Program 6. semináře z matematiky II

Řešení písemky

1. Nechť funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá v bodě a a $f(a) \neq 0$. Dokažte, že funkce $1/f(x)$ je definována na nějakém okolí bodu a a je v bodě a spojitá.

2. Nechť $U = \{a\sqrt{3} + b\sqrt{5} \in \mathbb{R}; a, b \in \mathbb{Q}\}$. Dokažte:

(a) U je vektorový prostor nad racionálními čísly $\mathbb{Q}$ (1 bod),
(b) Reálná čísla $\sqrt{3}$ a $\sqrt{5}$ tvoří jeho bázi (3 body).

3. Nechť M je podmnožina intervalu $[a, b]$ s těmito vlastnostmi:

(1) $a \in M$,
(2) Je-li $x \in M$ a $x \neq b$, pak existuje $\delta > 0$ takové, že $[x, x + \delta) \subseteq M$,
(3) Je-li $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ rostoucí posloupnost prvků množiny M a

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x,$$

pak $x \in M$.

Dokažte, že $M = [a, b]$.

Řešení domácí úlohy

4 Nechť $[a_n, b_n]$ pro $n \in \mathbb{N}$ je systém do sebe vložených intervalů $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$. Pomocí suprema vhodné množiny dokažte, že průnik všech těchto intervalů je neprázdný, tj.

$$\cap_n^{\infty}[a_n, b_n] \neq \emptyset.$$

Ukažte, že tvrzení neplatí pro otevřené intervaly.

5. Cauchyova nutná a postačující podmínku pro existenci vlastní limity $\lim_{x\to a} f(x)$ je

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists \delta > 0)\ (\forall x, y \in (a - \delta, a + \delta) - \{a\})\ |f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

(1) Dokažte, že je to podmínka nutná.
(2) Pomocí této podmínky dokažte, že $\lim_{x\to 0} \sin \frac{1}{x}$ neexistuje.

6. Nechť U je vektorový prostor se skalárním součinem a nechť $P : U \to U$ je kolmá projekce na podprostor $V \subset U$. Dokažte, že

(1) $P \circ P = P$ (symbol $\circ$ znamená skládání zobrazení).
(2) Pro všechna $u, v \in U$ platí

$$\langle Pu, v\rangle = \langle u, Pu\rangle.$$

($\langle u, v\rangle$ značí skalární součin.)