Generující řady

Buď $\mathbb{R}$ těleso všech reálných čísel. Označme symbolem $\mathbb{R}[\![x]\!]$ algebru formálních mocninných řad nad tělesem $\mathbb{R}$ v proměnné x. Prvky této algebry jsou všechny posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel, které však budeme zapisovat formálně jako mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Algebra $\mathbb{R}[\![x]\!]$ tedy v sobě obsahuje okruh polynomů $\mathbb{R}[x]$. Obvyklé operace sčítání polynomů, násobení polynomů reálnými čísly a násobení polynomů mezi sebou přeneseme přímočaře na celý obor $\mathbb{R}[\![x]\!]$. Pro libovolné mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ a pro libovolné reálné číslo r tak klademe

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n,$$

$$r \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (r a_n) x^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \text{ kde pro každé } n \text{ je } c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

Tím se z oboru $\mathbb{R}[\![x]\!]$ stává vektorový prostor nad tělesem $\mathbb{R}$ a současně komutativní okruh s jednotkovým prvkem 1. Je vidět, že celkem je $\mathbb{R}[\![x]\!]$ algebrou nad tělesem $\mathbb{R}$.

Pro mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ dále definujeme formálně její derivaci předpisem

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n.$$

Pro takto definovanou derivaci aplikovanou na součet či součin mocninných řad pak platí obvyklá pravidla známá z kurzu matematické analýzy.

Na mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ lze ovšem pohlížet také jako na řadu reálných funkcí. Z kurzu matematické analýzy víme, že její poloměr konvergence je $r = 1/u$, kde $u = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Je-li $r > 0$, pak na intervalu $(-r, r)$ je tato řada absolutně konvergentní, takže zde můžeme uvažovat její součet $a(x)$. Pak píšeme $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. V tom případě je součet $a(x)$ funkcí, která má na intervalu $(-r, r)$ všechny derivace. Také víme, že máme-li konvergentní mocninné řady a jejich součty $a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, pak uvnitř konvergenčních intervalů těchto mocninných řad platí vztahy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = a(x) + b(x),$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = a(x) \cdot b(x),$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = a'(x),$$

kde nalevo vystupují výše definované formální operace na mocninných řadách, zatímco napravo jsou obvyklé operace sčítání, násobení a derivace příslušných reálných funkcí. Derivovaná řada má přitom tentýž poloměr konvergence jako řada původní.

Pro libovolnou mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ dále definujeme její mocninu $\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^n$ indukcí vzhledem k exponentu n následovně. Klademe

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^0 = 1$$

a pro každé nezáporné celé číslo n dále klademe

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^{n+1} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right)^n \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k\right).$$

Nyní můžeme pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a pro každou mocninnou řadu $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$, ve které je $b_0 = 0$, definovat složení těchto mocninných řad jako mocninnou řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right)^n .$$

Podmínka $b_0 = 0$ zde zaručuje, že v takto definované mocninné řadě u každé mocniny proměnné x se sčítá jenom konečný počet nenulových keoficientů. Jsou-li navíc mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a $\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$ konvergentní a jsou-li $a(x)$ a $b(x)$ jejich součty, pak také jejich složení je konvergentní mocninnou řadou a platí rovnost

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k \right)^n = a(b(x)).$$

Z kurzu matematické analýzy víme například, že platí

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \text{pro všechna } x \in \mathbb{R},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro všechna } x \in (-1, 1].$$

Někdy místo e^x píšeme také $\exp(x)$. Odtud a z poznámek v předchozím odstavci je patrno, že pro libovolnou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, v níž je $a_0 = 0$, máme definovány mocninné řady $\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$ a $\ln\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)$.

Je-li mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergentní a je-li $a(x)$ její součet, pak konvergují také posledně definované mocninné řady a platí rovnosti

$$\exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = e^{a(x)},$$

$$\ln\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) = \ln(1 + a(x)).$$

Poznamenejme už jen, že pro derivace těchto mocninných řad platí obvyklé vztahy známé z kurzu matematické analýzy. Je třeba si ovšem všimnout faktu, že k mocninné řadě $1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, kde $a_0 = 0$, existuje v algebře $\mathbb{R}[\![x]\!]$ inverzní prvek, to jest mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ taková, že

$$\left(1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = 1.$$

Je-li $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mocninná řada mající poloměr konvergence $r > 0$, pak má tato řada na intervalu $(-r, r)$ svůj součet $a(x)$, což je nějaká reálná funkce určená dotyčnou mocninnou řadou. Naopak zase ale tato reálná funkce $a(x)$ plně určuje výchozí mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, neboť pak očividně platí $a_n = \frac{a^{(n)}(0)}{n!}$ pro všechna nezáporná celá čísla n.

Z kurzu matematické analýzy známe rovněž následující fakt.

Tvrzení.

Pro libovolné reálné číslo r a pro libovolná $x \in (-1, 1)$ platí

$$(1+x)^r = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{r}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[r]_n}{n!} x^n. \qquad \square$$

Generující řadou posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel rozumíme formální mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Generující funkcí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel rozumíme součet $a(x)$ mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, má-li tato mocninná řada kladný poloměr konvergence.

Exponenciální generující řadou posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel rozumíme generující řadu posloupnosti $\left\{\frac{a_n}{n!}\right\}_{n=0}^{\infty}$, to jest formální mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$. Exponenciální generující funkcí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel rozumíme součet $\mathbf{a}(x)$ mocninné řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, má-li tato poslední mocninná řada kladný poloměr konvergence.

Jako příklad uveďme, že jsme v předchozím tvrzení viděli, že pro libovolné reálné číslo r je funkce $(1+x)^r$ generující funkcí posloupnosti $\{\binom{r}{n}\}_{n=0}^{\infty}$ a současně je exponenciální generující funkcí posloupnosti $\{[r]_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Všimněme si, že je-li $\mathbf{a}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ exponenciální generující funkcí posloupnosti $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ reálných čísel, pak platí, že $a_n = \mathbf{a}^{(n)}(0)$ pro všechna nezáporná celá čísla n. Všimněme si v této souvislosti také toho, že jsou-li $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ dvě exponenciální generující řady, pak platí

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n,$$

$$\text{kde pro každé } n \text{ je } c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i b_{n-i},$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{n+1}}{n!} x^n.$$

Pomocí generujících funkcí lze dokázat například tzv. Vandermondovu konvoluční formuli.

Tvrzení.

Pro libovolná reálná čísla p, q a pro libovolné nezáporné celé číslo m platí

$$\binom{p+q}{m} = \sum_{k=0}^{m} \binom{p}{k} \binom{q}{m-k}.$$

Důkaz.

Ve vztahu

$$(1+x)^{p+q} = (1+x)^p(1+x)^q$$

nejprve rozvineme všechny tři závorky podle předcházejícího tvrzení do mocninných řad. Tak dostaneme

$$(1+x)^{p+q} = \sum_{m=0}^{\infty} \binom{p+q}{m} x^m,$$

$$(1+x)^p = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} x^i,$$

$$(1+x)^q = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} x^j.$$

Pak poslední dvě závorky a jim příslušné mocninné řady vynásobíme. Tak obdržíme

$$(1+x)^p(1+x)^q = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \binom{p}{i} x^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{\infty} \binom{q}{j} x^j\right),$$

takže po vynásobení mocninných řad vyjde

$$(1+x)^p(1+x)^q = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}\binom{p}{k}\binom{q}{m-k}\right)x^m.$$

Zbývá pak už jen porovnat koeficienty u x^m ve výše uvedeném rozvoji závorky $(1+x)^{p+q}$ a v posledně získaném rozvoji součinu závorek $(1+x)^p(1+x)^q$. $\square$

Vandermondova konvoluční formule se hodí k dokazování některých kombinatorických identit.

Jako příklad ukážeme, že pro každé nezáporné celé číslo n platí rovnost

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\binom{n}{k}\cdot\frac{1}{n+k+1} = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}.$$

K tomu účelu vynásobíme levou stranu této rovnosti převrácenou hodnotou pravé strany a ukážeme, že takto vzniklý výraz je roven 1. Skutečně postupně dostáváme

$$
\begin{aligned}
\frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \cdot \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n+k+1}& \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} \cdot \frac{(2n+1)!}{n! \cdot n!} \cdot \frac{1}{n+k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \frac{(2n+1)!}{(n-k)! \cdot (n+k+1)!} \cdot \frac{(n+k)!}{n! \cdot k!} \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \binom{n+k}{k} \cdot \binom{2n+1}{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{-n-1}{k} \cdot \binom{2n+1}{n-k} = \binom{n}{n} = 1,
\end{aligned}
$$

jak bylo požadováno.

Generující funkce mohou být použity k řešení některých rekurentních formulí. Klasickým příkladem takového užití je následující úloha.

Nechť $y_1, y_2, \ldots, y_n$, kde n je nějaké kladné celé číslo, jsou prvky nějaké pologrupy, takže je definován jejich součin $y_1 \cdot y_2 \cdot \cdots \cdot y_n$. Kolika způsoby je možno tento součin uzávorkovat tak, aby postup násobení tím byl jednoznačně určen?

Označme a_n hledaný počet těchto uzávorkování. Je jasné, že $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 2$. Klademe dále $a_0 = 0$. Pro libovolné $n > 1$ lze nejvíce vnější uzávorkování, tedy volbu posledního násobení provést $n - 1$ způsoby:

$$
\begin{gathered}
y_1 \cdot (y_2 \cdot \cdots \cdot y_n), \\
\vdots \\
(y_1 \cdot \cdots \cdot y_k) \cdot (y_{k+1} \cdot \cdots \cdot y_n), \\
\vdots \\
(y_1 \cdot \cdots \cdot y_{n-1}) \cdot y_n.
\end{gathered}
$$

Přitom pro dané k lze prvních k prvků dále uzávorkovat a_k způsoby a posledních $n - k$ prvků a_{n-k} způsoby. Celkem to dává, že

$$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \cdot a_{n-k} \quad \text{pro všechna } n > 1.$$

Posloupnost hodnot $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ je tedy řešením této rekurentní formule při výše uvedených počátečních podmínkách.

Vezměme generující řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ této posloupnosti hodnot. Očekávejme, že tato mocninná řada bude mít kladný poloměr konvergence, a označme $a(x)$ její součet. Poněvadž $a_0 = 0$, uvedená rekurentní formule říká, že pro $n > 1$ koeficient u mocniny x^n v součinu řad $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n)$ je roven hodnotě a_n. Koeficient u x v tomto součinu je ovšem roven 0, zatímco $a_1 = 1$. Absolutní člen je také roven 0. Celkem to dává, že

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = -x + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Pro očekávaný součet $a(x)$ generující řady $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tak dostáváme rovnici

$$(a(x))^2 = -x + a(x).$$

Řešením této kvadratické rovnice pro $a(x)$ jsou funkce

$$\frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2}.$$

Poněvadž $a(0) = 0$, ježto $a_0 = 0$, v úvahu připadá pouze funkce

$$a(x) = \frac{1 - \sqrt{1-4x}}{2}.$$

Ale rozvoj této funkce do mocninné řady konverguje pro $x \in \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

Poněvadž tato funkce splňuje danou kvadratickou rovnici, vyhovují koeficienty jejího rozvoje stanovené rekurentní formuli. Navíc počáteční koeficienty jsou $a(0) = 0$ a $\frac{a'(0)}{1!} = 1$, neboť $a'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-4x}}$. Je tedy posloupnost koeficientů rozvoje nalezené funkce $a(x)$ skutečně řešením $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ naší úlohy.

Jsme schopni tyto koeficienty rozvoje funkce $a(x)$ do mocninné řady vypočítat pomocí prvního z předcházejících dvou tvrzení:

$$a(x) = \frac{1-(1-4x)^{\frac{1}{2}}}{2} = \frac{1-\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n}{2} = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-4x)^n$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\left[\frac{1}{2}\right]_n}{n!}2^{2n-1}x^n,$$

odkud úpravou vychází

$$a_n = (-1)^{n-1}\frac{\left[\frac{1}{2}\right]_n}{n!}2^{2n-1} = (-1)^{n-1}\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(\frac{3-2n}{2}\right)}{n!}2^{2n-1}$$
$$= 2^{n-1}\frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{(2n-1)n!} = \frac{(2n)!}{2(2n-1)(n!)^2} = \frac{(2n-2)!}{n((n-1)!)^2},$$

takže dostáváme

$$a_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$$

pro všechna kladná celá čísla n. Tato čísla a_n bývají pojmenovávána jako Catalanova čísla.