4. domácí úloha z MIN401, jaro 2024

Příklad 1. Dokažte, že množina $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times$ (kde $\mathbb{R}^\times = \mathbb{R}\smallsetminus\{0\}$) společně s operací definovanou předpisem $(a, s) \cdot (b, t) = (a + sb, st)$ tvoří grupu. Je tato grupa komutativní?

Příklad 2. Uvažujme grupu S_n všech permutací množiny $\{1, \dots, n\}$ a dále grupu S'_m všech permutací množiny $\{n + 1, \dots, n + m\}$. Definujme zobrazení

$$\sqcup \colon S_n \times S'_m \to S_{n+m}, \quad \sigma \sqcup \tau(i) = \begin{cases} \sigma(i) & i \leq n \\ \tau(i) & i \geq n + 1 \end{cases}$$

(tedy $\sigma \sqcup \tau$ provádí permutaci σ na prvních n prvcích a permutaci τ na posledních m prvcích). Dokažte, že se jedná o injektivní homomorfismus, ale nikoliv o isomorfismus (s výjimkou případů, kdy $n = 0$ nebo $m = 0$; doporučuji spočítat prvky na obou stranách).

BONUS: Uvažujte podmnožinu

$$\mathrm{Sh}_{n,m} = \{\pi \in S_{n+m} \mid \pi(1) < \cdots < \pi(n),\ \pi(n + 1) < \cdots < \pi(n + m)\}$$

tzv. (n, m)-shufflů. Dokažte, že $\mathrm{Sh}_{n,m}$ obsahuje právě jeden prvek z každé třídy rozkladu $S_{n+m}/(S_n \times S'_m)$, kde chápeme $S_n \times S'_m$ jako podgrupu S_{n+m} skrze homomorfismus $\sqcup$, takže lze psát $S_{n+m}/(S_n \times S'_m) \cong \mathrm{Sh}_{n,m}$. Jaké jsou počty prvků množin na obou stranách?

Příklad 3. Nechť G je grupa. Pak každý prvek $g \in G$ zadává automorfismus $c_g \colon G \to G$ grupy G předpisem

$$c_g(x) = gxg^{-1}.$$

Ukažte, že se vskutku jedná o automorfismus grupy G. Dále ukažte, že zobrazení

$$G \to \mathrm{Aut}(G), \quad g \mapsto c_g$$

je homomorfismus grup (zde $\mathrm{Aut}(G)$ je grupa vzhledem ke skládání, jedničkou je tak id). Jaké je jeho jádro?

BONUS: Ukažte, že obraz tohoto homomorfismu je normální podgrupa – konkrétně pro libovolný automorfismus $\varphi \colon G \to G$ ukažte, že $\varphi c_g \varphi^{-1} = c_h$ pro nějaký prvek $h \in G$ určený prvkem g a automorfismem φ.