Seminář z matematiky II – jaro 2023 – 2. písemka

Všechna svoje tvrzení zdůvodněte.

1. **(5 bodů)** Buď V vektorový prostor, $v_1, \ldots, v_n \in V$ vektory a $\varphi\colon V \to V$ lineární zobrazení. Přímo z definice lineární nezávislosti dokažte, že jsou-li vektory $v_1 - \varphi(v_1), \ldots, v_n - \varphi(v_n)$ lineárně nezávislé, tak i vektory $v_1, \ldots, v_n$ jsou lineárně nezávislé. Ukažte, že opačná implikace obecně neplatí.

2. **(5 bodů)** Buď V vektorový prostor nad $\mathbb{R}$, $v_1, \ldots, v_n$ jeho báze a $v \in V$ vektor. Dokažte, že vektory $v_1 - v, \ldots, v_n - v$ jsou lineárně závislé právě tehdy, když existují $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ splňující $a_1 + \cdots + a_n = 1$ a $a_1 v_1 + \cdots + a_n v_n = v$.

3. **Prémiový příklad (3 body)** Buď V vektorový prostor nad tělesem K a $v_1, \ldots, v_n$ jeho báze, přičemž $n \geq 1$. V případech $K = \mathbb{R}$ a $K = \mathbb{Z}_2$ rozhodněte, pro které permutace π množiny $\{1, \ldots, n\}$ je $v_1 + v_{\pi(1)}, \ldots, v_n + v_{\pi(n)}$ báze prostoru V.