Permutace bez transpozic

Víme, že libovolnou permutaci konečné množiny lze rozložit na součin nezávislých cyklů. Cykly délky dva nazýváme transpozicemi. Zajímá nás, kolik existuje permutací konečné množiny o n prvcích, v jejichž rozkladu na součin nezávislých cyklů nefiguruje žádná transpozice.

Poněkud podrobněji řečeno, je-li dáno kladné celé číslo n, chceme určit, kolik existuje permutací σ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že v rozkladu permutace σ na součin nezávislých cyklů nefiguruje žádný cyklus délky dva, tedy žádná transpozice. Budeme chtít řešit i obecnější úlohu spočívající v tom, že pro dané celé číslo r splňující $0 \leqslant r \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$, kde $\left[\frac{n}{2}\right]$ je dolní celá část čísla $\frac{n}{2}$, bude naším úkolem určit, kolik existuje permutací σ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že v rozkladu permutace σ na součin nezávislých cyklů vystupuje právě r transpozic.

Označme $\mathbb{S}_n$ množinu všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Buď I množina všech dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pro kteroukoliv dvouprvkovou podmnožinu $\{i, j\}$ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, to jest pro každá $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ splňující $i \neq j$ označme $A_{\{i,j\}}$ množinu všech permutací σ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že $\sigma(i) = j$ a $\sigma(j) = i$.

Je tedy $A_{\{i,j\}}$ množinou všech těch permutací σ množiny $\{1,2,\ldots,n\}$, v jejichž rozkladu na součin nezávislých cyklů vystupuje transpozice $(i\,j)$. Pak permutace σ množiny $\{1,2,\ldots,n\}$, v jejichž rozkladu na součin nezávislých cyklů nefiguruje žádná transpozice, tvoří množinu

$$A(0) = \bigcap_{\{i,j\}\in I} \left(\mathbb{S}_n - A_{\{i,j\}}\right).$$

Podle principu inkluze a exkluze je tedy počet těchto permutací roven

$$|A(0)| = \sum_{K\subseteq I} (-1)^{|K|} \left| \bigcap_{\{i,j\}\in K} A_{\{i,j\}} \right|.$$

Obsahuje-li přitom podmnožina $K \subseteq I$ některé dvě dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1,2,\ldots,n\}$, které mají společný jeden prvek, pak ovšem máme $\bigcap_{\{i,j\}\in K} A_{\{i,j\}} = \emptyset$. Neobsahuje-li podmnožina $K \subseteq I$ žádné dvě dvouprvkové podmnožiny se společným prvkem, pak ovšem $|K| \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. V takovém případě permutace z množiny $\bigcap_{\{i,j\}\in K} A_{\{i,j\}}$ přehazují navzájem prvky i, j z podmnožin $\{i,j\} \in K$ a permutují zbývající prvky, to jest prvky množiny $\{1,2,\ldots,n\} - \bigcup K$ zcela libovolně. Těchto zbývajících prvků je celkem $n - 2|K|$, takže v tom případě máme

$$\left| \bigcap_{\{i,j\}\in K} A_{\{i,j\}} \right| = (n - 2|K|)!.$$

Tento počet nezávisí na podmnožině K samotné, ale jen na počtu prvků této podmnožiny K. Je tedy třeba pro každé $k = 0, 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ určit, kolik existuje k-prvkových podmnožin $K \subseteq I$ obsahujících pouze navzájem disjunktní dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Pak sjednocení $\bigcup K$ je některá $2k$-prvková podmnožina množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tuto podmnožinu lze vybrat $\binom{n}{2k}$ způsoby. Zbývá určit, kolika způsoby lze jakoukoliv $2k$-prvkovou podmnožinu $H \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ rozložit na k dvouprvkových tříd. Připomeňme, že podle poznatků o kombinatorickém významu polynomických koeficientů počet všech zobrazení $f : H \to \{1, 2, \ldots, k\}$ takových, že pro každé $\ell = 1, 2, \ldots, k$ je $|f^{-1}(\ell)| = 2$, je roven číslu $\binom{2k}{2,2,\ldots,2} = \frac{(2k)!}{2^k}$. Toto číslo je $k!$-násobkem počtu všech rozkladů množiny H na dvouprvkové třídy. Počet všech takových rozkladů množiny H je tedy roven číslu $\frac{(2k)!}{2^k \cdot k!}$. Takže celkem je počet všech k-prvkových podmnožin $K \subseteq I$ obsahujících pouze navzájem disjunktní dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ roven číslu

$$\binom{n}{2k} \cdot \frac{(2k)!}{2^k \cdot k!} = \frac{n!}{(n-2k)! \cdot k! \cdot 2^k}.$$

Konečně využitím doposud získaných poznatků ve výše uvedeném vztahu pro počet $|A(0)|$ závěrem vychází

$$|A(0)| = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \cdot \frac{n!}{(n-2k)! \cdot k! \cdot 2^k} \cdot (n-2k)!$$

$$= n! \cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^k}{k! \cdot 2^k} = n! \cdot \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}.$$

Tolik je tedy celkem permutací n-prvkové množiny, v jejichž rozkladu na součin nezávislých cyklů nefiguruje žádná transpozice.

Můžeme si položit otázku, jaká je pravděpodobnost, že pro náhodně zvolenou permutaci σ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nastane situace, že v rozkladu permutace σ na součin nezávislých cyklů nebude figurovat žádná transpozice. Poněvadž počet všech permutací množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ je roven číslu $n!$, odtud a z předchozího výsledku vyplývá, že tato pravděpodobnost je rovna hodnotě

$$\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!}.$$

Můžeme si dále klást otázku, k jaké hodnotě se bude tato pravděpodobnost blížit pro $n \to \infty$. Je jasné, že půjde o hodnotu

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k}{k!} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}.$$

Pro velké hodnoty čísla n tedy bude dotyčná pravděpodobnost přibližně rovna hodnotě $0,60653066$.

Věnujme se nakonec úloze určit, kolik existuje permutací σ množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takových, že v rozkladu permutace σ na součin nezávislých cyklů vystupuje právě r transpozic, kde r je předem dané celé číslo splňující $0 \leqslant r \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$. Tyto permutace tvoří množinu

$$A(r) = \bigcup_{\substack{J \subseteq I \\ |J|=r}} \Big(\bigcap_{\{i,j\} \in J} A_{\{i,j\}} \cap \bigcap_{\{i,j\} \in I-J} \left(\mathbb{S}_n - A_{\{i,j\}}\right)\Big).$$

Skutečně je tomu tak, poněvadž obsahuje-li podmnožina $J \subseteq I$ nějaké dvě dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ se společným prvkem, pak máme již $\bigcap_{\{i,j\} \in J} A_{\{i,j\}} = \emptyset$, takže ve výše uvedené formuli sjednocujeme ve skutečnosti pouze přes podmnožiny $J \subseteq I$ obsahující právě r vzájemně disjunktních dvouprvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Podle obecnější verze principu inkluze a exkluze je pak počet výše zmíněných permutací roven

$$|A(r)| = \sum_{\substack{K\subseteq I\\ r\leqslant|K|}} (-1)^{|K|-r} \binom{|K|}{r} \cdot \left| \bigcap_{\{i,j\}\in K} A_{\{i,j\}} \right|.$$

Připomeňme ještě jednou, že obsahuje-li podmnožina $K \subseteq I$ některé dvě dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ se společným prvkem, pak máme $\bigcap_{\{i,j\}\in K} A_{\{i,j\}} = \emptyset$. Musíme se tedy dále starat jenom o podmnožiny $K \subseteq I$ obsahující pouze navzájem disjunktní dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Stejně jako v předchozí úloze se pak ukáže, že pro každou takovou podmnožinu $K \subseteq I$ máme

$$\left| \bigcap_{\{i,j\}\in K} A_{\{i,j\}} \right| = (n - 2|K|)!.$$

Dále je třeba pro každé $k = r, r + 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ určit, kolik existuje k-prvkových podmnožin $K \subseteq I$ obsahujících pouze navzájem disjunktní dvouprvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Ale zase stejně jako v předchozí úloze dospějeme k poznatku, že počet takových k-prvkových podmnožin $K \subseteq I$ je roven číslu

$$\frac{n!}{(n-2k)! \cdot k! \cdot 2^k}.$$

Využitím obou těchto poznatků ve výše uvedeném vztahu pro počet $|A(r)|$ konečně vyjde

$$|A(r)| = \sum_{k=r}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^{k-r} \binom{k}{r} \cdot \frac{n!}{(n-2k)! \cdot k! \cdot 2^k} \cdot (n-2k)!$$

$$= \frac{n!}{r!} \cdot \sum_{k=r}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(-1)^{k-r}}{(k-r)! \cdot 2^k} = \frac{n!}{r! \cdot 2^r} \cdot \sum_{k=r}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^{k-r}}{(k-r)!}.$$

Tolik je tedy celkem permutací n-prvkové množiny, v jejichž rozkladu na součin nezávislých cyklů vystupuje právě r transpozic.