Möbiovy inverzní formule

Dokážeme obecnou abstraktní větu o Möbiových inverzních formulích.

Věta.

Buď P částečně uspořádaná množina, v níž všechny hlavní ideály jsou konečnými podmnožinami. Buď K těleso chrakteristiky 0. Pak pro libovolné funkce $f, g : P \to K$ platí rovnosti

$$g(a) = \sum_{x \leqslant a} f(x) \quad \textit{pro všechna } a \in P$$

právě tehdy, když platí rovnosti

$$f(a) = \sum_{x \leqslant a} g(x)\mu_P(x, a) \quad \textit{pro všechna } a \in P,$$

kde μ_P je Möbiova funkce částečně uspořádané množiny P.

Důkaz.

Nechť rovnosti $g(a) = \sum_{x \leqslant a} f(x)$ platí pro všechna $a \in P$. Pak dosazením za $g(x)$ do sumy $\sum_{x \leqslant a} g(x)\mu_P(x,a)$ pro kterékoliv $a \in P$ postupně vyjde

$$\begin{aligned}
\sum_{x \leqslant a} g(x)\mu_P(x,a) &= \sum_{x \leqslant a}\Big(\sum_{y \leqslant x} f(y)\Big)\mu_P(x,a) \\
&= \sum_{x \leqslant a}\Big(\sum_{y \leqslant x} f(y)\zeta_P(y,x)\Big)\mu_P(x,a) \\
&= \sum_{x \leqslant a}\sum_{y \leqslant x} f(y)\zeta_P(y,x)\mu_P(x,a) \\
&= \sum_{y \leqslant a}\sum_{y \leqslant x \leqslant a} f(y)\zeta_P(y,x)\mu_P(x,a) \\
&= \sum_{y \leqslant a} f(y)\Big(\sum_{y \leqslant x \leqslant a} \zeta_P(y,x)\mu_P(x,a)\Big) \\
&= \sum_{y \leqslant a} f(y)(\zeta_P * \mu_P)(y,a) \\
&= \sum_{y \leqslant a} f(y)\delta(y,a) = f(a),
\end{aligned}$$

což bylo třeba ukázat.

Nechť naopak rovnosti $f(a) = \sum_{x \leqslant a} g(x)\mu_P(x,a)$ platí zase pro všechna $a \in P$. Pak rozepsáním $f(x)$ v sumě $\sum_{x \leqslant a} f(x)$ pro kterékoliv $a \in P$ postupně vyjde

$$\begin{aligned}
\sum_{x \leqslant a} f(x) &= \sum_{x \leqslant a} \sum_{y \leqslant x} g(y)\mu_P(y,x) \\
&= \sum_{x \leqslant a} \sum_{y \leqslant x} g(y)\mu_P(y,x)\zeta_P(x,a) \\
&= \sum_{y \leqslant a} \sum_{y \leqslant x \leqslant a} g(y)\mu_P(y,x)\zeta_P(x,a) \\
&= \sum_{y \leqslant a} g(y)\Big(\sum_{y \leqslant x \leqslant a} \mu_P(y,x)\zeta_P(x,a)\Big) \\
&= \sum_{y \leqslant a} g(y)(\mu_P * \zeta_P)(y,a) \\
&= \sum_{y \leqslant a} g(y)\delta(y,a) = g(a),
\end{aligned}$$

opět jak bylo třeba ukázat. $\square$

Budeme potřebovat i následující duální formulaci věty o Möbiových inverzních formulích, kterou lze dokázat obdobným způsobem.

Věta.

Buď P částečně uspořádaná množina, v níž všechny hlavní filtry jsou konečnými podmnožinami. Buď K těleso chrakteristiky 0. Pak pro libovolné funkce $f, g : P \to K$ platí rovnosti

$$g(a) = \sum_{x \geqslant a} f(x) \quad \textit{pro všechna } a \in P$$

právě tehdy, když platí rovnosti

$$f(a) = \sum_{x \geqslant a} \mu_P(a, x) g(x) \quad \textit{pro všechna } a \in P,$$

kde μ_P je Möbiova funkce částečně uspořádané množiny P. □