Náhradní příklady za účast na cvičení v druhé polovině semestru

Příklad 1. Určete počet prvků grupy G symetrií pravidelného dvanáctistěnu – ten má stěny tvaru pravidelných pětiúhelníků a u každého vrcholu se potkávají tři stěny; doporučený postup: označme stěny jako $F_1, \dots, F_{12}$ a uvažte podmnožinu $G_n \subseteq G$ těch symetrií, které zobrazují stěnu F_1 na stěnu F_n; ukažte, že $G_1 \subseteq G$ je podgrupa a identifikujte ji s nějakou známou grupou; dále nechť $g_n \in G_n$ je nějaká symetrie, potom $g \mapsto g_n g$ je bijekce $G_1 \xrightarrow{\cong} G_n$ (rozmyslete si to); na závěr $G = \bigcup G_n$, každá podmnožina má stejný počet prvků a je jich 12.

Mělo by vyjít 120 symetrií, přičemž stejně prvků má i symetrická grupa S_5. Zkuste si rozmyslet, že neexistuje symetrie dvanáctistěnu řádu 4, takže tato grupa nemůže být isomorfní S_5 (ta obsahuje cyklus délky 4, který má řád 4).

Příklad 2. Dokažte, že grupy $\mathbb{Z}_6$, S_3 nejsou isomorfní (jaké mají řády prvků/jsou komutativní?). Které z těchto grup je isomorfní $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$? Najděte nějaký konkrétní isomorfismus (nápověda: čínská zbytková věta).

Příklad 3. Označme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Dokažte, že množina všech zobrazení $\overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ tvaru $x \mapsto (ax+b)/(cx+d)$, pro $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ splňující $ad - bc = 1$, tvoří grupu vzhledem ke skládání.

Příklad 4. Dokažte, že v libovolné grupě platí $(g_1 g_2)^{-1} = g_2^{-1} g_1^{-1}$ (v tomto pořadí!). Dokažte pomocí tohoto, že pokud platí $g^2 = 1$ pro každé $g \in G$, pak grupa G je komutativní (jaký je vztah mezi g, g^{-1}?). Také pomocí tohoto dokažte, že zobrazení $G \to G^{\mathrm{op}}$, $g \mapsto g^{-1}$ je isomorfismus grup, kde G^{op} značí grupu mající stejnou množinu jako G, ale s operací definovanou "opačně" $g_1 \bullet g_2 = g_2 g_1$.

Příklad 5. Tvoří podmnožina $\{a + b\sqrt{5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{R}$

- podgrupu vzhledem ke sčítání?
- podgrupu vzhledem k násobení?
- podokruh?

Příklad 6. Rozložte na součin nezávislých cyklů permutaci

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 9 & 8 & 1 \end{pmatrix}.$$

Příklad 7. Určete řád permutace

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 10 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

a spočtěte σ^{2024}.

Příklad 8. Určete znaménko permutace
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n & n+1 & n+2 & \cdots & 2n \\ 1 & 3 & \cdots & 2n-1 & 2 & 4 & \cdots & 2n \end{pmatrix}.$$

Příklad 9. Najděte Gröbnerovu bázi ideálu I vzhledem k lexikografickému monomiálnímu uspořádání $x > y$, kde I je generovaný polynomy
$$f_1 = x^3 - x^2 - y^2, \quad f_2 = xy - 1$$
a s její pomocí vyřešte (přibližně) nad $\mathbb{R}$ soustavu rovnic $f_1 = 0,\ f_2 = 0$. Kolik bude existovat řešení nad $\mathbb{C}$?

Příklad 10. Popište pomocí polynomiální rovnice obraz zobrazení $\mathbb{C} \to \mathbb{C}^2$, $t \mapsto (t^2 - 1, t^3 - t)$ pomocí Gröbnerovy báze ideálu $I = (x - t^2 + 1, y - t^3 + t)$ vzhledem k lexikografickému monomiálnímu uspořádání $t > x > y$.