Užití rekurentní formule pro binomické koeficienty k dokazování kombinatorických identit

Naším úkolem je dokázat, že pro každé nezáporné celé číslo n platí rovnost

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} \cdot 2^k = 2^{2n}.$$

Postupujeme indukcí vzhledem k hodnotě n. Pro $n = 0$ tvrzení platí. Předpokládejme dále, že tvrzení platí pro nějaké nezáporné celé číslo n, a dokažme, že pak toto tvrzení platí také pro číslo $n+1$. Označme nejprve

$$Q_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n-k}{n} \cdot 2^k.$$

Pak podle našeho předpokladu pro dané číslo n platí $Q_n = 2^{2n}$. K uskutečnění indukčního kroku potřebujeme vypočítat hodnotu Q_{n+1}. Přepišme nejprve poněkud naše vyjádření hodnoty Q_n. Položme $\ell = n - k$. Pak můžeme psát

$$Q_n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n+\ell}{n} \cdot 2^{n-\ell} = 2^n \cdot \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n+\ell}{\ell} \cdot \frac{1}{2^\ell}.$$

Takže dostáváme vyjádření

$$\frac{1}{2^n} \cdot Q_n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n+\ell}{\ell} \cdot \frac{1}{2^\ell}.$$

Podobně obdržíme též vyjádření

$$\frac{1}{2^{n+1}} \cdot Q_{n+1} = \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+\ell+1}{\ell} \cdot \frac{1}{2^\ell}.$$

Odtud dostáváme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{n+1}} \cdot Q_{n+1} &= 1 + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+\ell+1}{\ell} \cdot \frac{1}{2^\ell} \\ &= 1 + \sum_{\ell=1}^{n+1} \left(\binom{n+\ell}{\ell-1} + \binom{n+\ell}{\ell} \right) \cdot \frac{1}{2^\ell}\end{aligned}$$

s využitím rekurentní formule pro binomické koeficienty. Dalšími úpravami tohoto posledního vyjádření pak obdržíme

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2^{n+1}} \cdot Q_{n+1} &= 1 + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+\ell}{\ell-1} \cdot \frac{1}{2^\ell} + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+\ell}{\ell} \cdot \frac{1}{2^\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n+\ell+1}{\ell} \cdot \frac{1}{2^{\ell+1}} + 1 + \sum_{\ell=1}^{n+1} \binom{n+\ell}{\ell} \cdot \frac{1}{2^\ell} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+\ell+1}{\ell} \cdot \frac{1}{2^\ell} - \binom{2n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} \\
&\qquad + \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n+\ell}{\ell} \cdot \frac{1}{2^\ell} + \binom{2n+1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \sum_{\ell=0}^{n+1} \binom{n+\ell+1}{\ell} \cdot \frac{1}{2^\ell} + \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n+\ell}{\ell} \cdot \frac{1}{2^\ell},
\end{aligned}
$$

poněvadž

$$
\begin{aligned}
\binom{2n+2}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} &= \frac{(2n+2)!}{(n+1)! \cdot (n+1)!} \cdot \frac{1}{2^{n+2}} \\
&= \frac{(2n+1)!}{(n+1)! \cdot n!} \cdot \frac{1}{2^{n+1}} = \binom{2n+1}{n+1} \cdot \frac{1}{2^{n+1}}.
\end{aligned}
$$

To ale znamená, že platí rovnost

$$\frac{1}{2^{n+1}} \cdot Q_{n+1} = \frac{1}{2^{n+2}} \cdot Q_{n+1} + \frac{1}{2^n} \cdot Q_n,$$

odkud vychází

$$\frac{1}{2^{n+2}} \cdot Q_{n+1} = \frac{1}{2^n} \cdot Q_n,$$

takže

$$Q_{n+1} = 4\, Q_n.$$

Protože podle indukčního předpokladu máme $Q_n = 2^{2n}$, dostáváme odtud

$$Q_{n+1} = 4 \cdot 2^{2n} = 2^{2n+2},$$

což bylo třeba dokázat.