4. domácí úloha z MIN401, jaro 2024

Příklad 1. Dokažte, že množina $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times$ (kde $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$) společně s operací definovanou předpisem $(a, s) \cdot (b, t) = (a + sb, st)$ tvoří grupu. Je tato grupa komutativní?

Řešení. Asociativita:

$$\begin{aligned}((a, s) \cdot (b, t)) \cdot (c, u) &= (a + sb, st) \cdot (c, u) = (a + sb + stc, stu)\\ (a, s) \cdot ((b, t) \cdot (c, u)) &= (a, s) \cdot (b + tc, tu) = (a + s(b + tc), stu)\end{aligned}$$

a tyto výrazy se rovnají. Jednotkou je $(0, 1)$, protože

$$\begin{aligned}(0, 1) \cdot (b, t) &= (0 + 1b, 1t) = (b, t)\\ (a, s) \cdot (0, 1) &= (a + s0, s1) = (a, s)\end{aligned}$$

a inverze k (a, s) je $(-s^{-1}a, s^{-1})$, protože

$$\begin{aligned}(a, s) \cdot (-s^{-1}a, s^{-1}) &= (a + s(-s^{-1}a), ss^{-1}) = (0, 1)\\ (-s^{-1}a, s^{-1}) \cdot (a, s) &= (-s^{-1}a + s^{-1}a, s^{-1}s) = (0, 1).\end{aligned}$$

Komutativní není, protože

$$(b, t) \cdot (a, s) = (b + ta, ts) \neq (a + sb, st) = (a, s) \cdot (b, t)$$

(například pro $a = b = s = 1$, $t \neq 1$). □

Příklad 2. Uvažujme grupu S_n všech permutací množiny $\{1, \ldots, n\}$ a dále grupu S'_m všech permutací množiny $\{n + 1, \ldots, n + m\}$. Definujme zobrazení

$$\sqcup\colon S_n \times S'_m \to S_{n+m}, \quad \sigma \sqcup \tau(i) = \begin{cases}\sigma(i) & i \leq n\\ \tau(i) & i \geq n+1\end{cases}$$

(tedy $\sigma \sqcup \tau$ provádí permutaci σ na prvních n prvcích a permutaci τ na posledních m prvcích). Dokažte, že se jedná o injektivní homomorfismus, ale nikoliv o isomorfismus (s výjimkou případů, kdy $n = 0$ nebo $m = 0$; doporučuji spočítat prvky na obou stranách).

BONUS: Uvažujte podmnožinu

$$\mathrm{Sh}_{n,m} = \{\pi \in S_{n+m} \mid \pi(1) < \cdots < \pi(n),\ \pi(n + 1) < \cdots < \pi(n + m)\}$$

tzv. (n, m)-shufflů. Dokažte, že $\mathrm{Sh}_{n,m}$ obsahuje právě jeden prvek z každé třídy rozkladu $S_{n+m}/(S_n \times S'_m)$, kde chápeme $S_n \times S'_m$ jako podgrupu S_{n+m} skrze homomorfismus $\sqcup$, takže lze psát $S_{n+m}/(S_n \times S'_m) \cong \mathrm{Sh}_{n,m}$. Jaké jsou počty prvků množin na obou stranách?

Řešení. Je potžeba ukázat, že $\sqcup$ zachovává násobení, tj. rovnost následujících dvou výrazů

$$\begin{aligned}&\sqcup((\sigma_1, \tau_1) \cdot (\sigma_2, \tau_2)) = \sqcup(\sigma_1 \circ \sigma_2, \tau_1 \circ \tau_2) = (\sigma_1 \circ \sigma_2) \sqcup (\tau_1 \circ \tau_2)\\ &\sqcup(\sigma_1, \tau_1) \circ \sqcup(\sigma_2, \tau_2) = (\sigma_1 \sqcup \tau_1) \circ (\sigma_2 \sqcup \tau_2)\end{aligned}$$

Přitom na prvních n prvcích provádí první permutace $\sigma_1 \circ \sigma_2$, stejně tak druhá:

$$(\sigma_1 \sqcup \tau_1) \circ (\sigma_2 \sqcup \tau_2)(i) = (\sigma_1 \sqcup \tau_1)((\sigma_2 \sqcup \tau_2)(i)) = (\sigma_1 \sqcup \tau_1)(\sigma_2(i)) = \sigma_1(\sigma_2(i)) = \sigma_1 \circ \sigma_2(i)$$

(protože $\sigma_2(i)$ opět patří mezí prvních n prvků) a analogicky na posledních m prvcích obě provádí $\tau_1 \circ \tau_2$. Počet prvků $S_n \times S'_m$ je $n! \cdot m!$, zatímco počet prvků S_{n+m} je $(n+m)!$ a tedy větší (viz bonus).

BONUS: Nechť $\pi(S_n \times S'_m)$ je libovolná třída. Je-li $\pi(k_1) < \cdots < \pi(k_n)$ seřazení prvních n hodnot π a $\pi(k_{n+1}) < \cdots < \pi(k_{n+m})$ seřazení posledních m hodnot, pak $\sigma(i) = k_i$ a $\tau(i) = k_i$ jsou prvky $\sigma \in S_n$, $\tau \in S'_m$ jediné takové, že $\pi \circ (\sigma \sqcup \tau) \in \mathrm{Sh}_{n,m}$, protože

$$\pi \circ (\sigma \sqcup \tau) = \begin{cases} \pi(\sigma(i)) = \pi(k_i) & i \leq n \\ \pi(\tau(i)) = \pi(k_i) & i \geq n+1 \end{cases}$$

a tyto hodnoty jsou podle definice seřazené. Počet prvků $S_{n+m}/(S_n \times S'_m)$ je roven $(n+m)!/(n! \cdot m!) = \binom{n+m}{n}$, to stejné tedy platí i pro počet prvků $\mathrm{Sh}_{n,m}$ (k tomu lze také dospět tak, že prvek $\pi \in \mathrm{Sh}_{n,m}$ je jednoznačně určen množinou hodnot $\{\pi(1), \ldots, \pi(n)\}$, tedy výběrem této n-prvkové pomnožiny množiny $\{1, \ldots, n+m\}$). □

Příklad 3. Nechť G je grupa. Pak každý prvek $g \in G$ zadává automorfismus $c_g \colon G \to G$ grupy G předpisem

$$c_g(x) = gxg^{-1}.$$

Ukažte, že se vskutku jedná o automorfismus grupy G. Dále ukažte, že zobrazení

$$G \to \mathrm{Aut}(G), \quad g \mapsto c_g$$

je homomorfismus grup (zde $\mathrm{Aut}(G)$ je grupa vzhledem ke skládání, jedničkou je tak id). Jaké je jeho jádro?

BONUS: Ukažte, že obraz tohoto homomorfismu je normální podgrupa – konkrétně pro libovolný automorfismus $\varphi \colon G \to G$ ukažte, že $\varphi c_g \varphi^{-1} = c_h$ pro nějaký prvek $h \in G$ určený prvkem g a automorfismem φ.

Řešení. Prvně ukážeme, že c_g je homomorfismus grup, tj. že zachovává násobení:

$$c_g(x)c_g(y) = (gxg^{-1})(gyg^{-1}) = gxyg^{-1} = c_g(xy).$$

Nyní ukážeme, že $c \colon G \to \mathrm{Aut}(G)$ ze zadání zachovává násobení:

$$c_g \circ c_h(x) = c_g(c_h(x)) = c_g(hxh^{-1}) = g(hxh^{-1})g^{-1} = (gh)x(gh)^{-1} = c_{gh}(x).$$

Zejména pak $c_g \circ c_{g^{-1}} = c_1 = \mathrm{id}$ a stejně v opačném pořadí, tedy $c_{g^{-1}}$ je inverzí k c_g a c_g je vskutku automorfismus.

BONUS: Protože je φ homomorfismus grup, platí

$$\varphi c_g \varphi^{-1}(x) = \varphi(g\varphi^{-1}(x)g^{-1}) = \varphi(g)x\varphi(g)^{-1} = c_{\varphi(g)}(x).$$

□