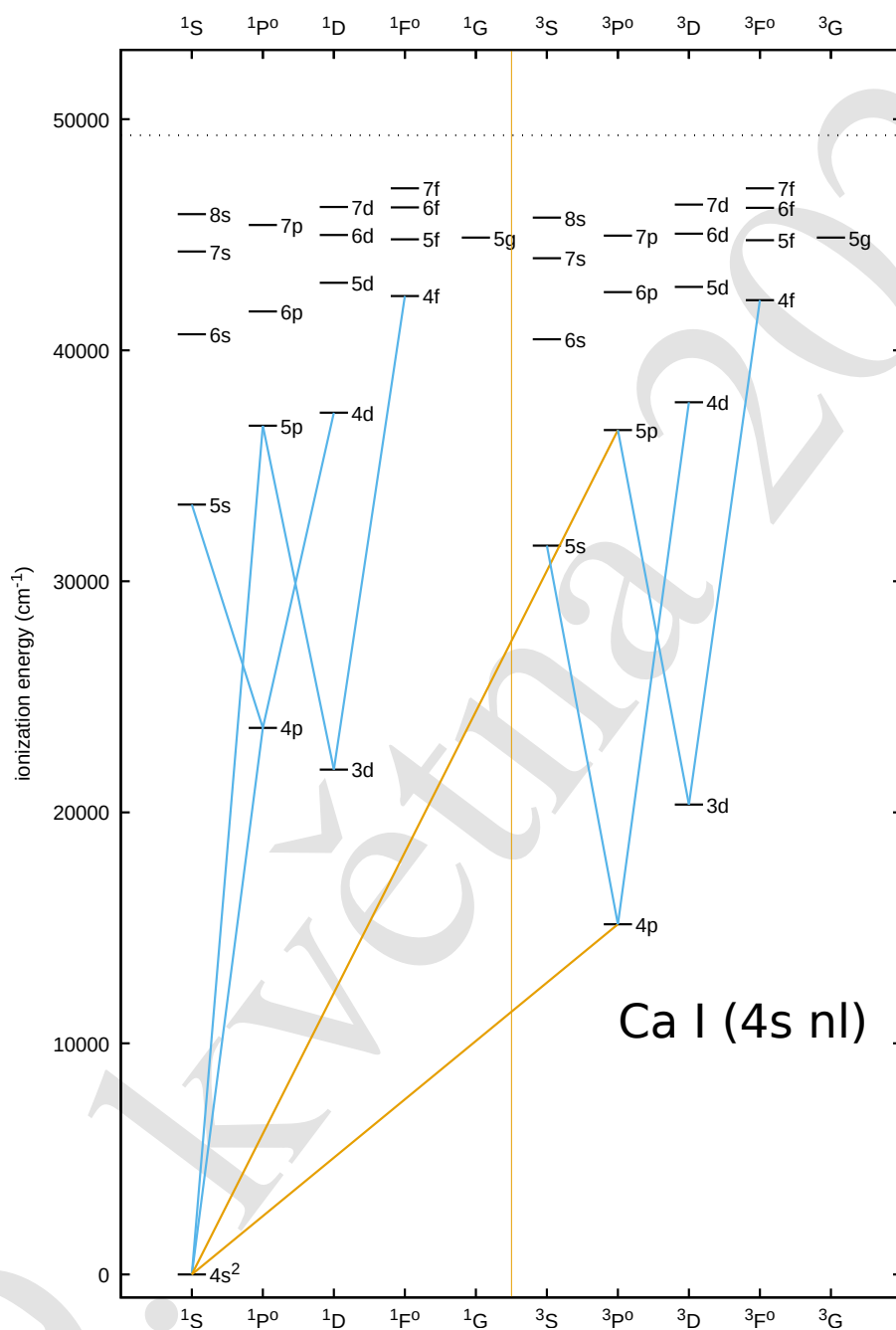
p^1 (B, Al, Ga, In, Tl)

- $1s^2 2s^2 2p^2 P_{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$
- rezonanční přechod do $1s^2 3s^2 S_{\frac{1}{2}}$
spodní hladina doublet, horní ne → čára doublet
- excitované konfigurace také $2s 2p^2$ (4P , 2D , 2P)
- příklad B I, obr. B.5

p^2 (C, Si, Ge, Sn, Pb)

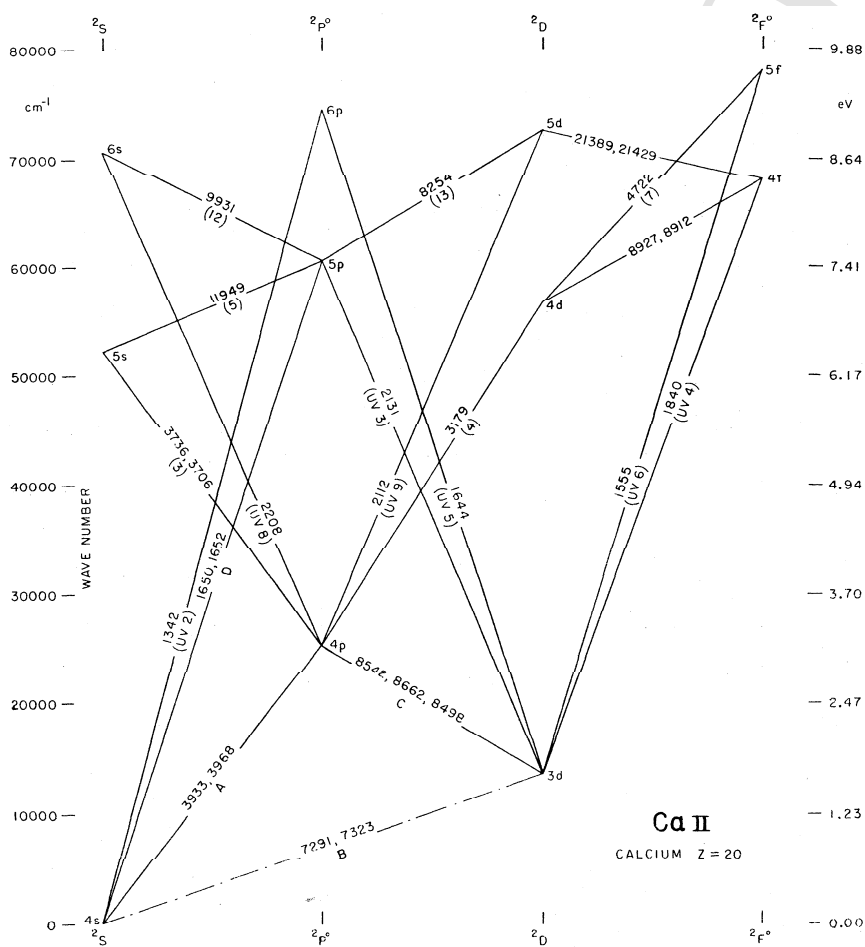
- np^2 $^3P_{0,1,2}$, 1D_2 , 1S_0
- rezonanční přechod do $2s^2 2p 3s$ (1P_1 $^3P_{0,1,2}^o$)
- excitované konfigurace také $2s 2p^3$ ($^3S^o$, $^3D^o$, $^5S^o$)
- příklad Si I, obr. B.6

příklad pro dva p elektrony (p^2): C I obrázek B.7 a tabulky B.2 a B.3,
termy: 1S (singlet-S), 3P (triplet-P), 1D (singlet-D)
hladiny: 1S_0 , 3P_0 , 3P_1 , 3P_2 , 1D_2



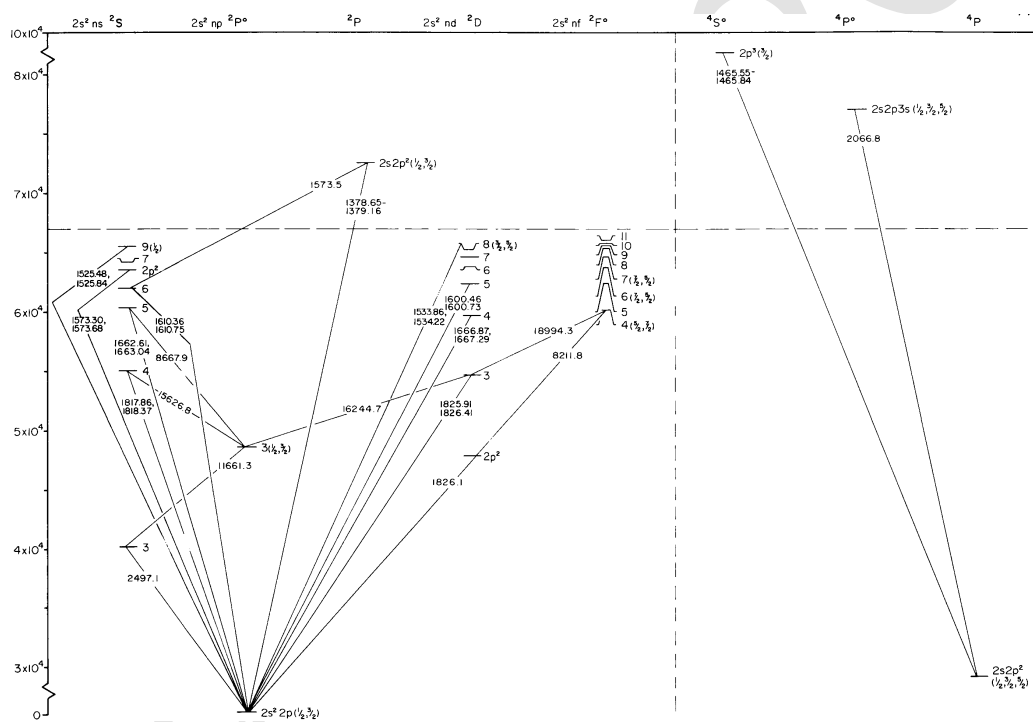
Obrázek B.2: Schematický Grotrianův diagram termů Ca I konfigurace $4s nl$ s nižší energií. Přechody do hladin s $n = 4$ jsou vyznačeny modře, oranžově jsou interkombinační přechody mezi singlety a triplety. Ionizační hladina je vyznačena tečkovaně.

B. DOPLŇKY K ATOMÁRNÍ FYZICE

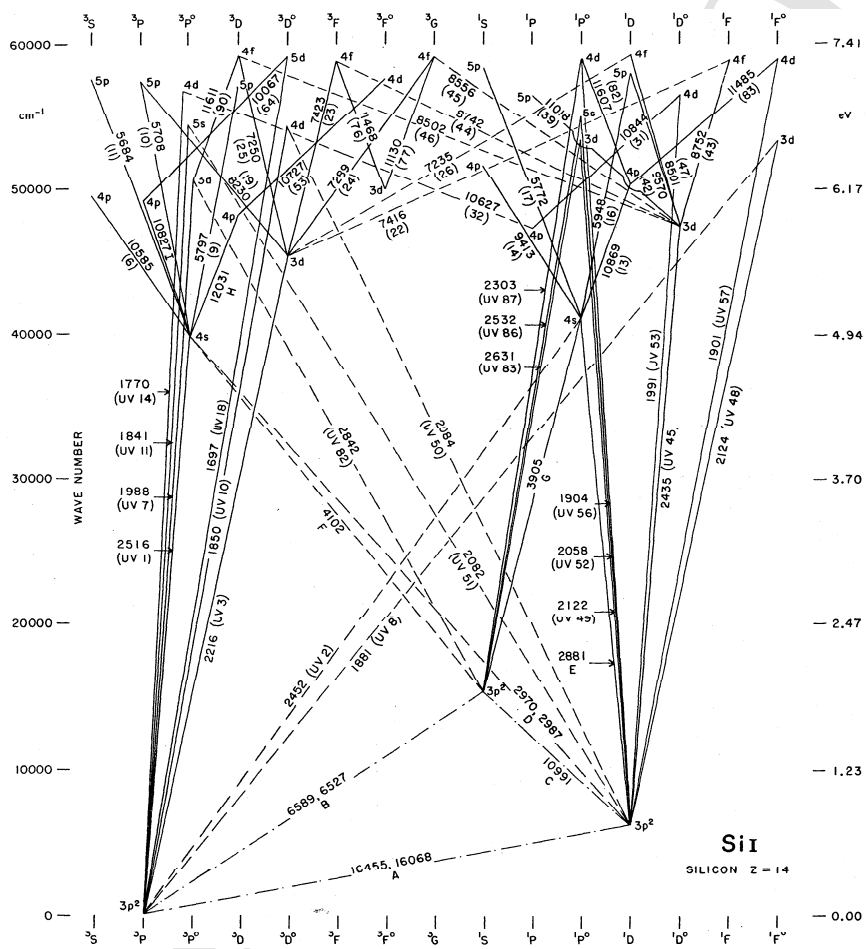


Obrázek B.4: Grotrianův diagram Ca II. Zkopírováno z Moore and Merrill (1968, str. 12).

B. DOPLŇKY K ATOMÁRNÍ FYZICE

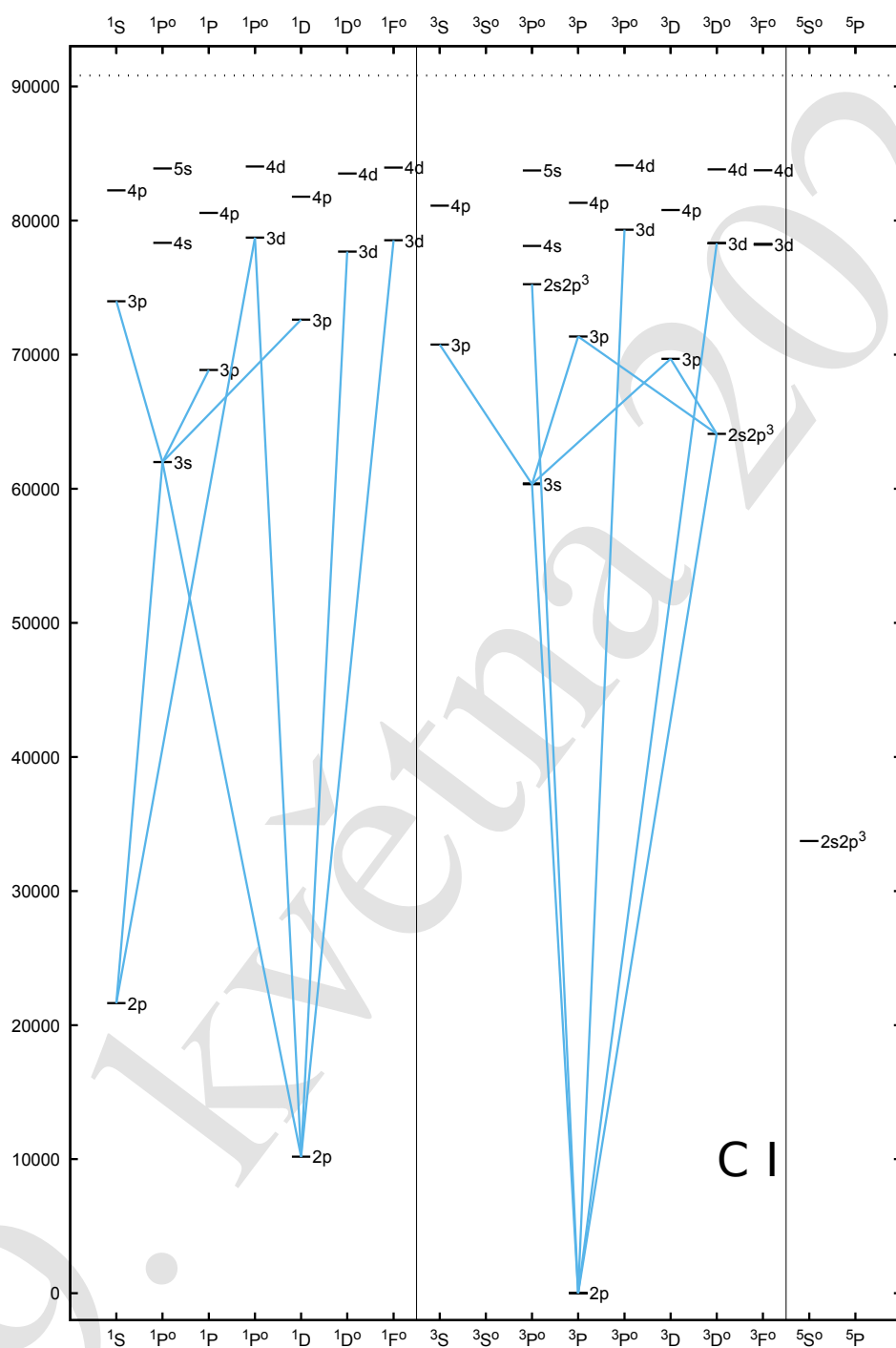


Obrázek B.5: Grotrianův diagram B I. Zkopírováno z Bashkin and Stoner (1975).



Obrázek B.6: Grotrianův diagram Si I. Zkopírováno z Moore and Merrill (1968, str. 26).

B. DOPLŇKY K ATOMÁRNÍ FYZICE



Obrázek B.7: Schematický Grotrianův diagram termů CI do $n = 4$ včetně. Zobrazeny jsou dovolené přechody mezi hladinami s $n = 2$ a $n = 3$. Dovolené přechody z hladin s $n \geq 3$ zobrazeny nejsou.

B. DOPLŇKY K ATOMÁRNÍ FYZICE

Tabulka B.2: Nejnižší hladiny neutrálního uhlíku C I.

konfigurace	singlety		triplety			kvintety		
	term	hladina	term	hladiny			term	hladiny
$2s^2 2p^2$			3P	3P_0	3P_1	3P_2		
$2s^2 2p^2$	1D	1D_1						
$2s^2 2p^2$	1S	1S_0						
$2s 2p^3$							$^5S^o$	$^5S_2^o$
$2s 2p^3$			$^3D^o$	$^3D_1^o$	$^3D_2^o$	$^3D_3^o$		
$2s^2 2p3s$			$^3P^o$	$^3P_0^o$	$^3P_1^o$	$^3P_2^o$		
$2s^2 2p3s$	$^1P^o$	$^1P_1^o$						
$2s^2 2p3p$	1P	1P_1						
$2s^2 2p3p$			3D	3D_1	3D_2	3D_3		
$2s^2 2p3p$			3S	3S_1				
$2s^2 2p3p$			3P	3P_0	3P_1	3P_2		
$2s^2 2p3p$	1D	1D_2						
$2s^2 2p3p$	1S	1S_0						
$2s 2p^3$			$^3P^o$	$^3P_0^o$	$^3P_1^o$	$^3P_2^o$		

p^3 (N, P, As, Sb, Bi)

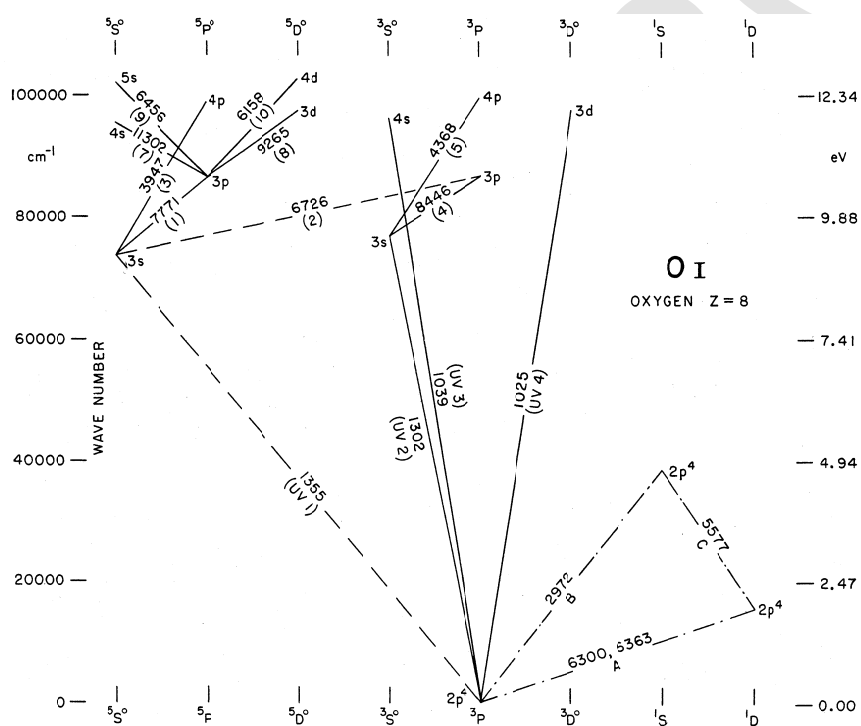
- $2p^3$ $^4S_{3/2}^o$, $^2P_{1/2, 3/2}^o$, $^2D_{5/2, 3/2}^o$
- rezonanční přechod do $2p^2 3s$ $^4P_{1/2, 3/2, 5/2}$, $^2P_{1/2, 3/2}$, $^2D_{3/2, 5/2}$
- existuje i intermediate coupling f stavů (jl ?)
- obrázky moc složité

p^4 (O, S, Se, Te, Po)

- np^4 $^3P_{2,1,0}$, 1D_2 , 1S_0
- rezonanční přechod do $2p^4 3s$ 3S_1 , $^5S_2^o$,
- existuje i $2s 2p^5$ $^3P^o$
- více systémů s různými ionizačními energiemi
- příklad O I, obr. B.8

Tabulka B.3: Možné kombinace kvantových čísel pro dva p elektrony (p^2). Podle Tatum (2020, kapitola 7.14).

	L	S	J	M	Term	Hladina
1	0	0	0	0	1S	1S_0
2	1	1	0	0	3P	3P_0
3	1	1	1	-1		3P_1
4	1	1	1	0		
5	1	1	1	1		
6	1	1	2	-2		3P_2
7	1	1	2	-1		
8	1	1	2	0		
9	1	1	2	1		
10	1	1	2	2		
11	2	0	2	-2	1D	1D_2
12	2	0	2	-1		
13	2	0	2	0		
14	2	0	2	1		
15	2	0	2	2		



Obrázek B.8: Grotrianův diagram O I. Zkopírováno z Moore and Merrill (1968, str. 32).

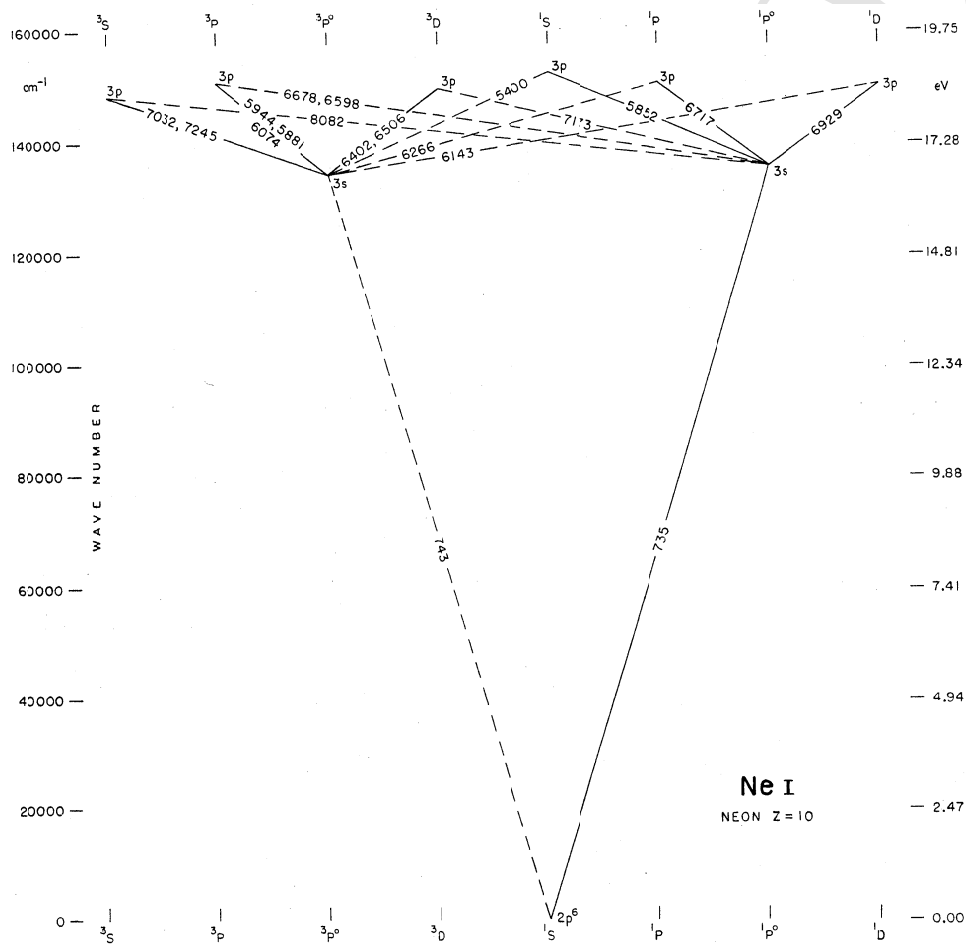
p^5 (F, Cl, Br, I, At)

- $np^5 \ ^2P_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}^o$,
- rezonanční přechod (u F I) do $2p^4 3s \ ^2P_{\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$, existuje i $2p^4 3s \ ^4P_{\frac{5}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}}$
- více systémů s různými ionizačními energiemi
- příklad: diagram Ar II (Cl-like), obr. B.9

B.5.5 Struktura vzácných plynů

Sobelman (1992, kapitola 3.4.6)

- Ne, Ar, Kr, Xe, Rn
- zaplněná p -slupka, konfigurace np^6 , základní stav $np^6 \ ^1S_0$
- silná vazba, $Z_{\text{eff}} = 5$ (viz rovnice 5.38) pro p elektrony
⇒ nejvyšší ionizační energie
- přechody ze základní hladiny v UV
- přechody mezi vyššími hladinami viditelné a infračervené
- excitované stavy $n's, n'p, n'd$
vazbová energie těchto stavů mnohem menší než vazbová energie elektronů np^5 (silná spin-orbitální interakce)
- „jádro“ (bez valenčního elektronu) charakterizováno kvantovými čísly L, S a j
- hladiny s $K = j + l$
- spin-orbitální interakce posledního elektronu: $J = K \pm \frac{1}{2}$
- notace $^{2S+1}L_j n l [K]_J$
- příklad, konfigurace $np^5 n's$
- hladiny $np^5 \left(^2P_{\frac{3}{2}}^o \right) n's \left[\frac{3}{2} \right]_{2,1}; np^5 \left(^2P_{\frac{1}{2}}^o \right) n's \left[\frac{1}{2} \right]_{1,0}$
- jl coupling
- příklad Ne I, obr. B.10
- ostatní typy vazeb zmíněny v kapitole 5.2.12



Obrázek B.10: Grotrianův diagram Ne I. Zkopírováno z Moore and Merrill (1968, str. 38).

B.5.6 Struktura prvků s nezaplňenými d a f slupkami

Sobelman (1992, kapitola 3.5), odkaz z kapitoly 5.2.8

d slupky

- skupina železa (Sc, Ti, V, Cr, Mn, Fe, Co, Ni)
- skupina paladia (Y, Zr, Nb, Mo, Tc, Ru, Rh, Pd)
- skupina platiny (Lu, Hf, Ta, W, Re, Os, Ir, Pt)
- „soutěž“ mezi hladinami s a d (například $4s$ a $3d$)
- d elektrony – velké množství termů a hladin
příklad: konfigurace $3d^3 4s$: 16 termů, 38 hladin
⇒ vysoké množství čar
absence velmi silných čar
- rezonanční čáry → spíše více čar
příklad Fe I, konfigurace základního stavu $3d^6 4s^2$
rezonanční přechod $3d^6 4s^2 \ ^5D_{4,3,2,1,0} \rightarrow 3d^6 4s [^6D] 4p^5 D_{4,3,2,1,0}^o$
termy s $J = 4$ mají nejnižší energii
- příklad Fe I, obr. B.11

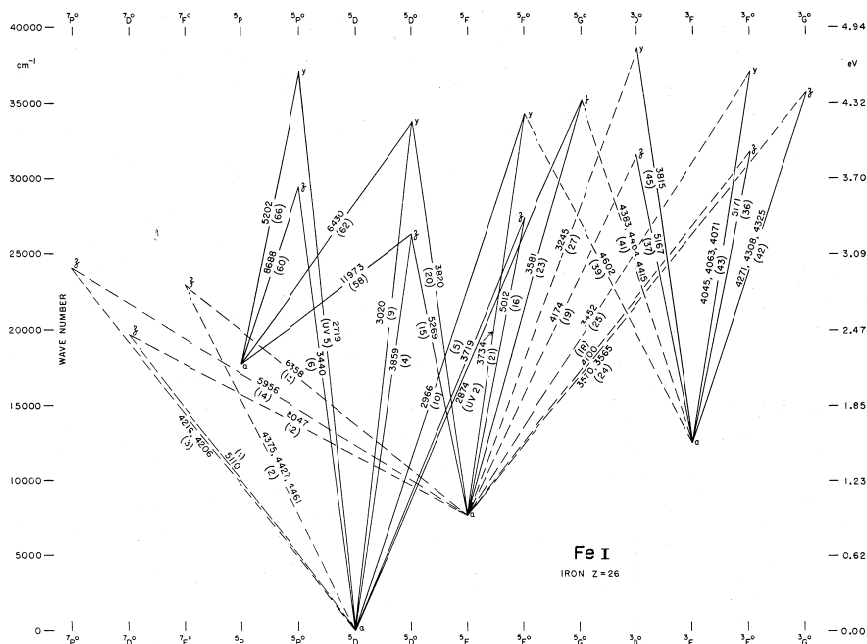
f slupky

- lanthanoidy (Ce, Pr, Nd, Pm, Sm, Eu, Gd, Th, Dy, Ho, Er, Tm, Yb)
- aktinoidy (Ac, Th, Pa, U, Np, Pu, Am, Cm, Bk, Cf)
- f -konfigurace – extrémně vysoké množství termů a hladin

B.6 Poznámky ke struktuře molekul

polyatomické molekuly

diatomické molekuly (ty v dalším textu)



Obrázek B.11: Grotrianův diagram Fe I. Zkopírováno z Moore and Merrill (1968, str. 62).

odlišnosti od atomů

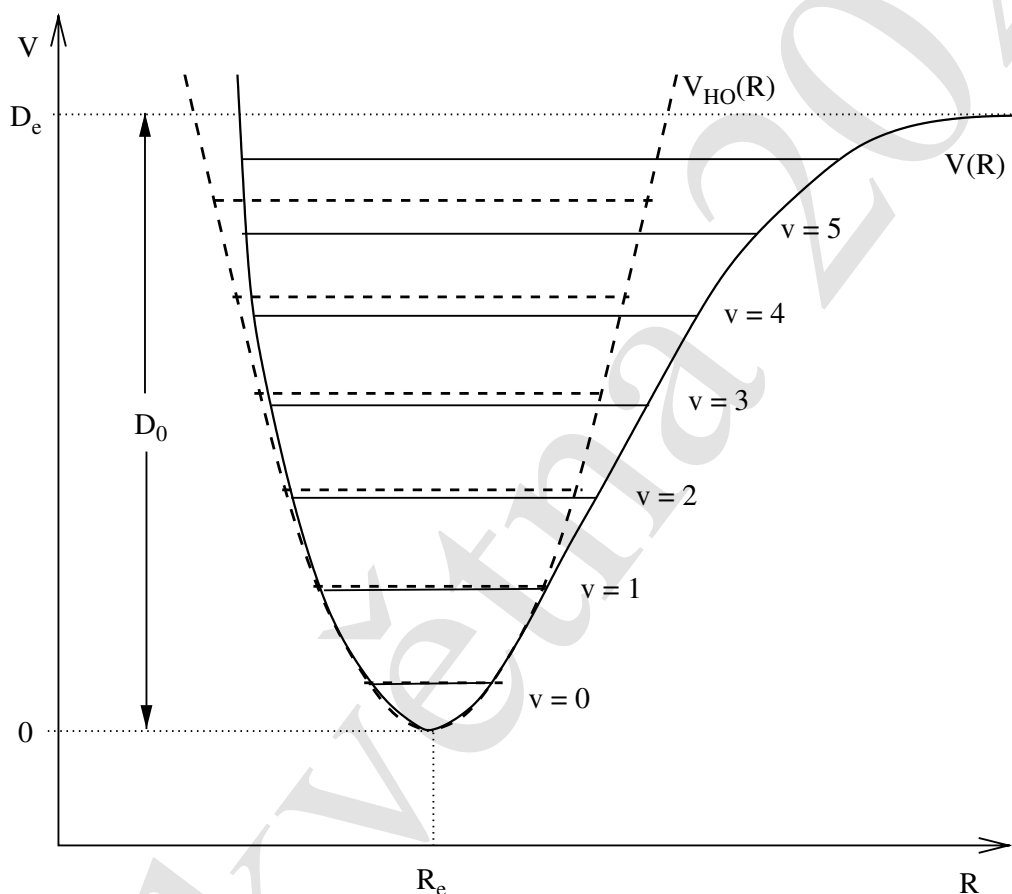
- neexistuje střed, kolem kterého se elektrony v molekule pohybují
- jednotlivé atomy v molekule se pohybují → vibrační a rotační pohyby atomů v molekule

B.6.1 Energetické stavy molekul

Bornova-Oppenheimerova aproximace (Born and Oppenheimer, 1927)

- oddělení pohybů jádra a elektronů (protože elektrony jsou lehké a pohybují se výrazně rychleji)
- vlnovou funkci molekuly lze zapsat jako součin vlnové funkce jádra molekuly a vlnové funkce elektronů
- můžeme oddělit i rotační a vibrační pohyby

rotační hladiny molekula se může otáčet,



Obrázek B.12: Vibrační potenciál V dvouatomové molekuly. Srovnání harmonického (čárkovaná čára) a anharmonického potenciálu (plná čára) a souvisejících energetických hladin. D_0 je disociační energie. Obrázek z Tennyson (2005, obrázek 9.4). (zkopírováno 62)

- moment setrvačnosti molekuly: $I = \mu R_0^2$ (model pevného rotátoru) (R_0 je rovnovážná vzdálenost mezi jádry, $\mu = M_A M_B / (M_A + M_B)$ je redukovaná hmota molekuly)
- energetické hladiny (vlastní hodnoty energie, Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 7.163; Rybicki and Lightman 1979, rovnice 11.22; Tennyson 2005, rovnice 9.15; Herzberg 1950, rovnice III.7)

$$E_{\text{rot}} = J(J+1) \frac{\hbar^2}{2I} = J(J+1) \frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2} = J(J+1)B \quad (\text{B.19})$$

pro rychlou rotaci (velké j) nutno započítat vliv odstředivé síly, hodnoty E_{rot} se trochu změní (McQuarrie, 2008, kapitola 6.5)

J nezáporné číslo (rotační kvantové číslo), $J = 0, 1, 2, \dots$
($J = 0 \Rightarrow E_{\text{rot}} = 0$)

B rotační konstanta molekuly (Hubeny and Mihalas 2014, rovnice 7.163; Tennyson 2005, rovnice 9.16)

$$B = \frac{\hbar^2}{2\mu R_0^2} = \frac{\hbar^2}{2I_0} \quad (\text{B.20})$$

m kvantové číslo průmětu impulsmomentu do význačné osy (Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 7.162), Rau (2002) a ostatní knihy ho značí M
nabývá hodnot od $-J$ do J ($2J + 1$ hodnot)

vibrační hladiny atomy v molekule mohou vibrovat

- vibrační potenciál $V(R)$ ve Schrödingerově rovnici aproximace parabolou (ok pro nízké stavy)

$$V(R) = k (R - R_e)^2$$

R_e – vzdálenost molekul

- vlastní hodnoty energie vibračních stavů (Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 7.169)

$$E_{\text{vib}} = \left(v + \frac{1}{2} \right) \hbar \omega_0, \quad v = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{B.21})$$

$\omega_0 = \sqrt{k/\mu}$ – přirozená vibrační frekvence, μ – redukovaná hmota molekuly, v – vibrační kvantové číslo,
vztah platí dobře pro nízké energetické stavy

- nejnižší hodnota vibrační energie je $\frac{1}{2}\hbar\omega > 0$, důsledek relace neurčitosti
- realistický vibrační potenciál zahrnuje možnost disociace molekuly (obrázek B.12)
ve vztahu pro E_{vib} nutno použít vyšší mocniny $(v + \frac{1}{2})$ (vyšší členy rozvoje)

elektronické hladiny energetické hladiny podobné atomům, ale rozdíly

- molekuly nejsou sféricky symetrické, aproximace centrálního pole nejde použít
- orbitální impulsmoment jednotlivých elektronů se nezachovává
- celkový elektronický impulsmoment L rotuje kolem mezijaderné osy (precese)
- zachovává se pouze složka orbitálního impulsmomentu ve směru osy molekuly
- $M_L \in \langle L, L - 1, \dots, 0, \dots, -L \rangle$
- $\hbar M_L$ – průmět do význačné osy (mezijaderné osy)
- používáme kvantové číslo $\Lambda = |M_L|$ – je degenerované ($g=2$)
- $\Lambda = 0, 1, 2, 3, 4, \dots$, značení $\Sigma, \Pi, \Delta, \Phi, \Gamma \dots$
- celkový spin S , průmět do mezijaderné osy $M_S \equiv \Sigma$, také, neplést s označením pro $\Lambda = 0$
- značení: $^{2S+1}\Lambda$
- symetrie (analogie parity) – Tennyson (2005, kapitola 9.2.2), McQuarrie (2008, kapitola 10.2)
pro homonukleární molekuly (například H_2) se označuje symetrie vlnové funkce při záměně atomů; pokud vlnová funkce nemění znaménko, je sudá a označuje se g (gerade), pokud znaménko mění, je lichá a označuje se u (ungerade)
značení $^{2S+1}\Lambda_g$ nebo $^{2S+1}\Lambda_u$
- (McQuarrie, 2008, kapitola 10.5): pro Σ stavy: zrcadlení vlnové funkce pro zrcadlo procházející jádrem, nemění znaménko: +, mění znaménko: –
značení: $^{2S+1}\Lambda_{g/u}^{+/-}$, například $^2\Sigma_g^+$, $^3\Sigma_g^-$, $^1\Sigma_g^+$
- značení elektronických hladin – analogie s atomy (před označení termu dát kvantové číslo n valenčního elektronu) by nebyla jednoznačná, používá se ad hoc systém:

- X – označuje základní elektronický stav
- A, B, C, ... označuje stavy stejné multiplicity jako základní stav
- a, b, c, ... označuje stavy jiné multiplicity než základní stav

řazení podle energie hladin, ale jsou výjimky příklad H_2 : základní hladina: $X^1\Sigma_g^+$, vyšší hladina: $B^1\Sigma_u^+$ ještě vyšší hladina: $C^1\Pi_u$; ale hladina $b^3\Sigma_u^+$ má nižší energii než hladina $a^3\Sigma_g^+$ (Tennyson, 2005, kapitola 9.2.3)

- složka celkového impulsmomentu ve směru mezijaderné osy: $\Omega = |\Lambda + \Sigma|$, skládá se algebraicky (Hubeny and Mihalas, 2014, str. 218); není jednoznačný systém jak skládání probíhá, liší se pro různé molekuly a někdy i pro různé hladiny jedné molekuly (Tennyson, 2005, kapitola 10.4)

celková vnitřní energie molekul

$$E_{\text{int}} = E_e + E_{\text{vib}} + E_{\text{rot}} \quad (\text{B.22})$$

B.6.2 Přechody v molekulách

řádové odhady poměru energií (viz Rybicki and Lightman, 1979, kap. 11.1)

$$E_{\text{rot}} : E_{\text{vib}} : E_{\text{el}} \sim \frac{m_e}{M} : \sqrt{\frac{m_e}{M}} : 1$$

M je hmotnost jádra molekuly

- elektronické přechody $\sim eV \rightarrow$ optický, UV obor
- vibrační přechody \rightarrow near-IR, mid-IR
- rotační přechody \rightarrow far-IR, mm

elektrické dipólové přechody analogické atomárním dipólovým přechodům

čistě rotační přechody nutný permanentní dipólový moment molekuly ($d \neq 0$)

- výběrová pravidla:
 - $\Delta J = +1$ (absorpce) nebo $\Delta J = -1$ (emise)
 - $\Delta m = 0$ (McQuarrie 2008, kapitola 6.7; Hubeny and Mihalas 2014, str.221)
použita aproximace pevného rotátoru

- $d \neq 0 \Rightarrow$ homoatomické dvouatomové molekuly nemají čistě rotační spektrum v dipólovém přiblížení (jejich $d = 0$)
- frekvence přechodů

$$\omega_{J+1,J} = \frac{E_{J+1} - E_J}{\hbar} = 2(J+1) \frac{B}{\hbar} = (J+1) \frac{\hbar}{\mu R_0^2} \quad (\text{B.23})$$

- příklad čistě rotačního spektra – obr. 5.11
- závislost na $\mu \Rightarrow$ izotopy mají posunuté rotační spektrum
- rotační spektrum H_2 – elektrický kvadrupólový přechod (viz Tennyson, 2005, kapitola 10.1.3)
 - výběrové pravidlo $\Delta J = \pm 2$
 - přechody pozorovány v mezihvězdném prostředí

vibračně-rotační přechody (viz McQuarrie, 2008, kapitoly 6.3 a 6.4)

energie pro excitaci vibračních modů \gg energie pro excitaci rotačních modů, proto existence čistě vibračního spektra nepravděpodobná

- další výběrové pravidlo
 $\Delta v = \pm 1$, pro rozdíl ± 2 atd. “vyšší harmonické” přechody

kombinovaná vibračně-rotační hladina v aproximaci pevného rotátoru a harmonického oscilátoru

$$E_{v,J} = \left(v + \frac{1}{2}\right) \hbar\omega_0 + J(J+1)B \quad (\text{B.24})$$

- jemná struktura způsobena rotačními přechody při absorpci ($\Delta v = +1$):
 - $\Delta J = 0, \pm 1$, je možná rotační emise i absorpce, protože $E_{\text{vib}} \gg E_{\text{rot}}$
 - $\Delta J = +1$: R branch,
 - $\Delta J = -1$: P branch,
 - $\Delta J = 0$: Q branch (pokud je dovolen, pro $\Lambda \neq 0$)
- (Rybicki and Lightman 1979 má P a R obráceně)

započtení rotačně vibrační interakce způsobí posun hodnot energetických hladin daných rovnicí (B.24)

obrázek vibračně rotačního spektra (obr. 5.13)

elektronicko-vibračně-rotační přechody nutno započítat změny elektronických, rotačních i vibračních stavů

- každý elektronický přechod je vlastně soustavou pásů (vibrační přechody) s jemnou strukturou (rotační přechody)
- výběrová pravidla
 - elektronické hladiny
 - * $\Delta\Lambda = 0, \pm 1$
 - * $\Delta S = 0$ (zachování spinu)
 - vibrační hladiny
 - * Δv jakékoli kladné nebo záporné celé číslo
 - rotační hladiny
 - * $\Delta J = -1, 0, 1$, ale $J = 0 \rightarrow J = 0$ zakázaný
 - * $\Delta J = 0$ je zakázaný pro Σ elektronické stavy
 - dělení jemné struktury:
 - * $\Delta J = +1$: R branch,
 - * $\Delta J = -1$: P branch,
 - * $\Delta J = 0$: Q branch
- příklad značení pro H_2 :
 - $X^1\Sigma_g^+$ (základní stav) \rightarrow $B^1\Sigma_u^+$ (první excitovaný stav) – Lyman band ($\sim 1010\text{\AA}$)
 - $\rightarrow C^1\Pi_u$; (druhý excitovaný stav) – Werner band ($\sim 1100\text{\AA}$)
 - přechody jsou označovány jako pásy, mají hustou strukturu
- rotační konstanta B se pro vyšší hladiny mění, protože se mění vzdálenost mezi jádry (většinou se zvětšuje)

obrázek elektronicko vibračně rotačního spektra (obr. 5.14)

B.7 Rozptyl ve spektrálních čarách

semiklasický popis (Weisskopf, Woolley):

- předpoklady:
 - hladina se chápe jako spojitě rozdělení podhladin okolo její energie (důsledek rozšíření)
 - 2 procesy rozšiřování hladin

- přirozené rozšíření (natural / lifetime broadening), vyplývá z relace neurčitosti – vždy
- srážkové (tlakové) rozšíření – závisí na hustotě prostředí pro hustší prostředí silnější, zanedbatelné v řídkém prostředí

- částice je vždy v určité podhladině dané hladiny

přechod mezi stavy $|i\rangle \rightarrow |e\rangle \rightarrow |f\rangle$, $E_i < E_e$, $E_f < E_e$

(i – initial, f – final, e – excited)

probíhá takto:

1. okamžitý přechod $i \rightarrow e$
2. okamžitý přechod mezi podhladinami e (způsoben srážkami)
3. okamžitý přechod $e \rightarrow f$

($i = f$ – rezonanční rozptyl, $i \neq f$ – rezonanční Ramanův rozptyl)

nutné podmínky pro semiklasický popis

- slabá pole záření (spontánní emise převažuje nad stimulovanou)
- izolovanost čar a hladin (rozšířené hladiny se nepřekrývají)

přirozené rozšíření hladiny (důsledek relace neurčitosti $\Delta E \Delta t \geq \hbar$)

profil hladiny označíme (srovnej s profilem přirozeného rozšíření čáry 5.42)

$$L(\chi, \gamma_n) \equiv \frac{\gamma_n}{\pi (\chi^2 + \gamma_n^2)} \quad (\text{B.25})$$

$L(\chi, \gamma)$ – pravděpodobnost, že atom v dané hladině je ve stavu χ

$\chi = (E - E_n)/\hbar$ – rozdíl energie podhladiny od energie n -té hladiny

$\gamma_n = \Gamma_n/(4\pi)$ – pološířka odpovídající době života hladiny n

v dalším

ξ, ξ' – frekvence v souřadné soustavě atomu,

profil čáry ϕ_{ie} mezi hladinami i a e

atom excitován z podhladiny χ_i do podhladiny $\chi'_e = \xi' - \xi_{ie} + \chi_i$

ξ' – energie absorbovaného fotonu

$\xi_{ie} = (E_e - E_i)/\hbar$ – energie mezi hladinami

$$\begin{aligned}\phi_{ie}(\xi') &= \int_{-\infty}^{\infty} L(\chi_i, \gamma_i) L(\chi'_e, \gamma_e) d\chi_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L(\chi_i, \gamma_i) L(\xi' - \xi_{ie} + \chi_i, \gamma_e) d\chi_i = L(\xi' - \xi_{ie}, \gamma_i + \gamma_e)\end{aligned}$$

konvoluce dvou lorentzovských profilů (B.25) dá lorentzovský profil s pološířkou rovnou součtu pološířek

redistribuční funkce

- popisuje korelaci mezi pohlceným a vyzářeným fotonem ve spektrální čáře
- $r(\xi', \mathbf{n}'; \xi, \mathbf{n})$ – společná pravděpodobnost z $(\xi'; \xi' + d\xi')$, $d\varpi'$ a \mathbf{n}' do $(\xi; \xi + d\xi)$, $d\varpi$ a \mathbf{n}
- nerelativistický případ, můžeme tedy psát: $r(\xi', \mathbf{n}'; \xi, \mathbf{n}) = r(\xi', \xi)g(\mathbf{n}', \mathbf{n})$

limitní případy redistribuční funkce:

úplně korelovaný rozptyl – chybí krok 2.
(přechod mezi podhladinami)

$$\begin{aligned}r_{ief}^{\text{corr}}(\xi', \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} L(\chi_i, \gamma_i) L(\chi'_e, \gamma_e) L(\chi_f, \gamma_f) d\chi_i \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} L(\chi_i, \gamma_i) L(\xi' - \xi_{ie} + \chi_i, \gamma_e) L(\xi' - \xi - \xi_{if} + \chi_i, \gamma_f) d\chi_i\end{aligned}\tag{B.26}$$

po integraci docela složitý vztah – (viz Hubeny and Mihalas, 2014, rovnice 10.18)

zcela nekorelovaný rozptyl – úplná redistribuce záření

po excitaci do podhladiny χ'_e atom přejde náhodnými srážkami do náhodné podhladiny χ_e

$$\begin{aligned}r_{ief}^{\text{ncorr}}(\xi', \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} L(\chi'_i, \gamma_i) L(\chi'_e, \gamma_e) L(\chi_e, \gamma_e) L(\chi_f, \gamma_f) d\chi'_i d\chi_e \\ &= L(\xi' - \xi_{ie}, \gamma_i + \gamma_e) L(\xi - \xi_{fe}, \gamma_f + \gamma_e) = \phi_{ie}(\xi') \phi_{fe}(\xi)\end{aligned}\tag{B.27}$$

pro $L(\chi_e, \gamma_e) = \delta(\chi'_e - \chi_e)$ dostáváme korelovaný rozptyl r_{ief}^{corr} (B.26)

obecná redistribuční funkce je kombinací redistribučních funkcí (B.26) a (B.27)

$$r_{ief}(\xi', \xi) = p_e^{\text{corr}} r_{ief}^{\text{corr}}(\xi', \xi) + (1 - p_e^{\text{corr}}) r_{ief}^{\text{ncorr}}(\xi', \xi)\tag{B.28}$$

p_e^{corr} – pravděpodobnost, že foton bude vyzářen ze stejné podhladiny stavu $|e\rangle$

elementární redistribuční funkce:

rozšíření předchozího i na nerozšířené spodní hladiny

redistribuční funkce v souřadné soustavě atomu (Hummer, 1962),

skutečná redistribuční funkce je obvykle jejich lineární kombinací

I. mezi nerozšířenými hladinami

(limitní případ úplně korelované redistribuční funkce B.26)

$$\begin{aligned} r_{\text{I}}(\xi', \xi) &= \lim_{\gamma_i, \gamma_e \rightarrow 0} r_{ie}^{\text{corr}}(\xi', \xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi') \delta(x - \xi_{ie}) \delta(x - \xi) dx \\ &= \delta(\xi' - \xi_{ie}) \delta(\xi' - \xi) \quad (\text{B.29a}) \end{aligned}$$

II. spodní hladina l nerozšířená, horní u rozšířená

(limitní případ úplně korelované redistribuční funkce B.26)

$$\begin{aligned} r_{\text{II}}(\xi', \xi) &= \lim_{\gamma_i \rightarrow 0} r_{ie}^{\text{corr}} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - \xi') L(x - \xi_{ie}, \gamma_e) \delta(x - \xi) dx \\ &= L(\xi' - \xi_{ie}, \gamma_e) \delta(\xi' - \xi) = \phi_{ie}(\xi') \delta(\xi' - \xi) \quad (\text{B.29b}) \end{aligned}$$

III. nekorelovaná redistribuce (úplná redistribuce, viz B.27)

$$r_{\text{III}}(\xi', \xi) = L(\xi' - \xi_{ie}, \gamma_{ie}) L(\xi - \xi_{ie}, \gamma_{ie}) = \phi_{ie}(\xi') \phi_{ie}(\xi) \quad (\text{B.29c})$$

IV. spodní i horní hladina rozšířené

(korelovaná redistribuce mezi dvěma rozšířenými hladinami)

$$\begin{aligned} r_{\text{V}}(\xi', \xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} L(x - \xi', \gamma_i) L(x - \xi_{ie}, \gamma_e) L(x - \xi, \gamma_i) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} L(t, \gamma_i) L(t', \gamma_i) r_{\text{II}}(\xi' - t, \xi - t) dt' dt \quad (\text{B.29d}) \end{aligned}$$

vyjádření r_{V} pomocí r_{II} – Heinzl (1981)

redistribuční funkce v soustavě pozorovatele vystředování (B.29) přes maxwellovské rozdělení rychlostí atomů za předpokladu neměnné rychlosti během rozptylu a zanedbání aberace

$$R_X(\mathbf{n}', \nu'; \mathbf{n}, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} du_1 \int_{-\infty}^{\infty} du_2 \int_{-\infty}^{\infty} du_3 f(u_1, u_2, u_3) \times \\ r_X \left(\nu' - \nu_0 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}'}{c}, \nu - \nu_0 \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}}{c} \right) g(\mathbf{n}', \mathbf{n}) \quad (\text{B.30})$$

kde

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{v}}{v_{\text{th}}} = \sqrt{\frac{m_a}{2kT}} \mathbf{v}$$

indexy stejné (X = I, II, III, V)

podrobné výpočty v Hubeny and Mihalas (2014, kapitoly 10.3, 10.4)

Příloha C

Numerické řešení rovnice přenosu záření

C.1 Diskretizace Feautrierova řešení rovnice přenosu záření

V této části popíšeme diskretizaci řešení rovnice přenosu záření druhého řádu, kterou jsme zavedli v kapitole 6.3.4 a poté použili i v kapitole 7.4.

C.1.1 Diferenční rovnice

Zapišeme si diferenční rovnici pro danou frekvenci ν a směr šíření záření μ . Pro jednodušší zápis zavedeme označení $j \equiv j_{\nu\mu}$ a $\tau \equiv \tau_{\nu}/\mu_m$. Schusterovu rovnici přenosu záření (6.50) pak zapišeme zjednodušeně jako

$$\frac{d^2 j}{d\tau^2} = j - S \quad (\text{C.1})$$

a podobně i okrajové podmínky (6.52)

$$\left. \frac{dj}{d\tau} \right|_{\tau_{\min}} = j(\tau_{\min}) - I^- \quad \left. \frac{dj}{d\tau} \right|_{\tau_{\max}} = I^+ - j(\tau_{\max}) \quad (\text{C.2})$$

nebo symetrickou podmínku (6.55),

$$\left. \frac{dj}{d\tau} \right|_{\tau_{\max}} = 0. \quad (\text{C.3})$$

Abychom mohli přistoupit k numerickému řešení problému, prostředím nyní diskretizujeme (viz kapitola 6.3.1.1) na D hloubkových bodů, $d = 1, \dots, D$. Derivace

j podle optické hloubky τ vyjádříme pomocí diferenčních vztahů. Pro první derivaci vyjádřenou v hloubkových bodech $d + \frac{1}{2}$ (mezi body d a $d + 1$) a $d - \frac{1}{2}$ (mezi body $d - 1$ a d) máme

$$\left. \frac{dj}{d\tau} \right|_{d+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta j_{d+\frac{1}{2}}}{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}}} = \frac{j_{d+1} - j_d}{\tau_{d+1} - \tau_d} \quad (\text{C.4a})$$

a

$$\left. \frac{dj}{d\tau} \right|_{d-\frac{1}{2}} = \frac{\Delta j_{d-\frac{1}{2}}}{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2}}} = \frac{j_d - j_{d-1}}{\tau_d - \tau_{d-1}}. \quad (\text{C.4b})$$

Analogicky pro druhou derivaci vyjádřenou v bodě d pomocí prvních derivací (C.4) můžeme psát

$$\left. \frac{d^2 j}{d\tau^2} \right|_d = \frac{\left. \frac{dj}{d\tau} \right|_{d+\frac{1}{2}} - \left. \frac{dj}{d\tau} \right|_{d-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} (\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}} + \Delta \tau_{d-\frac{1}{2}})}. \quad (\text{C.5})$$

Zavedeme označení

$$\Delta \tau_d = \frac{1}{2} (\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}} + \Delta \tau_{d-\frac{1}{2}}) \quad (\text{C.6})$$

a rovnici (C.5) přepíšeme

$$\left. \frac{d^2 j}{d\tau^2} \right|_d = \frac{1}{\Delta \tau_d} \left(\frac{j_{d+1} - j_d}{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}}} - \frac{j_d - j_{d-1}}{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2}}} \right). \quad (\text{C.7})$$

Nahrazením druhé derivace v (C.1) vztahem (C.7) doplněním indexu d na pravé straně téže rovnice dostaneme diskretizovanou rovnici přenosu záření pro Schusterovy proměnné pro $d = 2, \dots, D - 1$,

$$\frac{1}{\Delta \tau_d} \left(\frac{j_{d+1} - j_d}{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2}}} - \frac{j_d - j_{d-1}}{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2}}} \right) = j_d - S_d. \quad (\text{C.8})$$

Kromě samotné rovnice přenosu je třeba diskretizovat i okrajové podmínky (C.2). Jejich diskretizací dostaneme pro horní okrajovou podmínku

$$\frac{j_2 - j_1}{\Delta \tau_{\frac{3}{2}}} = j_1 - I^- \quad (\text{C.9a})$$

a pro spodní okrajovou podmínku

$$\frac{j_D - j_{D-1}}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}} = I^+ - j_D. \quad (\text{C.9b})$$

Tyto okrajové podmínky jsou přesné jen do 1. řádu. Diskretizovaná rovnice přenosu (C.8) je však přesná do 2. řádu. Okrajovou podmínku přesnou rovněž do 2. řádu získáme z Taylorova rozvoje $j(\tau)$ v bodě j_1 (Auer, 1967),

$$j_2 = j_1 + \Delta\tau_{\frac{3}{2}} \left. \frac{dj}{d\tau} \right|_1 + \frac{1}{2} \Delta\tau_{\frac{3}{2}}^2 \left. \frac{d^2j}{d\tau^2} \right|_1,$$

odkud s využitím (C.1) a (C.2) dostaneme

$$\frac{j_2 - j_1}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}} = j_1 - I^- + \frac{1}{2} \Delta\tau_{\frac{3}{2}} (j_1 - S_1). \quad (\text{C.10})$$

Podobným postupem dostaneme i vztah pro spodní okrajovou podmínku přesnou do 2. řádu,

$$\frac{j_D - j_{D-1}}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}} = I^+ - j_D - \frac{1}{2} \Delta\tau_{D-\frac{1}{2}} (j_D - S_D). \quad (\text{C.11})$$

C.1.2 Matice koeficientů diferenční rovnice

Diskretizované rovnice (C.8), (C.10) a (C.11) tvoří systém, který můžeme formálně zapsat jako ($d = 1, \dots, D$)

$$-A_d j_{d-1} + B_d j_d - C_d j_{d+1} = L_d, \quad (\text{C.12})$$

kde jednotlivé koeficienty pro hloubkové body $d = 2, \dots, D - 1$

$$\begin{aligned} A_d &= \frac{1}{\Delta\tau_{d-\frac{1}{2}} \Delta\tau_d} & C_d &= \frac{1}{\Delta\tau_{d+\frac{1}{2}} \Delta\tau_d} \\ B_d &= 1 + A_d + C_d & L_d &= S_d. \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

Z rovnic (C.9) dostaneme pro koeficienty v prvním hloubkovém bodě

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, & A_D &= \frac{1}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}} \\ B_1 &= \frac{1}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}} + 1, & B_D &= \frac{1}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}} + 1, \\ C_1 &= \frac{1}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}}, & C_D &= 0 \\ L_1 &= I^-, & L_D &= I^+, \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

kteří zahrnují okrajové podmínky přesné do 1. řádu. Z rovnice (C.10) dostaneme pro koeficienty v prvním a posledním hloubkovém bodě přesné do 2. řádu

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, & B_1 &= \frac{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}}{2} + 1 + \frac{1}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}}, \\ C_1 &= \frac{1}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}}, & L_1 &= \frac{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}}{2} S_1 + I^-, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

případně po vydělení $\Delta\tau_{\frac{3}{2}}/2$

$$\begin{aligned} A_1 &= 0, & B_1 &= 1 + \frac{2}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}} + \frac{2}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}^2}, \\ C_1 &= \frac{2}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}^2}, & L_1 &= S_1 + \frac{2}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}} I^-. \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Z rovnice (C.11) pro poslední (nejhlubší) hloubkový bod dostaneme

$$\begin{aligned} A_D &= \frac{1}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}}, & B_D &= \frac{1}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}} + 1 + \frac{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}}{2}, \\ C_D &= 0, & L_D &= \frac{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}}{2} S_D + I^+, \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

případně po vydělení $\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}/2$

$$\begin{aligned} A_D &= \frac{2}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}^2}, & B_D &= 1 + \frac{2}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}} + \frac{2}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}^2}, \\ C_D &= 0, & L_D &= S_D + \frac{2}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}} I^+. \end{aligned} \quad (\text{C.18})$$

Dále budeme uvažovat okrajové podmínky přesné do 2. řádu. Systém (C.12) s koeficienty (C.13), (C.15) a (C.17) (případně (C.13), (C.16) a (C.18)) tvoří třídiagonální matici koeficientů (prvky matice mimo hlavní diagonálu a sousední diagonály jsou nulové) vynásobenou vektorem intenzit j . Na pravé straně rovnice je vektor pravých stran L . Pro názornost maticovou diferenční rovnici zapíšeme,

$$\begin{pmatrix} B_1 & -C_1 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & B_2 & -C_2 & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & -A_d & B_d & -C_d & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & -A_{D-1} & B_{D-1} & -C_{D-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & -A_D & B_D \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} j_1 \\ j_2 \\ \vdots \\ j_d \\ \vdots \\ j_{D-1} \\ j_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_d \\ \vdots \\ L_{D-1} \\ L_D \end{pmatrix}. \quad (\text{C.19})$$

Uvedené koeficienty zajišťují přesnost diferenční rovnice do druhého řádu. Existuje i formulace diferenčních rovnic pomocí Hermitovských diferencí, které jsou přesné do 4. řádu (Auer, 1976), ale řešení je pak méně stabilní.

C.1.3 Eliminační schéma

Soustavu rovnic (C.12) řešíme *Gaussovou eliminací*, která probíhá ve dvou krocích. V prvním kroku provádíme dopřednou eliminaci (*forward elimination*), kdy počítáme pomocné veličiny D_d a Z_d ,

$$\begin{aligned} D_1 &= B_1^{-1}C_1 \\ D_d &= (B_d - A_d D_{d-1})^{-1}C_d \quad d = 2, \dots, D \\ Z_1 &= B_1^{-1}L_1 \\ Z_d &= (B_d - A_d D_{d-1})^{-1}(L_d + A_d Z_{d-1}) \quad d = 2, \dots, D. \end{aligned} \quad (\text{C.20})$$

V následujícím kroku získáme zpětnou substitucí (*backward substitution*) z těchto dvou veličin řešení rovnice přenosu pro Schusterovu proměnnou j ,

$$\begin{aligned} j_D &= Z_D \\ j_d &= D_d j_{d+1} + Z_d \quad d = D - 1, \dots, 1. \end{aligned} \quad (\text{C.21})$$

Toto numerické schéma poskytuje rychlé a stabilní řešení planparalelní rovnice přenosu záření.

Vylepšená varianta eliminačního schématu (Rybicki and Hummer, 1991, Appendix A). odstraňuje některé numerické nepřesnosti plynoucí z odčítání velkých čísel, která vzniknou jako převrácené hodnoty velmi malých optických hloubek.

C.1.4 Monochromatická rovnice přenosu záření s rozptylem

Diferencujeme rovnice stejně jako v C.1. Jediná změna je, že vydatnost S_d v rovnici (C.8) je nyní vyjádřena součtem

$$S_d = [1 - (\varepsilon_\nu)_d] \sum_{m=1}^M w_m j_{dm} + (\varepsilon_\nu)_d B_d \quad (\text{C.22})$$

kde w_m jsou kvadraturní váhy (6.43) pro integraci v intervalu $\langle 0; 1 \rangle$. Zavedeme vektor $(\mathbf{j}_d) = (j_{d1}, \dots, j_{dM})$ a napíšeme maticovou analogii rovnice (C.12),

$$-A_d \mathbf{j}_{d-1} + B_d \mathbf{j}_d - C_d \mathbf{j}_{d+1} = \mathbf{L}_d, \quad (\text{C.23})$$

kde A_d , B_d a C_d jsou matice. Tuto rovnici řešíme eliminačním schématem (C.20) a (C.21), v němž jsou D_d matice a \mathbf{Z}_d vektory. Podrobné vztahy lze najít v Hubeny and Mihalas (2014, kapitola 12.2).

C.2 Diskretizace momentové rovnice přenosu záření

Numerické řešení rovnice (3.41) s vydatností (7.8), rozptyl jen na volných elektronech

- $d\tau = -\chi dz$
- celková opacita $\chi = \kappa + \sigma$ (7.6)
- celková emisivita $\eta = \eta^{\text{th}} + \eta^{\text{S}}$ (7.7)
- vydatnost bez započtení rozptylu $S = \eta^{\text{th}}/\kappa$
- celková vydatnost

$$S_{\text{tot}} = \frac{\eta^{\text{th}} + \eta^{\text{S}}}{\kappa + \sigma} = \frac{\eta^{\text{th}} + \sigma J}{\kappa + \sigma} = \frac{\kappa}{\kappa + \sigma} S + \frac{\sigma}{\kappa + \sigma} J$$

$$\frac{d^2(f^K J)}{d\tau^2} = J - S_{\text{tot}} \quad (\text{C.24})$$

dosadíme za S_{tot} , označíme

$$\tilde{r} = \frac{\kappa}{\kappa + \sigma} = \frac{1}{1 + \frac{\sigma}{\kappa}} \quad (\text{C.25})$$

a upravíme

$$\frac{d^2(f^K J)}{d\tau^2} = \tilde{r}(J - S) \quad (\text{C.26})$$

analogicky s (C.7)

$$\left. \frac{d^2(f^K J)}{d\tau^2} \right|_d = \frac{1}{\Delta\tau_d} \left(\frac{f_{d+1}^K J_{d+1} - f_d^K J_d}{\Delta\tau_{d+\frac{1}{2}}} - \frac{f_d^K J_d - f_{d-1}^K J_{d-1}}{\Delta\tau_{d-\frac{1}{2}}} \right). \quad (\text{C.27})$$

podobně jako (C.10)

$$\frac{f_2^K J_2 - f_1^K J_1}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}} = f_1^H J_1 - H^- + \frac{1}{2}\Delta\tau_{\frac{3}{2}}\tilde{r}_1 (J_1 - S_1). \quad (\text{C.28})$$

podobně jako (C.11)

$$\frac{f_D^K J_D - f_{D-1}^K J_{D-1}}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}} = H^+ - f_D^H J_D - \frac{1}{2}\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}\tilde{r}_D (J_D - S_D). \quad (\text{C.29})$$

C.2.1 Koeficienty diferenční rovnice

$$-A_d J_{d-1} + B_d J_d - C_d J_{d+1} = L_d, \quad (\text{C.30})$$

kde jednotlivé koeficienty pro hloubkové body $d = 2, \dots, D-1$

$$A_d = \frac{f_{d-1}^K}{\Delta\tau_{d-\frac{1}{2}}\Delta\tau_d} \quad C_d = \frac{f_{d+1}^K}{\Delta\tau_{d+\frac{1}{2}}\Delta\tau_d} \quad (\text{C.31})$$

$$B_d = \tilde{r}_d + \frac{f_d^K}{\Delta\tau_{d-\frac{1}{2}}\Delta\tau_d} + \frac{f_d^K}{\Delta\tau_{d+\frac{1}{2}}\Delta\tau_d} \quad L_d = \tilde{r}_d S_d.$$

$$A_1 = 0, \quad B_1 = \tilde{r}_1 \frac{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}}{2} + f_1^H + \frac{f_1^K}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}}, \quad (\text{C.32})$$

$$C_1 = \frac{f_2^K}{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}}, \quad L_1 = \tilde{r}_1 \frac{\Delta\tau_{\frac{3}{2}}}{2} S_1 + H^-,$$

$$A_D = \frac{f_{D-1}^K}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}}, \quad B_D = \frac{f_D^K}{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}} + f_D^H + \tilde{r}_D \frac{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}}{2}, \quad (\text{C.33})$$

$$C_D = 0, \quad L_D = \tilde{r}_D \frac{\Delta\tau_{D-\frac{1}{2}}}{2} S_D + H^+,$$

opět se použije Gaussovo eliminační schéma (C.20), (C.21) z kapitoly C.1.3

Příloha D

Abundance chemických prvků a metalicita

typické značení proměnných a obsah pojmů *abundance* a *metalicita* se liší mezi různými astronomickými podobory

výčet a odkazy na literaturu jsou zatím neúplné

abundance

relativní abundance (zastoupení) $\tilde{\alpha}_k$ prvku k vzhledem k celkovému počtu atomů a iontů \tilde{N}_N podle počtu částic

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{N_k}{\tilde{N}_N} \quad (\text{D.1})$$

vyjádřená vzhledem k vodíku

$$\mathcal{Y}_k = \frac{\tilde{\alpha}_k}{\tilde{\alpha}_H} \quad (\text{D.2})$$

abundance podle hmotnosti (mass fraction)

$$\alpha_m = \frac{N_k m_k}{\tilde{N}_N \bar{m}} = \frac{N_k m_k}{\sum_k N_k m_k} \quad (\text{D.3})$$

častý zápis abundancí v astronomii (viz například Asplund et al., 2009)

příklad: abundance prvku X (*logaritmická abundance*)

$$\log \tilde{\varepsilon}_X = \log \left(\frac{N_X}{N_H} \right) + 12 \quad (\text{D.4})$$

a $\log \tilde{\varepsilon}_H = 12$

používá již Russell (1929, Tabulka 16)

D. ABUNDANCE CHEMICKÝCH PRVKŮ A METALICITA

abundance se často udávají vzhledem ke sluneční abundanci (referenční chemické složení)

metalicity

- X – abundance vodíku, Y – abundance helia, Z – abundance všeho ostatního (metalicity)
- zjednodušené souhrnné vyjádření chemického složení
- vyjadřuje se často vzhledem ke sluneční metalicitě ($Z_{\odot} = 1$)

Příloha E

Linearizace

Newtonova-Raphsonova metoda, metoda tečen

iterační metoda řešení nelineárních rovnic

jednorozměrný případ

hledáme řešení rovnice $f(x) = 0$

1. máme odhad řešení rovnice $x^{(\text{old})}$, který ale nespĺňuje rovnici přesně
2. hledáme řešení x , které rovnici splňuje přesně, řešení zapíšeme ve tvaru $x = x^{(\text{old})} + \delta x$
3. dosadíme: $f(x^{(\text{old})} + \delta x) = 0$
4. rozvineme

$$f(x) = f(x^{(\text{old})}) + \frac{df}{dx}(x^{(\text{old})})\delta x + \frac{d^2f}{dx^2}(x^{(\text{old})})(\delta x)^2 + \dots$$

členy s vyššími mocninami zanedbáme

hledáme δx , řešíme rovnici

$$f(x^{(\text{old})}) + \frac{df}{dx}(x^{(\text{old})})\delta x = 0$$

pro δx

5. upravíme řešení $x^{(\text{new})} = x^{(\text{old})} + \delta x$, řešení opět nepřesné
6. je-li δx „malé“, máme výsledek; není-li „malé“, vracíme se s novým odhadem řešení na začátek (položíme $x^{(\text{old})} = x^{(\text{new})}$)
„malost“ určujeme například pomocí podmínky $|\delta x/x^{(\text{old})}| < \epsilon$, ϵ je malé a závisí na problému, který řešíme

E.1 Metoda linearizace planparalelního LTE modelu atmosféry podrobněji

řešíme současně numericky soustavu rovnic

rovnici přenosu záření (například ve tvaru 3.41)

$$\frac{d^2(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu^2} = J_\nu - S_\nu.$$

s okrajovými podmínkami (horní i spodní)

rovnici zářivé rovnováhy :

- v integrálním tvaru (například 13.56)

$$\int_0^\infty (\eta_\nu - \chi_\nu J_\nu) d\nu = 0$$

nebo

- v diferenciálním tvaru

$$\int_0^\infty H_\nu d\nu = \int_0^\infty \frac{dK_\nu}{d\tau_\nu} d\nu = \int_0^\infty \frac{d(f_\nu^K J_\nu)}{d\tau_\nu} d\nu = \frac{\sigma_R T_{\text{eff}}^4}{\pi}$$

rovnici hydrostatické rovnováhy (15.3)

$$\frac{dp_g}{dm} = g - \frac{4\pi}{c} \int_0^\infty \frac{\chi_\nu}{\rho} H_\nu d\nu,$$

s horní okrajovou podmínkou

E.1.1 Linearizované rovnice a jejich řešení

linearizace rovnice přenosu záření

- nelineární problém, globální propojení (coupling)
- linearizace $x \rightarrow x_0 + \delta x$
- změny všech veličin můžeme vyjádřit pomocí změn δT , δN a δJ
- linearizace (15.60), ohromný výraz v Hubeny and Mihalas (2014, rovnice 17.129 a 17.130) obsahující $\delta J_{d,n}$, $\delta \chi_{d,n}$, $\delta \eta_{d,n}$, $\delta \rho_d$ ($f_{d,n}^K$ nelinearizujeme, ale budou přepočítávány po linearizaci)

$$\begin{aligned}
 & \frac{f_{d-1,n} \delta J_{d-1,n}}{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2},n} \Delta \tau_{d,n}} - \left[\frac{f_{d,n}}{\Delta \tau_{d,n}} \left(\frac{1}{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2},n}} + \frac{1}{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2},n}} \right) + \left(1 - \frac{\kappa_{d,n}^{\text{sc}}}{\chi_{d,n}} \right) \right] \delta J_{d,n} \\
 & + \frac{f_{d+1,n} \delta J_{d+1,n}}{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2},n} \Delta \tau_{d,n}} + a_{d,n} \delta \left(\frac{\chi_{d-1,n}}{\rho_{d-1}} \right) + b_{d,n} \delta \left(\frac{\chi_{d,n}}{\rho_d} \right) + c_{d,n} \delta \left(\frac{\chi_{d+1,n}}{\rho_{d+1}} \right) \\
 & - (\eta_{d,n} + \kappa_{d,n}^{\text{sc}} J_{d,n}) \frac{\delta \chi_{d,n}}{\chi_{d,n}^2} + \frac{\delta \eta_{d,n}}{\chi_{d,n}} + \frac{\delta \kappa_{d,n}^{\text{sc}}}{\chi_{d,n}} J_{d,n} \\
 & = \beta_{d,n} + J_{d,n} - \frac{\kappa_{d,n}^{\text{sc}} J_{d,n} + \eta_{d,n}}{\chi_{d,n}} \quad (\text{E.1})
 \end{aligned}$$

kde

$$\alpha_{d,n} = \frac{f_{d,n} J_{d,n} - f_{d-1,n} J_{d-1,n}}{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2},n} \Delta \tau_{d,n}} \quad (\text{E.2a})$$

$$\gamma_{d,n} = \frac{f_{d,n} J_{d,n} - f_{d+1,n} J_{d+1,n}}{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2},n} \Delta \tau_{d,n}} \quad (\text{E.2b})$$

$$\beta_{d,n} = \alpha_{d,n} + \gamma_{d,n} \quad (\text{E.2c})$$

$$a_{d,n} = \frac{\alpha_{d,n} + \frac{1}{2} \beta_{d,n} \frac{\Delta \tau_{d-\frac{1}{2},n}}{\Delta \tau_{d,n}}}{\frac{\chi_{d,n}}{\rho_d} + \frac{\chi_{d-1,n}}{\rho_{d-1}}} \quad (\text{E.2d})$$

$$c_{d,n} = \frac{\gamma_{d,n} + \frac{1}{2} \beta_{d,n} \frac{\Delta \tau_{d+\frac{1}{2},n}}{\Delta \tau_{d,n}}}{\frac{\chi_{d,n}}{\rho_d} + \frac{\chi_{d+1,n}}{\rho_{d+1}}} \quad (\text{E.2e})$$

$$b_{d,n} = a_{d,n} + c_{d,n} \quad (\text{E.2f})$$

hustota pro hustotu platí ($\langle m \rangle$ je průměrná hmota atomů)

$$\rho = (N - n_e) \langle m \rangle \quad (\text{E.3})$$

linearizací v hloubkovém bodě d

$$\delta \rho_d = (\delta N_d - \delta(n_e)_d) \langle m \rangle \quad (\text{E.4})$$

vztah mezi n_e , N a T dostaneme z rovnice (4.35)

$$n_e = (N - n_e) \sum_k \alpha_k \sum_{j=1}^{J_k} j f_{jk}(n_e, T)$$

linearizací v hloubkovém bodě d

$$\delta(n_e)_d = (\delta N_d - \delta(n_e)_d) \alpha_k \sum_{j=1}^{J_k} j \left[\frac{\partial f_{jk}(n_e, T)}{\partial n_e} \Big|_d \delta(n_e)_d + \frac{\partial f_{jk}(n_e, T)}{\partial T} \Big|_d \delta T_d \right]$$

vyjádříme $\delta(n_e)_d$ a dosadíme do (E.4),
nakonec formálně vyjádříme $\delta\rho_d$ pomocí δT_d a δN_d

$$\delta\rho_d = \left(\frac{\partial\rho}{\partial N} \right)_d \delta N_d + \left(\frac{\partial\rho}{\partial T} \right)_d \delta T_d \quad (\text{E.5})$$

opacita závisí na atomárních datech a:

vázaně-vázaná na obsazení energetických hladin n_i

vázaně-volná na obsazení energetických hladin n_i
na hustotě elektronů n_e

volně-volná na rychlosti elektronů \Rightarrow na T
na hustotě elektronů n_e

formálně

$$\delta\chi_{d,n} = \frac{\partial\chi_n}{\partial T} \Big|_d \delta T_d + \frac{\partial\chi_n}{\partial n_e} \Big|_d \delta(n_e)_d + \sum_i \frac{\partial\chi_n}{\partial n_i} \Big|_d \delta(n_i)_d \quad (\text{E.6})$$

i značí hladiny všech iontů

n_i v LTE: Boltzmannova rovnice, Sahova rovnice

závislost na n_e, T

n_e závisí na N a T (4.35)

$$\delta\chi_{d,n} = \frac{\partial\chi_n}{\partial N} \Big|_d \delta N_d + \frac{\partial\chi_n}{\partial T} \Big|_d \delta T_d \quad (\text{E.7})$$

podobně i pro $\delta\eta_{d,n}$

linearizace rovnice zářivé rovnováhy

$$\sum_n w_n (\kappa_{d,n} \delta J_{d,n} + \delta\kappa_{d,n} J_{d,n} - \delta\eta_{d,n}) = \sum_n w_n (\kappa_{d,n} J_{d,n} - \eta_{d,n}) \quad (\text{E.8})$$

linearizace rovnice hydrostatické rovnováhy

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{c} \sum_n w_n (f_{d,n} \delta J_{d,n} - f_{d-1,n} \delta J_{d-1,n}) + \\ & k (T_d \delta N_d + N_d \delta T_d - T_{d-1} \delta N_{d-1} - N_{d-1} \delta T_{d-1}) = \\ & g (m_d - m_{d-1}) - N_d k T_d + N_{d-1} k T_{d-1} - \frac{4\pi}{c} \sum_n w_n (f_{d,n} J_{d,n} - f_{d-1,n} J_{d-1,n}) \end{aligned} \quad (\text{E.9})$$

a horní okrajová podmínka

řešení linearizovaného systému rovnic zavedeme

$$\delta \mathbf{J}_n \equiv (\delta J_{1,n}, \delta J_{2,n}, \dots, \delta J_{D,n})^T, \quad (n = 1, \dots, F) \quad (\text{E.10a})$$

$$\delta \mathbf{T} \equiv (\delta T_1, \delta T_2, \dots, \delta T_D)^T \quad (\text{E.10b})$$

$$\delta \mathbf{N} \equiv (\delta N_1, \delta N_2, \dots, \delta N_D)^T \quad (\text{E.10c})$$

rovnice přenosu záření $\forall d$

$$\begin{aligned} & \sum_{d'=d-1}^{d+1} (\mathbb{U}_n)_{dd'} \delta (\mathbf{J}_n)_{d'} + \sum_{d'=d-1}^{d+1} (\mathbb{V}_n)_{dd'} (\delta \mathbf{N})_{d'} \\ & + \sum_{d'=d-1}^{d+1} (\mathbb{W}_n)_{dd'} (\delta \mathbf{T})_{d'} = (\mathbf{E}_n)_d \end{aligned} \quad (\text{E.11})$$

$$d = 1, \dots, D$$

\mathbf{E}_n – sloupcový vektor pravé strany linearizované rovnice přenosu záření
(D)

$\mathbb{U}, \mathbb{V}, \mathbb{W}$ – třídiagonální matice $D \times D$

rovnice zářivé rovnováhy $\forall d$

$$\sum_n (\mathbb{X}_n)_{dd} \delta (\mathbf{J}_n)_d + (\mathbb{A})_{dd} \delta (\mathbf{N})_d + (\mathbb{B})_{dd} \delta (\mathbf{T})_d = (\mathbf{F})_d \quad (\text{E.12})$$

\mathbf{F} – vektor D pravé strany

$\mathbb{X}_n, \mathbb{A}, \mathbb{B}$ – diagonální matice

rovnice hydrostatické rovnováhy $\forall d$

$$\sum_n \sum_{d'=d-1}^d (\mathbb{Y}_n)_{dd'} \delta(\mathbb{J}_n)_{d'} + \sum_{d'=d-1}^d (\mathbb{C})_{dd'} \delta(\mathbb{N})_{d'} + \sum_{d'=d-1}^d (\mathbb{D})_{dd'} \delta(\mathbb{T})_{d'} = (\mathbb{G})_d \quad (\text{E.13})$$

\mathbb{G} – vektor D pravé strany

$\mathbb{Y}_n, \mathbb{C}, \mathbb{D}$ – dvoudiagonální matice

$$\begin{pmatrix} \mathbb{U}_1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbb{V}_1 & \mathbb{W}_1 \\ 0 & \mathbb{U}_2 & 0 & \dots & \dots & 0 & \mathbb{V}_2 & \mathbb{W}_2 \\ 0 & 0 & \mathbb{U}_3 & \dots & \dots & 0 & \mathbb{V}_3 & \mathbb{W}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \mathbb{U}_F & \mathbb{V}_F & \mathbb{W}_F \\ \mathbb{X}_1 & \mathbb{X}_2 & \mathbb{X}_3 & \dots & \dots & \mathbb{X}_F & \mathbb{A} & \mathbb{B} \\ \mathbb{Y}_1 & \mathbb{Y}_2 & \mathbb{Y}_3 & \dots & \dots & \mathbb{Y}_F & \mathbb{C} & \mathbb{D} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbb{J}_1 \\ \delta \mathbb{J}_2 \\ \delta \mathbb{J}_3 \\ \vdots \\ \delta \mathbb{J}_F \\ \delta \mathbb{N} \\ \delta \mathbb{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{E}_1 \\ \mathbb{E}_2 \\ \mathbb{E}_3 \\ \vdots \\ \mathbb{E}_F \\ \mathbb{F} \\ \mathbb{G} \end{pmatrix} \quad (\text{E.14})$$

vyjádříme δJ_n

$$\delta \mathbb{J}_n = \mathbb{U}_n^{-1} \mathbb{E}_n - (\mathbb{U}_n^{-1} \mathbb{V}_n) \delta \mathbb{N} - (\mathbb{U}_n^{-1} \mathbb{W}_n) \delta \mathbb{T} \quad (\text{E.15})$$

\mathbb{U}_n^{-1} jsou plné

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P} & \mathbb{Q} \\ \mathbb{R} & \mathbb{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta \mathbb{N} \\ \delta \mathbb{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{L} \\ \mathbb{M} \end{pmatrix} \quad (\text{E.16})$$

$\mathbb{P}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{S}$ – plné matice,

$$\mathbb{P} = \mathbb{A} - \sum_{n=1}^F \mathbb{X}_n (\mathbb{U}_n^{-1} \mathbb{V}_n) \quad (\text{E.17a})$$

$$\mathbb{Q} = \mathbb{B} - \sum_{n=1}^F \mathbb{X}_n (\mathbb{U}_n^{-1} \mathbb{W}_n) \quad (\text{E.17b})$$

$$\mathbb{R} = \mathbb{C} - \sum_{n=1}^F \mathbb{Y}_n (\mathbb{U}_n^{-1} \mathbb{V}_n) \quad (\text{E.17c})$$

$$\mathbb{S} = \mathbb{D} - \sum_{n=1}^F \mathbb{Y}_n (\mathbb{U}_n^{-1} \mathbb{W}_n) \quad (\text{E.17d})$$

$$\mathbf{L} = \mathbf{F} - \sum_{n=1}^F \mathbb{X}_n (\mathbb{U}_n^{-1} \mathbf{E}_n) \quad (\text{E.17e})$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{G} - \sum_{n=1}^F \mathbb{Y}_n (\mathbb{U}_n^{-1} \mathbf{E}_n) \quad (\text{E.17f})$$

E.2 Linearizace s ALI

rovnice (10.29)

$$J_\nu^{(n+1)} = \Lambda^* [S_\nu^{(n+1)}] + (\Lambda - \Lambda^*) [S_\nu^{(n)}]. \quad (\text{E.18})$$

přepíšeme

$$J_\nu^{(n+1)} = \Lambda^* [S_\nu^{(n+1)}] + \Delta J^{(n)} \quad (\text{E.19})$$

$\Delta J^{(n)}$ je korekční člen
střední intenzita v bodě d, n

$$J_{d,n} = \Lambda_{d,n}^* S_{d,n} + \Delta J_{d,n} \quad (\text{E.20})$$

linearizace

$$\delta J_{d,n} = \Lambda_{d,n}^* \delta S_{d,n} \quad (\text{E.21})$$

$$\delta S_{d,n} = \left. \frac{\partial S_n}{\partial N} \right|_d \delta N_d + \left. \frac{\partial S_n}{\partial T} \right|_d \delta T_d \quad (\text{E.22})$$

derivace S :

$$\left. \frac{\partial S_n}{\partial N} \right|_d = \frac{1}{\chi_{n,d}} \left. \frac{\partial \eta_n}{\partial N} \right|_d - \frac{\eta_{n,d}}{\chi_{n,d}^2} \left. \frac{\partial \chi_n}{\partial N} \right|_d \quad (\text{E.23})$$

derivace opacit podle (E.7)

$$\delta J_{d,n} = \Lambda_{d,n}^* \left. \frac{\partial S_n}{\partial N} \right|_d \delta N_d + \Lambda_{d,n}^* \left. \frac{\partial S_n}{\partial T} \right|_d \delta T_d \quad (\text{E.24})$$

dosadíme do linearizovaných rovnic hydrostatické (E.9) a zářivé (E.8) rovnováhy

dostaneme rovnice jednodušší než (E.12) a (E.13)

$$(\mathbb{A})_{dd}\delta(\mathbf{N})_d + (\mathbb{B})_{dd}\delta(\mathbf{T})_d = (\mathbf{F})_d \quad (\text{E.25})$$

$$\sum_{d'=d-1}^d (\mathbb{C})_{dd'}\delta(\mathbf{N})_{d'} + \sum_{d'=d-1}^d (\mathbb{D})_{dd'}\delta(\mathbf{T})_{d'} = (\mathbf{G})_d \quad (\text{E.26})$$

Příloha F

Ostatní doplňky

F.1 Boltzmannova kinetická rovnice

Boltzmannova rovnice Necht' $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ je rozdělovací funkce libovolných částic vyjadřující jejich číselnou hustotu v elementu fázového prostoru $(\mathbf{r}, \mathbf{r} + d\mathbf{r})$, $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + d\mathbf{p})$. Sledujeme vývoj f za čas dt , ve kterém se \mathbf{r} změní na $\mathbf{r} + \mathbf{v}_p dt$ a \mathbf{p} na $\mathbf{p} + \mathbf{f}^{\text{ext}} dt$, \mathbf{f}^{ext} je vnější síla působící na částice. Pro funkci f pak platí Boltzmannova kinetická rovnice

$$\frac{\partial f}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \cdot \nabla) f + (\mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \nabla_p) f = \left(\frac{Df}{Dt} \right)_{\text{coll}}, \quad (\text{F.1})$$

kde $(Df/Dt)_{\text{coll}}$ je tzv. srážkový člen.

F.2 Odvození hydrodynamických rovnic

hydrodynamické rovnice –

lze odvodit z Boltzmannovy kinetické rovnice (F.1)

vícečásticový popis – plyn se obecně skládá z mnoha typů částic pro každý typ částic (elektrony, ionty, ...) zvláštní rozdělovací funkce, označíme f_α
 α označíme typ částic s distribuční funkcí f_α , pro tyto částice (složky plynu)

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \cdot \nabla) f_\alpha + (\mathbf{f}^{\text{ext}} \cdot \nabla_p) f_\alpha = \left(\frac{Df_\alpha}{Dt} \right)_{\text{coll}}, \quad (\text{F.2})$$

$(Df_\alpha/Dt)_{\text{coll}}$ – symbolický zápis, zahrnutý i srážky mezi různými α

momenty distribuční funkce – (např. Krall and Trivelpiece, 1973, kapitola 1.5)

číselná hustota částic α – koncentrace (*number density*)

$$n_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_p, t) d\mathbf{v}_p \quad (\text{F.3a})$$

tok částic

$$n_\alpha \mathbf{v}_\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_p f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_p, t) d\mathbf{v}_p \quad (\text{F.3b})$$

kde **makroskopická rychlost**

$$\mathbf{v}_\alpha = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{v}_p f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_p, t) d\mathbf{v}_p}{\int_{-\infty}^{\infty} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_p, t) d\mathbf{v}_p} \quad (\text{F.3c})$$

tlak

$$\mathbb{T}_\alpha = m_\alpha \int_{-\infty}^{\infty} (\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_\alpha)(\mathbf{v}_p - \mathbf{v}_\alpha) f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}_p, t) d\mathbf{v}_p \quad (\text{F.3d})$$

jednočásticový popis – středování / součet přes všechny typy částic

celková hustota plynu

$$\rho = \sum_{\alpha} m_\alpha n_\alpha \quad (\text{F.4a})$$

makroskopická rychlost plynu

$$\mathbf{v} = \frac{\sum_{\alpha} m_\alpha \mathbf{v}_\alpha}{\sum_{\alpha} m_\alpha} \quad (\text{F.4b})$$

tenzor tlaku plynu

$$\mathbb{T} = \sum_{\alpha} \mathbb{T}_\alpha \quad (\text{F.4c})$$

vztahy mezi momenty distribuční funkce se odvodí z Boltzmannovy kinetické rovnice (F.1)

F.3 Specifická tepla a adiabatické indexy

podrobně Cox and Giuli (1968, kapitola 9.13)

$$c_V = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_V \quad (\text{F.5})$$

$$c_p = \left(\frac{dQ}{dT} \right)_p = \left(\frac{\partial E}{\partial T} \right)_p - \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{F.6})$$

$$\chi_T = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_\rho = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln T} \right)_V \quad (\text{F.7})$$

$$\chi_\rho = \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln \rho} \right)_T = - \left(\frac{\partial \ln p}{\partial \ln V} \right)_T \quad (\text{F.8})$$

$$c_p = c_V - \frac{p}{\rho T} \frac{\chi_T^2}{\chi_\rho} \quad (\text{F.9})$$

$$\gamma = \frac{c_p}{c_V} = 1 + \frac{\chi_T}{\chi_\rho} (\Gamma_3 - 1) = \frac{\Gamma_1}{\rho} = \frac{\Gamma_3 - 1}{\chi_\rho} \frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} \quad (\text{F.10})$$

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_2 - 1} = \frac{\Gamma_1}{\Gamma_3 - 1} = \frac{\chi_\rho}{\Gamma_3 - 1} + \chi_T \quad (\text{F.11})$$

výpočty stavové rovnice s pomocí nových hodnot specifických tepel – (Hummer and Mihalas, 1988; Däppen et al., 1988; Mihalas et al., 1988, 1990)

Část IV

Cvičení

Příloha G

Cvičení

19. Května 2024

Some exercises to practise (c8601-01)

If not stated differently, references are to the text „Základy fyziky hvězdných atmosfér” (version 19. května 2024) stored in the IS. HM refers to the book Theory of Stellar Atmospheres (Hubeny and Mihalas, 2014). M78 refers to the book Stellar Atmospheres (Mihalas, 1978). LC refers to the book Introduction to Stellar Winds (Lamers and Cassinelli, 1999).

1. Using the expression for the total stellar luminosity

$$L_* = \int \mathfrak{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} \quad (13.1)$$

(\mathfrak{F} is the total radiative flux) express stellar effective temperature T_{eff} and surface gravity g using stellar luminosity L_* , stellar mass M_* , and stellar radius R_* .

(section 13; HM section 18.1, also 3.3)

2. Combining the continuity equation

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (13.14a)$$

and the equation of motion

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \mathbf{f}^{\text{ext}} - \nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \quad (13.15)$$

derive the momentum equation

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{v})}{\partial t} + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p\mathbf{1} - \boldsymbol{\sigma}] = \mathbf{f}^{\text{ext}} \quad (13.19)$$

Consider that the external force consists of radiation and gravity,

$$\mathbf{f}^{\text{ext}} = \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}^{\text{rad}}, \quad (13.20)$$

and using the first moment radiative transfer equation

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t} + \nabla \cdot \mathcal{P}_R = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\nu \oint \mathbf{n} [\eta_\nu(\mathbf{n}) - \chi_\nu(\mathbf{n}) I_\nu(\mathbf{n})] d\varpi = -\mathbf{f}^{\text{rad}}. \quad (3.36b)$$

rewrite the momentum equation.

(section 13.2.2, HM section 16.1)

3. Start with the 3-D continuity equation (HM 16.13)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (13.14a)$$

and the radiating fluid momentum equation (HM 16.23)

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\rho \mathbf{v} + \frac{\mathfrak{F}}{c^2} \right) + \nabla \cdot [\rho \mathbf{v} \mathbf{v} + p \mathbf{1} - \sigma + \mathcal{P}_R] = \rho \mathbf{g} \quad (13.22)$$

and from the energy equation for matter with radiation (HM 16.27)

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) + \mathcal{E}_R \right] \\ & + \nabla \cdot \left[\rho \left(e + \frac{1}{2} v^2 \right) \mathbf{v} + (p \mathbf{1} - \sigma) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{q} + \mathfrak{F} \right] = \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}^{\text{ext}} + \epsilon_N \end{aligned} \quad (13.26)$$

and write their simplified forms for

- (a) one-dimensional time-variable flow,
- (b) one-dimensional stationary flow, and
- (c) one-dimensional static atmosphere

for the plane-parallel and spherically symmetric approximations. Assume that the bulk viscosity is zero (ideal fluid).

(section 13.3; HM end of sections 16.1, 16.2, 16.3, and 16.4)

Some exercises to practise (c8601-02)

If not stated differently, references are to the text „Základy fyziky hvězdných atmosfér“ (version 19. května 2024) stored in the IS. HM refers to the book Theory of Stellar Atmospheres (Hubeny and Mihalas, 2014). M78 refers to the book Stellar Atmospheres (Mihalas, 1978). LC refers to the book Introduction to Stellar Winds (Lamers and Cassinelli, 1999).

1. For the grey atmosphere in radiative equilibrium derive the expression for the dependence of temperature on the optical depth $T(\tau)$ assuming Eddington approximation.

Hint: Eddington flux in the plane-parallel atmosphere can be expressed as

$$H_\nu(\tau_\nu) = \frac{1}{2} \int_{\tau_\nu}^{\infty} S_\nu(t) E_2(t - \tau_\nu) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\tau_\nu} S_\nu(t) E_2(\tau_\nu - t) dt$$

The numerical constant can be determined from the flux at the surface $H(0)$, and using relations valid for exponential integral functions (A.2, A.3, A.5)

$$\begin{aligned} nE_{n+1}(x) &= e^{-x} - xE_n(x) \\ E'_{n+1}(x) &= -E_n(x) \\ E_n(0) &= \int_0^1 \frac{dt}{t^n} = \frac{1}{n-1} \end{aligned}$$

(section 14.1; M78 sections 3.1 and 3.3, also HM section 17.1)

2. Assume that the source function is a linear function of the optical depth. Solving the radiative transfer equation

$$\mu \frac{dI(\tau, \mu)}{d\tau} = I(\tau, \mu) - S(\tau) \quad (3.15)$$

derive an expression for the specific intensity $I(0, \mu)$ emerging from the semi-infinite atmosphere. In other words: derive the Eddington-Barbier relation.

(beginning of the section 6; HM section 11.4)

3. Assuming linear dependence of the source function $S(\tau) = a + b\tau$, the emergent radiation can be expressed using the Eddington-Barbier relation as

$$I(0, \mu) = a + b\mu = S(\tau = \mu).$$

Show that for zero incident radiation from space, the mean intensity J at the surface of the atmosphere ($\tau = 0$) can be expressed as

$$J(\tau = 0) = \frac{1}{2}S \left(\tau = \frac{1}{2} \right).$$

(section 14.2; HM section 17.1)

19. Května 2024

Some exercises to practise (c8601-03)

If not stated differently, references are to the text „Základy fyziky hvězdných atmosfér” (version 19. května 2024) stored in the IS. HM refers to the book Theory of Stellar Atmospheres (Hubeny and Mihalas, 2014). M78 refers to the book Stellar Atmospheres (Mihalas, 1978). LC refers to the book Introduction to Stellar Winds (Lamers and Cassinelli, 1999).

1. The dilution factor W is defined using the solid angle ϖ under which the observer sees the apparent stellar disk as $W = \varpi/(4\pi)$. Write an expression for W using the stellar radius and the distance of the observer from the star.

(section 9.1.1; M78 section 5-3)

2. For a one-level atom with the possibility of ionization (one-level atom with continuum) derive expressions for b -factors of the bound level for the case of dominant collisional transitions and for the case of dominant radiative transitions.

(kapitola 9.5.1; HM section 9.5)

3. Show that for a NLTE stellar atmosphere consisting of a hypothetical one-level-atom gas, the temperature in the outer parts of the atmosphere is approximately equal to the temperature of the radiation forming region.

HINT: Use the integral form of the equation of radiative equilibrium and an approximate expression for the ratio of LTE and NLTE level populations for low densities,

$$\frac{n_1}{n_1^*} \approx \frac{4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\alpha_{bf1k}(\nu) B_\nu}{h\nu} d\nu}{4\pi \int_{\nu_0}^{\infty} \frac{\alpha_{bf1k}(\nu) J_\nu}{h\nu} d\nu}. \quad (9.61)$$

(section 15.10; M78 equation 7.163)

Some exercises to practise (c8601-04)

If not stated differently, references are to the text „Základy fyziky hvězdných atmosfér“ (version 19. května 2024) stored in the IS. HM refers to the book Theory of Stellar Atmospheres (Hubeny and Mihalas, 2014). M78 refers to the book Stellar Atmospheres (Mihalas, 1978). LC refers to the book Introduction to Stellar Winds (Lamers and Cassinelli, 1999).

1. Combining the continuity equation

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \rho v)}{dr} = 0 \quad (19.1)$$

and equation of motion

$$\rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dp_g}{dr} - \frac{GM_* \rho}{r^2} + f^{\text{rad}} \quad (19.2)$$

for a spherically symmetric stationary stellar wind, and using the sound-speed

$$a_s = \sqrt{\frac{p_g}{\rho}} \quad (19.5)$$

derive the momentum equation

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2}\right) v \frac{dv}{dr} = \frac{2a_s^2}{r} - \frac{da_s^2}{dr} - \frac{GM_*}{r^2} + \frac{f^{\text{rad}}}{\rho}. \quad (19.7)$$

(section 19; HM section 20.2)

2. The momentum equation for an isothermal wind is

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2}\right) v \frac{dv}{dr} = \frac{2a_s^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2} \quad (19.9)$$

Write critical conditions for an existence of a transsonic solution. Evaluate dv/dr at the critical point for the transsonic solution.

(section 19.1.1; LC section 3.1.1)

Some exercises to practise (c8601-05)

If not stated differently, references are to the text „Základy fyziky hvězdných atmosfér” (version 19. května 2024) stored in the IS. HM refers to the book Theory of Stellar Atmospheres (Hubeny and Mihalas, 2014). M78 refers to the book Stellar Atmospheres (Mihalas, 1978). LC refers to the book Introduction to Stellar Winds (Lamers and Cassinelli, 1999).

1. Assume an isothermal wind. Find a function $v(r)$ from an analytical solution (integration) of the momentum equation

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2}\right) v \frac{dv}{dr} = \frac{2a_s^2}{r} - \frac{GM_*}{r^2}. \quad (19.9)$$

The value of the integration constant is to be determined from the solution at the critical point $r = r_c$.

What is the value v_0 of the velocity at the base of the wind? Using this value, write an expression for the ratio $v(r)/v_0$.

(section 19.1.1; LC sections 3.1.3)

2. The velocity dependence on radius for a spherically symmetric isothermal wind can be expressed as

$$\frac{v}{v_0} \exp\left(-\frac{v^2}{2a_s^2}\right) = \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 \exp\left\{\frac{GM_*}{a_s^2} \left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)\right\}, \quad (19.18)$$

where v_0 is the value of the velocity at r_0 (the base of the subsonic region). Let ρ_0 is the value of the density at r_0 . Using this boundary condition and the continuity equation

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \rho v)}{dr} = 0 \quad (19.1)$$

find an expression for $\rho(r)$.

Derive an expression for the density dependence which follows from an equation for a hydrostatic atmosphere,

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} + \frac{GM_*}{r^2} = 0 \quad (19.21)$$

and compare both expressions for $\rho(r)$.

Express the wind mass-loss rate \dot{M} using quantities at the bottom of the subsonic region.

(section 19.1.1; LC sections 3.1.3, 3.1.4)

3. Assuming that the external force in an isothermal wind is proportional to $v dv/dr$, the equation of motion can be written in the form

$$v \frac{dv}{dr} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp_g}{dr} - \frac{GM_*}{r^2} + Bv \frac{dv}{dr}. \quad (19.37)$$

Combining this with the continuity equation to derive the parameters of the critical point and the mass-loss rate.

(section 19.1.2; LC section 3.3)

4. Consider the equation of motion for the radiatively driven wind

$$\rho v \frac{dv}{dr} + \frac{dp_g}{dr} = \rho \frac{GM_*}{r^2} (\Gamma - 1). \quad (20.7)$$

Integrating this equation over the outflowing wind matter $dm = 4\pi r^2 \rho dr$ derive the equation for wind outflowing momentum

$$\dot{M} v_\infty = \frac{L_*}{c} \frac{\Gamma - 1}{\Gamma} \tau_W \quad (20.15)$$

using the expression for the optical depth of the wind

$$\tau_W = \int_{r_c}^{\infty} \bar{\kappa}_F \rho dr, \quad (20.14)$$

where r_c is the critical point.

(section 20.2.1; LC section 7.2.2)

Some exercises to practise (c8601-06)

If not stated differently, references are to the text „Základy fyziky hvězdných atmosfér“ (version 19. května 2024) stored in the IS. HM refers to the book Theory of Stellar Atmospheres (Hubeny and Mihalas, 2014). M78 refers to the book Stellar Atmospheres (Mihalas, 1978). LC refers to the book Introduction to Stellar Winds (Lamers and Cassinelli, 1999).

1. Consider the equation of motion for the dust-driven wind in the form (gas pressure gradient has been neglected)

$$v_g \frac{dv_g}{dr} = \frac{GM_*}{r^2} (\Gamma_d - 1) \quad (21.13)$$

Integrate this equation to obtain the wind velocity law

$$v_g(r) = v_\infty \left(1 - \frac{r_c}{r}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (21.15)$$

and write an expression for the terminal wind velocity v_∞ .

(section 21; LC section 7.7.1)

Some exercises to practise (c8601-07)

If not stated differently, references are to the text „Základy fyziky hvězdných atmosfér” (version 19. května 2024) stored in the IS. HM refers to the book Theory of Stellar Atmospheres (Hubeny and Mihalas, 2014). M78 refers to the book Stellar Atmospheres (Mihalas, 1978). LC refers to the book Introduction to Stellar Winds (Lamers and Cassinelli, 1999).

1. Using the equation of motion

$$\rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dp_g}{dr} - \frac{GM_* \rho}{r^2} + f^{\text{rad}}, \quad (19.2)$$

the continuity equation

$$\frac{1}{r^2} \frac{d(r^2 \rho v)}{dr} = 0 \quad (19.1)$$

and the expression for the radiative acceleration in the CAK approximation

$$g_R^L = g_e M(t), \quad (22.17)$$

derive after substituting for

$$g_e = \frac{\kappa_e L_*}{4\pi r^2 c}, \quad (22.18)$$

$$M(t) = kt^{-\alpha} \left(\frac{10^{-11} n_e}{W} \right)^\delta \quad (22.19)$$

and

$$t = \kappa_e v_{\text{th}} \rho \left(\frac{dv}{dr} \right)^{-1} \quad (22.20)$$

the momentum equation,

$$\left(1 - \frac{a_s^2}{v^2} \right) v \frac{dv}{dr} = -\frac{GM_*(1 - \Gamma_e)}{r^2} + \frac{2a_s^2}{r} - \frac{da_s^2}{dr} + \frac{C}{r^2} \left(r^2 v \frac{dv}{dr} \right)^\alpha \quad (22.28)$$

and determine the constant C .

(section 22.4.1; LC section 8.7)

Some exercises to practise (c8601-08)

If not stated differently, references are to the text „Základy fyziky hvězdných atmosfér” (version 19. května 2024) stored in the IS. HM refers to the book Theory of Stellar Atmospheres (Hubeny and Mihalas, 2014). M78 refers to the book Stellar Atmospheres (Mihalas, 1978). LC refers to the book Introduction to Stellar Winds (Lamers and Cassinelli, 1999).

1. Consider the equation of motion for the line driven wind

$$\rho v \frac{dv}{dr} = -\frac{dp_g}{dr} - \rho \frac{GM_*(1 - \Gamma_e)}{r^2} + f_L^{\text{rad}} \quad (22.26)$$

Integrating this equation over the outflowing wind matter $dm = 4\pi r^2 \rho dr$ derive the equation for wind outflowing momentum

$$\dot{M} v_\infty = \frac{L_*}{c} \frac{\Gamma_e - 1}{\Gamma_e} \tau_e + B \frac{L_*}{c} \quad (22.44)$$

using the expression for the electron scattering optical depth of the wind

$$\tau_e = \int_{r_c}^{\infty} \kappa_e \rho dr \quad (22.45)$$

where r_c is the critical point. Show that the line blocking factor B can be expressed as

$$B = \frac{1}{v_{\text{th}}} \int_0^{\infty} M(t) t dv. \quad (22.46)$$

(section 22.4.3; HM section 20.3)

Some questions to repeat (o8601)

If not stated differently, references are to the text „Základy fyziky hvězdných atmosfér“ (version 19. května 2024) stored in the IS. HM refers to the book Theory of Stellar Atmospheres (Hubeny and Mihalas, 2014). M78 refers to the book Stellar Atmospheres (Mihalas, 1978). LC refers to the book Introduction to Stellar Winds (Lamers and Cassinelli, 1999).

1. Derive the Schwarzschild and Ledoux convective instability criteria.

(section 15.3; HM section 16.5)

2. Using the column mass depth definition

$$dm = -\rho (R_*^2/r^2) dr \quad (15.10)$$

write the hydrostatic equation $\nabla p_g = \rho \mathbf{g} + \mathbf{f}^{\text{rad}}$ for the static spherically symmetric case. Express the radiative force \mathbf{f}^{rad} using a) the Eddington flux, b) the mean radiation intensity.

(section 15.1; HM equation 19.50)

3. Using the diffusion approximation derive the expression for the radiation pressure gradient

$$\frac{dp_R}{d\bar{\tau}_R} = \frac{16\sigma_R T^3}{3c\bar{\chi}_R} \left(-\frac{dT}{dz} \right). \quad (14.42)$$

(section 14.3; HM section 11.9, M78 equation 3.27)

4. Derive an expression for a relative flux in a line emerging from a plane-parallel model atmosphere of a rotating star.

(section 18.1)

Literatura

- Abbott, D. C.: 1980, *Astrophys. J.* **242**, 1183
- Abbott, D. C.: 1982, *Astrophys. J.* **259**, 282
- Abbott, D. C. and Lucy, L. B.: 1985, *Astrophys. J.* **288**, 679
- Al-Tuwirqi, R., Al-Suliman, N., Khalil, A. A. I., and Gondal, M. A.: 2012, *Molecular Physics* **110(23)**, 2951
- Anderson, L. S.: 1985, *Astrophys. J.* **298**, 848
- Anderson, L. S.: 1989, *Astrophys. J.* **339**, 558
- Aret, A. and Sagar, A.: 2002, *Astron. Nachr.* **323**, 21
- Asplund, M., Grevesse, N., and Sauval, A. J.: 2005, in T. G. Barnes III and F. N. Bash (eds.), *Cosmic Abundances as Records of Stellar Evolution and Nucleosynthesis*, Vol. 336 of *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.*, p. 25
- Asplund, M., Grevesse, N., Sauval, A. J., and Scott, P.: 2009, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **47**, 481
- Atanacković-Vukmanović, O., Crivellari, L., and Simonneau, E.: 1997, *Astrophys. J.* **487**, 735
- Auer, L.: 1967, *Astrophys. J.* **150**, L53
- Auer, L.: 1976, *J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer* **16**, 931
- Auer, L. H.: 1971, *J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer* **11**, 573
- Auer, L. H. and Mihalas, D.: 1969, *Astrophys. J.* **158**, 641
- Auer, L. H. and Mihalas, D.: 1970, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **149**, 65
- Avrett, E. H. and Loeser, R.: 2003, in N. Piskunov, W. W. Weiss, and D. F. Gray (eds.), *Modelling of Stellar Atmospheres*, Vol. 210 of *IAU Symposium*, p. A21, Astronomical Society of the Pacific
- Bahcall, J. N. and Wolf, R. A.: 1968, *Astrophys. J.* **152**, 701
- Bashkin, S. and Stoner, J. O.: 1975, *Atomic energy levels and Grotrian Diagrams - Vol.1: Hydrogen I - Phosphorus XV*, North-Holland Publishing Company, Amsterdam
- Bates, D. R. (ed.): 1962, *Atomic and Molecular Processes*, Vol. 13 of *Pure And Applied Physics*, Academic Press
- Bates, D. R. and Dalgarno, A.: 1962, in Bates (1962), p. 245
- Belluzzi, L. and Trujillo Bueno, J.: 2011, *Astrophys. J.* **743**, 3

LITERATURA

- Bergemann, M., Gallagher, A. J., Eitner, P., Bautista, M., Collet, R., Yakovleva, S. A., Mayriedl, A., Plez, B., Carlsson, M., Leenaarts, J., Belyaev, A. K., and Hansen, C.: 2019, *Astron. Astrophys.* **631**, A80
- Bethe, H.: 1929, *Z. Phys.* **57(11-12)**, 815
- Björge, J. P. and Leenaarts, J.: 2017, *Astron. Astrophys.* **599**, A118
- Bohr, N.: 1913, *Phil. Mag. Ser. 6* **26(151)**, 1
- Boltzmann, L.: 1884, *Ann. Phys.* **258(6)**, 291
- Born, M. and Oppenheimer, R.: 1927, *Ann. Phys.* **389(20)**, 457
- Breit, G. and Teller, E.: 1940, *Astrophys. J.* **91**, 215
- Bronstein, M.: 1930, *Z. Phys.* **59**, 144
- Cannon, C. J.: 1973a, *J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer* **13**, 627
- Cannon, C. J.: 1973b, *Astrophys. J.* **185**, 621
- Canuto, V. M. and Mazzitelli, I.: 1991, *Astrophys. J.* **370**, 295
- Carciofi, A. C. and Bjorkman, J. E.: 2006, *Astrophys. J.* **639(2)**, 1081
- Carciofi, A. C. and Bjorkman, J. E.: 2008, *Astrophys. J.* **684(2)**, 1374
- Castor, J. I.: 2004, *Radiation Hydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge
- Castor, J. I., Abbott, D. C., and Klein, R. I.: 1975, *Astrophys. J.* **195**, 157
- Ceniga, M.: 2012, *Ph.D. thesis*, Přírodovědecká fakulta Masarykovy Univerzity, Brno
- Chandrasekhar, S.: 1934, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **94**, 522
- Chandrasekhar, S.: 1942, *Principles of stellar dynamics*, University of Chicago Press
- Chandrasekhar, S.: 1947, *Astrophys. J.* **105**, 424
- Chandrasekhar, S.: 1950, *Radiative transfer*, Clarendon Press, Oxford
- Chandrasekhar, S.: 1958, *An introduction to the study of stellar structure.*, Dover Publications, New York
- Chandrasekhar, S.: 1960, *Radiative transfer*, Dover Publications, New York
- Chevallier, L.: 2001, in F. Combes, D. Barret, and F. Thévenin (eds.), *SF2A-2001: Semaine de l'Astrophysique Francaise*, p. 181, EDP Sciences
- Cooper, J., Ballagh, R. J., Burnett, K., and Hummer, D. G.: 1982, *Astrophys. J.* **260**, 299
- Cooper, J., Hubeny, I., and Oxenius, J.: 1983, *Astron. Astrophys.* **127**, 224
- Cox, J. P. and Giuli, R. T.: 1968, *Principles of Stellar Structure Vol. I: Physical Principles*, Gordon & Breach Sci. Publ., New York
- Curé, M.: 2004, *Astrophys. J.* **614**, 929
- Däppen, W., Anderson, L., and Mihalas, D.: 1987, *Astrophys. J.* **319**, 195
- Däppen, W., Mihalas, D., Hummer, D. G., and Weibel Mihalas, B.: 1988, *Astrophys. J.* **332**, 261
- De Greve, J. P., Blomme, R., and Hensberge, H. (eds.): 1997, *Stellar atmospheres : theory and observations*, Vol. 497 of *Lecture Notes in Physics*, Berlin, Springer

Verlag

- Domiciano de Souza, A., Kervella, P., Jankov, S., Abe, L., Vakili, F., di Folco, E., and Paresce, F.: 2003, *Astron. Astrophys.* **407**, A47
- Dopita, M. A. and Sutherland, R. S.: 2005, *Astrophysics of the diffuse universe*, Springer-Verlag, Berlin, 3rd printing edition
- Drake, G. W. F. (ed.): 2006, *Springer Handbook of Atomic, Molecular, and Optical Physics*, Springer Verlag Berlin
- Dreizler, S. and Werner, K.: 1993, *Astron. Astrophys.* **278**, 199
- Eggert, J.: 1919, *Phys. Z.* **20**, 570
- Einstein, A.: 1916a, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **18**, 318
- Einstein, A.: 1916b, *Mitteilungen der Physikalischen Gesellschaft Zürich* **18**, 47
- Feautrier, P.: 1964, *C. R. Acad. Sci. Paris* **258**, 3189
- Fišák, J., Kubát, J., Kubátová, B., Kromer, M., and Krtička, J.: 2023, *Astron. Astrophys.* **670**, A41
- Freytag, B., Höfner, S., and Liljegren, S.: 2019, *IAU Symp.* **343**, 9
- Freytag, B., Steffen, M., Ludwig, H. G., Wedemeyer-Böhm, S., Schaffenberger, W., and Steiner, O.: 2012, *J. Comput. Phys.* **231(3)**, 919
- Gail, H.-P. and Sedlmayr, E.: 2014, *Physics and Chemistry of Circumstellar Dust Shells*, Vol. 52 of *Cambridge Astrophysics Series*, Cambridge University Press
- Gaunt, J. A.: 1930a, *Proc. Roy. Soc. London A* **126**, 654
- Gaunt, J. A.: 1930b, *Phil. Trans. Roy. Soc. London A* **229**, 163
- Gayley, K. G.: 1995, *Astrophys. J.* **454**, 410
- Gilman, R. C.: 1972, *Astrophys. J.* **178**, 423
- Gorham, G.: 1991, *Studies in History and Philosophy of Science* **22(3)**, 471
- Gräfener, G. and Hamann, W. R.: 2005, *Astron. Astrophys.* **432(2)**, 633
- Gräfener, G., Koesterke, L., and Hamann, W. R.: 2002, *Astron. Astrophys.* **387**, 244
- Gray, D. F.: 2005, *The Observation and Analysis of Stellar Photospheres*, Cambridge University Press
- Gray, R.: 2014, in Niemczura et al. (2014), pp 75–84
- Grotian, W.: 1928, *Graphische Darstellung der Spektren von Atomen und Ionen mit ein, zwei und drei Valenzelektronen. Zweiter Teil*, Vol. 7 of *Struktur der Materie in Einzeldarstellungen*, Verlag von Julius Springer, Berlin
- Grupp, F.: 2004a, *Astron. Astrophys.* **420**, 289
- Grupp, F.: 2004b, *Astron. Astrophys.* **426**, 309
- Gustafsson, B., Bell, R. A., Eriksson, K., and Nordlund, Å.: 1975, *Astron. Astrophys.* **42**, 407
- Gustafsson, B., Edvardsson, B., Eriksson, K., Jørgensen, U. G., Nordlund, Å., and Plez, B.: 2008, *Astron. Astrophys.* **486(3)**, 951
- Hamann, W. R. and Gräfener, G.: 2003, *Astron. Astrophys.* **410**, 993

LITERATURA

- Hanson, D. M., Harvey, E., Sweeney, R., and Zielinski, T. J.: 2021, *Quantum States of Atoms and Molecules*, <https://chem.libretexts.org/@go/page/4467>
- Heinzl, P.: 1981, *J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer* **25**, 483
- Hennicker, L., Puls, J., Kee, N. D., and Sundqvist, J. O.: 2018, *Astron. Astrophys.* **616**, A140
- Hennicker, L., Puls, J., Kee, N. D., and Sundqvist, J. O.: 2020, *Astron. Astrophys.* **633**, A16
- Herzberg, G.: 1950, *Molecular spectra and molecular structure. Vol.1: Spectra of diatomic molecules*, D. Van Nostrand Company, Princeton, 2nd edition
- Hildebrand, F. B.: 1974, *Introduction to numerical analysis, 2nd ed.*, McGraw-Hill
- Hillier, D. J.: 2003, in I. Hubeny, D. Mihalas, and K. Werner (eds.), *Stellar Atmosphere Modeling*, Vol. 288 of *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.*, p. 199
- Hillier, D. J. and Miller, D. L.: 1998, *Astrophys. J.* **496(1)**, 407
- Hillier, D. J. and Miller, D. L.: 1999, *Astrophys. J.* **519(1)**, 354
- Höfner, S. and Olofsson, H.: 2018, *Astron. Astrophys. Rev* **26(1)**, 1
- Hopf, E.: 1930, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **90**, 287
- Hopf, E.: 1934, *Mathematical Problems of Radiative equilibrium*, Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics No.31, Cambridge University Press, Cambridge
- Hubený, I.: 1976, *Ph.D. thesis*, Astronomický ústav ČSAV, kandidátská disertační práce
- Hubeny, I.: 1988, *Comput. Phys. Commun.* **52**, 103
- Hubeny, I.: 1990, *Astrophys. J.* **351**, 632
- Hubeny, I.: 1997, in De Greve et al. (1997), p. 1
- Hubeny, I., Hummer, D. G., and Lanz, T.: 1994, *Astron. Astrophys.* **282**, 151
- Hubeny, I. and Lanz, T.: 1995, *Astrophys. J.* **439**, 875
- Hubeny, I. and Mihalas, D.: 2014, *Theory of Stellar Atmospheres*, Princeton University Press, Princeton
- Hubeny, I. and Plavec, M. J.: 1991, *Astron. J.* **102**, 1156
- Hummer, D. G.: 1962, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **125**, 21
- Hummer, D. G. and Mihalas, D.: 1988, *Astrophys. J.* **331**, 794
- Hummer, D. G. and Rybicki, G. B.: 1971, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **152**, 1
- Hund, F.: 1927, *Linienspektren und periodisches System der Elemente*, Vol. 4 of *Struktur der Materie in Einzeldarstellungen*, Verlag von Julius Springer, Berlin
- Hundhausen, A. J.: 1972, *Coronal Expansion and Solar Wind*, Springer Verlag, New York
- Hylleraas, E. A.: 1930a, *Z. Phys.* **60(9-10)**, 624
- Hylleraas, E. A.: 1930b, *Zeitschrift für Physik* **65(3-4)**, 209
- Jeans, J. H.: 1905, *Proc. Roy. Soc. London A* **76(513)**, 545
- Jefferies, J. T.: 1968, *Spectral line formation*, Blaisdell Publ. Comp., Waltham

LITERATURA

- Jensen, W. B.: 2007, *Journal of Chemical Education* **84(5)**, 757
- Jiang, Y.-F., Cantiello, M., Bildsten, L., Quataert, E., and Blaes, O.: 2015, *Astrophys. J.* **813(1)**, 74
- Johnson, H. R. and Krupp, B. M.: 1976, *Astrophys. J.* **206**, 201
- Johnson, M. C.: 1925, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **85**, 813
- Jones, H. P.: 1973, *Astrophys. J.* **185**, 183
- Kerzendorf, W. E. and Sim, S. A.: 2014, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **440(1)**, 387
- Kippenhahn, R. and Weigert, A.: 1990, *Stellar Structure and Evolution*, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, Berlin
- Kippenhahn, R., Weigert, A., and Weiss, A.: 2012, *Stellar Structure and Evolution, 2nd edition*, Astronomy and Astrophysics Library, Springer-Verlag, Heidelberg
- Kirchhoff, G.: 1860a, *Ann. Phys.* **185(2)**, 275
- Kirchhoff, G.: 1860b, in *Monatsberichte der Königlich-Preussische Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1859*, pp 783–788, Königliche Akademie der Wissenschaften, Berlin
- Kirkpatrick, J. D., Reid, I. N., Liebert, J., Cutri, R. M., Nelson, B., Beichman, C. A., Dahn, C. C., Monet, D. G., Gizis, J. E., and Skrutskie, M. F.: 1999, *Astrophys. J.* **519**, 802
- Kourganoff, V. and Busbridge, I. W.: 1952, *Basic methods in transfer problems*, Dover Publications, New York
- Krall, N. A. and Trivelpiece, A. W.: 1973, *Principles of plasma physics*, McGraw-Hill Publishing Company, New York
- Kramers, H. A.: 1923, *Phil. Mag. Ser. 6* **46(275)**, 836
- Kříž, S. and Hubený, I.: 1986, *Bulletin of the Astronomical Institutes of Czechoslovakia* **37**, 129
- Kromer, M. and Sim, S. A.: 2009, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **398(4)**, 1809
- Krtička, J. and Kubát, J.: 2007, in A. T. Okazaki, S. P. Owocki, and S. Štefl (eds.), *Active OB-Stars: Laboratories for Stellar and Circumstellar Physics*, Vol. 361 of *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.*, p. 153
- Krtička, J. and Kubát, J.: 2010, *Astron. Astrophys.* **519**, A50
- Krtička, J. and Kubát, J.: 2017, *Astron. Astrophys.* **606**, A31
- Kubát, J.: 1996, *Astron. Astrophys.* **305**, 255
- Kubát, J.: 2010, in R. Monier, B. Smalley, G. Wahlgren, and P. Stee (eds.), *EAS Publications Series*, Vol. 43 of *EAS Publications Series*, pp 1–18
- Kudritzki, R. P.: 1998, in A. Aparicio, A. Herrero, and F. Sánchez (eds.), *Stellar astrophysics for the local group: VIII Canary Islands Winter School of Astrophysics*, p. 149, Cambridge University Press
- Kudritzki, R. P., Pauldrach, A., Puls, J., and Abbott, D. C.: 1989, *Astron. Astrophys.* **219**, 205
- Kudritzki, R. P. and Puls, J.: 2000, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **38**, 613

LITERATURA

- Kurucz, R. L.: 1970, *Atlas: a Computer Program for Calculating Model Stellar Atmospheres*, Vol. 309 of *SAO Special Report*
- Kurucz, R. L.: 1979, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **40**, 1
- Kurucz, R. L.: 1993, in M. M. Dworetzky, F. Castelli, and R. Faraggiana (eds.), *IAU Colloq. 138: Peculiar versus Normal Phenomena in A-type and Related Stars*, Vol. 44 of *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.*, p. 87
- Kurucz, R. L.: 1996, in S. J. Adelman, F. Kupka, and W. W. Weiss (eds.), *M.A.S.S., Model Atmospheres and Spectrum Synthesis*, Vol. 108 of *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.*, p. 160
- Kvasnica, J.: 1983, *Statistická fyzika*, Academia, Praha
- Lamb, W. E. and Retherford, R. C.: 1947, *Phys. Rev.* **72(3)**, 241
- Lamers, H. J. G. L. M.: 1997, in De Greve et al. (1997), p. 69
- Lamers, H. J. G. L. M. and Cassinelli, J. P.: 1999, *Introduction to Stellar Winds*, Cambridge University Press, Cambridge
- Lamers, H. J. G. L. M. and Pauldrach, A. W. A.: 1991, *Astron. Astrophys.* **244**, L5
- Lamers, H. J. G. L. M., Snow, T. P., and Lindholm, D. M.: 1995, *Astrophys. J.* **455**, 269
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.: 1986, * *Gidrodinamika*, Vol. 6 of *Kurs teoretickésoj astrofiziki*, Mir, Moskva, 3 prerabotanoje edition
- Landau, L. D. and Lifshitz, E. M.: 1987, *Fluid mechanics*, Vol. 6 of *Course of Theoretical Physics*, Pergamon Press, Oxford, 2nd english edition
- Landi Degl'Innocenti, E.: 2014, *Atomic Spectroscopy and Radiative Processes*, UNITEXT for Physics, Springer, Milan
- Landi Degl'Innocenti, E. and Landolfi, M.: 2004, *Polarization in Spectral Lines*, Vol. 307 of *Astrophysics and Space Science Library*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht
- Lanz, T. and Hubeny, I.: 2003a, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **147(1)**, 225
- Lanz, T. and Hubeny, I.: 2003b, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **146(2)**, 417
- Lanz, T. and Hubeny, I.: 2007, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **169(1)**, 83
- Leenaarts, J. and Carlsson, M.: 2009, in B. Lites, M. Cheung, T. Magara, J. Mariska, and K. Reeves (eds.), *The Second Hinode Science Meeting: Beyond Discovery-Toward Understanding*, Vol. 415 of *Astronomical Society of the Pacific Conference Series*, p. 87
- Lockyer, N.: 1899, *Proc. Roy. Soc. London A* **65**, 186
- Lotz, W.: 1967a, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **14**, 207
- Lotz, W.: 1967b, *Z. Phys.* **206**, 205
- Lowrie, R. B., Morel, J. E., and Hittinger, J. A.: 1999, *Astrophys. J.* **521(1)**, 432
- Lucy, L. B.: 1964, *SAO Special Report* **167**, 93
- Ludwig, H. G. and Steffen, M.: 2016, *Astron. Nachr.* **337**, 844
- Magic, Z., Collet, R., Asplund, M., Trampedach, R., Hayek, W., Chiavassa, A., Stein, R. F., and Nordlund, Å.: 2013, *Astron. Astrophys.* **557**, A26

LITERATURA

- Martin, W. C. and Wiese, W. L.: 2006, in Drake (2006), p. 175
- McCaughan, J. B. T.: 1980, *Physics Education* **15**(4), 255
- McQuarrie, D. A.: 1976, *Statistical Mechanics*, Harper & Row Publ., New York
- McQuarrie, D. A.: 2008, *Quantum Chemistry*, University Science Books, Mill Valley, California, 2nd edition
- Menzel, D. H.: 1937, *Astrophys. J.* **85**, 330
- Menzel, D. H. (ed.): 1966, *Selected papers on the transfer of radiation*, Dover Publications, New York
- Menzel, D. H. and Pekeris, C. L.: 1935, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **96**, 77
- Mihalas, D.: 1978, *Stellar Atmospheres*, W. H. Freeman & Co., San Francisco, 2nd edition
- Mihalas, D., Däppen, W., and Hummer, D. G.: 1988, *Astrophys. J.* **331**, 815
- Mihalas, D. and Hummer, D. G.: 1974, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **28**, 343
- Mihalas, D., Hummer, D. G., Weibel Mihalas, B., and Däppen, W.: 1990, *Astrophys. J.* **350**, 300
- Mihalas, D. and Klein, R. I.: 1982, *J. Comput. Phys.* **46**, 97
- Mihalas, D. and Weibel-Mihalas, B.: 1984, *Foundations of radiation hydrodynamics*, Oxford University Press, New York
- Milne, E. A.: 1921, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **81**, 361
- Milne, E. A.: 1924, *Phil. Mag. Ser. 6* **47**, 209
- Milne, E. A.: 1926, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **86**, 459
- Milne, E. A.: 1930, *Thermodynamics of the Stars*, Vol. 3 of *Handbuch der Astrophysik*, pp 65–255, Julius Springer, Berlin
- Milne, E. A.: 1966, in Menzel (1966), pp 77–269, reprinted
- Monier, R., Smalley, B., Wahlgren, G., and Stee, P. (eds.): 2010, *Non-LTE Line Formation for Trace Elements in Stellar Atmospheres*, Vol. 43 of *EAS Publications Series*, EDP Sciences
- Moore, C. E.: 1952, *Atomic energy levels. As Derived From the Analyses of Optical Spectra. Volume II.*, Vol. 467 of *Circular of the National Bureau of Standards*, National Bureau of Standards
- Moore, C. E. and Merrill, P. W.: 1968, *Partial Grotrian Diagrams of Astrophysical Interest*, Vol. 23 of *National Standard Reference Data Series*, National Bureau of Standards, NSRDS-NBS 23
- Morgan, W. W., Keenan, P. C., and Kellman, E.: 1943, *An atlas of stellar spectra, with an outline of spectral classification*
- Ng, K. C.: 1974, *J. Chem. Phys.* **61**, 2680
- Niemczura, E., Smalley, B., and Pych, W. (eds.): 2014, *Determination of Atmospheric Parameters of B-, A-, F- and G-Type Stars*, GeoPlanet: Earth and Planetary Sciences, Springer
- Noebauer, U. M. and Sim, S. A.: 2015, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **453**(3), 3120
- Noebauer, U. M., Sim, S. A., Kromer, M., Röpke, F. K., and Hillebrandt, W.: 2012,

LITERATURA

- Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **425(2)**, 1430
- Nordlund, Å.: 1982, *Astron. Astrophys.* **107**, 1
- Nordlund, Å.: 1984, in W. Kalkofen (ed.), *Methods in Radiative Transfer*, pp 211–233, Cambridge University Press
- Olson, G. L., Auer, L. H., and Buchler, J. R.: 1986, *J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer* **35**, 431
- Osterbrock, D. E.: 1962, *Astrophys. J.* **135**, 195
- Owocki, S. P. and Shaviv, N. J.: 2012, *Eta Carinae and the Supernova Impostors*, Vol. 384 of *Astrophysics and Space Science Library*, Chapt. Instability & Mass Loss near the Eddington Limit, pp 275–298, Springer, New York
- Pauldrach, A. W. A.: 2012, *WM-basic: Modeling atmospheres of hot stars*, Astrophysics Source Code Library, record ascl:1204.001
- Pauldrach, A. W. A. and Puls, J.: 1990, *Astron. Astrophys.* **237**, 409
- Pauldrach, A. W. A., Vanbeveren, D., and Hoffmann, T. L.: 2012, *Astron. Astrophys.* **538**, A75
- Perrin, F.: 1942, *J. Chem. Phys.* **10**, 415
- Peytremann, E.: 1974, *Astron. Astrophys.* **33**, 203
- Phillips, A. P. and Wright, S. L.: 1980, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **192**, 197
- Pickering, E. C.: 1896, *Harvard College Observatory Circular* **12**, 1
- Placzek, G.: 1947, *Phys. Rev.* **72**, 556
- Placzek, G. and Seidel, W.: 1947, *Phys. Rev.* **72**, 550
- Planck, M.: 1900a, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **2(13)**, 202
- Planck, M.: 1900b, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **2(17)**, 237
- Planck, M.: 1901, *Ann. Phys.* **309(3)**, 553
- Plez, B., Brett, J. M., and Nordlund, A.: 1992, *Astron. Astrophys.* **256**, 551
- Pradhan, A. K. and Gallagher, J. W.: 1992, *At. Data Nucl. Data Tables* **52**, 227
- Pradhan, A. K. and Nahar, S. N.: 2011, *Atomic Astrophysics and Spectroscopy*, Cambridge University Press, Cambridge
- Puls, J., Kudritzki, R. P., Herrero, A., Pauldrach, A. W. A., Haser, S. M., Lennon, D. J., Gabler, R., Voels, S. A., Vilchez, J. M., Wachter, S., and Feldmeier, A.: 1996, *Astron. Astrophys.* **305**, 171
- Puls, J., Springmann, U., and Lennon, M.: 2000, *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **141**, 23
- Puls, J., Urbaneja, M. A., Venero, R., Repolust, T., Springmann, U., Jokuthy, A., and Mokiem, M. R.: 2005, *Astron. Astrophys.* **435(2)**, 669
- Puls, J., Vink, J. S., and Najarro, F.: 2008, *Astron. Astrophys. Rev* **16**, 209
- Rau, A. R. P.: 2002, *Astronomy-inspired Atomic and Molecular Physics*, Vol. 271 of *Astrophysics and Space Science Library*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht
- Rayleigh, L.: 1900, *Phil. Mag. Ser. 5* **49**, 539

LITERATURA

- Russell, H. N.: 1929, *Astrophys. J.* **70**, 11
- Russell, H. N. and Saunders, F. A.: 1925, *Astrophys. J.* **61**, 38
- Russell, H. N., Shenstone, A. G., and Turner, L. A.: 1929, *Phys. Rev.* **33**, 900
- Rybicki, G. B.: 1971, *J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer* **11**, 589
- Rybicki, G. B. and Hummer, D. G.: 1991, *Astron. Astrophys.* **245**, 171
- Rybicki, G. B. and Lightman, A. P.: 1979, *Radiative processes in astrophysics*, John Wiley & Sons Inc., New York
- Rydberg, J. R.: 1890, *Phil. Mag. Ser. 5* **29(179)**, 331
- Saha, M. N.: 1920, *Phil. Mag. Ser. 6* **40(238)**, 472
- Sander, A., Shenar, T., Hainich, R., Gímenez-García, A., Todt, H., and Hamann, W. R.: 2015, *Astron. Astrophys.* **577**, A13
- Sander, A. A. C., Hamann, W. R., Todt, H., Hainich, R., and Shenar, T.: 2017, *Astron. Astrophys.* **603**, A86
- Santolaya-Rey, A. E., Puls, J., and Herrero, A.: 1997, *Astron. Astrophys.* **323**, 488
- Schadee, A.: 1964, *Bull. Astron. Inst. Netherlands* **17**, 311
- Schmid, H. M.: 1989, *Astron. Astrophys.* **211**, L31
- Schuster, A.: 1905, *Astrophys. J.* **21**, 1
- Schwarzschild, K.: 1914, in *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pp 1183–1200, Verlag der Königlichen Akademie der Wissenschaften, Berlin
- Schwarzschild, K.: 1966, in Menzel (1966), pp 35–51, translated by Rudolf Loeser
- Scudder, J. D.: 1992, *Astrophys. J.* **398**, 319
- Scudder, J. D.: 1994, *Astrophys. J.* **427**, 446
- Seaton, M. J.: 1959, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **119**, 81
- Seaton, M. J.: 1962, in D. R. Bates (ed.), *Atomic and Molecular Processes*, Vol. 13 of *Pure and Applied Physics*, pp 374–420, Academic Press, New York and London
- Seaton, M. J.: 1964, *Planet. Space Sci.* **12**, 55
- Shaviv, N. J.: 2005, in R. Humphreys and K. Stanek (eds.), *The Fate of the Most Massive Stars*, Vol. 332 of *Astron. Soc. Pacific Conf. Ser.*, p. 183
- Shore, S. N.: 2007, *Astrophysical Hydrodynamics: An Introduction*, WILEY-VCH Verlag GmbH & CoKGaA, Weinheim, 2nd revised edition
- Shoub, E. C.: 1977a, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **34**, 259
- Shoub, E. C.: 1977b, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **34**, 277
- Shu, F. H.: 1991, *The Physics of Astrophysics, Volume I Radiation*, University Science Books, Mill Valley
- Snedden, C., Johnson, H. R., and Krupp, B. M.: 1976, *Astrophys. J.* **204**, 281
- Sobelman, I. I.: 1992, *Atomic spectra and radiative transitions, 2nd ed.*, Springer Berlin
- Sobolev, V. V.: 1947, *Dvižuščijesja oboločki zvezd*, Izdatělstvo LGU, Leningrad

LITERATURA

- Spitzer, Lyman, J. and Greenstein, J. L.: 1951, *Astrophys. J.* **114**, 407
- Spitzer, L.: 1956, *Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience Publishers, New York
- Stefan, M. J.: 1879, *Sitzungsberichte der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften* **79**, 391
- Steffen, M., Prakapavičius, D., Caffau, E., Ludwig, H. G., Bonifacio, P., Cayrel, R., Kučinskas, A., and Livingston, W. C.: 2015, *Astron. Astrophys.* **583**,
- Stewart, B.: 1858, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* **22**, 1
- Stewart, B.: 1859, *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* **22**, 59
- Stewart, B.: 1860, *Proc. Roy. Soc. London* **10**, 385
- Stokes, G. G.: 1852, *Trans. Cambridge Phil. Soc.* **9**, 399
- Strom, S. and Kurucz, R. L.: 1966, *J. Quant. Spectrosc. Rad. Transfer* **6**, 591
- Sundqvist, J. O., Björklund, R., Puls, J., and Najarro, F.: 2019, *Astron. Astrophys.* **632**,
- Šurlan, B., Hamann, W. R., Kubát, J., Oskinova, L. M., and Feldmeier, A.: 2012, *Astron. Astrophys.* **541**, A37
- Tatum, J.: 2020, *Stellar Atmospheres*, Libretexts, University of Victoria (<http://orca.phys.uvic.ca/~tatum/stellatm.html>), <https://phys.libretexts.org/@go/page/6642>
- Tatum, J. B.: 1966, *Publ. DAO Victoria* **13**, 1
- Tennyson, J.: 2005, *Astronomical Spectroscopy: An Introduction to the Atomic and Molecular Physics of Astronomical Spectra*, Vol. 2 of *Imperial College Press Advanced Physics Texts*, Imperial College Press, London
- Thomas, R. N.: 1957, *Astrophys. J.* **125**, 260
- Trampedach, R., Asplund, M., Collet, R., Nordlund, Å., and Stein, R. F.: 2013, *Astrophys. J.* **769**, 18
- Trujillo Bueno, J. and Fabiani Bendicho, P.: 1995, *Astrophys. J.* **455**, 646
- Unsöld, A.: 1948, *Z. Astrophys.* **24**, 363
- Unsöld, A.: 1951, *Naturwissenschaften* **38**, 525
- Unsöld, A.: 1955, *Physik der Sternatmosphären*, Springer Verlag, Berlin
- van Marle, A. J., Owocki, S. P., and Shaviv, N. J.: 2009, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **394(2)**, 595
- van Regemorter, H.: 1962, *Astrophys. J.* **136**, 906
- Viik, T.: 1986, *Astrophys. Space Sci.* **127(2)**, 285
- Vink, J. S.: 2022, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **60**, 203
- Walker, J.: 1904, *The Analytical Theory of Light*, Cambridge University Press
- Walker, M. J.: 1954, *Amer. J. Phys.* **22**, 170
- Weisskopf, V.: 1932, *Z. Phys.* **75**, 287
- Werner, K. and Dreizler, S.: 1999, *J. Comput. Appl. Math.* **109**, 65
- Whitney, B. A.: 2011, *Bull. Astron. Soc. India* **39**, 101
- Whitworth, A. P.: 1975, *Astrophys. Space Sci.* **34(1)**, 155

LITERATURA

Wien, W.: 1893, *Annalen der Physik* **285(8)**, 633

Wien, W.: 1896, *Ann. Phys.* **294(8)**, 662

Wildt, R.: 1939a, *Astrophys. J.* **89**, 295

Wildt, R.: 1939b, *Astrophys. J.* **90**, 611

Wright, A. E. and Barlow, M. J.: 1975, *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **170**, 41

Yan, Y. and Seaton, M. J.: 1987, *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **20(23)**, 6409

62