Bellova čísla

Buď M konečná množina nající n prvků pro nějaké nezáporné celé číslo n. Označme B_n počet všech rozkladů množiny M. Takto definovaná čísla B_n se nazývají Bellova čísla. Platí ovšem rovnost $B_n = \sum_{k=0}^{n} S_{n,k}$, kde $S_{n,k}$ jsou Stirlingova čísla 2. druhu.

Je jasné, že $B_0 = 1$. K výpočtu Bellových čísel B_n pro $n > 0$ lze použít následující rekurentní formuli.

Tvrzení.

Pro každé nezáporné celé číslo n platí rovnost

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Důkaz.

Buď M množina mající n prvků a buď $b \notin M$ další prvek. Představme si všechny rozklady množiny $M \cup \{b\}$. Počet těchto rozkladů je dán číslem B_{n+1}. V každém z těchto rozkladů leží prvek b v některé třídě T. Ostatní třídy takového rozkladu pak vytvoří rozklad množiny $M - T$. Množina $M - T$ je podmnožinou množiny M a může mít k prvků pro kterékoliv $k = 0, 1, 2, \ldots, n$.

Pro dané k je tedy tuto podmnožinu $M - T$ možno vybrat $\binom{n}{k}$ způsoby. Je-li tato podmnožina už vybrána, pak je třeba uvážit kterýkoliv z jejích rozkladů. Počet těchto rozkladů je dán číslem B_k. Tím je ověřena výše uvedená rekurentní formule. $\square$

V následující větě nalezneme exponenciální generující funkci posloupnosti $\{B_n\}_{n=0}^{\infty}$ Bellových čísel.

Věta.

Pro všechna $x \in \mathbb{R}$ platí rovnost

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{(e^x - 1)}.$$

Důkaz.

Ověřme nejprve, že pro každé nezáporné celé číslo n platí nerovnost $B_n \leqslant n!$. Je $B_0 = 1 = 0!$. Dále postupujeme indukcí s využitím rekurentní formule z předchozího tvrzení. Tak dostáváme

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k! = \sum_{k=0}^{n} [n]_k \leqslant \sum_{k=0}^{n} n! = (n+1)n! = (n+1)!.$$

Tím je ověřena výše zmíněná nerovnost. Odtud plyne, že výše uvedená mocninná řada má poloměr konvergence alespoň 1. Označme $y(x)$ součet této mocninné řady. Podle dřívějších poznámek o součinu a derivaci exponenciálních generujících řad s použitím rekurentní formule z předchozího tvrzení pak postupně dostáváme

$$y(x)\cdot e^x = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k}{n!} x^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{n!} x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n\right)' = y'(x),$$

čili

$$y(x)\cdot e^x = y'(x),$$

což je homogenní lineární diferenciální rovnice 1. řádu pro neznámou funkci $y(x)$. Z kurzu matematické analýzy víme, že její obecné řešení je tvaru

$$C\cdot e^{\int e^x\,dx} = C\cdot e^{e^x},$$

kde $C \in \mathbb{R}$ je libovolná konstanta. V našem případě ovšem navíc máme $y(0) = B_0 = 1$, takže musí být $C = e^{-1}$. Odtud konečně vychází

$$y(x) = e^{(e^x - 1)}.$$

Přitom rozvoj této funkce do mocninné řady v bodě 0 konverguje pro všechna $x \in \mathbb{R}$, neboť se jedná o kompozici $g(f(x))$ dvou funkcí $f(x) = e^x - 1$ a $g(x) = e^x$ splňujících $f(0) = 0$, které obě tuto vlastnost mají. $\square$

Na základě právě získaného poznatku nyní nalezneme explicitní formuli pro Bellova čísla. Víme tedy, že exponenciální generující funkcí pro Belova čísla B_n je funkce

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} x^n = e^{(e^x - 1)} = \frac{1}{e} \cdot e^{e^x}.$$

Poněvadž pro každé reálné číslo t je

$$e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!},$$

dostáváme dále

$$\begin{aligned} \frac{1}{e} \cdot e^{e^x} &= \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{kx}}{k!} = \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(kx)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k^n}{k! \cdot n!} x^n = \frac{1}{e} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k! \cdot n!} x^n \\ &= \frac{1}{e} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!} \right) x^n. \end{aligned}$$

Uvedené přehození sum je korektní, neboť příslušné mocninné řady jsou absolutně konvergentní. Porovnáním tohoto vyjádření funkce $\frac{1}{e} \cdot e^{e^x}$ s předchozím vyjádřením dostáváme rovnost

$$B_n = \frac{1}{e} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}$$

platnou pro všechna nezáporná celá čísla n.