

Úloha č. 7: Měření Poissonovy konstanty vzduchu

jarní semestr 2025

1 Úvod

Poissonova konstanta, označovaná κ , je konstantou vyskytující se ve vztahu pro adiabatický děj v ideálním plynu

$$pV^\kappa = \text{konst.} \quad (1)$$

Adiabatická expanze nebo komprese probíhá tak rychle, že nedochází k tepelné výměně mezi ideálním plynem a jeho okolím, proto se adiabatický děj někdy také nazývá izoentropický. Poissonovu konstantu můžeme určit jako $\kappa = \frac{C_p}{C_V}$, kde C_p je molární tepelná kapacita při stálém tlaku a C_V molární tepelná kapacita při stálém objemu. Použitím Mayerova vztahu $C_p = C_V + R$ získáme vyjádření Poissonovy konstanty pomocí molární plynové konstanty R

$$\kappa = 1 + \frac{R}{C_V}. \quad (2)$$

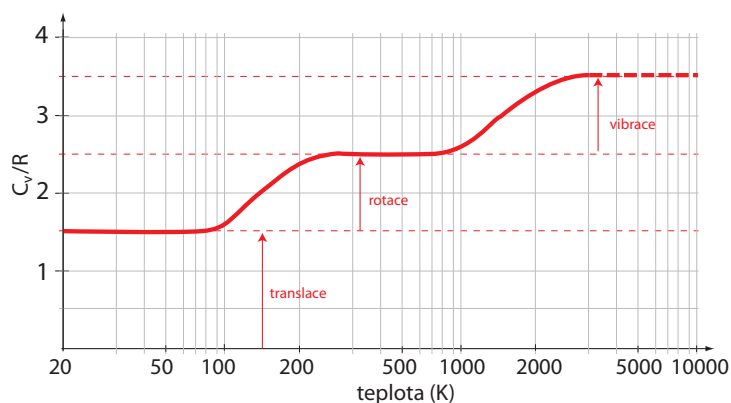
Hodnotu molární tepelné kapacity při stálém objemu C_V lze pro daný plyn spočítat použitím ekvipartičního teorému: každému stupni volnosti molekuly ideálního plynu odpovídá energie $\frac{1}{2}kT$, kde k je Boltzmannova konstanta (pro jednoatomové molekuly lze tento výsledek odvodit z Maxwellova rozdělení). Pro molární tepelnou kapacitu při stálém objemu pak plyne $C_V = N_a \cdot \nu \cdot \frac{1}{2}kT$, kde N_a je Avogadrova konstanta a ν počet stupňů volnosti molekul. Odkud

$$C_V = \frac{\nu}{2}R \quad (3)$$

a pro Poissonovu konstantu (2) dostaneme

$$\kappa = 1 + \frac{2}{\nu}. \quad (4)$$

Při určování konkrétní teoretické hodnoty Poissonovy konstanty je tedy potřebné vzít do úvahy, jaký plyn a v jakém teplotním rozmezí zkoumáme. Jednoatomové plyny mají $\nu = 3$ stupně volnosti (translační), pro dvouatomové je $\nu = 5$ (3 translační, 2 rotační, v případě, že započítáváme i vibrační moment, pak do vztahu (4) dosadíme $\nu = 7$), u víceatomových plynů je situace ještě složitější. Jak plyne z výsledků statistické fyziky a kvantové teorie, molární tepelná kapacita je závislá na teplotě – při nízkých teplotách se projevují pouze translační stupně volnosti, při zvyšování teploty dojde postupně i k rotačnímu pohybu a při dalším zvyšování teploty se přidává i pohyb vibrační – viz obrázek 1. Dvouatomový plyn má v teplotním rozmezí cca 250 K až 800 K pět stupňů volnosti, teoretická hodnota Poissonovy konstanty je pro takovýto plyn rovna $\kappa = 1,40$, protože vzduch je složen převážně z dvouatomových molekul, lze tuto hodnotu používat i pro něj.



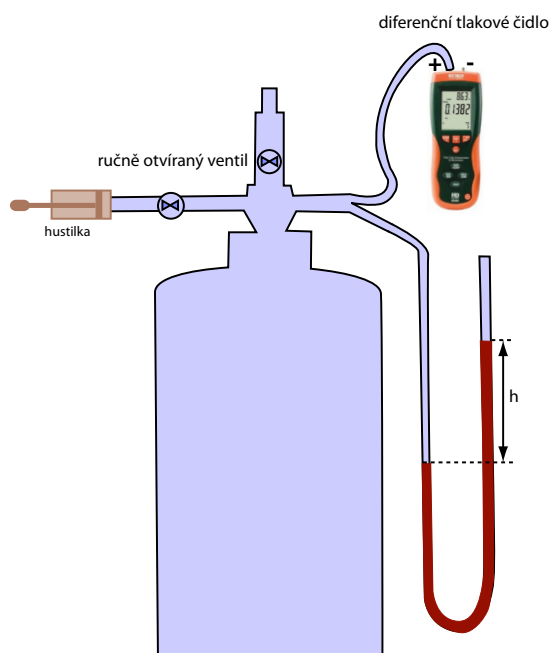
Obrázek 1: Hodnota molární kapacity při stálém objemu pro dvouatomový plyn v závislosti na teplotě

2 Měření Poissonovy konstanty Clémentovou – Desormesovou metodou

Metoda je založena na vyhodnocení naměřených veličin posloupnosti dějů v měřeném plynu sestávající z izotermického stlačení, adiabatické expanze a izochorického ohřevu měřeného plynu. Metoda vystačí s relativním měřením tlaku.

Popis aparatury

Aparatura se sestává z velké nádoby, malého napouštěcího a velkého vypouštěcího ventilu a tlakoměrů (viz obr. 2). Aparatura musí být zcela hermetická, bez obsahu většího množství nečistot schopných adsorbovat plyny a vlhkost a nesmí obsahovat žádný kondenzát. Nádoba se tlakuje ruční pumpičkou přes malý oddělovací ventil. Vypouštění plynu z nádoby lze provést otevřením velkého ručního ventilu.



Obrázek 2: Aparatura pro měření Poissonovy konstanty Clémentovou – Desormesovou metodou.

Nádoba je opatřena dvěma tlakoměry, které měří přetlak vzhledem k okolní atmosféře – U trubici a diferenčním anemometrem Extech HD350. Toto tlakové čidlo stejně jako U trubice měří tlakový rozdíl Δp , v našem případě mezi nádobou a okolním vzduchem.

Postup měření

1. Prvním dějem posloupnosti dějů je izotermická komprese, která se ale nesnadno realizuje. Stejný finální stav dosáheme polytropickým stlačením s následným ustanovením termodynamické rovnováhy s okolím. Po otevření oddělovacího ventilu zvýšíme ruční pumpou tlak v komoře o několik hPa až několik málo desítek hPa, což odpovídá několika cm až dm vodního sloupce na U trubici, a oddělovací ventil opět uzavřeme. Pomocí tlakoměru sledujeme pokles tlaku – diferenční tlakové čidlo může vykreslovat časovou závislost tlaku na obrazovku počítače. Tlak by se měl blížit k určité hodnotě vyšší než je nulový přetlak. Po ustanovení termodynamické rovnováhy tuto hodnotu p_1 zaznamenáme. Jestli pokles neustává a údaj směřuje k nulovému přetlaku, je v aparatuře netěsnost.
2. Adiabatickou expanzi uskutečníme krátkým, ale úplným otevřením hlavního ventilu. Po adiabatické expanzi musí následovat izochorický, nikoliv izobarický ohřev, a proto je nutno ponechat ventil otevřený jen po dobu úniku vzduchu z nádoby.

Po ukončení izochorického ohřevu, tj. po ustanovení termodynamické rovnováhy, zaznamenáme hodnotu přetlaku p_2 . I v této fázi sledujeme příznaky možné netěsnosti ventilu aparatury podobným způsobem jako v předchozím kroku.

Poznámka. Ve skutečnosti není adiabatická expanze adiabatickou v celém objemu plynu. Striktně vzato, jedná se o polytropu s koeficientem polytropy závislejícím na vzdálenosti od stěny nádoby (a poloze v nádobě). U stěny limitně odpovídá izotermě, velmi daleko od stěny adiabatě. Systematická chyba je zřejmě daná poměrem objemu plynu takto stěnou ovlivněného k celkovému objemu, a je tedy přibližně úměrná objemu k povrchu nádoby. Čím větší nádoba, tím by měla být systematická chyba v důsledku tepelné výměny mezi stěnou nádoby a plynem při expanzi menší.

Kvantitativní vyhodnocení měření

Stav plynu je vhodné popsat intenzívními parametry, teplotou a tlakem, atmosférický tlak označíme p_0 a teplotu okolí T_0 .

1. Ustálený stav po izotermickém stlačení je určen parametry p_1 a T_0 , tento stav označme I.
2. Adiabatickou expanzí dospěje systém ze stavu I do stavu popsaném parametry p_0 a T_2 , tento stav označme II. Dosadíme do rovnice adiabaty pro ideální plyn v proměnných p a T a obdržíme:

$$p_0^{\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)} T_2 = p_1^{\left(\frac{1}{\kappa}-1\right)} T_0. \quad (5)$$

3. Izochorickým ohřevem dospěje systém ze stavu II do stavu popsaného parametry p_2 , T_0 . Dosadíme do rovnice izochory pro ideální plyn:

$$\frac{p_0}{T_2} = \frac{p_2}{T_0}. \quad (6)$$

Vynásobíme rovnici (5) rovnicí (6), zlogaritmujeme a vyjádříme Poissonovu konstantu

$$\kappa = \frac{\ln p_1 - \ln p_0}{\ln p_1 - \ln p_2} = \frac{\ln \frac{p_1}{p_0}}{\ln \frac{p_1}{p_2}}. \quad (7)$$

Měříme-li přetlak pomocí U trubice, platí:

$$p_1 = p_0 + kh_1 \quad (8)$$

$$p_2 = p_0 + kh_2, \quad (9)$$

kde h_1, h_2 jsou výšky vodního sloupce (v pracovních jednotkách), k je konstanta přepočtu výšky vodního sloupce na tlak, p_0 je okolní atmosférický tlak. Výraz (7) pak má tvar

$$\kappa = \frac{\ln\left(\frac{p_0 + kh_1}{p_0}\right)}{\ln\left(\frac{p_0 + kh_1}{p_0 + kh_2}\right)}. \quad (10)$$

Rozvoj výrazu (10) podle h_1 a h_2 do třetího řádu

$$\kappa = \frac{\ln\left(\frac{p_0 + kh_1}{p_0}\right)}{\ln\left(\frac{p_0 + kh_1}{p_0 + kh_2}\right)} \doteq \frac{h_1}{h_1 - h_2} + \frac{1}{2} \frac{h_1 h_2 k}{p_0 (h_1 - h_2)} - \frac{1}{12} \frac{k^2 (h_1 + h_2) h_2 h_1}{p_0^2 (h_1 - h_2)}, \quad (11)$$

je-li změna tlaku ve srovnání s atmosférickým tlakem dostatečně malá, pak

$$\kappa \doteq \frac{h_1}{h_1 - h_2}. \quad (12)$$

Poznámka. Místo U trubice můžeme použít i jiné lineární tlakoměry, absolutní cejchování není podmínkou, důležitá je pouze poloha nuly. Při malém rozdílu tlaků můžeme tedy zjednodušený vztah (12) použít i pro diferenční tlakové čidlo. Místo h_i dosazujeme přímo naměřený tlak p_i v libovolných jednotkách.

Otázka

Určete, jaký je maximální přípustný přetlak h_1 vyjádřený v cm vodního sloupce, nemá-li chyba výpočtu při použití zjednodušeného vztahu (12) překročit 1 %. Určete, jaké změně teploty aparatury odpovídá změna tlaku o 10 Pa, tj. o 1 mm vodního sloupce? Výpočet můžete ověřit pomocí hodnoty teploty, kterou měří diferenční tlakové čidlo.

Námět k přemýšlení:

Uvědomte si, jaké je chemické složení vzduchu, a na základě toho odhadněte, jaká by měla být správná naměřená hodnota Poissonovy konstanty. Vytipujte také hlavní zdroje systematické chyby měření. Jakou roli hraje objem aparatury?

3 Měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku v plynu

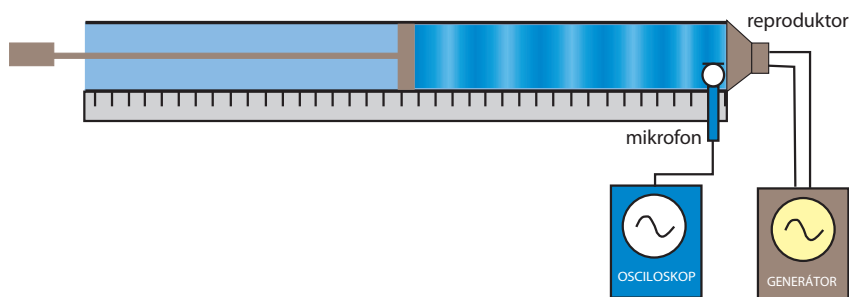
Pro rychlost zvuku c platí vztah

$$c = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S},$$

kde p je tlak, ρ hustota, závorka s indexem S znamená parciální derivaci tlaku podle hustoty při konstantní entropii, tedy při vratném adiabatickém ději.

Pro ideální plyn platí pro rychlost vztah

$$c = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}. \quad (13)$$



Obrázek 3: Aparatura pro měření Poissonovy konstanty z rychlosti zvuku v plynu.

Dosadíme-li ze stavové rovnice pro ideální plyn do (13) za p

$$p = \frac{\rho RT}{M_{mol}},$$

vidíme, že rychlost zvuku v ideálním plynu nezávisí na hustotě, ale pouze na teplotě.

Pro stanovení Poissonovy konstanty je zapotřebí určit tlak a hustotu plynu a změřit rychlost šíření zvuku.

Rychlost zvuku lze spočítat ze změřené délky stojatého vlnění v rezonanční Kundtově trubici (viz obr. 3). Akustické pole v trubici je buzeno reproduktorem, který je napájen z laditelného generátoru sinusového signálu. Rezonanční podmínka se nastavuje posuvným pístem, detekuje se měřením amplitudy akustického pole pomocí mikrofonu.

Postup měření

Zasuneme píst do výchozí pozice, tj co nejbližše reproduktorku. Na generátoru sinusového signálu nastavíme vhodnou frekvenci a amplitudu a postupně vysouváme píst z trubice. Zaznamenáváme polohy maxim. Rozdíl poloh sousedních maxim je polovina vlnové délky.

Při výpočtu $\frac{\bar{\lambda}}{2}$ použijeme metodou nejmenších čtverců. Pro každou frekvenci zvlášť do grafu vyneseme polohu každého naměřeného maxima jako funkci jeho pořadí ($i = 1, 2 \dots$) a závislost proložíme lineární funkcí. Pro rychlost zvuku platí vztah,

$$c = 2 \frac{\bar{\lambda}}{2} f,$$

kde f je nastavená frekvence.

Z takto stanovené rychlosti zvuku, změřeného tlaku vzduchu a z tabulek odečtené hustoty vzduchu při daném tlaku a teplotě spočteme ze vztahu (13) Poissonovu konstantu.

Otázky:

1. Jak z prokladu závislosti polohy maxima na jeho pořadí určíme $\bar{\lambda}$?
2. Jak závisí hustota vzduchu na jeho vlhkosti při stejném tlaku a teplotě?
3. Odhadněte krajní nejistotu určení tlaku, teploty a vlhkosti vzduchu v laboratoři, aby její vliv na výsledek měření byl zanedbatelný.

Námět k přemýšlení:

Jak ovlivňuje průměr trubice naměřenou rychlost zvuku? Uplatní se tento vliv v popsáném měření?

Úkoly

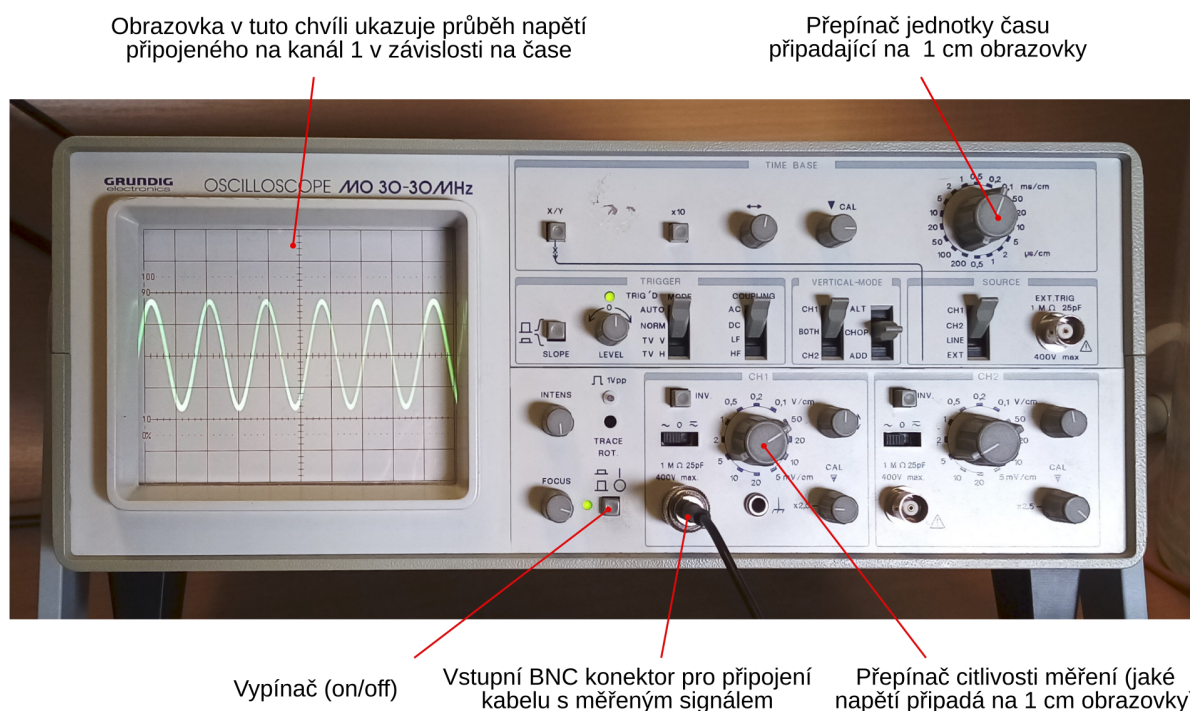
1. Natlakujte velkou nádobu, změřte U-trubicí a diferenčním tlakovým čidlem tlak před (p_1) a po expanzi (p_2) a spočítejte Poissonovu konstantu nezávisle z obou čidel. Měření v dostatečném počtu opakujte. **Kvůli rozsahu diferenčního tlakového čidla nesmí přetlak p_1 přesáhnout hodnotu 500 mmH₂O (v dalších jednotkách 19.68 inH₂O, 0.7111 PSI, 4903 Pa, 49.03 mbar).**
2. Pro několik různých frekvencí určete vlnovou délku stojatého vlnění v Kundtově trubici. Pro každou frekvenci najděte všechny polohy maxim d_i v trubici, vynesete je do grafu v závislosti na indexu i a metodou nejmenších čtverců stanovte vlnovou délku. Určete rychlost zvuku ve vzduchu a stanovte Poissonovu konstantu vzduchu včetně nejistoty měření.
3. Změřte tlak, teplotu a relativní vlhkost vzduchu v laboratoři.

A Ovládání osciloskopu Grundig MO30-30MHz

Pro snímání signálu z mikrofonu připojeného ke Kundtově trubici používáme v praktiku starší dvoukanálový osciloskop Grundig MO30-30MHz. Můžete si jej prohlédnout na obr. 4, kde jsou zároveň označeny některé jeho ovládací prvky, které budete pravděpodobně v praktiku používat.

Přední panel osciloskopu je rozdělen do několika funkčních částí:

- **Obrazovka** – s vodící mřížkou o velikosti 1 cm. Ve standardním režimu na vodorovné ose zobrazuje čas, na svislé ose průběh měřeného napětí. Moderní osciloskopy obvykle na obrazovce vypisují také důležité parametry nastavení, jako např. časová jednotka připadající na 1 dílek horizontální osy a napěťová jednotka připadající na 1 dílek vertikální osy.
- **Time base** – nastavení časové osy. Obsahuje zejména přepínač jednotky času, která připadá na 1 cm obrazovky. Ostatní přepínače umožňují např. posun význačného času t_0 doprava či



Obrázek 4: Přední panel osciloskopu Grundig MO30-30MHz ve fyzikálním praktiku. V elektronické verzi tohoto textu si přístroj můžete detailně prohlédnout při velkém zvětšení obrázku.

doleva anebo přepnutí osciloskopu z módu $U(t)$ do módu $U_1(U_2)$ na zobrazování Lissajousových obrazců.

- Trigger – "spouštěč". Definuje, podle jakého klíče osciloskop periodicky nachází v signálu význačný okamžik t_0 , který pak umísťuje na fixní místo obrazovky. Správným nastavením triggeru se obvykle snažíme docílit toho, aby se periodické signály zobrazovaly vždy na sebe, tj. signál vypadal jako statický. V režimu NORM je jako čas t_0 označen takový okamžik, kdy signál na své náběžné/sestupné hraně (zvoleno tlačítkem SLOPE) překročí hodnotu nastavenou jako LEVEL. Nastavení "coupling" určuje, zda je měřený signál zobrazen v původním tvaru (DC coupling), anebo se použitím kondenzátoru odfiltruje stejnosměrná složka signálu a zobrazí se pouze střídavá složka (AC coupling).
- Vertical mode – přepíná, který kanál (CH1 nebo CH2) se zobrazí na obrazovce a zda se zobrazí jeho aktuální velikost, anebo součet či rozdíl hodnot těchto dvou signálů.
- Source – volí, který signál se použije jako trigger. Může být použit buďto jeden ze vstupů osciloskopu (CH1 a CH2), napájecí napětí osciloskopu (LINE, 50 Hz síťové napětí), nebo další samostatný signál zapojený přes BNC konektor EXT TRIG.
- Základní ovládání osciloskopu – vypínač (on/off) a volič jasu a zaostření signálu na obrazovce.
- CH1 a CH2 – nastavení pro vstupní signály obou kanálů. Měřené signály se připojují k osciloskopu pomocí koaxiálních kabelů s BNC konektory – tyto kabely jsou dvouvodičové, vedou zároveň "+" v jádru kabelu a "-" v plášti kabelu. Zásadním voličem je přepínač citlivosti měření – určuje, kolik voltů připadá na 1 cm na svislé ose grafu. Na osciloskopu na obrázku 4 je nastavena citlivost kanálu CH1 jako 50 mV/cm, odkud lze odečíst amplitudu měřeného signálu jako 85 mV. Ostatní přepínače umožňují např. posunout zobrazovaný signál na obrazovce nahoru či dolů, invertovat jeho velikost anebo ovlivnit kalibraci velikosti signálu, neodpovídá-li realitě.