De Bruijnova věta

Nechť M je neprázdná konečná množina mající m prvků a nechť Y je neprázdná konečná množina mající η prvků. Prvky množiny Y nazýváme obrazci. Nechť dále H je podgrupa v grupě S_M všech permutací množiny M a nechť K je podgrupa v grupě S_Y všech permutací množiny Y. Uvažujme množinu Y^M, to jest množinu všech zobrazení $M \to Y$. Pro libovolnou permutaci $\sigma \in H$ a pro libovolnou permutaci $\tau \in K$ uvažme zobrazení $\tau^\sigma : Y^M \to Y^M$ definované pro každé zobrazení $f : M \to Y$ předpisem $\tau^\sigma(f) = \tau \circ f \circ \sigma$. Snadno se přesvědčíme o tom, že pak zobrazení τ^σ je permutací množiny Y^M. Poněvadž množina Y^M je nyní konečná, stačí ukázat například, že zobrazení τ^σ je injektivní. Jsou-li $f, g : M \to Y$ dvě zobrazení taková, že platí $\tau^\sigma(f) = \tau^\sigma(g)$, čili $\tau \circ f \circ \sigma = \tau \circ g \circ \sigma$, pak odtud plyne, že $\tau^{-1} \circ \tau \circ f \circ \sigma \circ \sigma^{-1} = \tau^{-1} \circ \tau \circ g \circ \sigma \circ \sigma^{-1}$, tedy že $f = g$. Je tedy zobrazení τ^σ opravdu injektivní, a poněvadž je to zobrazení konečné množiny Y^M do ní samotné, musí to být permutace množiny Y^M. Označme symbolem K^H množinu všech permutací tvaru τ^σ pro libovolné permutace $\sigma \in H$ a $\tau \in K$. Ukážeme, že pak K^H je podgrupou grupy S_{Y^M} všech permutací množiny Y^M. Pro libovolné permutace $\sigma, \sigma' \in H$ a $\tau, \tau' \in K$ a pro libovolné zobrazení $f : M \to Y$ totiž vychází $\tau'^{\sigma'}(\tau^\sigma(f)) = \tau' \circ \tau \circ f \circ \sigma \circ \sigma'$, odkud je vidět, že platí rovnost $\tau'^{\sigma'} \circ \tau^\sigma = (\tau' \circ \tau)^{\sigma \circ \sigma'}$. Toto zjištění vede k následujícímu závěru.

Zobrazení $\xi : K \times H^{op} \to S_{Y^M}$, kde H^{op} je duální grupa ke grupě H, dané pro každá $\sigma \in H$ a $\tau \in K$ předpisem $\xi(\tau, \sigma) = \tau^{\sigma}$, je homomorfismem grupy $K \times H^{op}$ do grupy S_{Y^M}, přičemž obrazem $\xi(K \times H^{op})$ je právě množina permutací K^H. Je tedy K^H homomorfním obrazem grupy $K \times H^{op}$, a proto je K^H podgrupou grupy S_{Y^M}. Můžeme tedy uvažovat o orbitách prvků z Y^M, což jsou zobrazení $M \to Y$, v podgrupě K^H. Tyto orbity nazýváme opět konfiguracemi.

Buď dále $\mathcal{F}$ nějaká podmnožina množiny Y^M s následující vlastností. Pro každou permutaci $\sigma \in H$, pro každou permutaci $\tau \in K$ a pro každé zobrazení f z $\mathcal{F}$ také zobrazení $\tau \circ f \circ \sigma$ náleží do $\mathcal{F}$. O takové podmnožině $\mathcal{F}$ množiny Y^M budeme říkat, že je uzavřená vzhledem k podgrupám H a K. Je jasné, že pak taková podmnožina $\mathcal{F}$ je sjednocením několika konfigurací, to jest několika orbit prvků z Y^M v podgrupě K^H. Zúžení permutací tvaru τ^{σ} z K^H na podmnožinu $\mathcal{F}$ jsou potom permutacemi této podmnožiny $\mathcal{F}$. Můžeme tedy po tomto zúžení vnímat podgrupu K^H jako podgrupu grupy $S_{\mathcal{F}}$ všech permutací podmnožiny $\mathcal{F}$ množiny Y^M. Ještě podotkněme, že ve speciálním případě, kdy podgrupa K bude triviální grupou pozůstávající pouze z identické permutace množiny Y, přejde nynější situace přímo do situace popsané v paragrafu věnovaném Pólyově enumerační teorii (s konečnou množinou Y). Naše nynější podgrupa K^H se pak stane podgrupou E^H, kterou jsme studovali v onom paragrafu.

Směřujeme k definici odpovídajícího enumerátoru podmnožiny $\mathcal{F}$. Viděli jsme v minulém paragrafu, že je vhodné v tomto kontextu uvažovat o rozkladech π množiny obrazců Y, které jsou kompatibilní s nějakou permutací τ této množiny Y. Nyní máme k dispozici celou podgrupu K grupy S_Y všech permutací množiny Y. V nynější situaci budeme tedy žádat, aby rozklad π množiny Y byl kompatibilní se všemi permutacemi $\tau \in K$. Mezi všemi rozklady π s touto vlastností existuje jeden, který je ze všech takových rozkladů ten nejjemnější. Očividně tímto nejjemnějším rozkladem kompatibilním se všemi permutacemi $\tau \in K$ je rozklad, jehož třídami jsou všechny orbity prvků $\wp \in Y$ v grupě K. Budeme dále předpokládat, že π je právě tímto nejjemnějším rozkladem. Podobně jako v minulém paragrafu každé třídě C rozkladu π, to jest každé orbitě C v grupě K, přiřadíme proměnnou x_C. Každému zobrazení $f \in \mathcal{F}$ pak přiřadíme člen, to jest součin proměnných, označený $v_\pi(f)$ a definovaný následovně:

$$v_\pi(f) = \prod_{a \in M} x_{[f(a)]\pi}.$$

Připomeňme jenom, že pro každý obrazec $\wp \in Y$ značíme symbolem $[\wp]\pi$ třídu rozkladu π obsahující prvek $\wp$, to jest orbitu prvku $\wp$ v grupě K.

Ukážeme, že jsou-li $f, g \in \mathcal{F}$ dvě zobrazení náležející do téže orbity podgrupy K^H, to jest platí-li $g = \tau \circ f \circ \sigma$ pro nějaké permutace $\sigma \in H$ a $\tau \in K$, pak členy $v_\pi(f)$ a $v_\pi(g)$ jsou si rovny. Skutečně pak vychází

$$v_\pi(g) = v_\pi(\tau \circ f \circ \sigma) = \prod_{a \in M} x_{[\tau(f(\sigma(a)))]\pi} = \prod_{a \in M} x_{[\tau(f(a))]\pi} = \prod_{a \in M} x_{[f(a)]\pi} = v_\pi(f),$$

neboť σ je permutací množiny M a rozklad π je kompatibilní s permutací τ. Můžeme tedy pro každou orbitu $\mathcal{O}$ v podgrupě K^H korektně definovat jí odpovídající člen $v_\pi(\mathcal{O})$ jako člen $v_\pi(f)$, kde f je některý (kterýkoliv) prvek orbity $\mathcal{O}$. Označme ještě $\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H,K}$ množinu všech konfigurací, to jest množinu všech orbit prvků podmnožiny $\mathcal{F}$ v podgrupě K^H. Pak definujeme již avizovaný enumerátor $\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K)$ následovně:

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K) = \sum_{\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{F},H,K}} v_\pi(\mathcal{O}).$$

Poněvadž obě množiny M i Y jsou nyní konečné, je konečná i množina $\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H,K}$ všech konfigurací, takže výše uvedená suma bude obsahovat jenom konečný počet sčítanců. Má tedy smysl se ptát na počet zmíněných konfigurací. Tento počet dostaneme dosazením hodnoty 1 za všechny proměnné do enumerátoru.

Poznamenejme už jen, že ve speciálním případě, kdy podgrupa K je triviální grupou pozůstávající pouze z identické permutace množiny Y, nejjemnějším rozkladem π množiny Y kompatibilním s identickou permutací je triviální rozklad množiny Y na jednoprvkové třídy. V takovém případě je výše definovaný enumerátor $\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K)$ identický s enumerátorem $\gamma(\mathcal{F}, H)$, který byl studován v paragrafu věnovaném Pólyově enumerační teorii.

Abychom mohli dokázat avizovanou de Bruijnovu větu, budeme vedle právě zavedených pojmů a konstrukcí potřebovat také pojmy a konstrukce, které byly zavedeny v paragrafu o Pólyově enumerační teorii. Každá podmnožina $\mathcal{F}$ množiny Y^M, která je uzavřená vzhledem k podgrupám H a K, je jistě uzavřená vzhledem k podgrupě H v dřívějším smyslu. Vedle podgrupy K^H grupy $S_\mathcal{F}$ budeme pracovat také s dřívější podgrupou E^H grupy $S_\mathcal{F}$. Budeme tedy uvažovat o orbitách prvků z $\mathcal{F}$ v podgrupě K^H, ale také o orbitách těchto prvků v podgrupě E^H. Je jasné, že každá orbita některého prvku z $\mathcal{F}$ v podgrupě E^H je celá obsažena v nějaké orbitě tohoto prvku v podgrupě K^H. To znamená, že každá orbita v podgrupě K^H je sjednocením několika orbit v podgrupě E^H. Pro každou orbitu $\mathcal{Q}$ v podgrupě E^H označme symbolem $K\mathcal{Q}$ orbitu v podgrupě K^H, jejíž je orbita $\mathcal{Q}$ podmnožinou. Podotkněme, že $K\mathcal{Q} = \{\tau \circ f : \tau \in K, f \in \mathcal{Q}\}$. Dále pro každou orbitu $\mathcal{O}$ v podgrupě K^H označme symbolem $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ množinu všech těch orbit v grupě E^H, jejichž sjednocením je orbita $\mathcal{O}$. Jinými slovy, $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ je rozklad orbity $\mathcal{O}$ na orbity v grupě E^H. Při tomto označení jsme schopni zformulovat a dokázat následující výsledek.

Lemma.

Pro libovolnou orbitu $\mathcal{Q}$ v podgrupě E^H platí rovnost

$$|\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})| = \frac{|K|}{|\{\omega \in K : \omega\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\}|}.$$

Důkaz.

Buď tedy $\mathcal{Q}$ nějaká orbita v podgrupě E^H. Uvažme orbitu $K\mathcal{Q}$ v podgrupě K^H, jejíž je orbita $\mathcal{Q}$ součástí. Uvažme dále všechny orbity v podgrupě E^H, jejichž sjednocením je orbita $K\mathcal{Q}$. Označili jsme symbolem $\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})$ množinu všech těchto orbit. Poněvadž $K\mathcal{Q}$ je orbita v podgrupě K^H, pro každý prvek $f \in K\mathcal{Q}$ a pro každou permutaci $\tau \in K$ je také $\tau \circ f$ prvkem orbity $K\mathcal{Q}$. Navíc pro danou permutaci $\tau \in K$ je přiřazení $f \mapsto \tau \circ f$ permutací prvků orbity $K\mathcal{Q}$. Tato permutace indukuje permutaci na množině orbit $\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})$. Tato indukovaná permutace je dána předpisem $\mathcal{R} \mapsto \tau\mathcal{R}$ pro každou orbitu $\mathcal{R}$ v grupě E^H obsaženou v orbitě $K\mathcal{Q}$, kde $\tau\mathcal{R} = \{\tau \circ g : g \in \mathcal{R}\}$. Grupa permutací K tak dává vzniknout indukované grupě permutací na množině orbit $\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})$. Tato indukovaná grupa permutací má očividně jen jednu orbitu, jíž je množina $\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})$ sama. Jednou z orbit v množině $\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})$ je pak i výchozí orbita $\mathcal{Q}$.

Zkoumejme, pro které dvojice permutací $\tau, \tau' \in K$ zobrazí jim příslušné indukované permutace množiny $\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})$ tuto orbitu $\mathcal{Q}$ stejně. To nastane právě tehdy, když platí $\tau\mathcal{Q} = \tau'\mathcal{Q}$. K tomu ale dojde právě tehdy, když je splněno $\tau^{-1}(\tau'\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}$, to jest právě když permutace $\tau^{-1} \circ \tau'$ leží v podgrupě $\{\omega \in K : \omega\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\}$ grupy K. To ale nastane právě tehdy, když permutace τ, τ' určují tutéž levou třídu grupy K podle její podgrupy $\{\omega \in K : \omega\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\}$. Celkem tedy odpovídají jednotlivé orbity z množiny $\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})$ vzájemně jednoznačně levým třídám grupy K podle její podgrupy $\{\omega \in K : \omega\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\}$. Počet orbit v množině $\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})$ je tedy roven podílu počtů prvků v grupě K a v její podgrupě $\{\omega \in K : \omega\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\}$. To je ale právě dokazované tvrzení. $\square$

Připomeňme, že pro libovolnou podmnožinu $\mathcal{F}$ množiny Y^M uzavřenou vzhledem k podgrupě H a pro libovolnou permutaci τ množiny Y jsme v minulém paragrafu označili symbolem $\mathcal{F}_\tau$ podmnožinu množiny $\mathcal{F}$ pozůstávající ze všech těch zobrazení $f \in \mathcal{F}$, pro něž platí $\tau(fH) = fH$, a ukázali jsme, že tato podmnožina $\mathcal{F}_\tau$ je rovněž uzavřená vzhledem k podgrupě H. To znamená, že pro každé zobrazení $f \in \mathcal{F}_\tau$ je celá orbita fH prvku f v podgrupě E^H obsažena v podmnožině $\mathcal{F}_\tau$. Je tedy podmnožina $\mathcal{F}_\tau$ sjednocením celých orbit fH některých zobrazení $f : M \to Y$ v podgrupě E^H, a sice těch zobrazení $f \in \mathcal{F}$, pro něž platí $\tau(fH) = fH$. Jinak to lze vyjádřit tak, že podmnožina $\mathcal{F}_\tau$ je sjednocením těch orbit $\mathcal{Q}$ prvků z $\mathcal{F}$ v podgrupě E^H, pro něž platí $\tau\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$.

Ještě jinak řečeno to znamená, že množina orbit $\mathfrak{M}_{\mathcal{F}_\tau,H}$ se skládá z těch orbit $\mathcal{Q}$ množiny $\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H}$, které splňují podmínku $\tau\mathcal{Q} = \mathcal{Q}$. Nyní jsme připraveni formulovat a dokázat následující de Bruijnovu větu, která je ústředním výsledkem tohoto paragrafu.

Věta.

Pro enumerátor $\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K)$ platí

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K) = \frac{1}{|K|}\sum_{\tau\in K}\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H) = \frac{1}{|H|\cdot|K|}\sum_{\sigma\in H,\,\tau\in K}\Big(\sum_{f\in\mathcal{F},\,\tau\circ f = f\circ\sigma} v_\pi(f)\Big).$$

Důkaz.

Druhá z výše uvedených dvou rovností plyne okamžitě z vyjádření enumerátoru $\gamma_\pi(\mathcal{F}_\tau, H)$, které jsme získali v první větě předchozího paragrafu. Zbývá tedy dokázat první z uvedených dvou rovností. Podle definice enumerátoru $\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K)$ máme

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K) = \sum_{\mathcal{O}\in\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H,K}} v_\pi(\mathcal{O}).$$

Každá orbita $\mathcal{O} \in \mathfrak{M}_{\mathcal{F},H,K}$, to jest každá orbita $\mathcal{O}$ prvků z $\mathcal{F}$ v podgrupě K^H je sjednocením těch orbit $\mathcal{Q}$ prvků z $\mathcal{F}$ v podgrupě E^H, které jsou obsaženy v orbitě $\mathcal{O}$.

To jsou ale právě ty orbity $\mathcal{Q}$ v podgrupě E^H, které tvoří rozklad $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ orbity $\mathcal{O}$ na orbity v podgrupě E^H. Poněvadž $\mathcal{O}$ je orbitou prvků z $\mathcal{F}$ v podgrupě K^H, máme pro ni už definován člen $v_\pi(\mathcal{O})$. Z definice tohoto člene ale plyne, že je tento člen roven dříve definovanému členu $v_\pi(\mathcal{Q})$ pro každou orbitu $\mathcal{Q}$ v podgrupě E^H, která je obsažena v orbitě $\mathcal{O}$. Počet těchto orbit $\mathcal{Q}$ je roven počtu tříd v rozkladu $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ a pro každou tuto orbitu je jí příslušný člen $v_\pi(\mathcal{Q})$ roven členu $v_\pi(\mathcal{O})$. Navíc pro každou takovou orbitu $\mathcal{Q}$ platí vztah $\mathcal{O} = K\mathcal{Q}$, takže na místě rozkladu $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ máme co do činění s rozkladem $\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})$. Z těchto úvah plyne rovnost

$$\sum_{\mathcal{O}\in\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H,K}} v_\pi(\mathcal{O}) = \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H}} \frac{v_\pi(\mathcal{Q})}{|\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})|}.$$

Odtud a z předchozí rovnosti pak plyne vztah

$$\gamma_\pi(\mathcal{F},H,K) = \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H}} \frac{v_\pi(\mathcal{Q})}{|\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})|}.$$

Dosazením za $|\mathfrak{G}(K\mathcal{Q})|$ do tohoto vztahu z předchozího lemmatu obdržíme rovnost

$$\gamma_\pi(\mathcal{F},H,K) = \frac{1}{|K|} \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H}} v_\pi(\mathcal{Q})\,|\{\omega\in K : \omega\mathcal{Q} = \mathcal{Q}\}|,$$

neboli

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K) = \frac{1}{|K|} \sum_{\substack{\mathcal{Q}\in\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H},\, \omega\in K \\ \omega\mathcal{Q}=\mathcal{Q}}} v_\pi(\mathcal{Q}),$$

anebo ještě jinak

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K) = \frac{1}{|K|} \sum_{\omega\in K} \sum_{\substack{\mathcal{Q}\in\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H} \\ \omega\mathcal{Q}=\mathcal{Q}}} v_\pi(\mathcal{Q}).$$

Vzhledem k úvahám předcházejícím této větě je možno tuto formuli ještě převést do tvaru

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K) = \frac{1}{|K|} \sum_{\omega\in K} \sum_{\mathcal{Q}\in\mathfrak{M}_{\mathcal{F}_\omega,H}} v_\pi(\mathcal{Q}).$$

Vzhledem k definici enumerátoru $\gamma_\pi(\mathcal{F}_\omega, H)$ z předchozího paragrafu odtud ale plyne vztah

$$\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K) = \frac{1}{|K|} \sum_{\omega\in K} \gamma_\pi(\mathcal{F}_\omega, H).$$

To je ale rovnost, kterou ještě zbývalo dokázat. $\square$

Pokud jde o počet konfigurací v množině $\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H,K}$, jak již bylo výše řečeno, tento počet dostaneme, když do enumerátoru $\gamma_\pi(\mathcal{F}, H, K)$ dosadíme hodnotu 1 za všechny proměnné. Takto z předcházející de Bruijnovy věty odvodíme tento její bezprostřední důsledek.

Důsledek.

Počet všech konfigurací, to jest počet všech orbit prvků z $\mathcal{F}$ v podgrupě K^H je roven

$$|\mathfrak{M}_{\mathcal{F},H,K}| = \frac{1}{|H|\cdot|K|} \sum_{\sigma\in H,\, \tau\in K} |\{f \in \mathcal{F} : \tau \circ f = f \circ \sigma\}|. \qquad \square$$

Tento důsledek je přímým zobecněním posledního důsledku uvedeného v paragrafu věnovaném Pólyově enumerační teorii.

Věnujme se nyní speciálnímu případu, kdy podmnožinou $\mathcal{F}$ množiny Y^M je celá tato množina Y^M. Všimněme si blíže rozkladu π množiny Y na orbity prvků $\wp \in Y$ v grupě K. Vezměme libovolnou permutaci τ množiny Y z podgrupy K. Poněvadž tato permutace τ je kompatibilní s rozkladem π množiny Y, lze uvažovat o zúženích permutace τ na jednotlivé orbity C v grupě K. Tato zúžení $\tau|_C$ jsou sama o sobě permutacemi dotyčných orbit. Původní permutace τ množiny Y je pak rovna součinu permutací $\tau|_C$ přes všechny orbity C v grupě K, to jest přes všechny třídy C rozkladu π.

V takovém případě máme následující výsledek formulovaný s pomocí cyklového indexu $Z(H)$ permutační grupy H. Vystupují v něm také parametry z typů $1^{j_1(\tau|_C)} 2^{j_2(\tau|_C)} \dots \eta^{j_\eta(\tau|_C)}$ zúžení $\tau|_C$ permutací τ z podgrupy K na jednotlivé třídy C rozkladu π.

Věta.

Enumerátor $\gamma_\pi(Y^M, H, K)$ je dán formulí

$$\gamma_\pi(Y^M, H, K) = \frac{1}{|K|} \sum_{\tau \in K} Z(H; \lambda_1(\tau), \lambda_2(\tau), \dots, \lambda_m(\tau)),$$

kde pro každé $\ell = 1, 2, \dots, m$ je

$$\lambda_\ell(\tau) = \sum_{C \in \pi} \left(\sum_{i|\ell} i j_i(\tau|_C) \right) x_C^\ell.$$

Důkaz.

Toto tvrzení plyne přímo z první rovnosti uvedené v de Bruijnově větě pro případ, kdy podmnožinou $\mathcal{F}$ je celá množina Y^M, a z druhé věty v předchozím paragrafu, kde je uvedeno, jak vypadá enumerátor $\gamma_\pi(Y_\tau^M, H)$ pro libovolnou permutaci τ množiny Y. $\square$

Z této poslední věty bezprostředně plyne tento její následující důsledek. Připomeňme v této souvislosti ještě jednou, že počet konfigurací v množině $\mathfrak{M}_{M^Y,H,K}$, to jest počet všech orbit prvků množiny M^Y v podgrupě K^H obdržíme, když dosadíme hodnotu 1 za všechny proměnné do enumerátoru $\gamma_\pi(Y^M, H, K)$.

Důsledek.

Počet konfigurací v množině $\mathfrak{M}_{M^Y,H,K}$ je dán rovností

$$|\mathfrak{M}_{M^Y,H,K}| = \frac{1}{|K|} \sum_{\tau \in K} Z(H; \mu_1(\tau), \mu_2(\tau), \ldots, \mu_m(\tau)),$$

kde pro každé $\ell = 1, 2, \ldots, m$ je

$$\mu_\ell(\tau) = \sum_{i|\ell} i j_i(\tau).$$

□

Jako příklad užití tohoto důsledku řešme následující úlohu.

Mějme kolo rulety rozdělené do n sektorů. Dále mějme paletu barev kruhového tvaru, po jejímž obvodu je umístěno k barev. Každý sektor rulety obarvíme jednou barvou z naší palety.

Klademe otázku, kolika způsoby můžeme sektory rulety obarvit, považujeme-li za stejná taková obarvení, z nichž jedno vznikne z druhého nějakým pootočením rulety, a považujeme-li za stejná také taková obarvení, z nichž jedno vznikne z druhého cyklickou záměnou barev danou nějakým pootočením kruhové palety.

Podobně jako v dřívějších úlohách o obarvení sektorů rulety, i zde množinou M bude množina všech sektorů rulety a množinou Y bude množina všech barev na paletě. Podmnožinou $\mathcal{F}$ množiny Y^M bude nyní celá množina Y^M. Podgrupou H grupy S_M všech permutací množiny M bude grupa všech otočení rulety. Pak H bude cyklická grupa řádu n na množině M, kterou jsme dříve značili symbolem C_M. Podgrupou K grupy S_Y všech permutací množiny Y bude grupa všech otočení kruhové palety. Pak K bude cyklická grupa řádu k na množině Y, kterou jsme dříve značili symbolem C_Y. K těmto podgrupám C_M a C_Y vezměme jim odpovídající podgrupu $C_Y^{C_M}$ grupy S_{Y^M} všech permutací množiny Y^M. Pak orbity prvků z Y^M v podgrupě $C_Y^{C_M}$ budou odpovídat obarvením sektorů rulety, když na ně pohlížíme tak, jak je to specifikováno v zadání úlohy.

Směřujeme k aplikaci předchozího důsledku. Grupou H tedy bude cyklická grupa C_M řády n. Grupou K bude cyklická grupa C_Y řádu k. Zajímají nás jednotlivé permutace τ z grupy K, to jest z grupy C_Y. Grupa C_Y je generována jedním cyklem ϑ délky k. Odpovídá to pootočení palety barev o jednu barvu.

Pak jednotlivé permutace z grupy C_Y lze vypsat jako mocniny permutace ϑ, to jest jako permutace $\vartheta, \vartheta^2, \dots, \vartheta^k$, kde ϑ^k je identická permutace na množině Y. Všimněme si podrobněji permutace ϑ^ν pro některý exponent $\nu = 1, 2, \dots, k$. Buď $\varkappa$ největší společný dělitel čísel ν a k. Položme $\varepsilon = \frac{k}{\varkappa}$. Při řešení jedné z dřívějších úloh jsme odvodili, že pak permutace ϑ^ν je součinem $\varkappa$ nezávislých cyklů délky ε. Zajímají nás dále hodnoty $\mu_\ell(\vartheta^\nu)$, kde $\ell = 1, 2, \dots, n$, pro naši permutaci ϑ^ν. Jestliže $\varepsilon | \ell$, pak $\mu_\ell(\vartheta^\nu) = \varepsilon\varkappa = k$. Jestliže ale $\varepsilon \not| \, \ell$, pak $\mu_\ell(\vartheta^\nu) = 0$. Vypočteme nyní sčítance $Z(C_M; \mu_1(\vartheta^\nu), \mu_2(\vartheta^\nu), \dots, \mu_n(\vartheta^\nu))$ odpovídajícího naší permutaci ϑ^ν. Tento sčítanec je roven

$$Z(C_M; \underbrace{0, \dots, 0}_{\varepsilon - 1}, k, \underbrace{0, \dots, 0}_{\varepsilon - 1}, k, \dots).$$

Viděli jsme dříve, že cyklový index $Z(C_M)$ grupy C_M je roven

$$Z(C_M) = \frac{1}{n} \sum_{d|n} \varphi(d) \, t_d^{\frac{n}{d}}.$$

Do tohoto cyklového indexu nyní dosazujeme právě nalezené hodnoty $\mu_d(\vartheta^\nu)$ za proměnné t_d pro všechna $d|n$. Taková hodnota je nenulová a je rovna k právě tehdy, když $\varepsilon | d$. Jestliže tedy $\varepsilon \not| \, n$, pak $\mu_d(\vartheta^\nu) = 0$ pro všechna $d|n$, takže v tom případě máme

$$Z(C_M; \mu_1(\vartheta^\nu), \mu_2(\vartheta^\nu), \dots, \mu_n(\vartheta^\nu)) = 0.$$

Jestliže ale $\varepsilon|n$, pak hodnoty $\mu_d(\vartheta^\nu)$ jsou nenulové a jsou rovny k pro ty dělitele $d|n$, které splňují $\varepsilon|d$. Takový dělitel d je pak tvaru $d = \varepsilon h$ pro nějaké $h|\frac{n}{\varepsilon}$. V takovém případě pak dostáváme rovnost

$$Z(C_M; \mu_1(\vartheta^\nu), \mu_2(\vartheta^\nu), \ldots, \mu_n(\vartheta^\nu)) = \frac{1}{n} \sum_{h|\frac{n}{\varepsilon}} \varphi(\varepsilon h)\, k^{\frac{n}{\varepsilon h}}.$$

Zbývá už jen sečíst tyto sčítance přes všechny permutace tvaru ϑ^ν, kde $\nu = 1, 2, \ldots, k$, a vydělit výsledek číslem $k = |C_Y|$. Připomeňme, že $\varkappa$ byl největší společný dělitel čísel ν a k. Výše uvedený sčítanec nezávisí přímo na hodnotě ν, ale na hodnotě $\varepsilon = \frac{k}{\varkappa}$. Viděli jsme při řešení jedné z dřívějších úloh, že počet hodnot $\nu = 1, 2, \ldots, k$, jejichž největší společný dělitel s číslem k je roven stanovené hodnotě $\varkappa$, je dán hodnotou Eulerovy funkce $\varphi(\varepsilon)$. Označme ještě symbolem $\gcd\{n, k\}$ největšího společného dělitele čísel n, k. Celkem tak dostáváme výsledek

$$|\mathfrak{M}_{M^Y, C_M, C_Y}| = \frac{1}{nk} \sum_{\varepsilon|\gcd\{n,k\}} \varphi(\varepsilon) \sum_{h|\frac{n}{\varepsilon}} \varphi(\varepsilon h)\, k^{\frac{n}{\varepsilon h}}.$$

Tolik je tedy všech možných obarvení sektorů naší rulety, která jsou navzájem odlišitelná vzhledem ke kritériím naší úlohy.