

Jméno:

1	2	3	Celkem

1. písemka ze semináře z matematiky II

1. (4 body)

Nechť f a g jsou reálné funkce takové, že pro $a \in \mathbb{R}$ je $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \in \mathbb{R}$ a $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$. Dokažte z definice limity, že

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \infty.$$

2. (4 body)

Vektory u_1, u_2, \dots, u_k ve vektorovém prostoru U nad \mathbb{K} tvoří bázi, jestliže platí:

(1) $(\forall u \in U) \exists (a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}^k : u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k.$

(2) $\forall (a_1, a_2, \dots, a_k) \in \mathbb{K}^k : a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = \mathbf{0} \Rightarrow a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0.$

Dokažte, že podmínky (1) a (2) jsou ekvivalentní s podmínkou

(3) $(\forall u \in U) \exists! (a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}^k) u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$

Symbol $\exists!$ znamená *existuje právě jedno*.

3. (4 body)

Definujte infimum množiny reálných čísel. Pomocí infima ukažte, že každá klesající funkce $f : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ má vlastní limitu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L \in \mathbb{R}.$$