Obarvení rulety

Mějme kolo rulety rozdělené do n sektorů. Každý z těchto sektorů obarvíme jednou barvou z celkového počtu k barev tak, aby žádné dva sousední sektory nebyly obarvené stejnou barvou. Klademe otázku, kolik obarvených kol takto může vzniknout, považujeme-li za stejná taková dvě obarvení, z nichž jedno vznikne z druhého nějakým pootočením rulety.

Zjistěme nejprve, kolik takových obarvení můžeme dostat, není-li možné s ruletou otáčet. Pak můžeme sektory rulety očíslovat. První sektor můžeme obarvit kteroukoliv z daných k barev, to je tedy k možností. Je-li první sektor obarven, pak druhý sektor můžeme obarvit kteroukoliv z daných k barev odlišnou od té barvy, kterou je obarvený první sektor, to je tedy $k-1$ možností, takže počet obarvení prvních dvou sektorů je $k(k-1)$. Jsou-li první dva sektory obarveny, pak třetí sektor můžeme obarvit kteroukoliv z daných k barev odlišnou od té barvy, kterou je obarvený druhý sektor, to je zase $k-1$ možností. Je tedy počet obarvení prvních tří sektorů roven $k(k-1)^2$. Takto by bylo možno pokračovat dále, takže by se mohlo zdát, že celkový počet obarvení všech n sektorů by byl roven $k(k-1)^{n-1}$. Avšak nemáme přitom zajištěno, že poslední sektor bude obarvený barvou, která bude odlišná také od barvy prvního sektoru.

Musíme tedy od nalezeného počtu odečíst počet všech obarvení našich n sektorů, která budou přípustná s tou jedinou výjimkou, že první a poslední sektor budou obarveny stejnou barvou. Můžeme si tak představit, že první a poslední sektor splynou do jediného sektoru. Vidíme tedy, že budeme muset odečíst počet všech přípustných obarvení rulety o $n-1$ sektorech. Kdyby naše předchozí úvaha byla beze zbytku správná, bylo by těchto možných obarvení rulety o $n-1$ sektorech celkem $k(k-1)^{n-2}$, takže bychom dospěli k výslednému počtu

$$k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2}.$$

Avšak naše předchozí úvaha nebyla úplně správná, což vedlo k tomu, že jsme v našem posledním odpočtu odečetli také počet těch obarvení rulety o $n-1$ sektorech, kdy první a poslední sektor byly obarveny stejnou barvou. Musíme tedy tento počet zase přičíst. Opět si můžeme představit stejně jako v předchozím kroku, že první a poslední sektor splynou do jediného sektoru. Budeme tedy muset přičíst počet všech přípustných obarvení rulety mající $n-2$ sektorů. Kdyby naše prvotní úvaha byla zcela správná, bylo by těchto možných obarvení rulety o $n-2$ sektorech celkem $k(k-1)^{n-3}$, takže bychom celkem dospěli k výslednému počtu

$$k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + k(k-1)^{n-3}.$$

Avšak naše dřívější úvaha nebyla úplně správná, což teď vedlo k tomu, že jsme v našem posledním přípočtu přičetli více obarvení, než by bylo třeba. Budeme tedy muset nějaká obarvení zase odečíst.

Budeme-li takto postupovat dále, dospějeme posléze k počtu

$$k(k-1)^{n-1} - k(k-1)^{n-2} + \cdots + (-1)^{n-1}k(k-1)^2 + (-1)^n k(k-1).$$

Dále už není potřeba nic přičítat ani odečítat, poněvadž poslední sčítanec $k(k-1)$ dává přesně počet všech obarvení rulety o dvou sektorech k barvami, kdy dotyčné dva sektory jsou obarvené různými barvami.

Ještě posledně nalezené vyjádření hledaného počtu přípustných obarvení pevné rulety o n sektorech k barvami poněkud upravíme. Tento počet je roven

$$k(k-1)\big((k-1)^{n-2} - (k-1)^{n-3} + \cdots + (-1)^{n-1}(k-1) + (-1)^n\big).$$

Představíme-li si zde činitele k ve tvaru $1 + (k-1)$ a roznásobíme-li tímto upraveným činitelem závorku vpravo, všechny sčítance s výjimkou prvního a posledního se odečtou, takže nakonec dospějeme k vyjádření

$$(k-1)\big((k-1)^{n-1} + (-1)^n\big).$$

Tolik je tedy celkem všech možných obarvení pevné rulety o n sektorech k barvami, nesmějí-li být sousední sektory obarveny stejnou barvou. Označme tento nalezený počet obarvení symbolem $\gamma(n,k)$.

Ke každému takovému přípustnému obarvení pevné rulety uvažujme nejmenší kladné celé číslo d takové, že pootočením rulety o d sektorů přejde dotyčné obarvení samo na sebe. Takové kladné celé číslo d určitě existuje, v krajním případě jím může být samo číslo n. V obecném případě číslo d dělí číslo n. Kdyby tomu totiž tak nebylo, dospěli bychom ke sporu s minimalitou čísla d. Pak bychom totiž místo čísla d mohli vzít největšího společného dělitele čísel n a d. To je vidět z toho, že podle Bezoutovy věty je onen největší společný dělitel nějakou celočíselnou lineární kombinací čísel n a d. Kdyby pak d nedělilo n, byl by tento největší společný dělitel menší než samo číslo d. Takže opravdu d dělí n a dotyčné obarvení rulety se skládá z celkového počtu $\frac{n}{d}$ stejně obarvených úseků délky d. Nazvěme takto určené číslo d periodou uvažovaného obarvení naší pevné rulety. Je jasné, že všechna obarvení, která vzniknou z tohoto výchozího obarvení nějakým pootočením rulety, pak mají tutéž periodu d, takže můžeme mluvit o periodách také u obarvení otočné rulety.

Pro každé kladné celé číslo ℓ označme symbolem $\xi(\ell, k)$ počet všech těch přípustných vzájemně rozlišitelných obarvení otočné rulety o ℓ sektorech k barvami, která mají největší možnou periodu, to jest periodu ℓ. Snadno lze nahlédnout, že pak pro každé kladné celé číslo d dělící číslo n je počet všech přípustných vzájemně rozlišitelných obarvení otočné rulety o n sektorech k barvami s periodou d roven číslu $\xi(d, k)$. Úseky takového obarvení délky d pak totiž lze vnímat jako přípustná obarvení otočné rulety o d sektorech, která mají ovšem největší možnou periodu d.

Za této situace číslo $d\xi(d,k)$ udává počet všech přípustných obarvení pevné rulety o n sektorech k barvami s periodou d. Sumací těchto hodnot přes všechny dělitele d čísla n dostaneme počet všech možných přípustných obarvení pevné rulety o n sektorech k barvami, kterýžto počet jsme výše označili symbolem $\gamma(n,k)$. Dostáváme tak vztah

$$\gamma(n,k) = \sum_{d|n} d\xi(d,k),$$

který platí pro všechna kladná celá čísla n. Podle věty o Möbiových inverzních formulích pak platí rovněž vztah

$$n\xi(n,k) = \sum_{d|n} \mu\left(\tfrac{n}{d}\right)\gamma(d,k),$$

opět pro všechna kladná celá čísla n. Odtud vyplývá rovnost

$$\xi(n,k) = \frac{1}{n}\sum_{d|n} \mu\left(\tfrac{n}{d}\right)\gamma(d,k).$$

Nás nyní zajímá počet všech možných přípustných vzájemně rozlišitelných obarvení otočné rulety o n sektorech k barvami. Označme tento počet symbolem $\delta(n,k)$. Z toho, co bylo už výše řečeno, plyne, že tento počet dostaneme jako sumu hodnot $\xi(d,k)$ přes všechny dělitele d čísla n.

Z předchozí rovnosti tak vyplývá vztah

$$\delta(n,k)=\sum_{d\mid n}\left(\frac{1}{d}\sum_{c\mid d}\mu\left(\tfrac{d}{c}\right)\gamma(c,k)\right).$$

Tuto formuli ještě upravíme:

$$\begin{aligned}\delta(n,k)&=\sum_{d\mid n}\sum_{c\mid d}\frac{1}{d}\mu\left(\tfrac{d}{c}\right)\gamma(c,k)=\sum_{e\mid n}\sum_{c\mid \frac{n}{e}}\frac{e}{n}\mu\left(\tfrac{n}{ec}\right)\gamma(c,k)\\&=\sum_{c\mid n}\sum_{e\mid \frac{n}{c}}\frac{e}{n}\mu\left(\tfrac{n}{ec}\right)\gamma(c,k)=\frac{1}{n}\sum_{c\mid n}\gamma(c,k)\left(\sum_{e\mid \frac{n}{c}}\mu\left(\frac{\frac{n}{c}}{e}\right)e\right).\end{aligned}$$

Z dřívějších poznatků o Eulerově funkci φ však víme, že pro libovolné kladné celé číslo m platí

$$\varphi(m)=\sum_{h\mid m}\mu\left(\tfrac{m}{h}\right)h.$$

Podle tohoto vztahu je ale poslední suma uvedená v závorkách na konci předchozího odvození rovna číslu $\varphi\left(\frac{n}{c}\right)$. Dostáváme tak rovnost

$$\delta(n,k)=\frac{1}{n}\sum_{c\mid n}\varphi\left(\tfrac{n}{c}\right)\gamma(c,k).$$

Konečně dosazením dříve vypočtených hodnot $\gamma(c,k)$ do této rovnosti dostáváme výsledný vztah

$$\delta(n,k) = \frac{1}{n}\sum_{c\mid n}\varphi\big(\tfrac{n}{c}\big)(k-1)\big((k-1)^{c-1}+(-1)^{c}\big)$$

pro počet všech možných přípustných vzájemně rozlišitelných obarvení otočné rulety o n sektorech k barvami.