Metoda variace konstant

Umíme už najít všechna řešení homogenní lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty. Našim dalším cílem je řešit nehomogenní lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty. K tomu účelu slouží metoda variace konstant, kterou nyní popíšeme.

Viděli jsme už, že nehomogenní lineární rekurentní formule k-tého řádu s konstantními koeficienty pro neznámou funkci $y(n)$ jedné nezáporné celočíselné proměnné n je podmínka tvaru

$$y(n+k) + a_1 y(n+k-1) + a_2 y(n+k-2) + \cdots + a_k y(n) = \psi(n),$$

kde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou reálné konstanty, $a_k \neq 0$, a $\psi(n)$ je reálná funkce proměnné n, která není identicky rovna nule. Tato podmínka má být splněna pro všechna nezáporná celá čísla n.

K této dané nehomogenní lineární rekurentní formuli přiřadíme homogenní lineární rekurentní formuli

$$z(n+k) + a_1 z(n+k-1) + a_2 z(n+k-2) + \cdots + a_k z(n) = 0$$

s nulovou pravou stranou. Je vidět, že jsou-li funkce $y(n)$ a $\bar{y}(n)$ libovolnými řešeními naší nehomogenní lineární rekurentní formule, pak jejich rozdíl $z(n) = \bar{y}(n) - y(n)$ je řešením příslušné homogenní lineární rekurentní formule.

Potom platí $\bar{y}(n) = y(n) + z(n)$. Naopak je-li funkce $y(n)$ nějakým řešením nehomogenní lineární rekurentní formule a je-li funkce $z(n)$ libovolným řešením homogenní lineární rekurentní formule, pak funkce $\bar{y}(n) = y(n) + z(n)$ je rovněž řešením nehomogenní lineární rekurentní formule. Známe-li tedy jedno řešení $y(n)$ nehomogenní lineární rekurentní formule a všechna řešení $z(n)$ homogenní lineární rekurentní formule, dostaneme odtud všechna řešení $\bar{y}(n)$ nehomogenní lineární rekurentní formule jako všechny součty $y(n) + z(n)$, kde $z(n)$ probíhá všechna řešení homogenní lineární rekurentní formule. Poněvadž všechna řešení $z(n)$ homogenní lineární rekurentní formule už umíme najít, zbývá najít jedno vybrané, takzvané partikulární řešení $y(n)$ nehomogenní lineární rekurentní formule.

Víme, že všechna řešení homogenní lineární rekurentní formule tvoří vektorový prostor dimenze k nad tělesem všech reálných čísel. Buď

$$z_1(n),\ z_2(n),\ \dots\ ,\ z_k(n)$$

nějaká báze tohoto vektorového prostoru. Říkáme, že jde o fundamentální systém řešení homogenní lineární rekurentní formule. Libovolné řešení homogenní lineární rekurentní formule lze pak vyjádřit jako lineární kombinaci

$$c_1 z_1(n) + c_2 z_2(n) + \cdots + c_k z_k(n)$$

funkcí této báze s nějakými reálnými konstantami $c_1, c_2, \dots, c_k$. Idea metody variace konstant spočívá v tom, že konstanty $c_1, c_2, \dots, c_k$ nahradíme funkcemi $c_1(n), c_2(n), \dots, c_k(n)$ proměnné n.

Takže jedno partikulární řešení $y(n)$ nehomogenní lineární rekurentní formule budeme hledat ve tvaru

$$y(n) = c_1(n)z_1(n) + c_2(n)z_2(n) + \cdots + c_k(n)z_k(n)$$

pro nějaké funkce $c_1(n), c_2(n), \ldots, c_k(n)$ proměnné n, které je třeba určit. Stručněji zapsáno, hledáme toto partikulární řešení $y(n)$ ve tvaru

$$y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i(n)z_i(n),$$

kde funkce $c_i(n)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ je třeba určit.

Dosadíme-li toto vyjádření partikulárního řešení $y(n)$ do naší nehomogenní lineární rekurentní formule, dostaneme tak jednu rovnici pro k neznámých funkcí $c_i(n)$, kde $i = 1, 2, \ldots, k$. Můžeme tedy podrobit tyto funkce ještě dalším $k - 1$ podmínkám, což učiníme následujícím způsobem. Máme

$$\begin{aligned} y(n+1) &= \sum_{i=1}^{k} c_i(n+1)z_i(n+1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i(n)z_i(n+1) + \sum_{i=1}^{k}(c_i(n+1) - c_i(n))z_i(n+1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i(n)z_i(n+1) + \sum_{i=1}^{k} \Delta c_i(n)z_i(n+1), \end{aligned}$$

kde $\Delta c_i(n)$ jsou první diference funkcí $c_i(n)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Stanovíme-li nyní podmínku

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i(n) z_i(n+1) = 0$$

pro funkce $c_i(n)$, kde $i = 1, 2, \ldots, k$, vyplyne odtud rovnost

$$y(n+1) = \sum_{i=1}^{k} c_i(n) z_i(n+1).$$

Předpokládejme nyní s použitím indukce, že už pro nějaké $\ell = 1, 2, \ldots, k-2$ máme rovnost

$$y(n+\ell) = \sum_{i=1}^{k} c_i(n) z_i(n+\ell).$$

Pak odtud dostáváme

$$\begin{aligned} y(n+\ell+1) &= \sum_{i=1}^{k} c_i(n+1) z_i(n+\ell+1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i(n) z_i(n+\ell+1) + \sum_{i=1}^{k} (c_i(n+1) - c_i(n)) z_i(n+\ell+1) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i(n) z_i(n+\ell+1) + \sum_{i=1}^{k} \Delta c_i(n) z_i(n+\ell+1). \end{aligned}$$

Stanovíme-li nyní podmínku

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i(n) z_i(n+\ell+1) = 0,$$

pro funkce $c_i(n)$, kde $i = 1, 2, \ldots, k$, vyplyne odtud rovnost

$$y(n+\ell+1) = \sum_{i=1}^{k} c_i(n) z_i(n+\ell+1).$$

Stanovili jsme tak celkem $k-1$ podmínek tvaru

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i(n) z_i(n+\ell) = 0$$

pro všechna $\ell = 1, 2, \ldots, k-1$.

Odtud jsme odvodili $k-1$ rovností tvaru

$$y(n+\ell) = \sum_{i=1}^{k} c_i(n) z_i(n+\ell),$$

opět pro všechna $\ell = 1, 2, \ldots, k-1$.

Nakonec z poslední z těchto rovností pro $\ell = k - 1$ ještě odvodíme

$$\begin{aligned} y(n+k) &= \sum_{i=1}^{k} c_i(n+1) z_i(n+k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i(n) z_i(n+k) + \sum_{i=1}^{k} (c_i(n+1) - c_i(n)) z_i(n+k) \\ &= \sum_{i=1}^{k} c_i(n) z_i(n+k) + \sum_{i=1}^{k} \Delta c_i(n) z_i(n+k). \end{aligned}$$

Dosadíme-li nyní z těchto k právě odvozených rovností a také z našeho výchozího vyjádření $y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i(n) z_i(n)$ do naší nehomogenní lineární rekurentní formule, obdržíme tak podmínku

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} c_i(n) \big(z_i(n+k) + a_1 z_i(n+k-1) + a_2 z_i(n+k-2) + \cdots + a_k z_i(n) \big) \\ + \sum_{i=1}^{k} \Delta c_i(n) z_i(n+k) = \psi(n). \end{aligned}$$

Ale funkce $z_i(n)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$ jsou řešeními příslušné homogenní lineární rekurentní formule.

Proto odtud plyne podmínka

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta c_i(n) z_i(n+k) = \psi(n).$$

Přidáme-li tuto poslední podmínku k předchozím $k-1$ podmínkám, dostaneme tak celkem k podmínek, to jest k rovnic pro první diference $\Delta c_i(n)$ funkcí $c_i(n)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$.

Řešením této soustavy rovnic obdržíme tyto první diference a následnou sumací (to je obrácená operace k diferenci) i funkce $c_i(n)$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$. Tak nakonec najdeme i partikulární řešení $y(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i(n) z_i(n)$ naší nehomogenní lineární rekurentní formule.