Užití principu inkluze a exkluze k dokazování kombinatorických identit

Naším úkolem je dokázat, že pro libovolná kladná celá čísla n, k splňující $k \leqslant n$ platí rovnost

$$\sum_{\ell=0}^{n} (-1)^\ell \binom{k-1}{\ell} \binom{n-\ell}{n-k} = \binom{n-k+1}{k}.$$

K tomu účelu budeme dvěma způsoby řešit následující úlohu.

Je třeba určit, kolik existuje k-prvkových podmnožin množiny čísel $\{1, 2, \ldots, n\}$ neobsahujících žádnou dvojici po sobě jdoucích čísel.

Budeme postupovat přímou úvahou a také s použitím principu inkluze a exkluze. Porovnáním obou výsledků dostaneme potřebnou kombinatorickou identitu.

Řešení přímou úvahou

Zapisujeme k-prvkové podmnožiny množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ jako vzestupně uspořádané k-tice čísel. Při tomto zápisu je předpisem

$$(m_1, m_2, m_3, \ldots, m_k) \mapsto (m_1, m_2 - 1, m_3 - 2, \ldots, m_k - k + 1)$$

dáno vzájemně jednoznačné zobrazení množiny všech k-tic různých čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ neobsahujících žádnou dvojici po sobě jdoucích čísel na množinu všech k-tic různých čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n - k + 1\}$. Posledně jmenované k-tice čísel jsou ale kombinacemi k-té třídy v množině $\{1, 2, \ldots, n - k + 1\}$ a jejich počet je tedy dán binomickým koeficientem

$$\binom{n-k+1}{k}.$$

Tolik je pak i k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, které neobsahují žádnou dvojici po sobě jdoucích čísel.

Řešení užitím principu inkluze a exkluze

Buď Q množina všech k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$. Tyto podmnožiny si představujeme jako vzestupně zapsané k-tice různých čísel. Označme dále $I = \{2, 3, \ldots, k\}$ množinu všech těch pozic v takových k-ticích, na nichž se může objevit následník čísla z předchozí pozice. Pro každou pozici $i \in I$ označme A_i množinu všech těch k-tic z množiny Q, v nichž se na pozicích $i - 1$ a i vyskytují po sobě jdoucí čísla.

Takže k-tice z množiny Q neobsahující žádná dvě po sobě jdoucí čísla vytvoří množinu

$$A(0) = \bigcap_{i=2}^{k} (Q - A_i).$$

Podle principu inkluze a exkluze tedy víme, že pro počet těchto k-tic platí rovnost

$$|A(0)| = \sum_{L \subseteq I} (-1)^{|L|} \left| \bigcap_{i \in L} A_i \right|.$$

Přitom pro libovolnou podmnožinu $L \subseteq I$ pozůstává množina $\bigcap_{i \in L} A_i$ ze všech těch k-tic z množiny Q, v nichž přinejmenším na pozicích z L leží následníci čísel z pozic jim předcházejících. Zjistíme počet takových k-tic. Vypišme pozice množiny L ve vzestupném pořadí:

$$L = \{i_1, i_2, \ldots, i_\ell\}.$$

Poté transformujme k-tice z množiny $\bigcap_{i \in L} A_i$ následovně:

$$(m_1, \ldots, m_{i_1-1}, m_{i_1}, \ldots, m_{i_2-1}, m_{i_2}, \ldots, m_{i_\ell-1}, m_{i_\ell}, \ldots, m_k) \mapsto$$

$$(m_1, \ldots, m_{i_1-1}, m_{i_1} - 1, \ldots, m_{i_2-1} - 1, m_{i_2} - 2, \ldots$$
$$\ldots, m_{i_\ell-1} - \ell + 1, m_{i_\ell} - \ell, \ldots, m_k - \ell).$$

Tímto předpisem k-ticím z množiny $\bigcap_{i\in L} A_i$ vzájemně jednoznačně odpovídají vzestupně zapsané k-tice čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n-\ell\}$, v nichž právě na pozicích z množiny L dochází k opakování čísla z předchozí pozice. Vynecháme-li nyní v takových k-ticích čísla ležící na pozicích z množiny L, dostaneme tak libovolné vzestupně zapsané $(k-\ell)$-tice různých čísel z množiny $\{1, 2, \ldots, n-\ell\}$. To jsou ale kombinace $(k-\ell)$-té třídy v množině $\{1, 2, \ldots, n-\ell\}$, jejichž počet je dán binomickým koeficientem $\binom{n-\ell}{k-\ell}$. Celkem tak dostáváme rovnost

$$\left|\bigcap_{i\in L} A_i\right| = \binom{n-\ell}{k-\ell},$$

kde $\ell = |L|$. Dosazením z této rovnosti do předchozího vztahu vychází

$$\begin{aligned}
|A(0)| &= \sum_{L\subseteq I} (-1)^{|L|} \binom{n-|L|}{k-|L|} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{\ell} \binom{k-1}{\ell} \binom{n-\ell}{k-\ell} \\
&= \sum_{\ell=0}^{k-1} (-1)^{\ell} \binom{k-1}{\ell} \binom{n-\ell}{n-k}.
\end{aligned}$$

Poněvadž pro $\ell \geqslant k$ je $\binom{k-1}{\ell} = 0$, dostáváme nakonec rovnost

$$|A(0)| = \sum_{\ell=0}^{n} (-1)^{\ell} \binom{k-1}{\ell} \binom{n-\ell}{n-k}.$$

Tolik je tedy všech k-prvkových podmnožin množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ neobsahujících žádná dvě po sobě jdoucí čísla.

Závěrem porovnáním tohoto posledního poznatku s předchozím výsledkem dostáváme dokazovanou kombinatorickou identitu.