Sumace funkcí

Viděli jsme, že k řešení nehomogenních lineárních rekurentních formulí s konstantními koeficienty potřebujeme umět počítat sumy funkcí. Buď f funkce definovaná na množině všech nezáporných celých čísel. Sumou Σf funkce f rozumíme funkci g definovanou rovněž na množině všech nezáporných celých čísel takovou, že platí $\Delta g = f$. Poněkud podrobněji řečeno, sumou Σf funkce f rozumíme funkci g takovou, že pro všechna nezáporná celá čísla n platí

$$\Delta g(n) = g(n+1) - g(n) = f(n).$$

Je-li h jiná funkce taková, že $\Delta h = f$, pak pro funkci $h - g$ a pro všechna nezáporná celá čísla n máme

$$\Delta(h-g)(n) = \Delta h(n) - \Delta g(n) = f(n) - f(n) = 0.$$

To znamená, že funkce $h - g$ je konstantní na množině všech nezáporných celých čísel, čili existuje konstanta c taková, že pro všechna nezáporná celá čísla n platí $(h-g)(n) = h(n) - g(n) = c$, čili $h(n) = g(n) + c$. Je tedy suma Σf funkce f určena jednoznačně až na aditivní konstantu c.

Poznamenejme zprvu, že jsou-li $f_1, f_2, \ldots, f_k$ libovolné funkce definované na množině všech nezáporných celých čísel a jsou-li $c_1, c_2, \ldots, c_k$ libovolné konstanty, pak zřejmě platí

$$\Sigma\left(\sum_{i=1}^{k} c_i f_i(n)\right) = \sum_{i=1}^{k} c_i \, \Sigma f_i(n).$$

Argument n označuje, že zde vystupují funkce jedné nezáporné celočíselné proměnné.

Nalezneme dále sumy některých jednoduchých funkcí. Poněvadž pro identitu, to jest pro funkci n máme $\Delta n = n + 1 - n = 1$, je vidět, že platí

$$\Sigma 1 = n + c.$$

Obecněji pro každé kladné celé číslo k a pro klesající faktoriál $[n]_k$ máme $\Delta[n]_k = [n+1]_k - [n]_k = (n+1)[n]_{k-1} - (n-k+1)[n]_{k-1} = k[n]_{k-1}$, takže platí $\Sigma[n]_{k-1} = \frac{1}{k}[n]_k + c$. Proto tedy

$$\Sigma[n]_k = \frac{1}{k+1}[n]_{k+1} + c.$$

Dále z dřívějška víme, že pro každé kladné celé číslo k a pro mocninnou funkci n^k platí $n^k = \sum_{i=0}^{k} S_{k,i}[n]_i$, kde $S_{k,i}$ jsou Stirlingova čísla 2. druhu. Odtud a z předchozích poznatků vyplývá, že

$$\Sigma n^k = \sum_{i=0}^{k} S_{k,i} \, \frac{[n]_{i+1}}{i+1} + c.$$

Odtud pak vychází, že

$$\Sigma n = \frac{1}{2} n(n-1) + c,$$

$$\Sigma n^2 = \frac{1}{2} n(n-1) + \frac{1}{3} n(n-1)(n-2) + c,$$

a tak dále. Pro každé reálné nebo komplexní číslo a takové, že $a \neq 1$, a pro exponenciální funkci a^n máme $\Delta a^n = a^{n+1} - a^n = (a-1)a^n$, takže platí

$$\Sigma a^n = \frac{a^n}{a-1} + c.$$

Zejména pro $a = 2$ vychází, že $\Sigma\, 2^n = 2^n + c$.

Konečně si všimněme, že pro první diferenci $\Delta(fg)$ součinu fg dvou funkcí f a g a pro každé nezáporné celé číslo n platí

$$\begin{aligned}\Delta(fg)(n) &= (fg)(n+1) - (fg)(n) = f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n) \\ &= f(n+1)g(n+1) - f(n)g(n+1) + f(n)g(n+1) - f(n)g(n) \\ &= g(n+1)\Delta f(n) + f(n)\Delta g(n).\end{aligned}$$

Odtud plyne vztah

$$\begin{aligned} f(n)\Delta g(n) &= \Delta(fg)(n) - g(n+1)\Delta f(n) \\ &= \Delta\big(f(n)g(n)\big) - g(n+1)\Delta f(n), \end{aligned}$$

z něhož sumací dostaneme rovnost

$$\Sigma\big(f(n)\Delta g(n)\big) = f(n)g(n) - \Sigma\big(g(n+1)\Delta f(n)\big).$$

To je vztah pro takzvanou částečnou sumaci. S jeho pomocí můžeme například vypočítat

$$\Sigma(n\,2^n) = n\,2^n - \Sigma\,2^{n+1} = n\,2^n - 2\,2^n + c = (n-2)\,2^n + c.$$