# Řešení homogenních lineárních rekurentních formulí s konstantními koeficienty

Budeme muset nejprve připomenout některé známé poznatky o rozkladech racionálních lomených funkcí na parciální zlomky.

Buď $\mathbb{R}[\![x]\!]$ algebra formálních mocninných řad nad tělesem $\mathbb{R}$ všech reálných čísel. Ukážeme, že pro každou mocninnou řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ z $\mathbb{R}[\![x]\!]$ takovou, že $a_0 \neq 0$, existuje v $\mathbb{R}[\![x]\!]$ mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ taková, že je splněno

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = 1.$$

Jinak řečeno, každá mocninná řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, v níž $a_0 \neq 0$, je jednotkou okruhu $\mathbb{R}[\![x]\!]$. Skutečně, podle definice násobení mocninných řad výše uvedená podmínka žádá, aby platilo

$$a_0 b_0 = 1,$$

$$a_0 b_n + \sum_{i=1}^{n} a_i b_{n-i} = 0 \quad \text{pro všechna kladná celá čísla } n.$$

Tyto požadavky je ale možno splnit. Poněvadž $a_0 \neq 0$, potřebné koeficienty $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ je odtud možno jeden po druhém postupně vypočítat.

Právě zjištěný fakt zejména znamená, že k libovolnému polynomu $g$ z $\mathbb{R}[x]$ s nenulovým absolutním členem existuje v $\mathbb{R}[\![x]\!]$ mocninná řada, která je k němu inverzním prvkem. Tuto mocninnou řadu pak můžeme zapsat jako $\frac{1}{g}$. S využitím tohoto počítání invezních prvků v algebře $\mathbb{R}[\![x]\!]$ je pak možno obecněji racionální lomené funkce, tedy zlomky tvaru $\frac{f}{g}$, kde $f, g$ jsou polynomy z $\mathbb{R}[x]$ a $g$ je polynom s nenulovým absolutním členem, převádět na formální mocninné řady.

Jsou známy následující fakty o rozkladech racionálních lomených funkcí na parciální zlomky. Nechť $f$ je polynom z $\mathbb{R}[x]$ a nechť $g$ je nenulový normovaný polynom z $\mathbb{R}[x]$. Nechť $g = h_1 \cdot \dots \cdot h_m$, kde $m$ je kladné celé číslo a $h_1, \dots, h_m$ jsou vzájemně nesoudělné normované polynomy z $\mathbb{R}[x]$. Pak existují polynomy $c, d_1, \dots, d_m$ v $\mathbb{R}[x]$ splňující $\operatorname{st} d_1 < \operatorname{st} h_1$, ... , $\operatorname{st} d_m < \operatorname{st} h_m$ takové, že platí

$$\frac{f}{g} = c + \frac{d_1}{h_1} + \dots + \frac{d_m}{h_m}.$$

Tyto polynomy $c, d_1, \dots, d_m$ jsou určeny jednoznačně. Je-li $\operatorname{st} f < \operatorname{st} g$, pak $c = 0$. Uvedený fakt je zobecněním Bezoutovy věty a lze ho pomocí ní dokázat indukcí vzhledem k číslu $m$.

Jsou-li všechny činitele v předchozím rozkladu $g = h_1 \cdot \dots \cdot h_m$ mocninami normovaných lineárních polynomů, to jest jsou-li tvaru $(x - r)^k$ pro nějaké reálné číslo $r$ a nějaké kladné celé číslo $k$, je možno jít ještě dále. (Takový rozklad polynomu $g$ je vždy možný, jestliže pracujeme nad tělesem $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel místo tělesa $\mathbb{R}$ všech reálných čísel.)

Pak pro libovolný polynom $d$ z $\mathbb{R}[x]$ splňující $\operatorname{st} d < k$ existují jednoznačně určená reálná čísla $s_1, s_2, \ldots, s_k$ taková, že platí

$$\frac{d}{(x-r)^k} = \frac{s_1}{x-r} + \frac{s_2}{(x-r)^2} + \cdots + \frac{s_k}{(x-r)^k}.$$

Abychom se o tom přesvědčili, stačí provést rozvoj polynomu $d$ se středem v hodnotě $r$.

Vraťme se teď k řešení naší homogenní lineární rekurentní formule $k$-tého řádu s konstantními koeficienty pro neznámou funkci $y(n)$. Tato funkce $y(n)$ bude záviset na jedné nezáporné celočíselné proměnné $n$ a jejími hodnotami budou nyní nějaká reálná čísla. Připomeňme, že tato rekurentní formule je podmínkou tvaru

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + a_2 y(n+k-2) + \cdots + a_k y(n) = 0,$$

která ale má být splněna pro všechna nezáporná celá čísla $n$. Konstantami $a_1, a_2, \ldots, a_k$ budou nyní nějaká reálná čísla. Hledáme všechna řešení této rekurentní formule, to jest všechny funkce $y(n)$ vyhovující uvedené podmínce, či spíše uvedené soustavě podmínek. Množina všech těchto řešení je nekonečná, tvoří totiž vektorový prostor dimenze $k$ nad tělesem $\mathbb{R}$ všech reálných čísel. (Předesíláme už teď, že budeme muset později přejít nad těleso $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel.)

Libovolná lineární kombinace funkcí, které jsou řešeními takové rekurentní formule, je totiž sama rovněž řešením této rekurentní formule. Navíc na prvních $k$ hodnot $y(0), y(1), y(2), \dots, y(k-1)$ libovolného řešení $y(n)$ této rekurentní formule se nekladou žádná omezení, takže je lze volit libovolně. Odtud vyplývá, že $k$ je dimenze vektorového prostoru všech řešení naší rekurentní formule. Jestliže však tyto počáteční hodnoty $y(0), y(1), y(2), \dots, y(k-1)$ jsou předem pevně stanoveny, to jest mají-li být navíc splněny takzvané počáteční podmínky

$$y(0) = \vartheta_0,\ y(1) = \vartheta_1,\ y(2) = \vartheta_2,\ \dots,\ y(k-1) = \vartheta_{k-1},$$

kde $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_{k-1}$ jsou dané reálné hodnoty, pak je tím řešení $y(n)$ určeno jednoznačně. Je-li známa nějaká báze vektorového prostoru všech řešení, pak toto poslední řešení je nějakou její lineární kombinací. K určení koeficientů v této lineární kombinaci stačí řešit soustavu lineárních rovnic očividným způsobem sestavenou na základě daných počátečních podmínek.

Potřebujeme tedy najít nějakou bázi vektorového prostoru všech řešení naší homogenní lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty. K tomu účelu definujeme takzvaný charakteristický polynom této rekurentní formule

$$h(x) = x^k + a_1 x^{k-1} + a_2 x^{k-2} + \cdots + a_k.$$

Tento polynom lze nad tělesem $\mathbb{C}$ všech komplexních čísel rozložit na součin lineárních polynomů ve tvaru

$$h(x) = (x - r_1)^{e_1} \cdot \dots \cdot (x - r_t)^{e_t},$$

kde $t$ je kladné celé číslo, exponenty $e_1, \dots, e_t$ jsou kladná celá čísla splňující $e_1 + \dots + e_t = k$ a $r_1, \dots, r_t$ jsou vzájemně různá komplexní čísla, která splňují $r_1 \cdot \dots \cdot r_k \neq 0$, neboť $a_k \neq 0$, ježto naše rekurentní formule je řádu $k$. Položme dále

$$g(x) = x^k \cdot h\left(\frac{1}{x}\right) = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k.$$

Pak výše uvedený rozklad polynomu $h(x)$ přejde na rozklad polynomu $g(x)$ ve tvaru

$$g(x) = (1 - r_1 x)^{e_1} \cdot \dots \cdot (1 - r_t x)^{e_t}.$$

Označme nyní symbolem $w(x)$ generující řadu $\sum_{n=0}^{\infty} y(n) x^n$ posloupnosti $\{y(n)\}_{n=0}^{\infty}$ hodnot hledaného řešení $y(n)$ naší rekurentní formule. Pak tato rekurentní formule říká přesně to, že v součinu $w(x) \cdot g(x)$ jsou koeficienty u mocnin $x^{n+k}$ pro všechna nezáporná celá čísla $n$ rovny nule. Podle definice násobení mocninných řad je totiž koeficient u mocniny $x^{n+k}$ v součinu $w(x) \cdot g(x)$ roven $y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + a_2 y(n+k-2) + \dots + a_k y(n) = 0$.

To ale znamená, že existuje polynom

$$f(x) = p_{k-1}x^{k-1} + p_{k-2}x^{k-2} + \cdots + p_0,$$

kde $p_{k-1}, p_{k-2}, \ldots, p_0$ jsou nějaká reálná čísla, takový, že platí

$$w(x) \cdot g(x) = f(x),$$

čili

$$w(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

neboť $g(x)$ je polynom s absolutním členem rovným 1, takže jím lze dělit v okruhu formálních mocninných řad. Ukážeme, jak lze zlomek vpravo šikovným způsobem rozvinout v mocninnou řadu.

Vzhledem k předchozímu rozkladu polynomu $g(x)$ na součin lineárních faktorů víme podle výsledků o rozkladech na parciální zlomky, že existují komplexní čísla $s_{11}, \ldots, s_{1e_1}, \ldots, s_{t1}, \ldots, s_{te_t}$ taková, že platí

$$w(x) = \frac{s_{11}}{1 - r_1 x} + \cdots + \frac{s_{1e_1}}{(1 - r_1 x)^{e_1}} + \cdots + \frac{s_{t1}}{1 - r_t x} + \cdots + \frac{s_{te_t}}{(1 - r_t x)^{e_t}}.$$

Počet sčítanců v tomto vyjádření mocninné řady $w(x)$ je roven $e_1 + \cdots + e_t = k$.

Generující řada $w(x)$ libovolného řešení naší rekurentní formule je tedy lineární kombinací zlomků tvaru

$$\frac{1}{(1-rx)^e},$$

kde $r = r_i$ pro některé $i = 1, \dots, t$ a $e \in \{1, \dots, e_i\}$. Takový zlomek ale lze rozvinout do mocninné řady následovně:

$$(1-rx)^{-e} = ((1-rx)^{-1})^e = \left(\sum_{n=0}^{\infty}(rx)^n\right)^e.$$

Poslední mocninu uvedené mocninné řady lze vypočíst s odkazem na definici kombinací s opakováním a na příslušné binomické koeficienty takto:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}(rx)^n\right)^e = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+e-1}{n}(rx)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+e-1}{e-1} r^n x^n.$$

Po rozepsání takového binomického koeficientu nakonec celkem vyjde

$$(1-rx)^{-e} = \frac{1}{(e-1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}[n+e-1]_{e-1}\cdot r^n x^n.$$

Generující řady $w(x)$ všech řešení naší rekurentní formule jsou tedy lineárními kombinacemi mocninných řad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} [n+e-1]_{e-1} \cdot r^n x^n,$$

kde $r = r_i$ pro některé $i = 1, \dots, t$ a $e \in \{1, \dots, e_i\}$. Protože takových mocninných řad je celkem $k$ a vektorový podprostor všech řešení má dimenzi $k$, musí zde jít o všechny možné lineární kombinace. Přitom funkce $[n+e-1]_{e-1} \cdot r^n$ proměnné $n$ pro všechna zmíněná $r$ a $e$ tvoří bázi vektorového prostoru všech řešení naší rekurentní formule. Poněvadž navíc klesající faktoriály $[n+e-1]_{e-1}$ jsou polynomy v proměnné $n$ stupňů $e-1$ pro všechna výše uvedená $e$, tvoří tyto faktoriály bázi v příslušném vektorovém prostoru polynomů. Lze je proto nahradit jednoduššími polynomy $n^{e-1}$ pro všechna uvedená $e$, které rovněž tvoří bázi dotyčného vektorového prostoru polynomů. Takže také funkce $n^{e-1} \cdot r^n$ proměnné $n$ pro všechna zmíněná $r$ a $e$ tvoří bázi vektorového prostoru všech řešení naší rekurentní formule. Celkem tedy generující řady $w(x)$ všech řešení naší rekurentní formule jsou právě všechny lineární kombinace mocninných řad tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^{e-1} \cdot r^n x^n,$$

kde $r = r_i$ pro některé $i = 1, \dots, t$ a $e \in \{1, \dots, e_i\}$. Řešení této rekurentní formule jsou pak odpovídající lineární kombinace funkcí $n^{e-1} \cdot r^n$. Tyto funkce přitom tvoří bázi vektorového prostoru všech řešení rekurentní formule.

Tyto závěry lze souhrnně formulovat takto:

## Věta.

*Nechť je dána homogenní lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty. Nechť* $r_1, \ldots, r_t$ *jsou všechny vzájemně různé kořeny jejího charakteristického polynomu v oboru komplexních čísel, nechť* $e_1, \ldots, e_t$ *jsou jejich násobnosti. Pak funkce jedné nezáporné celočíselné proměnné* $n$ *tvaru*

$$n^{e-1} \cdot r_i^n \quad \textit{pro všechna} \;\; i = 1, \ldots, t \;\; \textit{a} \;\; e = 1, \ldots, e_i$$

*tvoří bázi vektorového prostoru všech řešení této rekurentní formule nad komplexními čísly.* □