Rozklady přirozených čísel na sčítance

Pro libovolná kladná přirozená čísla n a k označme $\partial(n,k)$ počet všech rozkladů čísla n na součet k vzájemně různých sčítanců. Těmito sčítanci mají být opět kladná přirozená čísla a nebude přitom záležet na pořadí těchto sčítanců.

Odvodíme nejprve rekurentní formuli pro čísla $\partial(n,k)$.

Pro n menší než součet $1+2+\cdots+k$, to jest pro $n<\binom{k+1}{2}$ neexistuje rozklad čísla n na k různých sčítanců, takže je $\partial(n,k)=0$. Pro $n\geqslant\binom{k+1}{2}$ veďme následující úvahu. Uvažme libovolný rozklad čísla n na k různých sčítanců:

$$n=m_1+m_2+\cdots+m_k,$$

kde $m_1<m_2<\cdots<m_k$. Pak jsou dvě možnosti. Buďto $m_1>1$, pak ovšem $n-k=(m_1-1)+(m_2-1)+\cdots+(m_k-1)$ je rozklad přirozeného čísla $n-k$ na k různých sčítanců; těchto rozkladů je $\partial(n-k,k)$. Anebo $m_1=1$. Jestliže přitom $k>1$, pak $n-1=m_2+\cdots+m_k$ je rozklad přirozeného čísla $n-1$ na $k-1$ různých sčítanců větších než 1, a tedy $n-k=(m_2-1)+\cdots+(m_k-1)$ je rozklad přirozeného čísla $n-k$ na $k-1$ různých sčítanců; těchto rozkladů je $\partial(n-k,k-1)$. Odtud plyne rekurentní formule

$$\partial(n,k) = \partial(n-k,k) + \partial(n-k,k-1)$$

pro hodnoty $k > 1$ a $n \geqslant \binom{k+1}{2}$. Není ale těžké si rozmyslet, že tato rekurentní formule ve skutečnosti platí už pro všechna $n > k$. Přitom počáteční hodnoty jsou ovšem $\partial(n,1) = 1$ pro všechna přirozená čísla n a $\partial(n,k) = 0$ všechna přirozená čísla n, k splňující $n < \binom{k+1}{2}$, respektive $n \leqslant k$.

Budeme chtít postupně počítat hodnoty $\partial(n,1)$, $\partial(n,2)$, $\partial(n,3)$, ... pro libovolná přirozená čísla n.

Již víme, že $\partial(n,1) = 1$ pro všechna přirozená čísla n. Zkoumejme dále hodnoty $\partial(n,2)$. Víme, že $\partial(1,2) = 0$, $\partial(2,2) = 0$, a pro $n \geqslant 3$ máme podle předchozí rekurentní formule vztah

$$\partial(n,2) = \partial(n-2,2) + \partial(n-2,1).$$

To znamená, že pro všechna přirozená čísla $n \geqslant 1$ máme vztah

$$\partial(n+2,2) = \partial(n,2) + \partial(n,1),$$

tedy dostáváme vztah

$$\partial(n+2,2) - \partial(n,2) = 1.$$

To je nehomogenní lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty pro čísla $\partial(n,2)$.

Charakteristický polynom této lineární rekurentní formule je

$$x^2 - 1,$$

má dva kořeny ± 1, takže fundamentální systém řešení zhomogenizované lineární rekurentní formule pozůstává ze dvou řešení $1^n = 1$ a $(-1)^n$. Metodou variace konstant hledáme partikulární řešení nehomogenní lineární rekurentní formule ve tvaru

$$c(n) + d(n)(-1)^n$$

pro jisté funkce $c(n)$ a $d(n)$, pro něž máme dvě rovnice

$$\Delta c(n) + (-1)^{n+1}\Delta d(n) = 0, \quad \Delta c(n) + (-1)^n \Delta d(n) = 1.$$

Z těchto rovnic vychází

$$\Delta c(n) = \frac{1}{2}, \quad \Delta d(n) = \frac{1}{2}(-1)^n.$$

Odtud sumací vyplyne

$$c(n) = \frac{1}{2}n, \quad d(n) = -\frac{1}{4}(-1)^n.$$

Obecné řešení nehomogenní lineární rekurentní formule je tedy tvaru

$$a + b(-1)^n + \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}(-1)^n(-1)^n = a + b(-1)^n + \frac{1}{2}n - \frac{1}{4}$$

pro jisté konstanty a, b.

Pro tyto konstanty z počátečních podmínek $\partial(1,2) = 0$, $\partial(2,2) = 0$ vychází

$$a - b + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = 0, \quad a + b + 1 - \frac{1}{4} = 0,$$

neboli

$$a - b = -\frac{1}{4}, \quad a + b = -\frac{3}{4},$$

takže

$$a = -\frac{1}{2}, \quad b = -\frac{1}{4}.$$

Dostáváme tak

$$\partial(n,2) = \frac{1}{4}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}$$

pro všechna přirozená čísla n.

Zkoumejme dále hodnoty $\partial(n,3)$ pro libovolná přirozená čísla n. Víme, že $\partial(1,3) = 0$, $\partial(2,3) = 0$, $\partial(3,3) = 0$, a pro $n \geqslant 4$ máme podle výše odvozené rekurentní formule vztah

$$\partial(n,3) = \partial(n-3,3) + \partial(n-3,2).$$

To znamená, že pro všechna přirozená čísla $n \geqslant 1$ máme vztah

$$\partial(n+3,3) = \partial(n,3) + \partial(n,2).$$

Podle předchozího výsledku přitom známe hodnotu

$$\partial(n,2) = \frac{1}{4}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}.$$

Dostáváme tedy vztah

$$\partial(n+3,3)-\partial(n,3)=\frac{1}{4}(-1)^{n+1}+\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}.$$

To je nehomogenní lineární rekurentní formule s konstantními koeficienty pro čísla $\partial(n,3)$. Charakteristický polynom této lineární rekurentní formule je

$$x^3-1,$$

má tři kořeny

$$1,\quad \varepsilon=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \varepsilon^2=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

takže fundamentální systém řešení zhomogenizované lineární rekurentní formule pozůstává ze tří řešení

$$1^n=1,\quad \varepsilon^n,\quad \varepsilon^{2n}.$$

Metodou variace konstant hledáme partikulární řešení nehomogenní lineární rekurentní formule ve tvaru

$$f(n)+g(n)\varepsilon^n+h(n)\varepsilon^{2n}$$

pro jisté funkce $f(n)$, $g(n)$ a $h(n)$, pro něž máme tři rovnice

$$\begin{aligned}
\Delta f(n)+\varepsilon^{n+1}\Delta g(n)+\varepsilon^{2n+2}\Delta h(n)&=0,\\
\Delta f(n)+\varepsilon^{n+2}\Delta g(n)+\varepsilon^{2n+1}\Delta h(n)&=0,\\
\Delta f(n)\ +\ \varepsilon^{n}\Delta g(n)\ +\ \varepsilon^{2n}\Delta h(n)&=\frac{1}{4}(-1)^{n+1}+\frac{1}{2}n-\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

To je soustava tří lineárních rovnic pro tři neznámé funkce $\Delta f(n)$, $\Delta g(n)$ a $\Delta h(n)$. Determinant matice této soustavy lineárních rovnic je

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^{n+1} & \varepsilon^{2n+2} \\ 1 & \varepsilon^{n+2} & \varepsilon^{2n+1} \\ 1 & \varepsilon^{n} & \varepsilon^{2n} \end{vmatrix} = 3\varepsilon^2 - 3\varepsilon.$$

Směřujeme k řešení této soustavy lineárních rovnic Cramerovým pravidlem. K tomu potřebujeme vypočíst ještě determinanty

$$\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon^{n+1} & \varepsilon^{2n+2} \\ 0 & \varepsilon^{n+2} & \varepsilon^{2n+1} \\ \frac{1}{4}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} & \varepsilon^{n} & \varepsilon^{2n} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}\right)(\varepsilon^2 - \varepsilon),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \varepsilon^{2n+2} \\ 1 & 0 & \varepsilon^{2n+1} \\ 1 & \frac{1}{4}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} & \varepsilon^{2n} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}\right)\varepsilon^{2n}(\varepsilon^2 - \varepsilon),$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \varepsilon^{n+1} & 0 \\ 1 & \varepsilon^{n+2} & 0 \\ 1 & \varepsilon^{n} & \frac{1}{4}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}n - \frac{3}{4} \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{4}(-1)^{n+1} + \frac{1}{2}n - \frac{3}{4}\right)\varepsilon^{n}(\varepsilon^2 - \varepsilon).$$

Dostáváme tedy

$$\Delta f(n) = \frac{1}{12}(-1)^{n+1} + \frac{1}{6}n - \frac{1}{4},$$

$$\Delta g(n) = \left(\frac{1}{12}(-1)^{n+1} + \frac{1}{6}n - \frac{1}{4}\right)\varepsilon^{2n},$$
$$\Delta h(n) = \left(\frac{1}{12}(-1)^{n+1} + \frac{1}{6}n - \frac{1}{4}\right)\varepsilon^{n}.$$

Odtud sumací obdržíme

$$f(n) = \frac{1}{24}(-1)^n + \frac{1}{12}n(n-1) - \frac{1}{4}n,$$

$$g(n) = \frac{1}{12}\frac{1}{\varepsilon^2+1}(-1)^n\varepsilon^{2n} + \frac{1}{6}\frac{1}{\varepsilon^2-1}n\varepsilon^{2n} - \frac{1}{6}\frac{1}{(\varepsilon^2-1)^2}\varepsilon^{2n+2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon^2-1}\varepsilon^{2n},$$
$$h(n) = \frac{1}{12}\frac{1}{\varepsilon+1}(-1)^n\varepsilon^{n} + \frac{1}{6}\frac{1}{\varepsilon-1}n\varepsilon^{n} - \frac{1}{6}\frac{1}{(\varepsilon-1)^2}\varepsilon^{n+1} - \frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon-1}\varepsilon^{n}.$$

Zamýšlíme vypočíst partikulární řešení $f(n) + g(n)\varepsilon^n + h(n)\varepsilon^{2n}$ naší nehomogenní lineární rekurentní formule. K tomu účelu zjistíme

$$f(n) = \frac{1}{24}(-1)^n + \frac{1}{12}n(n-1) - \frac{1}{4}n,$$

$$g(n)\varepsilon^n = \frac{1}{12}\frac{1}{\varepsilon^2+1}(-1)^n + \frac{1}{6}\frac{1}{\varepsilon^2-1}n - \frac{1}{6}\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon^2-1},$$

$$h(n)\varepsilon^{2n} = \frac{1}{12}\frac{1}{\varepsilon+1}(-1)^n + \frac{1}{6}\frac{1}{\varepsilon-1}n - \frac{1}{6}\frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)^2} - \frac{1}{4}\frac{1}{\varepsilon-1}.$$

Chceme tyto hodnoty sečíst.

K tomu si nejdříve všimněme, že

$$\frac{1}{\varepsilon+1}+\frac{1}{\varepsilon^2+1}=\frac{2+\varepsilon+\varepsilon^2}{(\varepsilon+1)(\varepsilon^2+1)}=1,$$

$$\frac{1}{\varepsilon-1}+\frac{1}{\varepsilon^2-1}=\frac{\varepsilon+\varepsilon^2-2}{(\varepsilon-1)(\varepsilon^2-1)}=-1,$$

$$\frac{\varepsilon}{(\varepsilon-1)^2}+\frac{\varepsilon^2}{(\varepsilon^2-1)^2}=\frac{\varepsilon(\varepsilon^2-1)^2+\varepsilon^2(\varepsilon-1)^2}{(\varepsilon-1)^2(\varepsilon^2-1)^2}=\frac{2(\varepsilon+\varepsilon^2-2)}{(2-\varepsilon-\varepsilon^2)^2}=-\frac{2}{3},$$

kde poslední rovnost vyplynula využitím faktu, že $\varepsilon^2+\varepsilon+1=0$. Nyní tedy sečtením obdržíme

$$f(n)+g(n)\varepsilon^n+h(n)\varepsilon^{2n}=\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{12}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{13}{36}.$$

Obecné řešení nehomogenní lineární rekurentní formule je tedy tvaru

$$a+b\varepsilon^n+c\varepsilon^{2n}+\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{12}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{13}{36}$$

pro jisté konstanty a, b, c, pro které z počátečních podmínek $\partial(1,3)=0$, $\partial(2,3)=0$, $\partial(3,3)=0$ vychází

$$a+b\varepsilon+c\varepsilon^2-\frac{1}{8}+\frac{1}{12}-\frac{1}{2}+\frac{13}{36}=0,$$

$$a+b\varepsilon^2+c\varepsilon+\frac{1}{8}+\frac{1}{3}-1+\frac{13}{36}=0,$$

$$a + b + c - \frac{1}{8} + \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{13}{36} = 0,$$

neboli

$$a + b\varepsilon + c\varepsilon^2 = \frac{13}{72},$$

$$a + b\varepsilon^2 + c\varepsilon = \frac{13}{72},$$

$$a + b + c = \frac{37}{72}.$$

Sečtením těchto tří rovnic dostaneme

$$3a = \frac{7}{8},$$

takže

$$a = \frac{7}{24}.$$

Odtud plyne

$$b + c = \frac{2}{9}.$$

Odečtěme dále od první rovnice druhou rovnici vynásobenou číslem ε. Takto dostaneme

$$a(1 - \varepsilon) + b(\varepsilon - 1) = \frac{13}{72} - \frac{13}{72}\varepsilon.$$

Vydělením číslem $1-\varepsilon$ odtud obdržíme

$$a-b=\frac{13}{72}.$$

Takže dále dostáváme

$$b=\frac{1}{9},\quad c=\frac{1}{9}.$$

Poznamenejme, že

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3},\quad \varepsilon^2=\cos\frac{2\pi}{3}-i\sin\frac{2\pi}{3}.$$

Vypočteme

$$\begin{aligned} b\varepsilon^n+c\varepsilon^{2n} &= \frac{1}{9}\varepsilon^n+\frac{1}{9}\varepsilon^{2n} \\ &= \frac{1}{9}\left(\cos\frac{2\pi n}{3}+i\sin\frac{2\pi n}{3}\right)+\frac{1}{9}\left(\cos\frac{2\pi n}{3}-i\sin\frac{2\pi n}{3}\right) \\ &= \frac{2}{9}\cos\frac{2\pi n}{3}. \end{aligned}$$

Dostáváme tak

$$\partial(n,3)=\frac{2}{9}\cos\frac{2\pi n}{3}+\frac{1}{8}(-1)^n+\frac{1}{12}n^2-\frac{1}{2}n+\frac{47}{72}$$

pro všechna přirozená čísla n.