

# Astrofyzika II.

**Základní hvězdné charakteristiky,  
teploty, spektrální třídy**

Vladimír Štefl

Ústav teoretické fyziky a astrofyziky

# Povrchové teploty hvězd

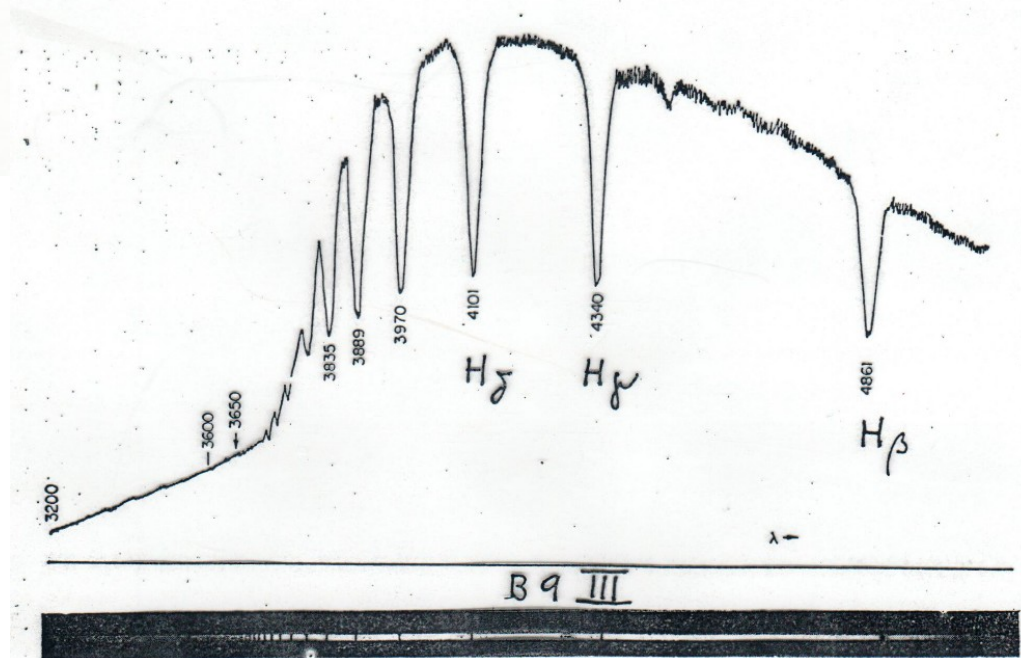
aplikace zákonů záření, Wienova, Planckova, Stefanova-Boltzmannova zákona, pouze **první aproximace**, průběh spojitého spektra narušen čarami, fotoionizačními skoky...

Povrchová teplota  $T$

souvislost zabarvení hvězd s jejich povrchovými teplotami

efektivní povrchová teplota

Slunce - 5 780 K





# Určování barevné teploty - Wienův vyzařovací zákon

$$I(\lambda, T) = \frac{c_1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{c_2}{\lambda T}} - 1}$$

podobný Wienův zákon při  $\lambda T$  malém

$$I(\lambda, T) = c_1 \lambda^{-5} e^{-\frac{c_2}{\lambda T}}$$

máme poměr intenzit světla

$$\frac{I_1}{I_2} = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^5 \left[ -\frac{c_2}{T_b} \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) \right]$$

$$\Rightarrow T_b = \frac{-c_2 \left( \frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right)}{\ln \frac{I_1}{I_2} + 5 \ln \frac{\lambda_1}{\lambda_2}}$$

máme světlo bílé pro světlo čisté spektrum  
pomocí filtrů

číslo:

$$\lambda_1 = 470 \text{ nm}$$

$$\lambda_2 = 540 \text{ nm}$$

$$\Rightarrow T_b = 6500 \text{ K}$$

# Aplikace Planckova zákona, určování efektivní teploty ze Stefanova-Boltzmannova z.

$$B_\nu(\nu, T) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

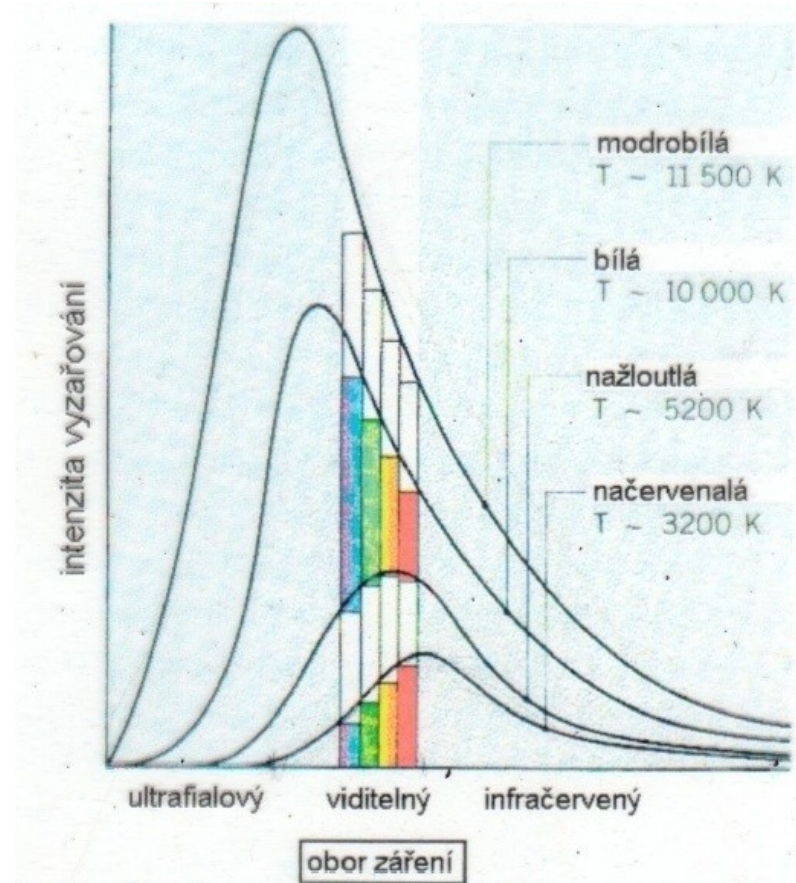
## Stefanův- Boltzmannův zákon

$$B(T) = \sigma T_{ef}^4 \quad L = 4\pi R^2 \sigma T_{ef}^4$$

záření vychází z různých hloubek atmosféry, z **různých teplot**, proto zavádíme **efektivní teplotu**

$$T_{ef} = \left( \frac{L}{4\pi\sigma R^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$

# Určování teploty - Wienův posunovací zákon



$$\lambda_m T = b$$

# Určování excitační teploty - Boltzmannova rovnice

Boltzmannova rovnice

$$\frac{N_b}{N_a} = \frac{g_b}{g_a} e^{-\frac{E_b - E_a}{kT}}$$

$g_b, g_a$  statistické váhy atomů  
pro vodík  $g_n = 2n^2$ ,  $n \dots$  hlavní kvantové číslo  
u srovnatelných atomů  $g = 2j + 1$   $j \dots$  kvantové číslo  
celkového momentu hybnosti  
 $T \dots$  excitační teplota,  $E_b, E_a \dots$  excitační potenciály

$$\log \frac{N_b}{N_a} = -\frac{5040}{T} x_{ab} + \log \frac{g_b}{g_a}$$

$$x_{ab} = E_b - E_a$$

$$\log \frac{N_b}{N_a} = -\frac{5040}{T} x_{ab}$$

zjednodušený tvar,  $g_b, g_a$  rovná se jedné  
jednu

stejná excitační rovnice



# Boltzmannova rovnice

graf zachycuje nárůst  $N_2$  obsazení druhé hladiny, přesněji poměr  $N_2$  ku celkovému počtu atomů  $N_2 + N_1$  s rostoucí teplotou,  $N_2 = N_1$  při teplotě až 85 400 K, proč pozorujeme maximální intenzitu čar Balmerovy série při teplotách 9 900 K? Odpověď poskytuje Saha rovnice.

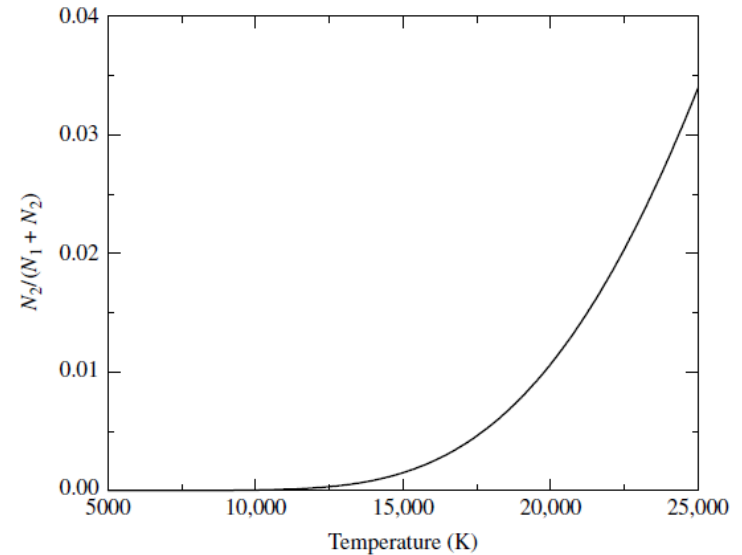
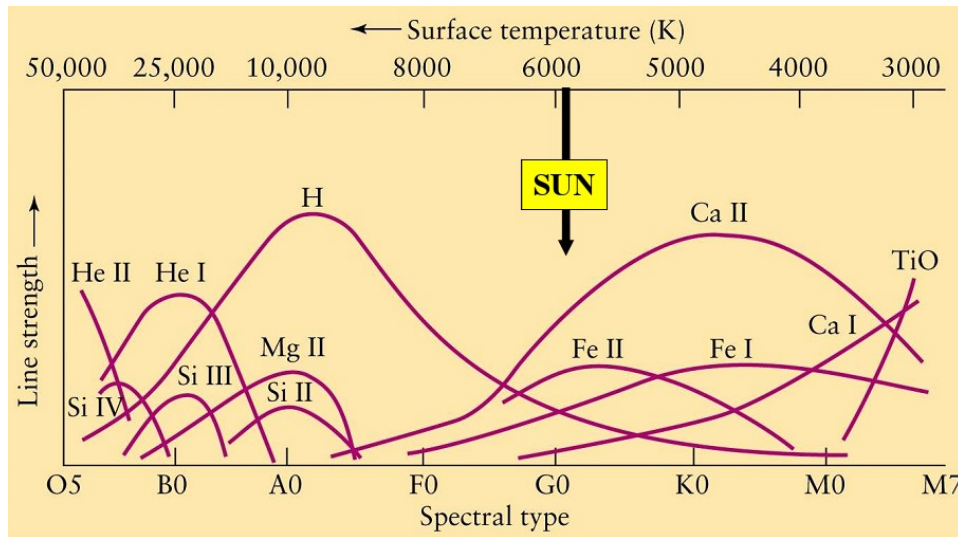


FIGURE 7  $N_2/(N_1 + N_2)$  for the hydrogen atom obtained via the Boltzmann equation.

# Určování ionizační teploty - Saha rovnice

*stav ionizační rovnováhy*

Saha rovnice

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \text{konst.} \frac{(kT)^{3/2}}{N_e} e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

$E_i$  ... ionizační potenciál,  $T$  ... ionizační teplota

$$\frac{N_{i+1}}{N_i} = \frac{2 Z_{i+1}}{N_e z_i} \left( \frac{2\pi m_e kT}{h^2} \right)^{3/2} e^{-\frac{E_i}{kT}}$$

$z_i$  je tzv. particelní funkce pro příslušný stupeň ionizace,  
2 ... dvě možnosti spinu volného elektronu

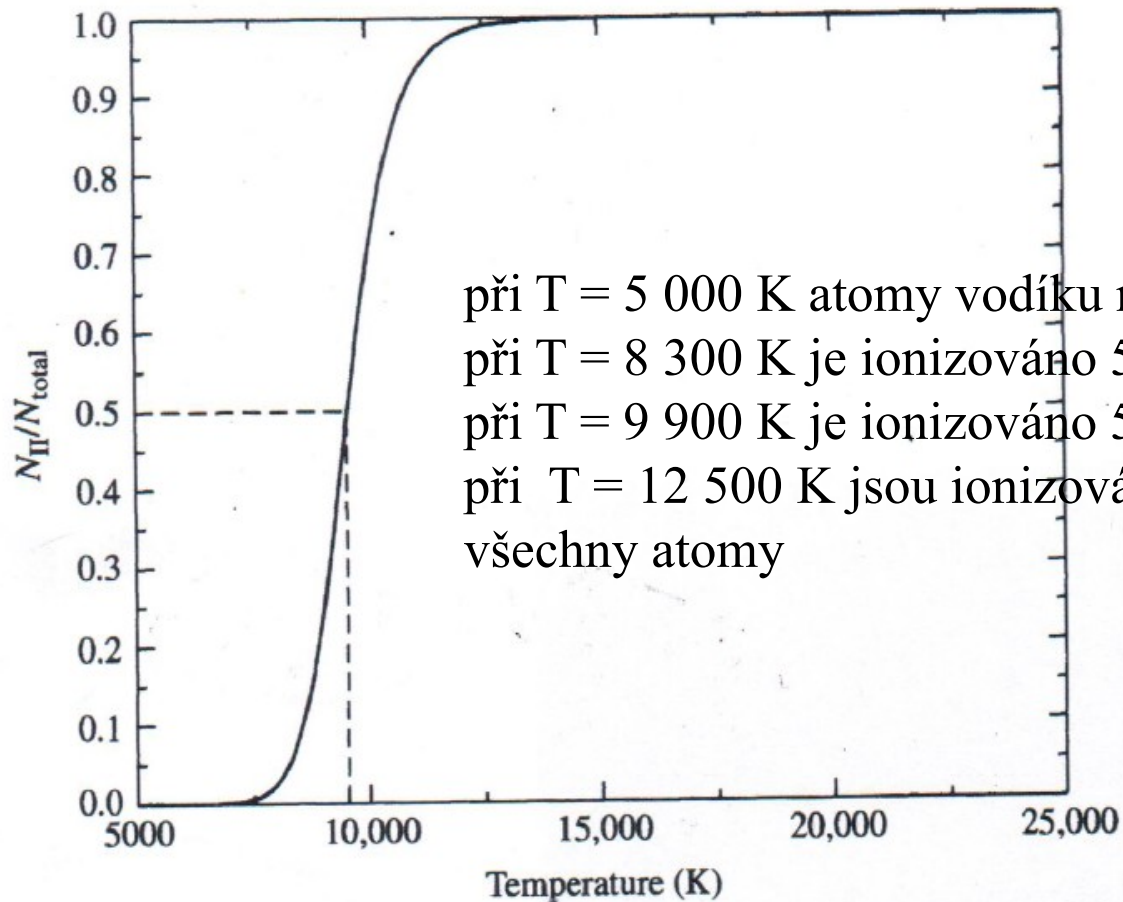
$$\log \frac{N_{i+1}}{N_i} = 1,5 \log T - \frac{5040}{T} E_i - \log N_e$$

+ na první členě správně nějaká konst.



# Sahova rovnice

graf zachycuje nárůst počtu ionizovaných atomů  $N_{II}$ , přesněji poměr  $N_{II}$  ku celkovému počtu atomů  $N_{total}$  při zvětšování teploty, 50 % při 9 600 K



**FIGURE 8.8**  $N_{II}/N_{total}$  for hydrogen from the Saha equation when  $P_e = 20 \text{ N m}^{-2}$ . Fifty percent ionization occurs at  $T \simeq 9600$  K.

# Kombinovaná rovnice excitačně - ionizační

Kombinovaná Boltzmannova-Saha rovnice

$$\frac{N_i}{N_{0,r}} P_e = \frac{(2\pi m)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3} \frac{2B_i(T)}{g_{0,r}} e^{-\frac{E_i - E_r}{kT}}$$

$$\log \frac{N_i}{N_{0,r}} = -\frac{5040}{T} (E_i - E_r) + 2.5 \log T - 0.48 \\ + \log \frac{2B_i(T)}{g_{0,r}} - \log P_e$$

# Kombinovaná Boltzmannova-Sahova rovnice

graf zachycuje závislost poměru obsazení druhé hladiny  $N_2$  obsazení druhé hladiny ku celkovému počtu atomů  $N_{total}$  na teplotě, maximum při 9 900 K

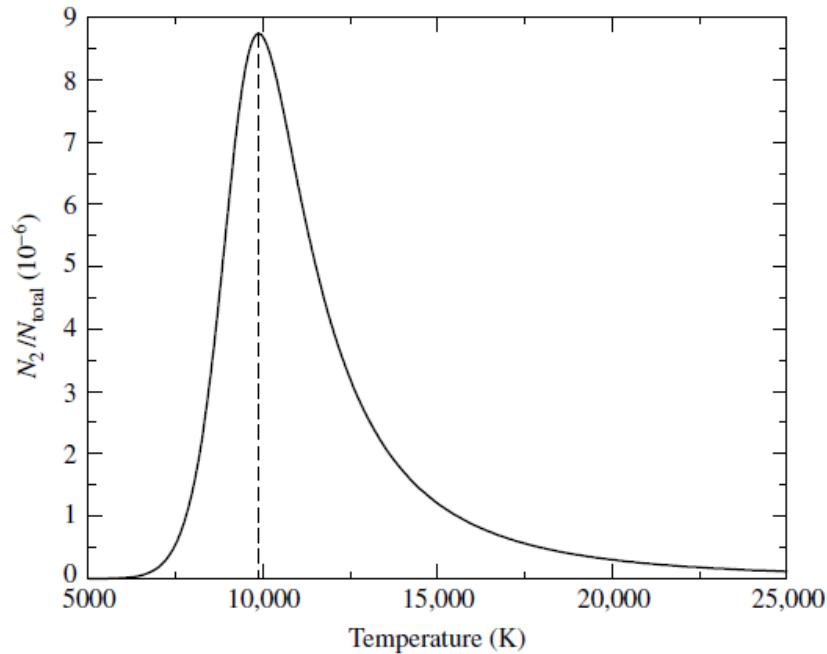


FIGURE 9  $N_2/N_{total}$  for hydrogen from the Boltzmann and Saha equations, assuming  $P_e = 20 \text{ N m}^{-2}$ . The peak occurs at approximately 9900 K.

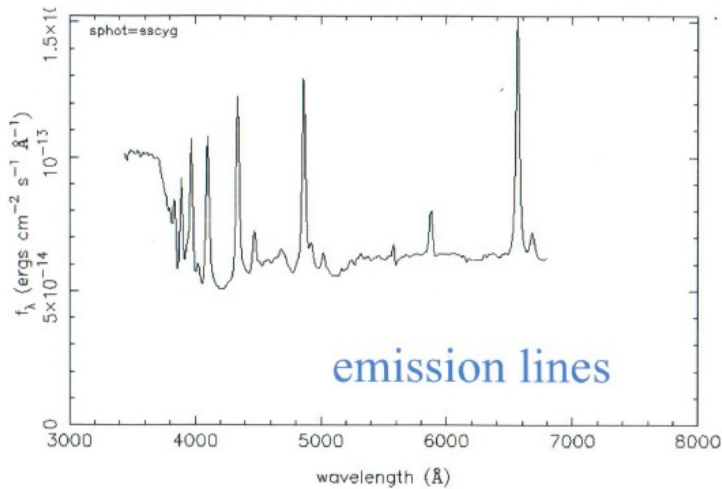
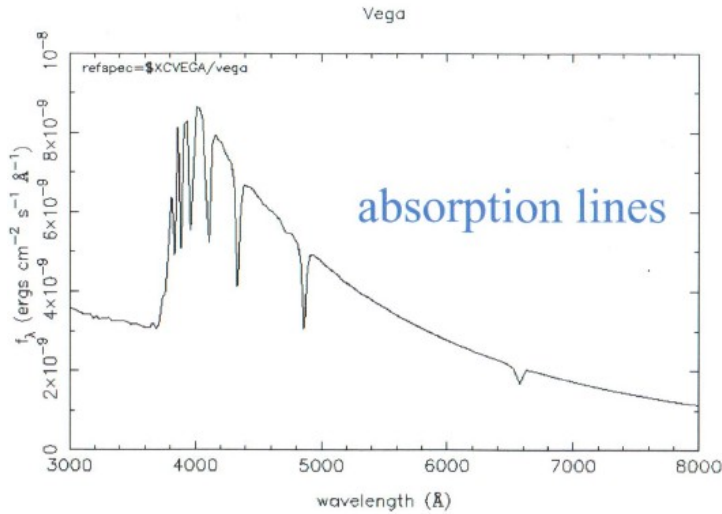
*intenzita čar Balmerovy série závisí na velikosti zlomku  $N_2/N_{total}$  - na počtu všech vodíkových atomů, které jsou na druhé energetické hladině, při teplotách nad 9 900 K narůstá výrazně ionizace*



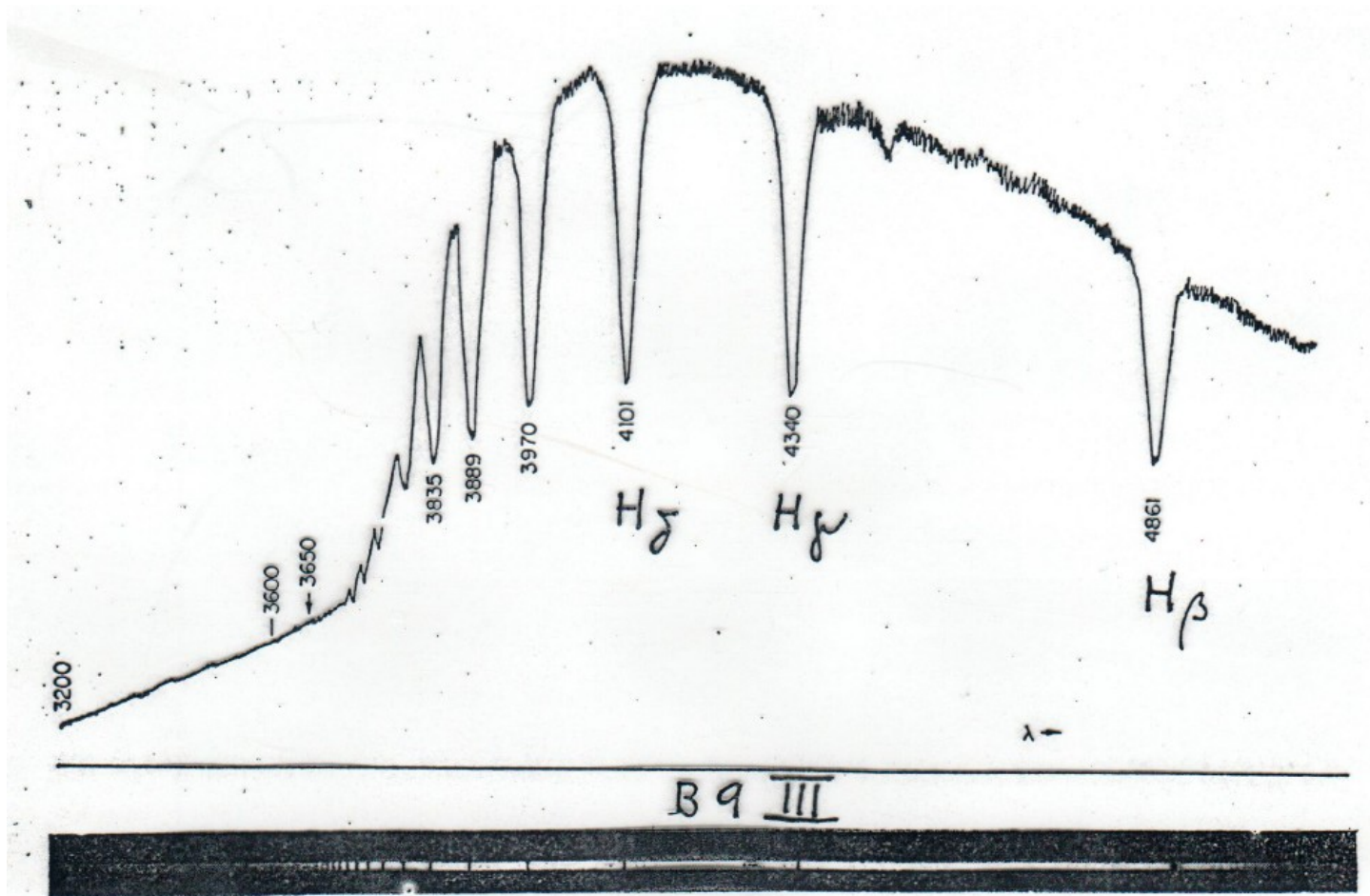
# Spektra hvězd

spojitá spektra hvězd

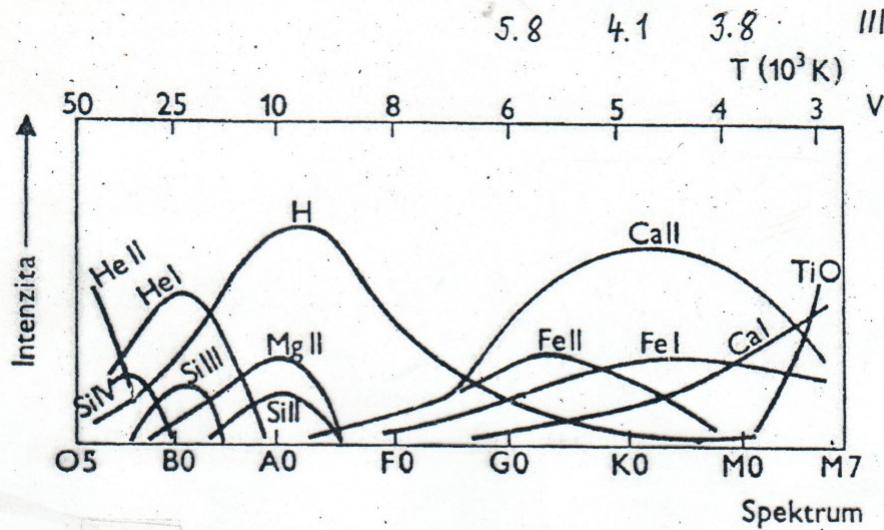
absorpční čárová spektra



# Spektra hvězd – spojité a čárové spektrum

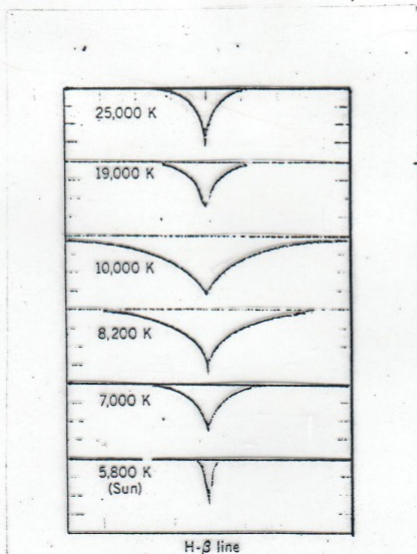


# Závislost intenzity spektrálních čar na teplotě



Průběh intenzity čar různých prvků v závislosti na teplotě

- změna profilu spektrální čáry  $H\beta$  s teplotou



Line strength

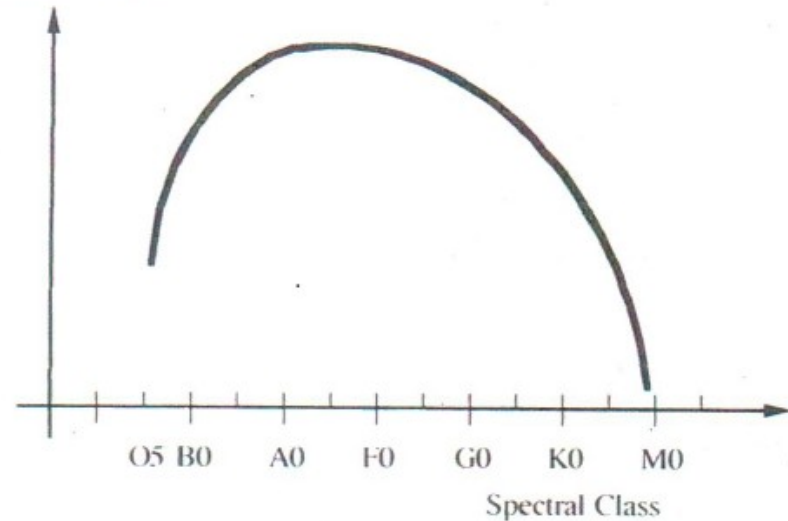
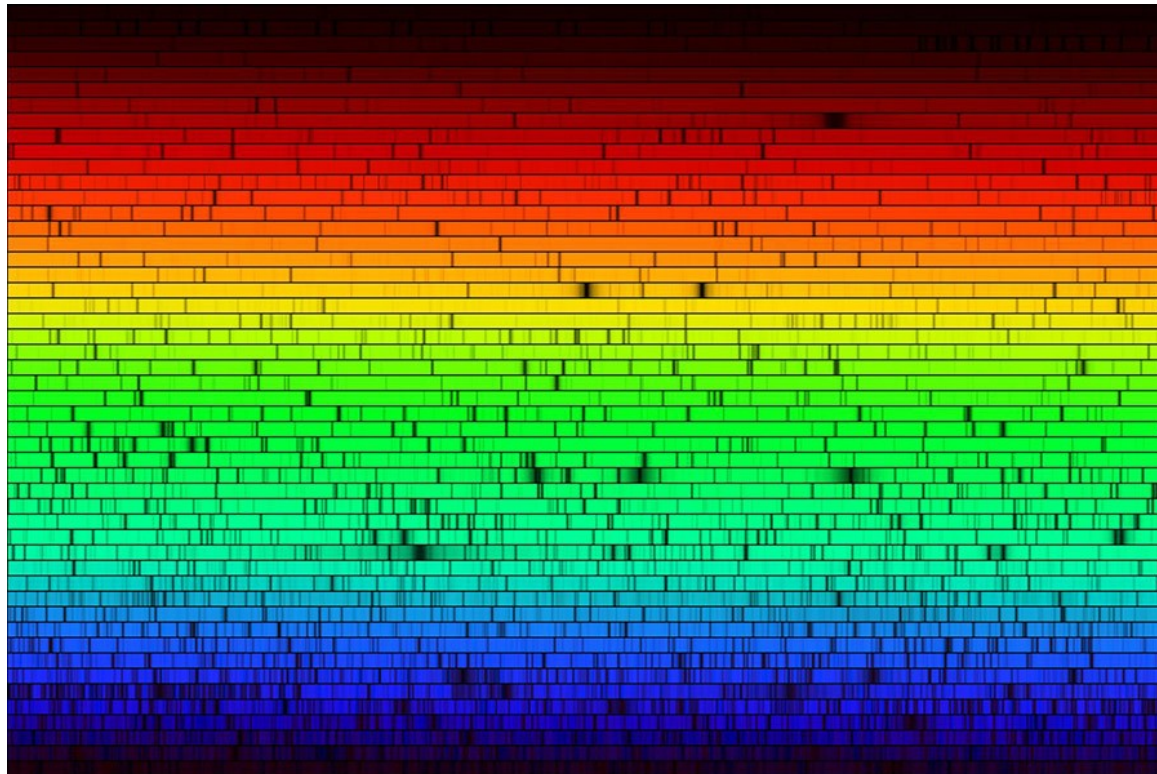
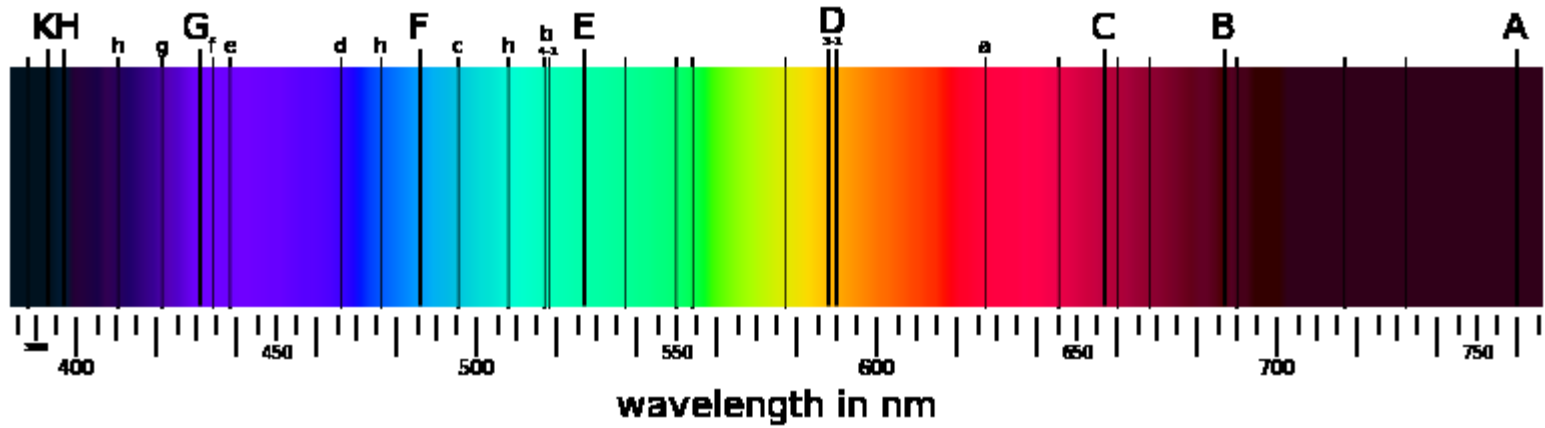


Figure 11.4 Variation of the strength of the Balmer series in stellar spectra.



# Spektrum Slunce – Fraunhoferovy čáry



# Spektrum Slunce - Fraunhoferovy čáry

## Fraunhoferovy čáry

Označení	$\lambda$ [nm]	$W$ [Å]
K, Ca II	393,368	20,253
H, Ca II	396,849	15,467
C, H $\alpha$	656,281	4,020
F, H $\beta$	486,134	3,680
h, H $\gamma$	410,175	3,133
G, H $\delta$	434,047	2,855
b <sub>1</sub> , Mg I	518,362	1,584
g, Ca I	422,674	1,476
b <sub>2</sub> , Mg I	517,270	1,259
Fe I	404,583	1,174
d, Fe I	438,356	1,008
Fe I	406,361	0,787
D <sub>2</sub> , Na I	588,997	0,752
D <sub>1</sub> , Na I	589,594	0,564

# Spektrum Slunce - Fraunhoferovy čáry

## Fraunhoferovy čáry

jejich vznik ve fotosféře

1. převládání ... směr, frekvence

2. ionizace složkami

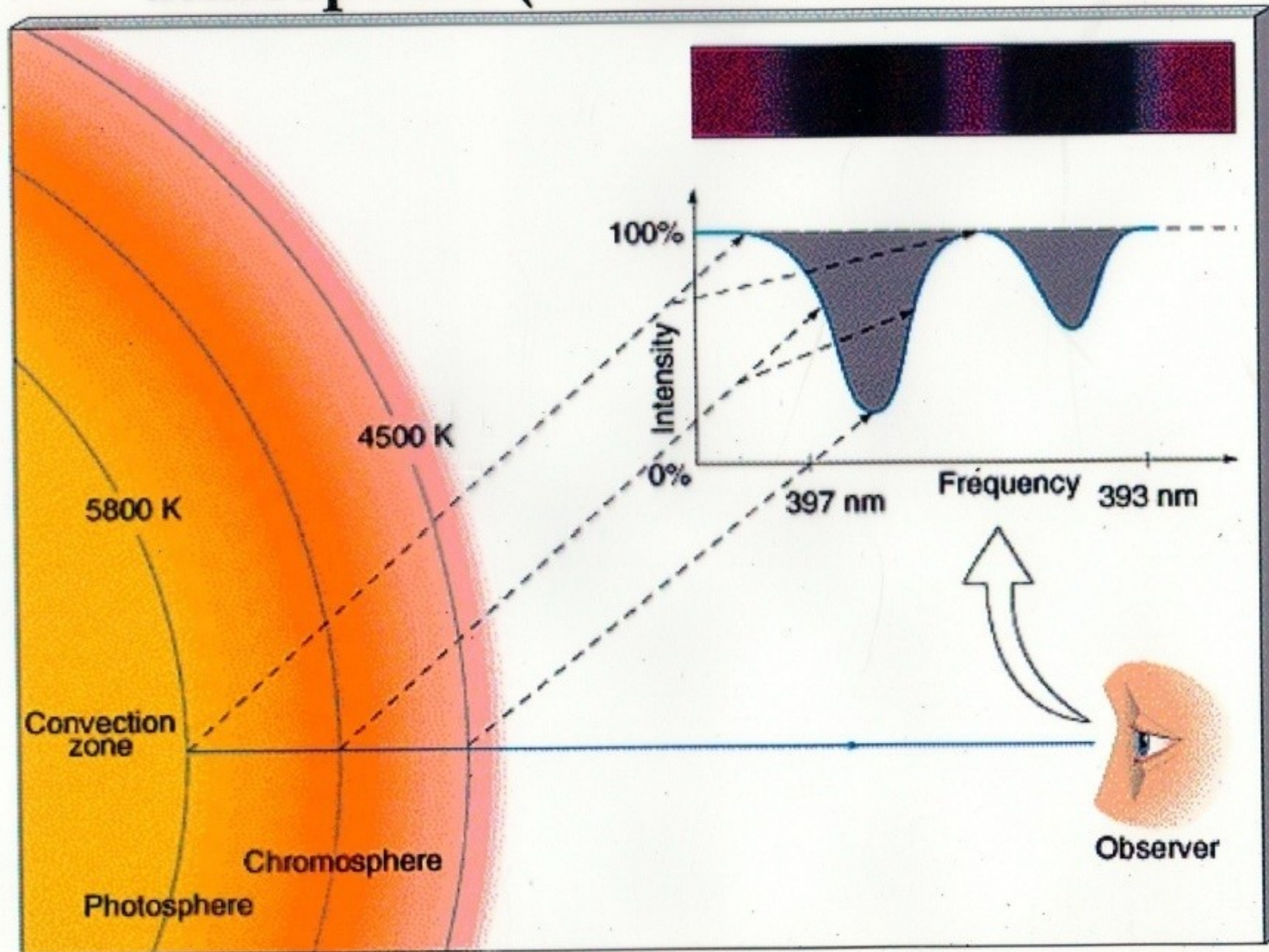
3. vzájemné působení čar, fotomycinů

Označení	$\lambda$ [nm]	Původ
A	759,4	O <sub>2</sub> , ter
B	686,7	O <sub>2</sub> , ter
C	656,3	H <sub><math>\alpha</math></sub>
D D <sub>1</sub> , D <sub>2</sub>	589,6 ; 589,0	Na I
E	527	Fe I
b <sub>1</sub> , b <sub>2</sub> , b <sub>3</sub>	518,4 ; 517,3 ; 516,7	Mg I
F	486,1	H $\beta$
f <sup>x</sup>	434,0	H $\gamma$
G	430,0	CH pářs
g <sup>x</sup>	422,7	Ca I
h <sup>x</sup>	410,2	H $\delta$
H	396,8	Ca II
K <sup>x</sup>	393,4	Ca II



# Vznik absorpčních čar ve spektru Slunce

Formation of absorption lines in the solar atmosphere (studied further in Lab #2)



# Vznik absorpčních spektrálních čar - Slunce

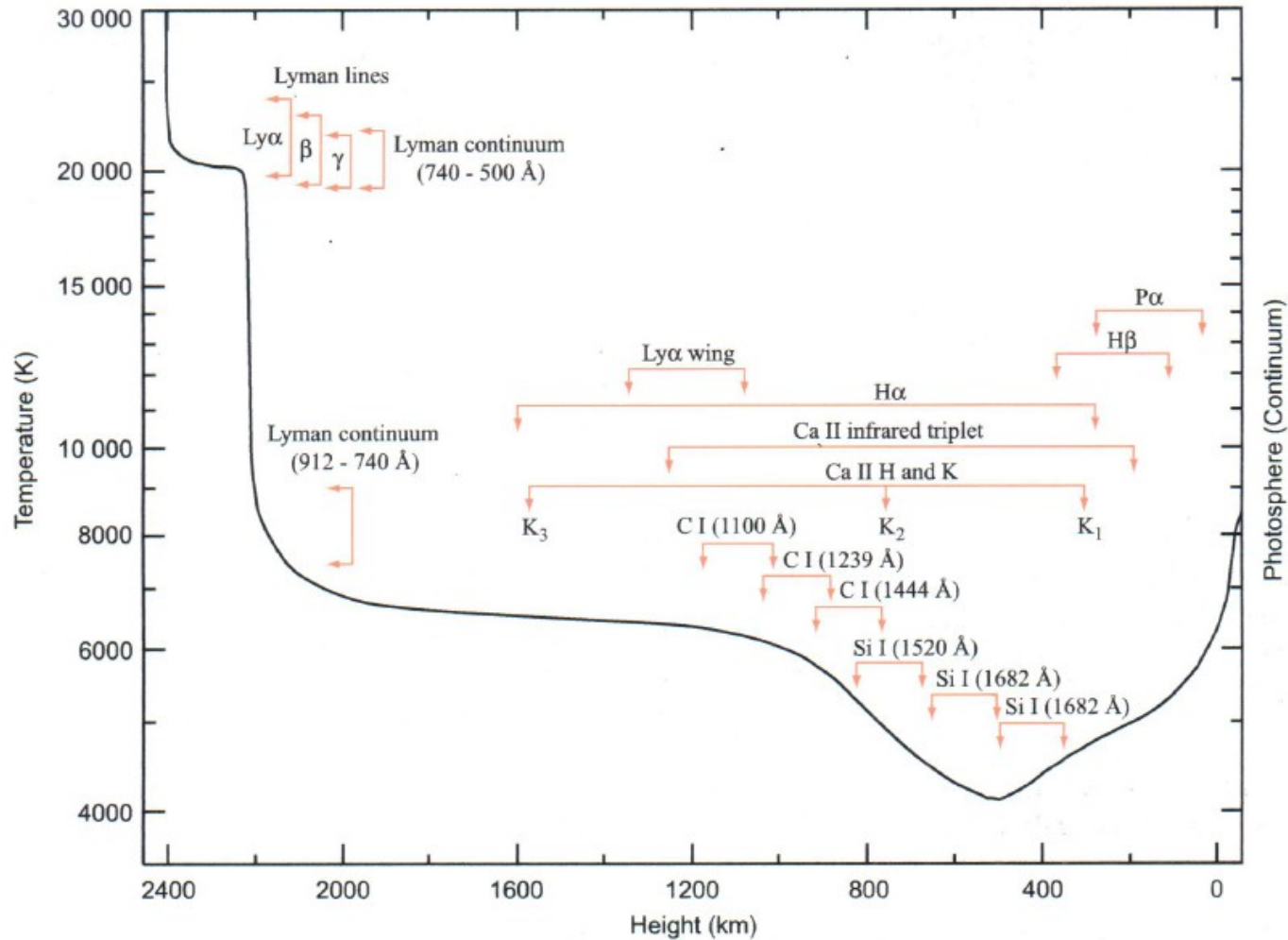


Figure 8: Temperature structure of the Sun with important line forming regions marked. The height,  $h$ , is put to zero roughly at the photosphere. Thus, at zero height we have a continuum distribution, similar to a black body with a temperature of  $T_{eff} \approx 5800$  K.

# Vznik emisních vodíkových čar

## Spektrum vodíku

nejrozšířenější prvek - spektrum hvězd, kosmosu...

$$E_b - E_a = h \nu$$

rozdíl - konečná energie = energie fotonu

$$\nu = \frac{E_b - E_a}{h} = \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 c h^3} \left( \frac{1}{n_a^2} - \frac{1}{n_b^2} \right)$$

$$E_n = - \frac{m e^4}{8 \epsilon_0^2 h^2} \left( \frac{1}{n^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

energetické hladiny

$2,17 \cdot 10^{-18} \text{ J}$

$13,6 \text{ eV}$



# Lymanova a Balmerova série vodíkových čar

Lymanova série

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{\nu}{c} = \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 ch^3} \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$= R \left( \frac{1}{1^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad n \dots 2, 3, 4, \dots$$

$R \dots 1,097 \cdot 10^7 \text{ m}^{-1}$

Balmerova série

$$\frac{1}{\lambda} = R \left( \frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$n \dots 3, 4, 5, \dots$$



# Lymanova série vodíkových čar

Lymanova série, přechod na první energetickou hladinu, ultrafialová část spektra,  $n_a = 1$ , hlavní série

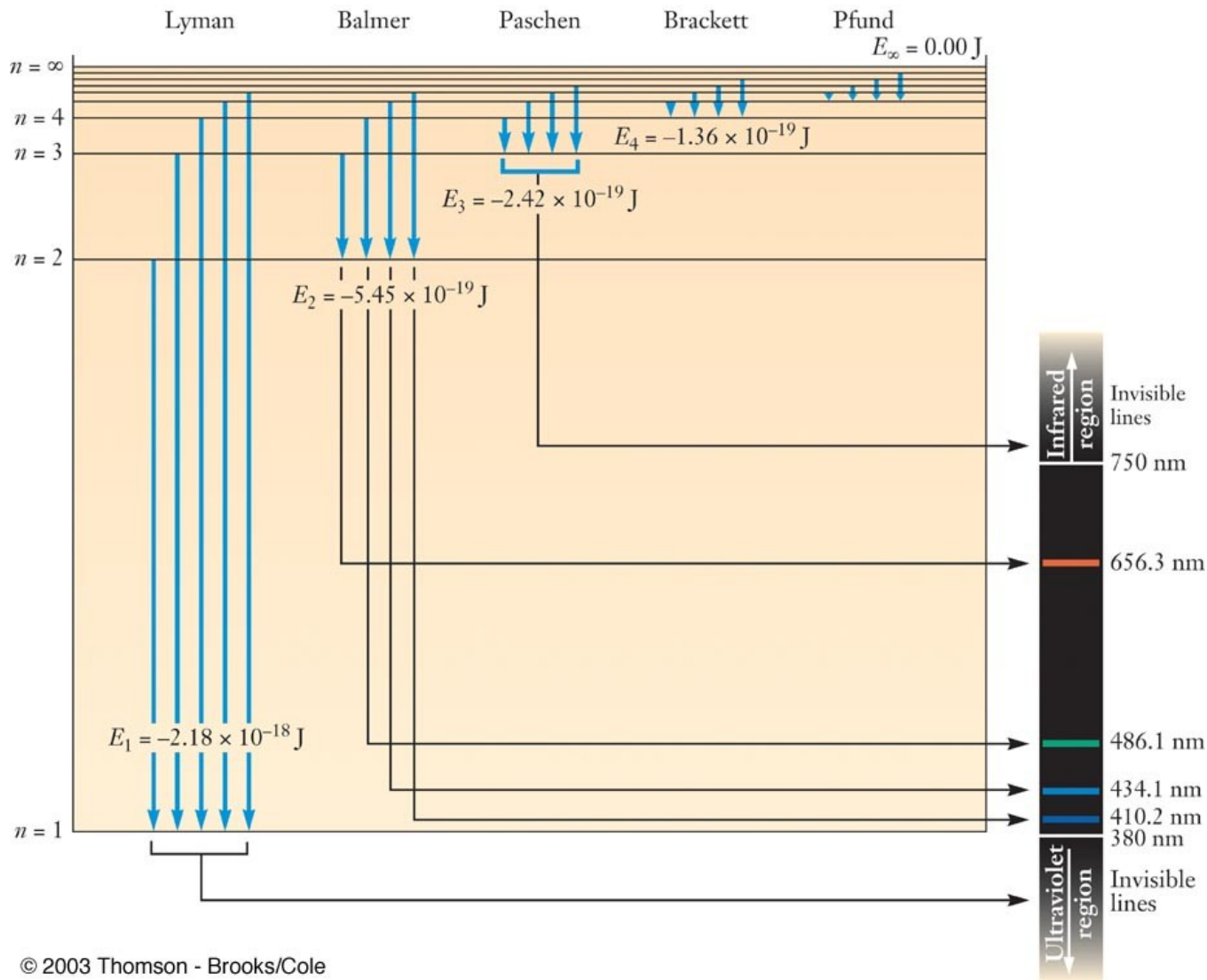
$n_b$	$\lambda$ [nm]	označení
2	121,6	$L_\alpha$
3	102,6	$L_\beta$
4	97,3	$L_\gamma$
$\infty$	91,2	hrana série
-	spojité spektrum, lymanovské kontinuum	

# Balmerova série vodíkových čar

Balmerova série, přechod na druhou energetickou hladinu,  $n_a = 2$ , viditelná oblast spektra

$n_b$	$\lambda$ [nm]	průběh
3	656,3	H $\alpha$ červená
4	486,1	H $\beta$ modrá
5	434,0	H $\gamma$ } fialová
6	410,2	H $\delta$ }
$\infty$	364,6	krana série
-	balmerovské kontinuum	

# Atom vodíku - energetické hladiny, emisní spektrum



# Výklad spektra Slunce - dobré znát

spekter hvězd, pokládám následující výpočet objasňující, proč jsou čáry K a H vápníku Ca II intenzivnější než čáry Balmerovy série vodíku, ikdyž v atmosféře Slunce připadá na 500 000 vodíkových atomů pouze 1 atom vápníku. K určení stupně ionizace použijeme Sahovu rovnici a k stanovení rozložení atomů mezi základní energetickou hladinou a první excitovanou hladinou použijeme Boltzmannovu rovnici. Budeme předpokládat elektronový tlak v atmosféře Slunce 1,5 Pa. Nejprve provedeme výpočet pro vodík:

$$\text{Ze Sahovy rovnice obdržíme } \frac{N_{II}}{N_I} = 7,47 \cdot 10^{-5} = \frac{1}{13400} .$$

Tedy jeden vodíkový iont H II připadá na každých 13 000 neutrálních vodíkových atomů v atmosféře Slunce.

$$\text{Dosazením do Boltzmannovy rovnice obdržíme } \frac{N_2}{N_1} = 4,96 \cdot 10^{-9} = \frac{1}{202000000} .$$

Pouze jeden z 200 miliónů vodíkových atomů se nachází na druhé energetické hladině a může způsobit vznik absorpčních čar Balmerovy série.

$$\text{Celkově } \frac{N_2}{N_{\text{celk}}} = \frac{N_2}{N_1 + N_2} \frac{N_I}{N_{\text{celk}}} = 4,96 \cdot 10^{-9} .$$



# Výklad spektra Slunce

Obdobný výpočet provedeme pro vápník: Ionizační potenciál neutrálního vápníku je pouze 6,11 eV, tedy je poloviční proti ionizačnímu potenciálu vodíku 13,6 eV. Tato skutečnost má podstatný vliv na stav ionizace atomů, neboť Saha rovnice je velmi citlivá k hodnotě ionizačního potenciálu, protože  $\chi_i / kT$  je v exponentu a  $kT \approx 0,5 \text{ eV} \ll \chi_i$ .

Ze Sahovy rovnice dostáváme po dosazení  $\frac{N_{II}}{N_I} = 903$ .

Pouze jeden z každých 900 atomů vápníku je neutrální, prakticky téměř všechny atomy vápníku jsou ve stavu 1 x ionizovaného atomu vápníku. Výpočtem z Boltzmannovy rovnice pro obsazení excitovaných stavů obdržíme  $\frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{265}$ , tedy  $N_1 = 265 N_2$ .

Většina atomů se nachází v základním energetickém stavu. Shrnuto převážná většina atomů vápníku je 1 x ionizována Ca II a je v základním energetickém stavu. Tudiž existují vhodné podmínky pro vznik čar K a H Ca II.

$$\frac{N_1}{N_{celk}} \cong \frac{N_1}{N_1 + N_2} \frac{N_{II}}{N_{celk}} = \frac{1}{1 + \frac{N_2}{N_1}} \frac{\frac{N_{II}}{N_I}}{1 + \frac{N_{II}}{N_I}} = 0,995 .$$

# Výklad spektra Slunce

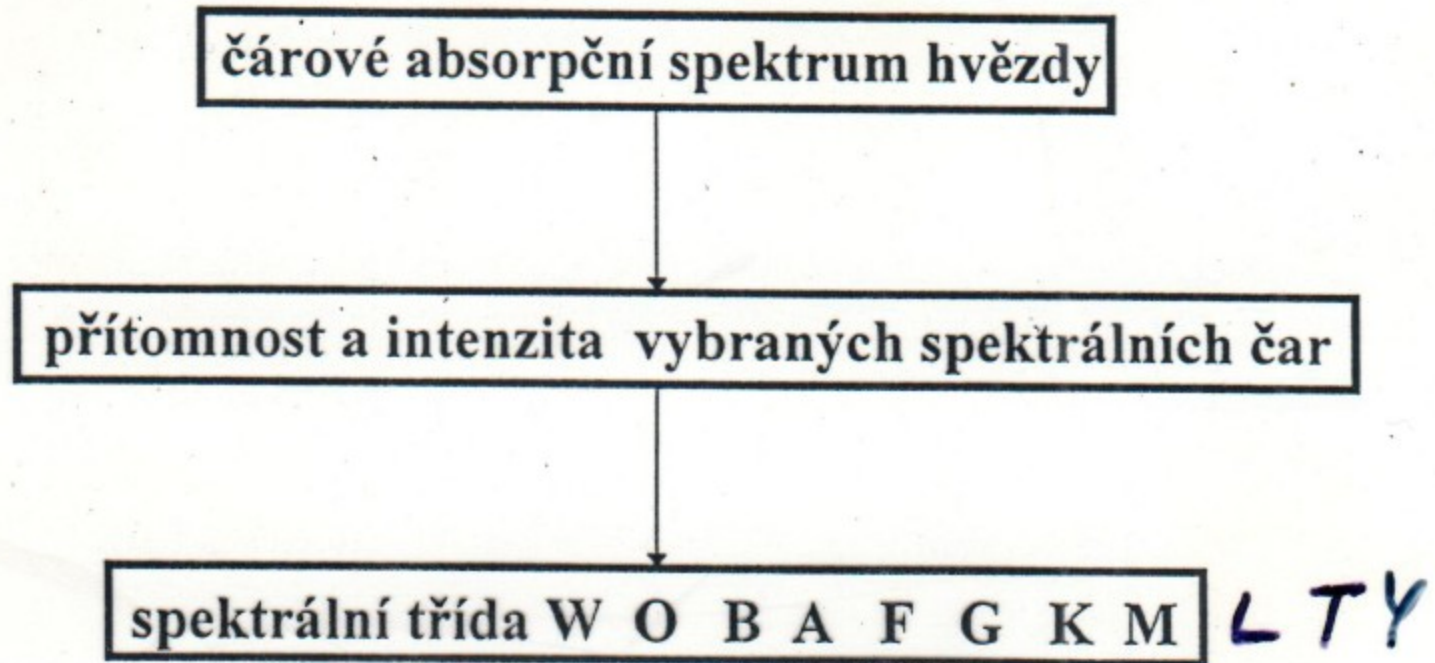
Nyní je zřejmé, proč čáry Ca II jsou intenzivnější ve spektru Slunce než čáry vodíku Balmerovy série. V atmosféře na 500 000 vodíkových atomů připadá pouze 1 atom vápníku, ale pouze  $4,96 \cdot 10^{-9}$  z těchto vodíkových atomů je neionizováno a nachází se na druhé energetické hladině, z které při přechodech mohou vznikat absorpční čáry Balmerovy série vodíku. Vynásobením obou uvedených údajů obdržíme

$$500\,000 \cdot 4,96 \cdot 10^{-9} = 0,0025 = \frac{1}{400} .$$

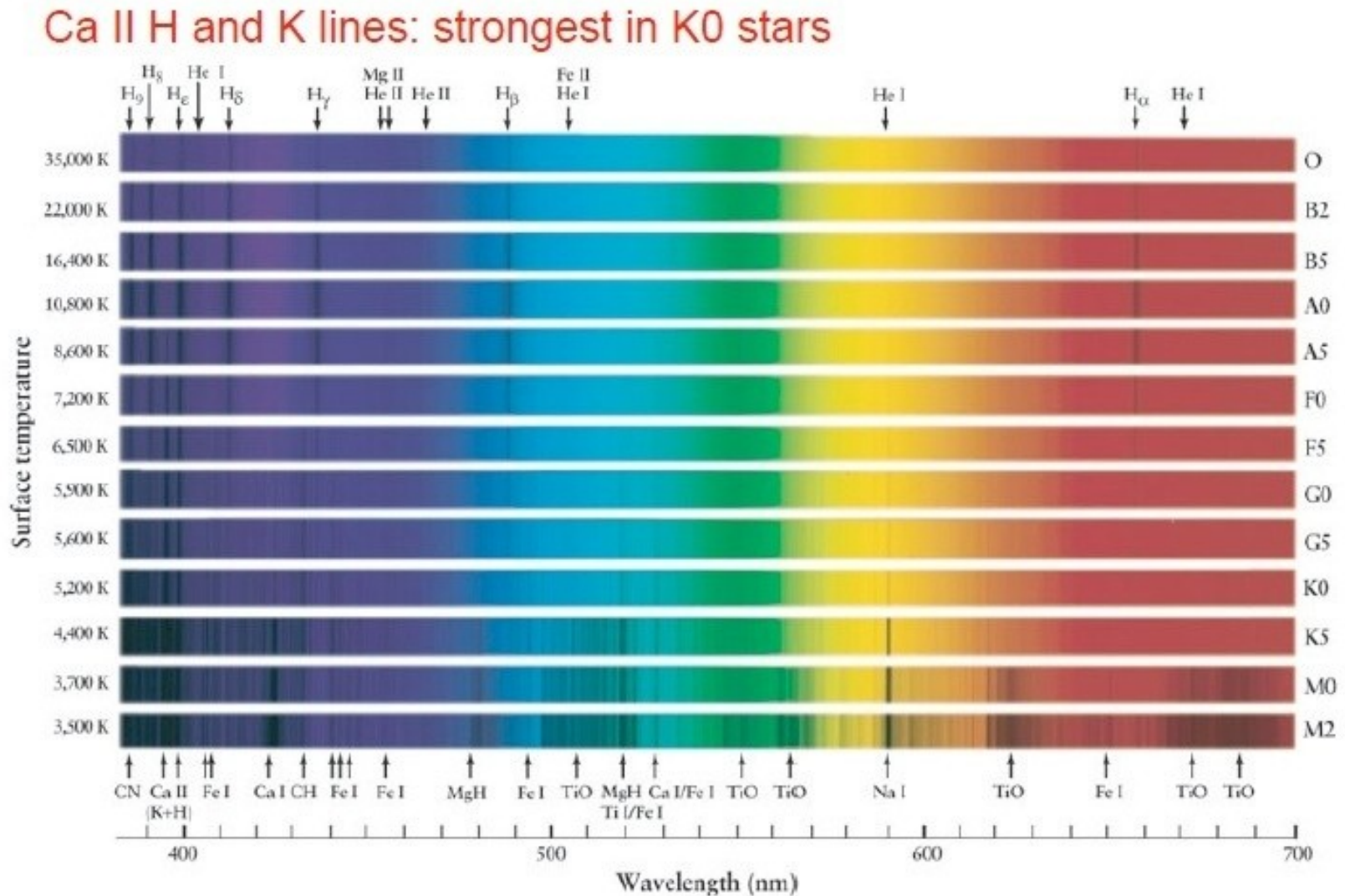
Tedy v atmosféře Slunce existuje 400 x více vápníkových iontů Ca II v základním energetickém stavu umožňujícím vznik K a H spektrálních čar než neutrálních vodíkových atomů na druhé energetické hladině (v prvním excitovaném stavu) umožňujícím vznik čar Balmerovy série. **Intenzita čar K a H Ca II není způsobena celkovým větším množstvím vápníku v atmosféře Slunce, ale citlivější teplotní závislostí jeho atomových stavů excitace a ionizace.**

# Harvardská spektrální klasifikace

Schéma struktury spektrální klasifikace je následující:

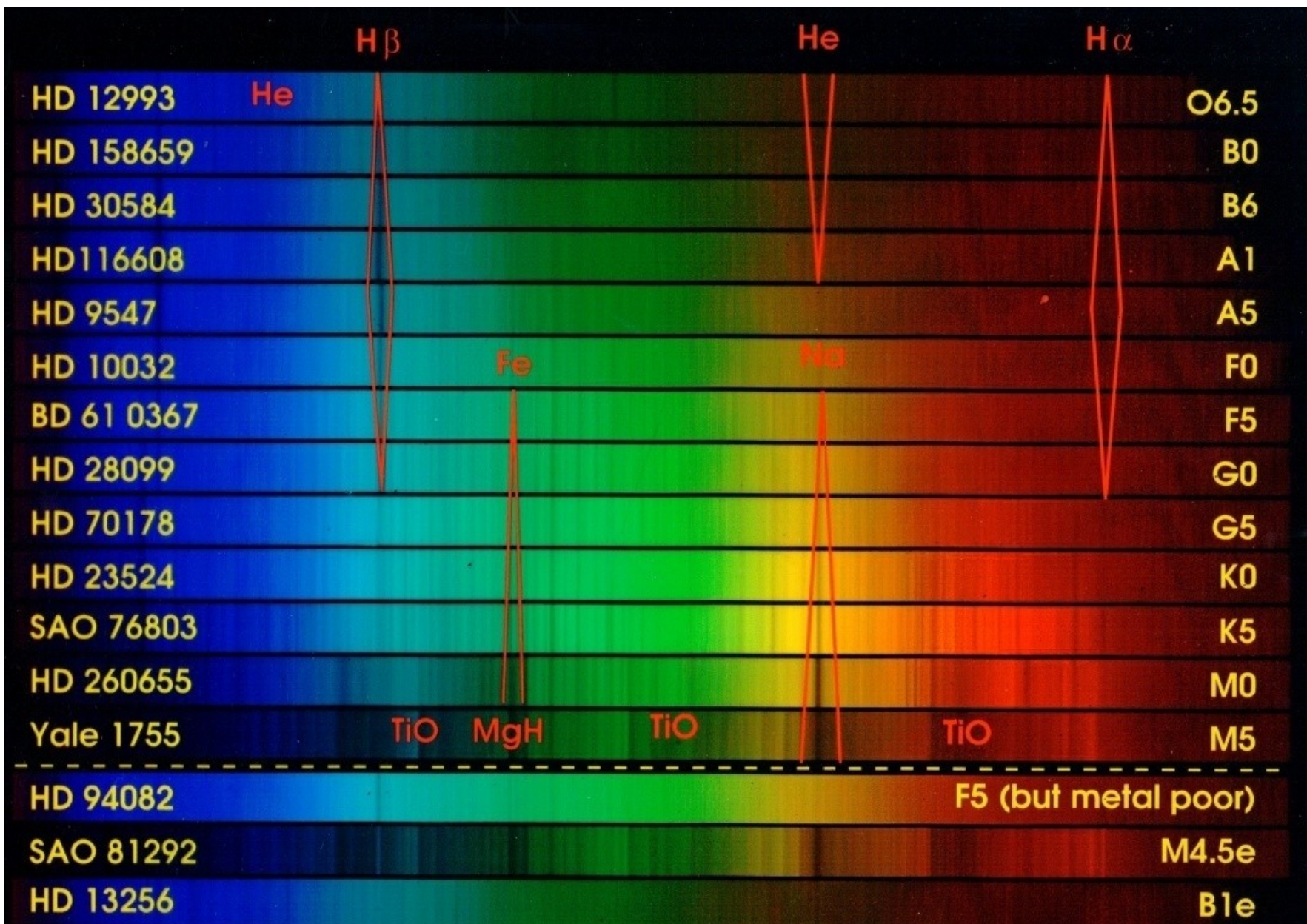


# Harvardská spektrální klasifikace - ukázky





# Spektra hvězd



Annie Cannon: Strength of absorption lines varies with spectral type.



# Harvardská spektrální klasifikace

A0–A2	Si II 385.6/Ca II 393.4, Fe II 423.3/Mg II 448.1 and Si II 412.8/ Mg II 448.1. The Balmer line wings can be used between classes III and I
A2–A3	The Balmer line wings plus Fe II–Ti II blend at 402.5/Fe I 404.6, Fe II 423.3/Fe II 422.7 and Fe II 441.7 and Fe I, II 438.3–438.5/Mg II 448.1
A3–A7	The Balmer line wings plus Ti II 401.2/Fe I 400.5, Fe II–Ti II blend at 402.5/Fe I 400.5, 404.6, Fe II–Ti II blend at 417.3+Fe II 417.9/Fe I 414.4, Fe II 423.3/Ca I 422.7 and Ca I 441.7 and Fe II, Ti II 441.7/Mg II 448.1
A9–F1	Y II 398.3/Fe I 400.5, Fe II–Cr II 400.2 blend/Fe I 400.5, Fe II–Ti II blend at 402.5/Fe I 400.5, 404.6, Sr II 407.8/Fe I 404.6, Fe II 417.9/Fe I 414.4, Fe II–Ti II blend at 417.3 /Ca I 422.7 and Sr II 421.6/Ca I 422.7
F2–F5	Y II 398.3/Fe I 400.5, Fe II–Cr II 400.2 blend/Fe I 400.5, Fe II–Ti II blend at 402.5/Fe I 400.5, 404.6, Sr II 407.8/Fe I 404.6, Fe II 417.9/Fe I 414.4, Fe II–Ti II blend at 417.3 /Ca I 422.7+Fe I 414.4, Sr II 421.6/Fe I 414.4, Fe I 441.7 and Ti II 444.4/Mg II 448.1 and Ba II 455.4/Mg II 448.1
F7–F9	Y II 398.3/Fe I 400.5, Fe II–Ti II blend at 402.5/Fe I 400.5, Sr II 407.8/H I 410.2+Fe I 404.6, Fe II 412.9, 417.9/Fe I 414.4, Sr II 421.6+Sc II 424.7/Fe I 414.4 and Ba II 455.4/Mg II 448.1
G0–G2	Y II 398.3/Fe I 400.5, Sr II 407.8/H I 410.2+Fe I 404.6, 406.4, Fe II 417.9/Fe II 417.3 and Sr II 421.6/Fe I 414.4
G5–G8	Sr II 407.8/Ca I 422.7+Fe I 404.6, 406.4, Sr II 421.6/Fe I 414.4, 427.2+Ca I 422.6 and Ti II 440.0, 440.8/Fe I 440.5
G8–K0	CN discontinuity in the continuum at 421.6, plus Sr II 407.8/Fe I 404.6, 406.4, 407.2, Sr II 421.6/Fe I 414.4, 427.2, Ti II 440.0, 440.8/Fe I 440.5 and Fe I 444.4/Fe I 440.5
K2–K4	CN discontinuity in the continuum at 421.6, plus Sr II 407.8/Fe I 404.6, 406.4, 407.2, H I 401.2/Fe I 406.4, 407.2, 414.4, Sr II 421.6/Fe I 414.4, 427.2 and Ti II 440.0, 440.8/Fe I 440.5
K5–M0	Sr II 407.8/Fe I 406.4, 407.2, H I 401.2/Fe I 406.4, 407.2, 414.4 and Sr II 421.6/Fe I 414.4+Ti I 418.6
M0–M1	Sr II 407.8/Fe I 404.6, 406.4, H I 401.2/Fe I 414.4, Sr II–Fe I blend at 421.6/Fe I 414.4 and Fe I 437.5, 438.9/Fe I 438.4
M1–M4	Sr II 407.8/Fe I 404.6, 406.4, 407.2, 426.3, H I 401.2/Fe I 404.6, 414.4, Sr II–Fe I blend at 421.6/Fe I 414.4, 425.1 and Fe I 437.5, 438.9/Fe I 438.4

# Harvadská spektrální klasifikace-označení spektra

## Označení spektra

(W) - O - B - A - F - G - K - M - L - T - Y

jemnější desetinné dělení A0, A1, ... A9

e - emisní čáry

n - neviditelné, difúzní čáry

s - oslabené čáry

v - proměnné čáry

m - metalické čáry

přípony

c - celestr

g - obr

d - kvasdík

sd - podkvasdík

wd - bílý kvasdík

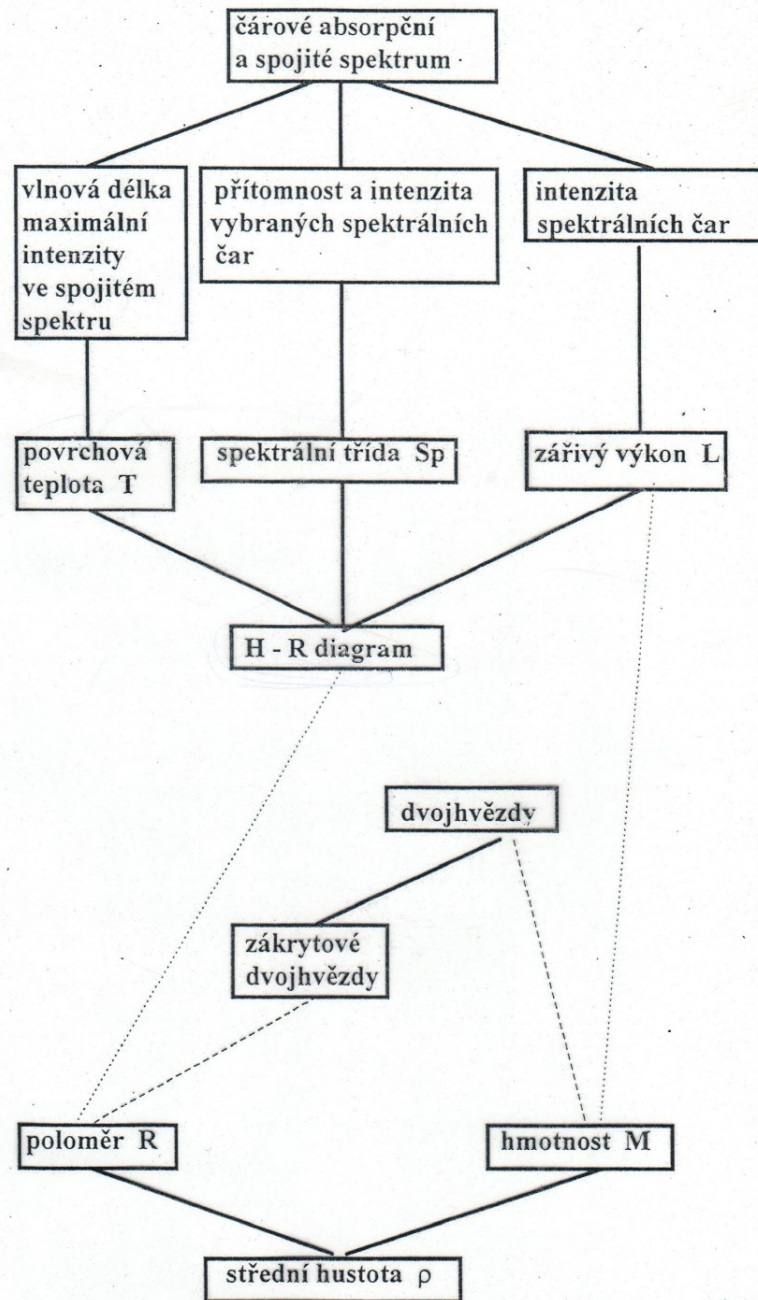
předpony

# Třídy svítivosti (zářivého výkonu) – luminosity

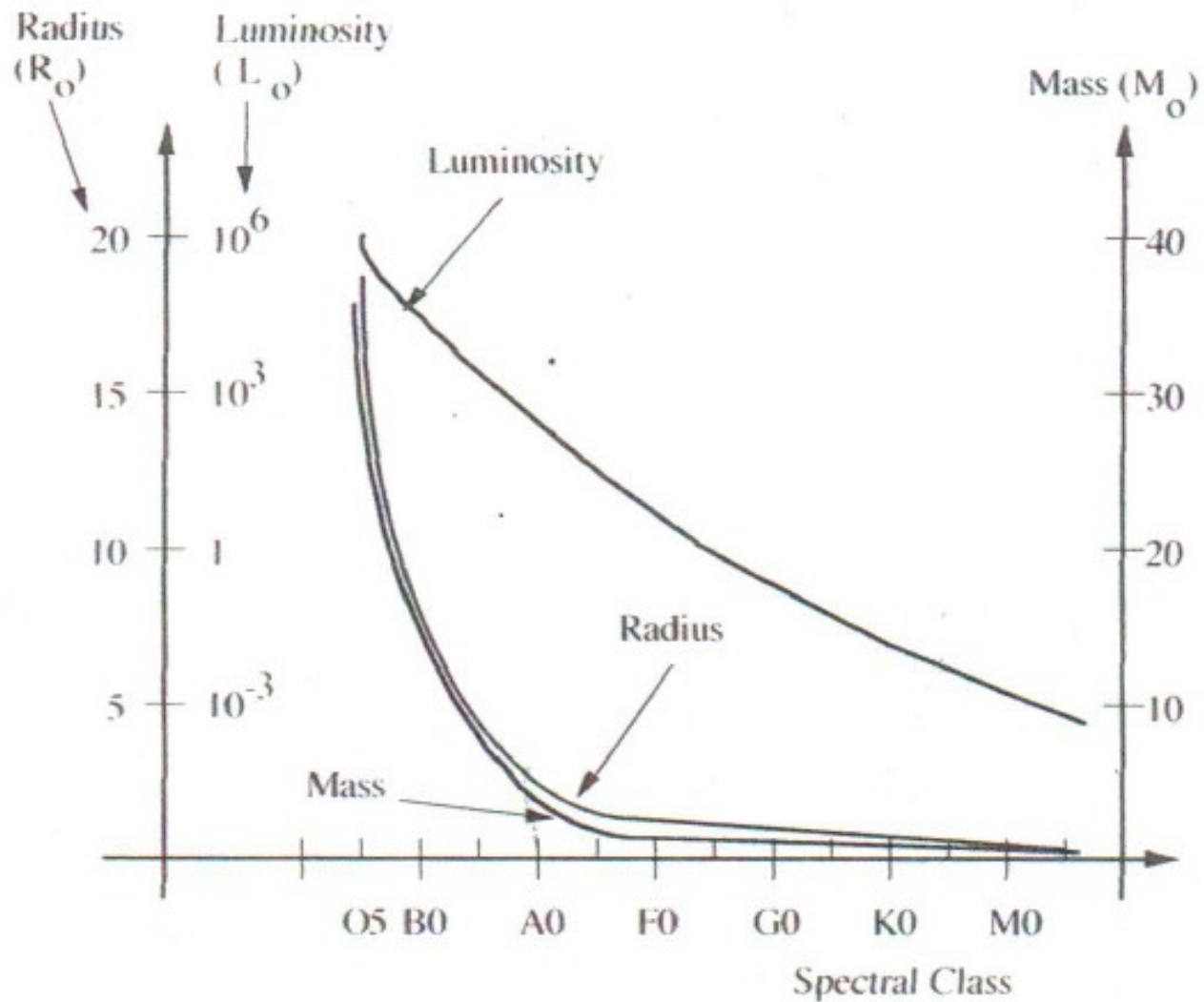
- Ia - velmi jasný veleobr
- Ib - méně jasný veleobr
- II - jasný obr
- III - normální obr
- IV - podobr
- V - tepalík (hvězda hlavní posloupnosti A-)
- VI - podtepalík
- VII - bílý tepalík



# Určování charakteristik ze spektra



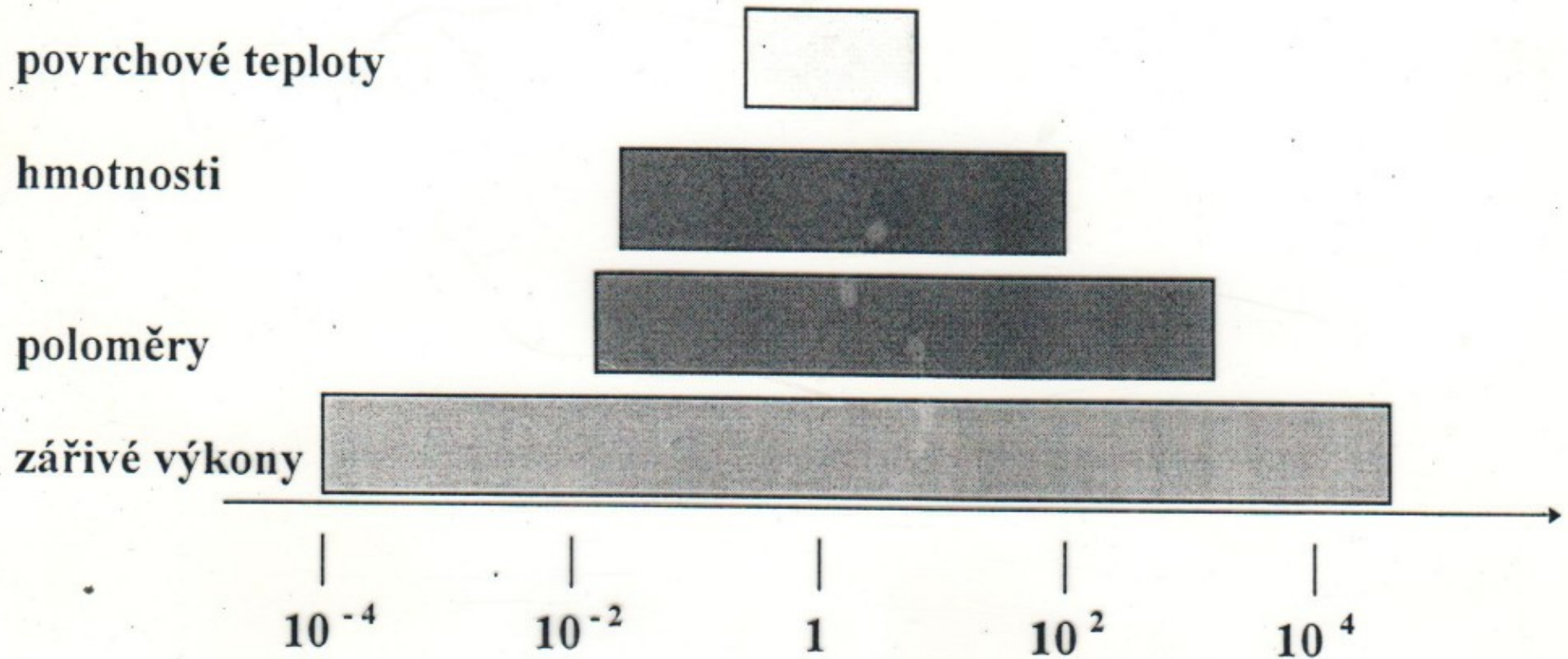
# Rozsah charakteristik hvězd



**Figure 11.5** The variation of stellar size, mass and luminosity for main sequence stars with spectral class.

# Rozsah charakteristik hvězd

Rozsah charakteristik hvězd vyjádřený v odpovídajících jednotkách Slunce





# Vlastnosti charakteristik hvězd

hmotnosti ( $10^{-2} - 10^2$ )  $M_S$

poloměry ( $10^{-2} - 10^3$ )  $R_S$

povrchové teploty ( $10^3 - 10^6$ ) K

zářivé výkony ( $10^{-6} - 10^7$ )  $L_S$

**odlišnost charakteristik – zachycení**

**různých vývojových stadií hvězd –**

**charakteristiky – poloměr, teplota, zářivý**

**výkon se s časem mění**