Reklamní šoty

Televizní společnost má k dispozici 6 dvouminutových a 9 tříminutových reklamních šotů. Má se zjistit, kolik má společnost možností, jak z těchto šotů sestavit blok reklam v délce trvání n minut, mohou-li se jednotlivé šoty v bloku opakovat.

Pro každé nezáporné celé číslo n označíme symbolem $y(n)$ počet všech možností, jak n-minutový blok reklam sestavit. Pak z podmínek úlohy uvážením všech možností, jaký může být první reklamní šot v takovém bloku reklam, plyne rekurentní formule

$$y(n+3) = 6y(n+1) + 9y(n)$$

pro všechna nezáporná celá čísla n. Přitom počáteční hodnoty jsou

$$y(0) = 1, \;\; y(1) = 0, \;\; y(2) = 6.$$

Charakteristický polynom této homogenní lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty je

$$\begin{aligned} h(x) &= x^3 - 6x - 9 = (x-3)(x^2+3x+3) \\ &= (x-3)\left(x - \frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right). \end{aligned}$$

Všechny tři kořeny tohoto polynomu jsou jednoduché. Tvoří tedy funkce

$$3^n,\ \left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right)^n,\ \left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)^n$$

bázi vektorového prostoru všech řešení výše uvedené rekurentní formule nad tělesem všech komplexních čísel.

Abychom zůstali uvnitř tělesa všech reálných čísel, přejdeme od získané báze vektorového prostoru všech řešení nad komplexními čísly k nové bázi, která bude složena z reálných funkcí, a bude tudíž současně bází vektorového prostoru všech řešení nad reálnými čísly. Přepíšeme hodnoty výše uvedených komplexních funkcí do goniometrického tvaru:

$$\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right)^n = (\sqrt{3}\,(\cos\tfrac{5}{6}\pi + i\sin\tfrac{5}{6}\pi))^n = \sqrt{3^n}\,(\cos\tfrac{5n}{6}\pi + i\sin\tfrac{5n}{6}\pi),$$

$$\left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)^n = (\sqrt{3}\,(\cos\tfrac{5}{6}\pi - i\sin\tfrac{5}{6}\pi))^n = \sqrt{3^n}\,(\cos\tfrac{5n}{6}\pi - i\sin\tfrac{5n}{6}\pi).$$

Odtud plyne, že

$$\tfrac{1}{2}\left(\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right)^n + \left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) = \sqrt{3^n}\,\cos\tfrac{5n}{6}\pi,$$

$$\frac{1}{2i}\left(\left(\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right)^n - \left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)^n\right) = \sqrt{3^n}\,\sin\frac{5n}{6}\pi.$$

To znamená, že reálné funkce

$$3^n,\ \ \sqrt{3^n}\,\cos\frac{5n}{6}\pi,\ \ \sqrt{3^n}\,\sin\frac{5n}{6}\pi$$

jsou lineárními kombinacemi funkcí předchozí báze. Naproti tomu zase funkce předchozí báze jsou lineárními kombinacemi těchto reálných funkcí. Takže naposledy uvedené reálné funkce tvoří opět bázi vektorového prostoru všech řešení rekurentní formule nad komplexními čísly, a tedy tvoří takovou bázi i nad reálnými čísly. Takže dostáváme

$$y(n) = s\cdot 3^n + t\cdot\sqrt{3^n}\,\cos\frac{5n}{6}\pi + u\cdot\sqrt{3^n}\,\sin\frac{5n}{6}\pi$$

pro všechna nezáporná celá čísla n při jistých reálných koeficientech s, t, u, pro něž z počátečních podmínek plynou lineární rovnice

$$\begin{aligned} s + t \qquad\qquad &= 1,\\ 3s - \tfrac{3}{2}t + \tfrac{\sqrt{3}}{2}u &= 0,\\ 9s + \tfrac{3}{2}t - \tfrac{3\sqrt{3}}{2}u &= 6, \end{aligned}$$

jejichž řešením postupně vychází

$$
\begin{aligned}
s + t &= 1,\\
18s - 3t &= 6,
\end{aligned}
$$

takže dostáváme

$$
s = \frac{3}{7},\quad t = \frac{4}{7},\quad u = -\frac{2\sqrt{3}}{7}.
$$

To dává výsledek, že

$$
y(n) = \frac{3}{7}\cdot 3^n + \frac{4}{7}\cdot\sqrt{3^n}\cos\tfrac{5n}{6}\pi - \frac{2}{7}\cdot\sqrt{3^{n+1}}\sin\tfrac{5n}{6}\pi
$$

pro všechna nezáporná celá čísla n.