Matematická analýza 4

Diference a sumace

Petr Liška

Masarykova univerzita

03.04.2023

Diference

Definice

Nechť je dán bod x_0 a číslo $h > 0$. Nechť funkce $y = f(x)$ je definována v bodech x_0 a x_0+h. Číslo $f(x_0+h)-f(x_0)$ nazýváme *diference funkce* $f(x)$ *v bodě* x_0. Píšeme

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0).$$

Číslo h se nazývá *diferenční krok*, bod x_0 *počáteční bod diference*.

Definice

Nechť funkce $f(x)$ je definována ve všech bodech neprázdné množiny $\mathcal{M}$. Funkci, která každému bodu $x \in \mathcal{M}$ s vlastností $(x + h) \in \mathcal{M}$ přiřazuje hodnotu $\Delta f(x)$, nazýváme *diference funkce* $f(x)$ a značíme

$$\Delta f(x) = f(x + h) - f(x), \qquad x \in \mathcal{M}.$$

Situace se zjednoduší, když uvažujeme $x_0 = 1$, $h = 1$, tj. $\mathcal{M} = \mathbb{N}$. Pak $f(x) = a(n)$ a

$$\Delta a(n) = a_{n+1} - a_n, \qquad n \in \mathbb{N}\,.$$

Věta

Pro všechna n, pro něž jsou současně definovány posloupnosti $\Delta u(n)$ a $\Delta v(n)$ platí

1. $\Delta[u(n) \pm v(n)] = \Delta u(n) \pm \Delta v(n)$;
2. $\Delta[c \cdot u(n)] = c\Delta u(n)$, *kde* $c \in \mathbb{R}$;
3. $\Delta[u(n)v(n)] = v(n)\Delta u(n) + u(n+1)\Delta v(n)$;
4. $\Delta \frac{u(n)}{v(n)} = \frac{v(n)\Delta u(n) - u(n)\Delta v(n)}{v(n)v(n+1)}$, *je-li* $v(n)v(n+1) \neq 0$.

$$P_k(n) = a_0 + a_1 n + \cdots + a_k n^k = \sum_{j=0}^{k} a_j n^j,$$

kde $a_k \neq 0$ a tedy $P_0(n) = a_0$, $a_0 \neq 0$.

Věta

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

1. $\Delta c = 0$, *kde* $c \in \mathbb{R}$;
2. $\Delta n^k = P_{k-1}(n)$, *kde* $k \in \mathbb{N}$;
3. $\Delta q^n = q^n(q-1)$, *kde* $q \in \mathbb{R}$.

Důsledek

Pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

1. $\Delta P_k(n) = Q_{k-1}(n)$,
2. $\Delta[P_k(n) q^n] = Q_k(n) q^n$, *kde* $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Sumace

Definice

Nechť $u(n)$ a $U(n)$ jsou posloupnosti takové, že pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí $\Delta U(n) = u(n)$. Posloupnost $U(n)$ nazýváme *sumací posloupnosti* $u(n)$ a značíme

$$U(n) = \sum u(n)\,.$$

Věta

Nechť $u(n)$ je posloupnost, pak platí

$$\Delta u(n) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad u(n) = c, \qquad kde \quad c \in \mathbb{R}.$$

Věta

Nechť $u(n)$ a $v(n)$ jsou posloupnosti a $c \in \mathbb{R}$. Potom

$$\Delta u(n) = \Delta v(n) \quad pro \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longleftrightarrow \quad u(n) = v(n) + c.$$

Věta

Nechť $u(n)$, $v(n)$ jsou posloupnosti. Pak platí

1. $\sum[u(n) \pm v(n)] = \sum u(n) \pm \sum v(n)$;
2. $\sum[c \cdot u(n)] = c \sum u(n)$, *kde* $c \in \mathbb{R}$;
3. $\sum[u(n)\Delta v(n)] = u(n)v(n) - \sum[v(n+1)\Delta u(n)]$.

Věta

Nechť $c, c^\star \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Pak pro všechna $n \in \mathbb{N}$ platí

1. $\sum c = cn + c^\star$;
2. $\sum q^n = \frac{1}{q-1} q^n + c$, *kde* $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$;
3. $\sum P_k(n) = Q_{k+1}(n)$.