Výpočet Möbiových funkcí

Aby bylo možno aplikovat věty o Möbiových inverzních formulích, je třeba, abychom uměli počítat Möbiovy funkce částečně uspořádaných množin P, které nás budou zajímat. Začneme jednoduchým příkladem.

Buď $\mathbb{N}$ řetězec všech kladných celých čísel uspořádaných standardně podle velikosti. Pak pro libovolná čísla $i, j \in \mathbb{N}$ splňující $i \leqslant j$ platí

$$\mu_{\mathbb{N}}(i,j) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } i = j, \\ -1, & \text{jestliže } j - i = 1, \\ 0, & \text{jestliže } j - i > 1. \end{cases}$$

Skutečně, podle rekurentních formulí pro výpočet Möbiovy funkce uvedených na konci předminulého paragrafu máme $\mu_{\mathbb{N}}(i,i) = 1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$,
$\mu_{\mathbb{N}}(i,i+1) = -\mu_{\mathbb{N}}(i+1,i+1) = -1$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$,
$\mu_{\mathbb{N}}(i,i+2) = -\mu_{\mathbb{N}}(i+1,i+2) - \mu_{\mathbb{N}}(i+2,i+2) = 1 - 1 = 0$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$,
a dále, předpokládáme-li s použitím indukce, že už víme, že
$\mu_{\mathbb{N}}(i,i+2) = \mu_{\mathbb{N}}(i,i+3) = \cdots = \mu_{\mathbb{N}}(i,i+k) = 0$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a pro nějaké $k \in \mathbb{N}$ splňující $k > 1$, dostaneme odtud

$$
\begin{aligned}
\mu_{\mathbb{N}}(i, i+k+1) = &- \mu_{\mathbb{N}}(i+1, i+k+1) - \mu_{\mathbb{N}}(i+2, i+k+1) \\
&- \mu_{\mathbb{N}}(i+3, i+k+1) - \cdots - \mu_{\mathbb{N}}(i+k-1, i+k+1) \\
&- \mu_{\mathbb{N}}(i+k, i+k+1) - \mu_{\mathbb{N}}(i+k+1, i+k+1) \\
&= 0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + 1 - 1 = 0.
\end{aligned}
$$

Takže opravdu $\mu_{\mathbb{N}}(i, i+k) = 0$ pro všechna $i \in \mathbb{N}$ a pro všechna $k \in \mathbb{N}$ splňující $k > 1$. Poznamenejme už jen pro úplnost, že tento příklad by zůstal zcela beze změny i tehdy, pokud bychom místo řetězce $\mathbb{N}$ všech kladných celých čísel pracovali s řetězcem $\mathbb{N} \cup \{0\}$ všech nezáporných celých čísel.

Dále budeme potřebovat následující obecnou techniku k výpočtu Möbiových funkcí některých částečně uspořádaných množin.

Tvrzení.

Nechť P a Q jsou lokálně konečné částečně uspořádané množiny a nechť $P \times Q$ je jejich přímý součin. Pak pro každá $a, b \in P$ a $c, d \in Q$ splňující $a \leqslant b$ a $c \leqslant d$, což znamená, že $(a, c) \leqslant (b, d)$ v $P \times Q$, platí

$$
\mu_{P \times Q}((a, c), (b, d)) = \mu_P(a, b)\, \mu_Q(c, d).
$$

Důkaz.

Předpokládejme, že máme $(a,c) \leqslant (b,d)$. Pak dostáváme

$$\sum_{(a,c)\leqslant(x,y)\leqslant(b,d)} \mu_P(x,b)\,\mu_Q(y,d) = \Big(\sum_{a\leqslant x\leqslant b} \mu_P(x,b)\Big)\Big(\sum_{c\leqslant y\leqslant d} \mu_Q(y,d)\Big).$$

Podle rekurentních formulí pro výpočet Möbiových funkcí uvedených na konci předminulého paragrafu jsou ovšem sumy v závorkách na pravé straně této rovnosti rovny hodnotám $\delta(a,b)$ a $\delta(c,d)$ a jejich součin je proto roven hodnotě $\delta(a,b)\delta(c,d) = \delta((a,c),(b,d))$. To znamená, že máme rovnost

$$\sum_{(a,c)\leqslant(x,y)\leqslant(b,d)} \mu_P(x,b)\,\mu_Q(y,d) = \delta((a,c),(b,d)).$$

Ovšem opět podle zmíněných rekurentních formulí pro výpočet Möbiových funkcí máme pro Möbiovu funkci $\mu_{P\times Q}$ rovnost

$$\sum_{(a,c)\leqslant(x,y)\leqslant(b,d)} \mu_{P\times Q}((x,y),(b,d)) = \delta((a,c),(b,d)).$$

Tyto rovnosti, vzaté pro všechna $(a,c),(b,d) \in P\times Q$ splňující $(a,c)\leqslant(b,d)$, ovšem určují Möbiovu funkci $\mu_{P\times Q}$ jednoznačně.

Hodnoty $\mu_{P\times Q}((x,y),(b,d))$ tedy vyhovují těmto rovnostem. Ale podle předchozí rovnosti také hodnoty $\mu_P(x,b)\,\mu_Q(y,d)$ vyhovují týmž rovnostem. Vzhledem ke zmíněné jednoznačnosti odtud proto plyne, že pro každá $(a,c),(b,d) \in P \times Q$ splňující $(a,c) \leqslant (b,d)$ máme rovnost $\mu_{P\times Q}((a,c),(b,d)) = \mu_P(a,b)\,\mu_Q(c,d)$, což jsme měli ukázat. □

Budeme potřebovat ještě následující pozorování týkající se Möbiovy funkce částečně uspořádané množiny P, jestliže se při jejím výpočtu omezíme pouze na nějaký interval $[a,b]$ uvnitř této uspořádané množiny P. Takový interval $[a,b]$ je pak sám o sobě částečně uspořádanou množinou.

Tvrzení.

Buď P lokálně konečná částečně uspořádaná množina. Pak pro libovolné prvky $a,b,c,d \in P$ splňující $a \leqslant c \leqslant d \leqslant b$ platí rovnost

$$\mu_P(c,d) = \mu_{[a,b]}(c,d).$$

Důkaz.

Toto tvrzení se dokáže indukcí vzhledem k velikosti intervalu $[c,d]$ s využitím rekurentních formulí pro výpočet Möbiových funkcí uvedených na konci předminulého paragrafu. □

Buď nyní A libovolná neprázdná konečná množina a buď 2^A množina všech podmnožin množiny A. Tuto poslední množinu můžeme částečně uspořádat inkluzí. Dostáváme tak konečnou částečně uspořádanou množinu 2^A. Směřujeme k tomu určit Möbiovu funkci μ_{2^A} této částečně uspořádané množiny 2^A.

Buď dále $\{0, 1\}$ dvouprvkový řetězec. Pak můžeme pořídit částečně uspořádanou množinu $\{0, 1\}^A$, to jest množinu všech funkcí $f : A \to \{0, 1\}$ s uspořádáním podle hodnot na jednotlivých argumentech. Tato částečně uspořádaná množina $\{0, 1\}^A$ je izomorfní předchozí částečně uspořádané množině 2^A, příslušný izomorfismus přiřadí každé funkci $f : A \to \{0, 1\}$ podmnožinu $\{a \in A : f(a) = 1\}$ množiny A. Takže Möbiova funkce částečně uspořádané množiny 2^A koresponduje s Möbiovou funkcí částečně uspořádané množiny $\{0, 1\}^A$. Vezměme libovolné dvě funkce $f, g : A \to \{0, 1\}$ splňující $f \leqslant g$, což znamená, že $f(a) \leqslant g(a)$ pro všechna $a \in A$, a uvažujme interval $[f, g]$ v částečně uspořádané množině $\{0, 1\}^A$. Podle prvního z předchozích dvou tvrzení je hodnota Möbiovy funkce $\mu_{\{0,1\}^A}$ na intervalu $[f, g]$ rovna součinu hodnot Möbiových funkcí $\mu_{\{0,1\}}$ na jednotlivých intervalech $[f(a), g(a)]$ přes všechna $a \in A$. Podle druhého z předchozích dvou tvrzení a podle úvodního příkladu je ale hodnota Möbiovy funkce $\mu_{\{0,1\}}$ na intervalu $[f(a), g(a)]$ rovna 1, je-li $f(a) = g(a)$, a je rovna -1, je-li $f(a) < g(a)$. Hodnota Möbiovy funkce $\mu_{\{0,1\}^A}$ na intervalu $[f, g]$ je tedy rovna mocnině $(-1)^k$, kde k je počet všech těch prvků $a \in A$, pro něž je $f(a) < g(a)$.

Přejděme nyní od částečně uspořádané množiny $\{0,1\}^A$ k částečně uspořádané množině 2^A. Našim dvěma funkcím $f, g : A \to \{0,1\}$ splňujícím $f \leqslant g$ budou odpovídat podmnožiny $C = \{a \in A : f(a) = 1\}$ a $D = \{a \in A : g(a) = 1\}$ množiny A splňující $C \subseteq D$. Intervalu $[f, g]$ v částečně uspořádané množině $\{0,1\}^A$ bude odpovídat interval $[C, D]$ v částečně uspořádané množině 2^A. Prvky $a \in A$, pro něž je $f(a) < g(a)$, jsou právě prvky množiny $D - C$. Počet k všech těchto prvků je tedy roven číslu $|D - C|$. Takže podle předchozího zjištění je hodnota Möbiovy funkce μ_{2^A} na intervalu $[C, D]$ rovna mocnině $(-1)^{|D-C|}$.

Buď dále $\mathfrak{N}$ množina všech kladných celých čísel uspořádaná dělitelností. To znamená, že pro libovolná kladná celá čísla m, n považujeme m za menší než n anebo rovno n právě tehdy, když $m|n$, to jest právě tehdy, když číslo m dělí číslo n. Chystáme se určit Möbiovu funkci $\mu_{\mathfrak{N}}$ částečně uspořádané množiny $\mathfrak{N}$.

To znamená, že pro libovolná kladná celá čísla m, n splňující $m|n$ chceme určit hodnotu $\mu_{\mathfrak{N}}(m, n)$. Nechť h, k jsou libovolná kladná celá čísla taková, že $h|m$ a $n|k$. Pak můžeme uvažovat interval $[h, k]$ v částečně uspořádané množině $\mathfrak{N}$, který v sobě obsahuje interval $[m, n]$. Potom podle druhého z předchozích dvou tvrzení máme rovnost $\mu_{\mathfrak{N}}(m, n) = \mu_{[h,k]}(m, n)$. Takže potřebujeme určit hodnotu $\mu_{[h,k]}(m, n)$. Nechť $k = p_1^{\varepsilon_1} p_2^{\varepsilon_2} \dots p_s^{\varepsilon_s}$, kde $p_1, p_2, \dots, p_s$ jsou navzájem různá prvočísla a $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_s$ jsou kladná celá čísla.

Poněvadž $h|k$, máme $h = p_1^{\vartheta_1} p_2^{\vartheta_2} \dots p_s^{\vartheta_s}$ pro nějaká nezáporná celá čísla $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_s$ splňující $\vartheta_1 \leqslant \varepsilon_1$, $\vartheta_2 \leqslant \varepsilon_2$, ... , $\vartheta_s \leqslant \varepsilon_s$. Mějme nyní libovolná dvě kladná celá čísla m, n v intervalu $[h, k]$. Pak $m = p_1^{\varkappa_1} p_2^{\varkappa_2} \dots p_s^{\varkappa_s}$ pro nějaká celá čísla $\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_s$ splňující $\vartheta_1 \leqslant \varkappa_1 \leqslant \varepsilon_1$, $\vartheta_2 \leqslant \varkappa_2 \leqslant \varepsilon_2$, ... , $\vartheta_s \leqslant \varkappa_s \leqslant \varepsilon_s$ a $n = p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_s^{\lambda_s}$ pro nějaká celá čísla $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ splňující $\vartheta_1 \leqslant \lambda_1 \leqslant \varepsilon_1$, $\vartheta_2 \leqslant \lambda_2 \leqslant \varepsilon_2$, ... , $\vartheta_s \leqslant \lambda_s \leqslant \varepsilon_s$. Pak naše čísla m, n splňují $m|n$ právě tehdy, když platí $\varkappa_1 \leqslant \lambda_1$, $\varkappa_2 \leqslant \lambda_2$, ... , $\varkappa_s \leqslant \lambda_s$. Tato úvaha ukazuje, že interval $[h, k]$ v částečně uspořádané množině $\mathfrak{N}$ je izomorfní součinu intervalů $[\vartheta_1, \varepsilon_1]$, $[\vartheta_2, \varepsilon_2]$, ... , $[\vartheta_s, \varepsilon_s]$ v množině $\mathbb{N} \cup \{0\}$ všech nezáporných celých čísel uspořádané podle velikosti čísel. To znamená, že Möbiova funkce $\mu_{[h,k]}$ na intervalu $[h, k]$ koresponduje s Möbiovou funkcí na součinu intervalů $[\vartheta_1, \varepsilon_1] \times [\vartheta_2, \varepsilon_2] \times \cdots \times [\vartheta_s, \varepsilon_s]$. Takže pro naše čísla m, n splňující $m|n$ je hodnota $\mu_{[h,k]}(m, n)$ rovna hodnotě posledně jmenované Möbiovy funkce na intervalu $[(\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_s), (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s)]$. Podle prvního z předchozích dvou tvrzení je ovšem tato hodnota rovna součinu hodnot $\mu_{[\vartheta_1,\varepsilon_1]}(\varkappa_1, \lambda_1)\, \mu_{[\vartheta_2,\varepsilon_2]}(\varkappa_2, \lambda_2) \cdots \mu_{[\vartheta_s,\varepsilon_s]}(\varkappa_s, \lambda_s)$. Podle druhého z předchozích dvou tvrzení a podle úvodního příkladu ale pro každé $i = 1, 2, \dots, s$ platí

$$\mu_{[\vartheta_i,\varepsilon_i]}(\varkappa_i, \lambda_i) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } \varkappa_i = \lambda_i, \\ -1, & \text{jestliže } \lambda_i - \varkappa_i = 1, \\ 0, & \text{jestliže } \lambda_i - \varkappa_i > 1. \end{cases}$$

Odtud plyne, že hledaná hodnota $\mu_{[h,k]}(m,n)$ je rovna 1, jestliže $\varkappa_1 = \lambda_1$, $\varkappa_2 = \lambda_2$, ... , $\varkappa_s = \lambda_s$, to jest jestliže $m = n$, hodnota $\mu_{[h,k]}(m,n)$ je rovna $(-1)^t$, jestliže $\lambda_1 - \varkappa_1 \leqslant 1$, $\lambda_2 - \varkappa_2 \leqslant 1$, ... , $\lambda_s - \varkappa_s \leqslant 1$, přičemž počet těch indexů $i = 1, 2, \ldots, s$, pro něž je $\lambda_i - \varkappa_i = 1$, je roven t, což nastane právě když podíl n/m je součinem t různých prvočísel, a konečně hodnota $\mu_{[h,k]}(m,n)$ je rovna 0, jestliže pro některé $i = 1, 2, \ldots, s$ platí $\lambda_i - \varkappa_i > 1$, což nastane právě když podíl n/m je dělitelný druhou mocninou nějakého celého čísla většího než 1. Shrnuto celkem, pro libovolná kladná celá čísla m, n splňující $m|n$ je hodnota Möbiovy funkce $\mu_{\mathfrak{N}}$ na intervalu $[m,n]$ rovna

$$\mu_{\mathfrak{N}}(m,n) = \begin{cases} 1, & \text{jestliže } m = n, \\ (-1)^t, & \text{jestliže } n/m = q_1 q_2 \ldots q_t, \text{ kde} \\ & \quad q_1, q_2, \ldots, q_t \text{ jsou vzájemně různá prvočísla}, \\ 0, & \text{jestliže } n/m = r^2 u \text{ pro nějaká kladná celá} \\ & \quad \text{čísla } r, u \text{ splňující } r > 1. \end{cases}$$