Rovnice s parametry - lineární[1]

Formulace problému.

Budeme se zabývat případy, kdy budeme najednou řešit více (typicky nekonečně mnoho rovnic), které se od sebe budou vzájemně lišit například jednou hodnotou - tzv. parametrem (takových parametrů může být více různých). V zadání musí být sděleno, co je parametr a co je neznámá. Cílem pak bude popsat závislost počtu a tvaru všech řešení studované rovnice v závislosti na všech přípustných hodnotách parametru.

Závěr řešení budeme uvádět v přehledné tabulce, v jejímž levém sloupci se postupně objeví všechny možné hodnoty parametru (pro rovnice s jedním parametrem tzn. číselné množiny - zápis v tomto případě nebude obsahovat proměnné) a v pravém sloupci pak zapíšeme, jak vypadá v dané situaci tvar množiny všech kořenů K (v pravém sloupci je tedy zápis se závislostí na parametru možný). Bude-li přitom v příslušném řádku vystupovat jediná hodnota parametru, pak nebude v tomto řádku parametr vystupovat v množině kořenů (za tuto konkrétní hodnotu dosadíme a vyčíslíme). Pokud je v jistém řádku více hodnot parametru, může se objevit (nevyčíslená) hodnota parametru i v zápisu příslušných kořenů.

Konkrétní postup bude patrný z následujících řešených příkladů.

Řešené příklady.

1. /příklad *lineární rovnice*/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$p^2(x-1) = 5(px-5)\ ,$$

kde $p \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Výrazy s x shromáždíme na jedné straně rovnice, zbylé na druhé straně

$$p^2x - 5px = p^2 - 25 \quad \Leftrightarrow \quad x\left(p^2 - 5p\right) = p^2 - 25 \quad \Leftrightarrow \quad xp(p-5) = (p-5)(p+5)\ .$$

Abychom na levé straně osamostatnili x, potřebovali bychom vydělit rovnici výrazem $p(p-5)$. To je však možné provést jedině za podmínky, že $p(p-5) \neq 0$. Pokud naopak $p(p-5) = 0$, dělit nemůžeme a musíme chování rovnice pro příslušné hodnoty paametru prozkoumat samostatně. Řešení se nám tak rozdělí do tří větví:

a) Pokud $p \in \mathbb{R} - \{0; 5\}$, platí

$$xp(p-5) = (p-5)(p+5) \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{(p-5)(p+5)}{p(p-5)} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{p+5}{p}\,,$$

takže má rovnice pro libovolnou z uvedených hodnot p vždy právě jedno řešení. Jde o více případů, výsledek tedy závisí na p.

b) Jestliže $p = 0$, po dosazení dostáváme

$$0x = -25 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = -25\,,$$

což je spor. Pro $p = 0$ tedy rovnice žádné řešení nemá.

c) Konečně ve zbývající situaci když $p = 5$, po dosazení obdržíme

$$0x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0\,,$$

což platí pro všechna $x \in \mathbb{R}$. V tomto případě tedy má rovnice nekonečně mnoho řešení.

Výše uvedená zjištění shrneme do tabulky, která představuje závěr výpočtu:

[1] Případné náměty k tomuto textu prosím adresujte na e-mail akob@jaroska.cz. Děkuji Aleš Kobza (autor materiálu).

p	K
$\mathbb{R} - \{0;5\}$	$\left\{\frac{p+5}{p}\right\}$
$\{0\}$	$\emptyset$
$\{5\}$	$\mathbb{R}$

2. /příklad *lineární rovnice* se dvěma parametry/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\frac{x+a}{b} - \frac{b}{a} = \frac{x-b}{a} + \frac{a}{b}\,,$$

kde $a, b \in \mathbb{R}$ jsou parametry a x neznámá.

Řešení. Pokud $a = 0$ nebo $b = 0$, rovnice nemá smysl. Pro $ab \neq 0$ můžeme rovnici ekvivalentně upravovat

$$(x+a)\,a - b^2 = (x-b)\,b + a^2 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(a-b) = a^2 - b^2 - a^2 + b^2 \quad \Leftrightarrow \quad x\,(a-b) = 0\,.$$

a) Je-li $a \neq b$, pak můžeme rovnici vydělit nenulovým výrazem $a - b$, čímž vypočteme, že $x = 0$.

b) Pokud $a = b$, je rovnice tvaru $0x = 0$ a je tedy splněna pro libovolné $x \in \mathbb{R}$.

Závěr jako obvykle zapíšeme do tabulky

a, b	K
$\{(a,b)\,,\ \text{kde } a = 0 \text{ nebo } b = 0\}$	nemá smysl
$\{(a,b)\,,\ \text{kde } a = b \neq 0\}$	$\mathbb{R}$
$\{(a,b)\,,\ \text{kde } 0 \neq a \neq b \neq 0\}$	$\{0\}$

3. /příklad *rovnice s neznámou ve jmenovateli* vedoucí na lineární rovnici/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\frac{m}{x} - \frac{4}{mx} = 1 - \frac{2}{m}\,,$$

kde $m \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Všimněme si nejprve nutných podmínek $x \neq 0$ a $m \neq 0$. Tu druhou vyhodnotíme hned. Znamená to, že v případě, kdy $m = 0$ zadaná rovnice nemá smysl. Podmínku $x \neq 0$ však budeme muset analyzovat až v závěru výpočtu. Za uvedených podmínek tedy platí

$$\frac{m}{x} - \frac{4}{mx} = 1 - \frac{2}{m} \quad \Leftrightarrow \quad m^2 - 4 = mx - 2x \quad \Leftrightarrow \quad (m-2)\,(m+2) = x\,(m-2)\ .$$

Podobně jako v předchozí úloze se nám nyní další postup rozvětví.

a) Pro $m \in \mathbb{R} - \{0;2\}$ platí

$$(m-2)\,(m+2) = x\,(m-2) \quad \Leftrightarrow \quad x = m+2\,,$$

tudíž má řešená rovnice nejvýše jedno řešení. Než učiníme závěr, je potřeba zkontrolovat, zda skutečně platí $x \neq 0$. To tedy znamená, že musí být splněno $0 \neq m + 2$, takže $m \neq -2$.

b) V situaci, kdy $m = 2$ po dosaení dostáváme

$$0 \cdot 4 = x \cdot 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 = 0\,,$$

takže v této větvi vyhoví všechna $x \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Než napíšeme výsledky do tabulky, všimněme si ještě jedné skutečnosti. Zjistili jsme, že rovnice nemá řešení pro $m \in \{-2;0\}$. Přesto tyto případy v tabulce nenapíšeme do jednoho řádku. Je mezi nimi totiž rozdíl! Pro $m = -2$ lze rovnici uvažovat, řešit ji a následně tak vypočteme, že nemá žádné řešení. Pro $m = 0$ však rovnice vůbec není definována a nemá smysl ji ani uvažovat. V dalším tedy budeme takové případy rozlišovat a oddělovat.

m	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{2\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$\{-2\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R}-\{0;\pm 2\}$	$\{m+2\}$

4. /příklad *rovnice s neznámou ve jmenovateli* vedoucí na lineární rovnici/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$a=\frac{2+ax}{a+x}\,,$$

kde $a\in\mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Rovnice má smysl za podmínky $x\neq -a$, kterou dále ve výpočtu zohledníme. Při jejím splnění platí

$$a=\frac{2+ax}{a+x}\quad\Leftrightarrow\quad a\,(a+x)=2+ax\quad\Leftrightarrow\quad a^2=2\,.$$

a) Pro $a\neq\pm\sqrt{2}$ tedy řešená rovnice nemá řešení.

b) Když $a=\sqrt{2}$, je jejím řešením jakékoliv $x\in\mathbb{R}$, pro něž $x\neq -a$, tedy $x\in\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2}\right\}$.

c) Podobně pokud $a=-\sqrt{2}$, vyhoví rovnici ta $x\in\mathbb{R}$, pro něž $x\neq -a$, tedy $x\in\mathbb{R}-\left\{\sqrt{2}\right\}$.

Závěr ještě zapíšeme tabulkou:

a	K
$\mathbb{R}-\left\{\pm\sqrt{2}\right\}$	$\emptyset$
$\left\{\sqrt{2}\right\}$	$\mathbb{R}-\left\{-\sqrt{2}\right\}$
$\left\{-\sqrt{2}\right\}$	$\mathbb{R}-\left\{\sqrt{2}\right\}$

5. /příklad *rovnice s neznámou pod odmocninou* vedoucí na lineární rovnici/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\sqrt{x^2-1}=x-a\,,$$

kde $a\in\mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Zadanou rovnici nejprve umocníme na druhou, což je obecně důsledková úprava. Následně vyhodnotíme, zda bude snazší provést zkoušku, nebo stanovit podmínky, které zajistí ekvivalentnost použitých úprav. Platí

$$\sqrt{x^2-1}=x-a\quad\Rightarrow\quad x^2-1=(x-a)^2\quad\Leftrightarrow\quad x^2-1=x^2-2ax+a^2\quad\Leftrightarrow\quad 2ax=a^2+1\,.$$

Nyní rozlišíme dva případy:

a) Je-li $a\neq 0$, pak

$$2ax=a^2+1\quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{a^2+1}{2a}\,.$$

Stanovovat podmínky by znamenalo jednak posoudit, kdy je rovnice definovaná, tedy zjistit, kdy platí

$$x^2-1\geq 0\quad\text{tzn.}\quad\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2-1\geq 0$$

a dále určit, kdy při umocnění byla i pravá strana nezáporná, což představuje podmínku

$$x-a\geq 0\quad\text{tzn.}\quad\frac{a^2+1}{2a}-a\geq 0\,.$$

Domnívám se, že v této situaci je jednodušší provést zkoušku

$$L\left(\frac{a^2+1}{2a}\right) = \sqrt{\left(\frac{a^2+1}{2a}\right)^2 - 1} = \sqrt{\frac{a^4+2a^2+1}{4a^2} - 1} = \sqrt{\frac{a^4+2a^2+1-4a^2}{4a^2}} =$$

$$= \sqrt{\frac{a^4-2a^2+1}{4a^2}} = \sqrt{\left(\frac{a^2-1}{2a}\right)^2} = \left|\frac{a^2-1}{2a}\right| ,$$

$$P\left(\frac{a^2+1}{2a}\right) = \frac{a^2+1}{2a} - a = \frac{a^2+1-2a^2}{2a} = \frac{1-a^2}{2a} = -\frac{a^2-1}{2a} .$$

Rovnice má tedy řešení, pokud se rovnají výrazy

$$\left|\frac{a^2-1}{2a}\right| = -\frac{a^2-1}{2a} .$$

Víme, že

$$|z| = -z \quad \Leftrightarrow \quad z \leq 0 ,$$

takže požadovaná podmínka je splněna právě tehdy, když

$$\frac{a^2-1}{2a} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{(a-1)(a+1)}{a} \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in (-\infty; -1\rangle \cup (0; 1\rangle .$$

b) Pokud $a = 0$, je řešená rovnice tvaru $0x = 1$, což evidentně pro žádné $x \in \mathbb{R}$ neplatí.

Výše uvedená zjištění opět promítneme do výsledné tabulky:

a	K
$(-\infty; -1\rangle \cup (0; 1\rangle$	$\left\{\frac{a^2+1}{2a}\right\}$
$(-1; 0\rangle \cup (1; \infty)$	$\emptyset$

6. /příklad *rovnice s neznámou v absolutní hodnotě* vedoucí na lineární rovnici/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$|x + 3k| = |x - k| ,$$

kde $k \in \mathbb{R}$ je parametr a x neznámá.

Řešení. Všimněme si, že obě strany zadané rovnice jsou díky absolutní hodnotě nezáporné. Rovnici tedy můžeme umocnit na druhou, což je v této situaci dokonce ekvivalentní úprava, kterou se zbavíme absoluních hodnot a navíc po úpravě (vzhledem ke stejným koeficientům u x) dostaneme dokonce lineární rovnici. Tento postup řešení tedy bude velice výhodný a rychlý! Platí tak

$$|x + 3k| = |x - k| \quad \Leftrightarrow \quad |x + 3k|^2 = |x - k|^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 6kx + 9k^2 = x^2 - 2kx + k^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad 8kx = -8k^2 \quad \Leftrightarrow \quad kx = -k^2 .$$

a) Pokud $k \neq 0$, dostaneme po vydělení rovnice číslem k

$$kx = -k^2 \quad \Leftrightarrow \quad x = -k ,$$

což znamená, že rovnice má jediné řešení.

b) Když $k = 0$, vidíme po dosazení, že $0x = 0$, což je splněno pro jakékoliv $x \in \mathbb{R}$.

Získáváme tak závěr:

k	K
$\mathbb{R} - \{0\}$	$\{-k\}$
$\{0\}$	$\mathbb{R}$

7. /příklad *rovnice s neznámou v absolutní hodnotě* vedoucí na lineární rovnici/ V $\mathbb{R}$ řešte rovnici

$$\frac{2y-1}{|y+b|}+3=0\,,$$

kde $b \in \mathbb{R}$ je parametr a y neznámá.

Řešení. Aby ve jmenovateli zlomku nebyla nula, je nutné a stačí, aby $y \neq -b$. Při splnění této podmínky se lze ekvivalentní úpravou zbavit zlomku

$$\frac{2y-1}{|y+b|}+3=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2y-1=-3\,|y+b|\ .$$

Při odstranění absolutní hodnoty se nám řešení uvažované rovnice rozvětví:

a) Když $y < -b$ (tzn. $y+b<0$), pak $|y+b| = -y-b$, takže

$$2y-1=-3\,|y+b| \quad \Leftrightarrow \quad 2y-1=-3\,(-y-b) \quad \Leftrightarrow \quad -3b-1=y\,.$$

Nyní je třeba se podívat, kdy bude splněna podmínka $y < -b$, která nás k nalezenému řešení přivedla. Platí

$$y<-b \quad \Leftrightarrow \quad -3b-1<-b \quad \Leftrightarrow \quad -1<2b \quad \Leftrightarrow \quad b>-\frac{1}{2}\,.$$

b) Jestliže $y > -b$ (tzn. $y+b>0$), pak $|y+b| = y+b$, tudíž

$$2y-1=-3\,|y+b| \quad \Leftrightarrow \quad 2y-1=-3\,(y+b) \quad \Leftrightarrow \quad 5y=1-3b \quad \Leftrightarrow \quad y=\frac{1-3b}{5}\,.$$

Zbývá zjistit, kdy skutečně platí $y > -b$. Dostáváme

$$y>-b \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1-3b}{5}>-b \quad \Leftrightarrow \quad 1-3b>-5b \quad \Leftrightarrow \quad 2b>-1 \quad \Leftrightarrow \quad b>-\frac{1}{2}\,.$$

V obou větvích řešení jsme obdrželi podmínku $b > -1/2$. Zbývá se podívat, zda pro všechna taková b máme vždy skutečně 2 různá řešení. Hledejme tedy b, pro která by obě řešení byla totožná:

$$-3b-1=\frac{1-3b}{5} \quad \Leftrightarrow \quad -15b-5=1-3b \quad \Leftrightarrow \quad -6=12b \quad \Leftrightarrow \quad b=-\frac{1}{2}\,,$$

což je hodnota, která podmínku $b > -1/2$ nesplňuje. Vidíme tedy, že naše rovnice má řešení buď právě dvbě, nebo žádné:

b	K
$\left(-\frac{1}{2};\infty\right)$	$\left\{-3b-1;\frac{1-3b}{5}\right\}$
$\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right\rangle$	$\emptyset$

Zadání úloh.

V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnice s neznámou x a parametrem $p \in \mathbb{R}$

1. $$3px - 12 = (p+2)\,x\,,$$

2. $$x\,(x+p) + x\,(x-p) = 2\,(x+p)^2\ ,$$

3. $$\frac{x+p}{p} = px - 1\,,$$

4. $$px - \frac{2}{p^2} = \frac{1}{p}\,(4x+1)\ ,$$

5. $$\frac{p^2\,(x-1)}{px-3} = 3\,,$$

6. $$\frac{p}{x} - \frac{1}{px} = 1 - \frac{1}{p}\,,$$

7. $$2p = \frac{2+px}{p+x}\,,$$

8. $$\sqrt{x^2+p^2} = p + x\,,$$

9. $$\sqrt{x^2+p} = p - x\,,$$

10. $$1 + \sqrt{x} = \sqrt{x-p}\,,$$

11. $$|x+5-p| = |x-2|\ ,$$

12. $$|2x-p| + x + 1 = 0\,.$$

Návody k řešení a výsledky úloh.

1.

p	K
$\{1\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R}-\{1\}$	$\left\{\frac{6}{p-1}\right\}$

,

2.

p	K
$\{0\}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}-\{0\}$	$\left\{-\frac{p}{2}\right\}$

,

3.

p	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{\pm 1\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R}-\{0;\pm 1\}$	$\left\{\frac{2p}{p^2-1}\right\}$

,

4.

p	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{2\}$	$\emptyset$
$\{-2\}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R}-\{0;\pm 2\}$	$\left\{\frac{1}{p^2-2p}\right\}$

,

5.

p	K
$\{0\}$	$\emptyset$
$\{3\}$	$\mathbb{R}-\{1\}$
$\mathbb{R}-\{0;3\}$	$\left\{\frac{p+3}{p}\right\}$

, nezapomeňte zkontrolovat splnění podmínky $px \neq 3$, ta pro nalezené $x = \frac{p+3}{p}$ vede ke zjištění, že $p \neq 0$, takže se „neprojeví“, ale bez výpočtu na to nelze spoléhat... (v situaci pro $p = 3$ se tato podmínka uplatnila zjištěním, že $x \neq 1$),

6.

p	K
$\{0\}$	nemá smysl
$\{1\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$\{-1\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R}-\{0;\pm 1\}$	$\{p+1\}$

, nezapomeňte zkontrolovat splnění podmínky $x \neq 0$,

7.

p	K
$\left\{0;\pm\sqrt{2}\right\}$	$\emptyset$
$\mathbb{R}-\left\{0;\pm\sqrt{2}\right\}$	$\left\{\frac{2-2p^2}{p}\right\}$

, speciální případy pro hodnoty $p = \pm\sqrt{2}$ se objeví analýzou podmínky $x \neq -p$,

8.

p	K
$\{0\}$	$\langle 0;\infty)$
$(-\infty;0)$	$\emptyset$
$(0;\infty)$	$\{0\}$

, při provádění zkoušky vychází

$$L(0) = \sqrt{p^2} = |p| \quad \Rightarrow \quad L(0) = P(0) \quad \Leftrightarrow \quad p \geq 0\,,$$

9.

p	K
$\{0\}$	$(-\infty; 0\rangle$
$(-\infty; -1)$	$\emptyset$
$\langle -1; 0) \cup (0; \infty)$	$\left\{\frac{p-1}{2}\right\}$

, při provádění zkoušky vychází

$$L\left(\frac{p-1}{2}\right) = \frac{|p+1|}{2} \quad \Rightarrow \quad L\left(\frac{p-1}{2}\right) = P\left(\frac{p-1}{2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad p \geq -1\,, p \neq 0\,,$$

10.

p	K
$(-1; \infty)$	$\emptyset$
$(-\infty; -1\rangle$	$\left\{\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\right\}$

,při provádění zkoušky vychází

$$L\left(\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\right) = P\left(\left(\frac{p+1}{2}\right)^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad 1 + \frac{|p+1|}{2} = \frac{|p-1|}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \ldots \quad \Leftrightarrow \quad p \in (-\infty; -1\rangle\ ,$$

11.

p	K
$\{7\}$	$\mathbb{R}$
$\mathbb{R} - \{7\}$	$\left\{\frac{p-3}{2}\right\}$

, řešenou rovnici je výhodné umocnit, jde o její ekvivalentní úpravu (postup je podobný jako v Př. 6),

12.

p	K
$(-\infty; -2)$	$\left\{p+1; \frac{p-1}{3}\right\}$
$\{-2\}$	$\{-1\}$
$(-2; \infty)$	$\emptyset$

, na případ $p = -2$ narazíme řešením rovnice

$$p + 1 = \frac{p-1}{3}\,,$$

čímž zjistíme, kdy příslušná množina není dvouprvková (postup je podobný jako v Př. 7).