Užití binomické věty k dokazování kombinatorických identit

Naším úkolem je dokázat, že pro každé nezáporné celé číslo n platí rovnost

$$\sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{n}{j} \binom{2j}{n} = (-2)^n.$$

K tomu účelu využijeme evidentně platné rovnosti polynomů

$$((x-1)^2-1)^n = x^n(x-2)^n.$$

V tomto vztahu rozvineme všechny závorky podle binomické věty a porovnáme koeficienty u jednotlivých mocnin proměnné x.

Rozvoj závorky na levé straně vztahu vychází

$$((x-1)^2-1)^n = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(x-1)^{2j}(-1)^{n-j} = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{n}{j}(x-1)^{2j}.$$

Rozvoj poslední závorky v této sumě je

$$(x-1)^{2j} = \sum_{k=0}^{2j} \binom{2j}{k} x^k (-1)^{2j-k} = \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2j-k} \binom{2j}{k} x^k,$$

neboť $\binom{2j}{k} = 0$ pro $k > 2j$. Odtud pak po dosazení do předchozí rovnosti vychází

$$\begin{aligned}
((x-1)^2-1)^n &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \left(\sum_{k=0}^{2n} (-1)^{2j-k} \binom{2j}{k} x^k \right) \\
&= \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n+j-k} \binom{n}{j} \binom{2j}{k} x^k \\
&= \sum_{k=0}^{2n} (-1)^{n-k} \left(\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2j}{k} \right) x^k.
\end{aligned}$$

Rozvoj závorky na pravé straně výše uvedeného vztahu je

$$(x-2)^n = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} x^\ell (-2)^{n-\ell} = \sum_{\ell=0}^{n} (-2)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} x^\ell,$$

takže dostáváme

$$x^n (x-2)^n = \sum_{\ell=0}^{n} (-2)^{n-\ell} \binom{n}{\ell} x^{n+\ell} = \sum_{k=n}^{2n} (-2)^{2n-k} \binom{n}{k-n} x^k.$$

Odtud porovnáním koeficientů u mocnin x^k proměnné x pro všechny hodnoty $0 \leqslant k \leqslant 2n$ v rozvojích obou stran vztahu obdržíme

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2j}{k} = 0 \qquad \text{pro } 0 \leqslant k < n,$$

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \binom{2j}{k} = (-1)^n \, 2^{2n-k} \binom{n}{k-n} \qquad \text{pro } n \leqslant k \leqslant 2n.$$

Zejména pro $k = n$ z poslední rovnosti plyne dokazovaná kombinatorická identita.