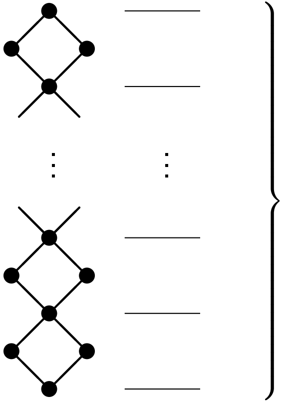
Úloha o pokrývání

Pro každé nezáporné celé číslo n uvažujme částečně uspořádanou množinu $\mathcal{A}_n$ s diagramem

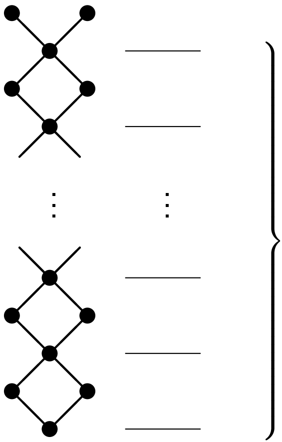
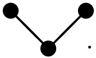
$\mathcal{A}_n$



n pater, takže $\mathcal{A}_0$ je $\bullet$.

Naším úkolem je zjistit, kolik existuje podmnožin množiny $\mathcal{A}_n$ neobsahujících žádné dva prvky, z nichž jeden pokrývá druhý v $\mathcal{A}_n$.

K tomu účelu uvažme pro každé nezáporné celé číslo n ještě částečně uspořádanou množinu $\mathcal{B}_n$ s diagramem

$\mathcal{B}_n$  n pater, takže $\mathcal{B}_0$ je .

Pro každé nezáporné celé číslo n označme symbolem $a(n)$ počet všech podmnožin v $\mathcal{A}_n$ neobsahujících žádné dva vzájemně se pokrývající prvky. Podobně označme symbolem $b(n)$ počet všech podmnožin v $\mathcal{B}_n$ neobsahujících žádné dva vzájemně se pokrývající prvky.

Uvažme nyní libovolnou podmnožinu K v $\mathcal{A}_{n+1}$ splňující stanovenou podmínku. Obsahuje-li K největší prvek v $\mathcal{A}_{n+1}$, pak ostatní prvky v K tvoří podmnožinu v $\mathcal{A}_n$ splňující danou podmínku. Neobsahuje-li však K tento největší prvek, je K podmnožinou v $\mathcal{B}_n$ splňující tuto podmínku. Podobně uvažme libovolnou podmnožinu L v $\mathcal{B}_{n+1}$ splňující stanovenou podmínku. Obsahuje-li L některý ze dvou maximálních prvků v $\mathcal{B}_{n+1}$, případně obsahuje-li L oba tyto maximální prvky, pak zbývající prvky v L tvoří podmnožinu v $\mathcal{B}_n$ splňující danou podmínku. Neobsahuje-li však L žádný z obou maximálních prvků v $\mathcal{B}_{n+1}$, je L podmnožinou v $\mathcal{A}_{n+1}$ splňující požadovanou podmínku. Z těchto úvah pak plynou rekurentní vztahy

$$a(n+1) = a(n) + b(n),$$
$$b(n+1) = 3b(n) + a(n+1),$$

které platí pro všechna nezáporná celá čísla n. Úpravou těchto vztahů dostáváme

$$b(n) = a(n+1) - a(n),$$
$$a(n+1) = b(n+1) - 3b(n),$$

opět pro všechna nezáporná celá čísla n. Odtud dosazením do druhého vztahu za $b(n+1)$ a za $b(n)$ z prvního vztahu vychází

$$\begin{aligned} a(n+1) &= a(n+2) - a(n+1) - 3(a(n+1) - a(n)) \\ &= a(n+2) - 4a(n+1) + 3a(n), \end{aligned}$$

takže zjišťujeme, že

$$a(n+2) - 5a(n+1) + 3a(n) = 0$$

pro všechna nezáporná celá čísla n. To je ale homogenní lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty pro posloupnost dosud neznámých hodnot $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$. Počáteční hodnoty přitom jsou

$$a(0) = 2, \quad a(1) = 7.$$

Řešíme tedy dále standardním způsobem tuto lineární rekurentní formuli. Charakteristický polynom této formule je

$$x^2 - 5x + 3,$$

tento polynom má dva různé jednoduché reálné kořeny

$$\frac{5+\sqrt{13}}{2} \quad \text{a} \quad \frac{5-\sqrt{13}}{2},$$

takže funkce

$$\left(\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)^n \quad \text{a} \quad \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)^n$$

nezáporné celočíselné proměnné n tvoří bázi vektorového prostoru všech řešení této rekurentní formule. Posloupnost hodnot $\{a(n)\}_{n=0}^{\infty}$, neboli hledaná funkce $a(n)$ proměnné n je lineární kombinací posledních dvou funkcí.

Jde o lineární kombinaci s jistými koeficienty c, d, pro něž z počátečních podmínek plynou rovnice

$$\begin{aligned} c \quad + \quad d \quad &= 2, \\ c\cdot\frac{5+\sqrt{13}}{2} + d\cdot\frac{5-\sqrt{13}}{2} &= 7. \end{aligned}$$

Řešením této soustavy lineárních rovnic vychází

$$\begin{aligned} c \quad + \quad d \quad &= 2, \\ c\cdot\sqrt{13} - d\cdot\sqrt{13} &= 4, \end{aligned}$$

takže

$$c = \frac{\sqrt{13}+2}{\sqrt{13}}, \quad d = \frac{\sqrt{13}-2}{\sqrt{13}}.$$

Dospíváme tak k výsledku, že

$$a(n) = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \left[(2+\sqrt{13}) \cdot \left(\frac{5+\sqrt{13}}{2} \right)^n - (2-\sqrt{13}) \cdot \left(\frac{5-\sqrt{13}}{2} \right)^n \right]$$

pro všechna nezáporná celá čísla n.