

Lineární a multilineární algebra

Téma 8: Jordanův normální tvar operátoru

1. Úvod – když operátor nemá diagonální reprezentaci.
2. Jordanova matice.
3. Hledání Jordanovy reprezentace – řetízky z rovnic.
4. Trocha teorie – základní věta o podobnosti matic.
5. Jordanův normální tvar operátoru.
6. Úlohy k procvičení.

Literatura: Matematika pro porozumění i praxi III/3, VUTIUM, Brno 2017 (kap. 16, str. 961-967, 991-996, 1001-1028).

Úvod – když operátor nemá diagonální reprezentaci

Z předchozích prezentací víme, že lineární operátor $\varphi : V_n \rightarrow V_n$, z jehož vlastních vektorů lze sestavit ve V_n bázi, má v takové bázi (a ve všech bázích tvořených jeho vlastními vektory) diagonální tvar. V diagonále pak stojí vlastní hodnoty, každá tolikrát, kolik je její násobnost jako charakteristického kořene operátoru. Víme také toto:

- ▶ Je-li V_n nad $\mathbb{C}$, jsou vlastními hodnotami právě charakteristické kořeny operátoru.
- ▶ Je-li V_n nad $\mathbb{R}$, jsou vlastními hodnotami právě **reálné** charakteristické kořeny operátoru.
- ▶ Vlastní vektory příslušné dané vlastní hodnotě generují ve V_n vektorový podprostor. Je-li operátor diagonalizovatelný, je dimenze tohoto podprostoru rovna násobnosti příslušné vlastní hodnoty.
- ▶ Průnikem vektorových podprostorů L_1, L_2 příslušných vlastním hodnotám $\lambda_1 \neq \lambda_2$ je pouze triviální podprostor $\{0_{V_n}\}$.

Na příkladech jsme zjistili, že existují situace, kdy operátor „nemá dost vlastních vektorů“ na to, aby vytvořily ve V_n bázi. To může nastat i v případě, že V_n je nad $\mathbb{C}$ a všechny charakteristické kořeny operátoru jsou proto vlastními hodnotami. A co teprve, když je prostor nad $\mathbb{R}$ a komplexní charakteristické kořeny nemohou být vlastními hodnotami. Anebo třeba jsou všechny charakteristické kořeny reálné a přesto vlastní vektory nevygenerují celý prostor. Obecně je dimenze vektorového podprostoru generovaného vlastními vektory příslušnými dané vlastní hodnotě nanejvýš rovna její násobnosti.

PŘÍKLAD: Jen narychlo – operátor, který nemá diagonální reprezentaci

Operátor φ ve V_2 je v bázi (e_1, e_2) reprezentován maticí

$$A = \begin{pmatrix} -1 + i & 1 \\ -1 & 1 + i \end{pmatrix}.$$

Má dvojnásobný charakteristický kořen $\lambda = i$, který je zároveň jeho vlastní hodnotou. Odpovídající vektorový podprostor generovaný vlastními vektory příslušnými této hodnotě je jen jednorozměrný, $L = [(1, -1)]$. Jistě to sami snadno ověříte.

Jordanova matice

I když operátor nemá diagonální reprezentaci, přece jen může existovat jiná jednoduchá reprezentace, která je diagonální „skoro“. Je to **Jordanův normální tvar operátoru**. V prostorech nad $\mathbb{C}$ existuje vždy, v prostorech nad $\mathbb{R}$ právě tehdy, jsou-li všechny charakteristické kořeny reálné. Tuto jednoduchou reprezentaci představuje bloková matice, zvaná **Jordanova**.

DEFINICE: Jordanova submatice

Jordanovou submaticí řádu s příslušnou hodnotě $\lambda_0 \in \mathbb{C}$, resp. $\mathbb{R}$ rozumíme matici typu s/s

$$J^{(s)}(\lambda_0) = \begin{pmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{pmatrix}.$$

DEFINICE: Jordanova matice

Jordanova matice je bloková matice, v jejíž diagonále jsou bloky tvořené Jordanovými submaticemi.

PŘÍKLAD: Jordanova matice

Následující matice je tvořena Jordanovými submaticemi různých řádů příslušnými různým hodnotám v diagonále.

$$J = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

hodnota	počet	řády
$\lambda_1 = 3$	$q_1 = 2$	$k_{11} = 3$ $k_{12} = 1$
$\lambda_2 = 5$	$q_2 = 2$	$k_{21} = 2$ $k_{22} = 2$

Tabulka uvádí hodnoty λ , počet jim příslušných submatic a jejich řády.

Taková tabulka jako v předchozím příkladu se bude později hodit. Protože, jak se ukáže, na uspořádání bloků podél diagonály Jordanovy matice nezáleží (bude to znamenat jen jiné pořadí vektorů báze), navrhneme systematické uspořádání takto:

hodnota λ	počet submatic sestupně	řády submatic sestupně
λ_1	q_1	$k_{11} \geq k_{12} \geq \dots \geq k_{1q_1}$
λ_2	q_2	$k_{21} \geq k_{22} \geq \dots \geq k_{2q_2}$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
$\dots$	$\dots$	$\dots$
λ_r	q_r	$k_{r1} \geq k_{r2} \geq \dots \geq k_{rq_r}$

Navzájem různé hodnoty $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ přitom také číslujeme tak, aby počty odpovídajících submatic byly řazeny sestupně, tj. $q_1 \geq q_2 \geq \dots \geq q_r$.

Hledání Jordanovy reprezentace – řetízky z rovnic

To, že pro každý operátor ve vektorovém prostoru nad $\mathbb{C}$ lze najít bázi, v níž bude reprezentován Jordanovou maticí, jsme si řekli předem bez důkazu. Vezměme nyní jako fakt, že tomu tak skutečně je, a položme si otázku, jak takovou bázi najít. V bázi $(e_1, \dots, e_n)$ je lineární operátor $\varphi : V_n \rightarrow V_n$ reprezentován maticí A . Hledáme bázi $(f_1, \dots, f_n)$, v níž je reprezentován maticí J (Jordanovou). Mezi maticemi A a J je tedy vztah **podobnosti matic**, tj. $J = TAT^{-1}$, kde $T = (\tau_i^j)$, $1 \leq i, j \leq n$, je matice přechodu od báze $(e_1, \dots, e_n)$ k bázi $(f_1, \dots, f_n)$, tj. $f_i = \tau_i^j e_j$ pro $1 \leq i \leq n$ (Einsteinova symbolika, index j je sčítací).

POZNÁMKA: Je diagonální matice také Jordanovou maticí? Jistě ano – to v případě, že všechny její Jordanovy submatice jsou řádu jedna.

Ponechme pro tuto chvíli stranou jak poznáme, zda dvě zadané čtvercové matice, řekněme A a B jsou **podobné**, tj. zda existuje regulární matice T tak, že platí $B = TAT^{-1}$.

Co to znamená, že operátor je v bázi $(f_1, \dots, f_n)$ reprezentován Jordanovou maticí? Právě to, že každý obraz $\varphi(f_i)$ je lineární kombinací vektorů báze $(f_1, \dots, f_2)$, přičemž koeficienty této lineární kombinace jsou prvky i -tého řádku reprezentující Jordanovy matice. Vyjádření obrazů $\varphi(f_1), \dots, \varphi(f_n)$ je tedy mimořádně jednoduché, protože řádky Jordanovy matice obsahují „skoro samé nuly“. Zkusme to pro výše uvedený příklad operátoru ve V_8 .

$$\varphi(f_1) = 3f_1 + 1f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 0f_8$$

$$\varphi(f_2) = 0f_1 + 3f_2 + 1f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 0f_8$$

$$\varphi(f_3) = 0f_1 + 0f_2 + 3f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 0f_8 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_3$$

$$\varphi(f_4) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 5f_4 + 1f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 0f_8$$

$$\varphi(f_5) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 5f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 0f_8 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_5$$

$$\varphi(f_6) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 3f_6 + 0f_7 + 1f_8 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_6$$

$$\varphi(f_7) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 0f_6 + 5f_7 + 1f_8$$

$$\varphi(f_8) = 0f_1 + 0f_2 + 0f_3 + 0f_4 + 0f_5 + 0f_6 + 0f_7 + 5f_8 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_8$$

Když z obrázku odstraníme všechny zbytečné nuly, bude vypadat takto:

$$\begin{array}{ll}
 \varphi(f_1) = 3f_1 + 1f_2 + 0f_3 \\
 \varphi(f_2) = 3f_2 + 1f_3 \\
 \varphi(f_3) = 3f_3 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_3 \\
 \varphi(f_4) = 5f_4 + 1f_5 \\
 \varphi(f_5) = 5f_5 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_5 \\
 \varphi(f_6) = 3f_6 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_6 \\
 \varphi(f_7) = 5f_7 + 1f_8 \\
 \varphi(f_8) = 5f_8 \leftarrow \text{vlastní vektor } f_8
 \end{array}$$

Všimli jste si? Označme třeba $\Lambda_1 = [f_1, f_2, f_3]$ a zvolme lib. $a \in \Lambda_1$, $a = \alpha^1 f_1 + \alpha^2 f_2 + \alpha^3 f_3$. Platí $\varphi(a) = \alpha^1 \varphi(f_1) + \alpha^2 \varphi(f_2) + \alpha^3 \varphi(f_3) \in \Lambda_1$.

Operátor „vrátí“ obraz každého vektoru z Λ_1 zase do Λ_1 . A tak je to se všemi bloky. Navíc – poslední vektor každého bloku je vlastní.

DEFINICE: Necht' $\varphi : V_n \rightarrow V_n$ je lineární operátor. Vektorový podprostor L , pro který platí $\varphi(a) \in L$ pro každý vektor $a \in L$, se nazývá **invariantní podprostor operátoru φ** .

Invariantními podprostory jsou například vektorové podprostory generované vlastními vektory operátoru příslušnými téže vlastní hodnotě. Invariantní je také každý jednorozměrný vektorový podprostor generovaný kterýmkoli vlastním vektorem, neboť pro vlastní vektor $b \in V_n$ platí $\varphi(b) = \lambda b \in [b]$.

PŘÍKLAD: Vraťte se k barevné tabulce na předchozím snímku. Uvidíte tam hned několik invariantních podprostorů:

- ▶ především invariantní podprostory generované vektory báze, které přísluší jednotlivým blokům, $\Lambda_1 = [f_1, f_2, f_3]$, $\Lambda_2 = [f_4, f_5]$, $\Lambda_3 = [f_6]$, $\Lambda_4 = [f_7, f_8]$,
- ▶ invariantní podprostory generované vlastními vektory příslušnými navzájem různým vlastním hodnotám, konkrétně $\lambda_1 = 3 \dots L_1 = [f_3, f_6]$, $\lambda_2 = 5 \dots L_2 = [f_5, f_8]$.

Uvažujme o dvou různých invariantních podprostorech Λ_p a Λ_q . Co je jejich průnikem? Vzhledem k tomu, že jsou generovány různými skupinami vektorů báze – lépe řečeno nemají žádný generující vektor báze společný, je jejich průnikem nulový vektor. A to má další důsledek:

PŘÍKLAD: Znovu k barevné tabulce. Všimněme si:

- ▶ na konci každého bloku je vlastní vektor,
- ▶ každý invariantní podprostor náležející určitému bloku obsahuje právě jeden jednorozměrný podprostor generovaný vlastním vektorem, konkrétně $[|f_3|] \subset \Lambda_1$, $[|f_5|] \subset \Lambda_2$, $[|f_6|] \subset \Lambda_3$, $[|f_8|] \subset \Lambda_4$,
- ▶ vlastní vektory zaujímající poslední místa v blocích jsou lineárně nezávislé (i když třeba patří do podprostoru odpovídajícího stejné vlastní hodnotě) – je to zřejmé z toho, že průnikem invariantních podprostorů daných různými bloky je triviální podprostor $\{0_{V_n}\}$.

Závěr: $q_1 = 2 \dots$ dva bloky s $\lambda_1 = 3$, opovídající invariantní podprostory Λ_1 ($\dim \Lambda_1 = 3$), Λ_2 , ($\dim \Lambda_2 = 1$), $q_2 = 2 \dots$ dva bloky s $\lambda_2 = 5$, Λ_3 ($\dim \Lambda_3 = 2$), Λ_4 ($\dim \Lambda_4 = 2$).

Jestliže jsme při řešení problému vlastních vektorů a hodnot nedokázali obecně říci, jaké jsou dimenze podprostorů generovaných vlastními vektory příslušnými téže vlastní hodnotě, teď už to umíme – tedy za předpokladu, že věříme dosud nedokázanému tvrzení, že v případě V_n nad $\mathbb{C}$ má každý lineární operátor Jordanovu reprezentaci:

VĚTA: Nechť $\varphi : V_n \rightarrow V_n$, pro V_n nad $\mathbb{C}$ je lineární operátor, λ jeho vlastní hodnota (násobnosti k), L podprostor generovaný vlastními vektory příslušnými hodnotě λ a J jeho Jordanova matice. Pak $\dim L = q \leq k$, kde q je počet Jordanových submatic v matici J odpovídajících hodnotě λ .

V případě prostoru nad $\mathbb{R}$ platí věta rovněž, jsou-li všechny charakteristické kořeny operátoru reálné (pak také existuje Jordanova reprezentace). Dále je zřejmé, že Jordanova matice je diagonální právě tehdy, když všechny bloky jsou matice typu $1/1$.

Zbývá jen, abychom uměli bázi, v níž je operátor reprezentován Jordanovou maticí, najít. Znamená to řešit soustavy rovnic vyplývající opět z barevné tabulky. Uvažme v našem příkladu třeba první blok:

$$\begin{array}{ll}
 \varphi(f_1) = 3f_1 + f_2 & (\varepsilon_1^1 \dots \varepsilon_1^8)(A - 3E) = (\varepsilon_2^1 \dots \varepsilon_2^8) \quad \text{(iii)} \\
 \varphi(f_2) = 3f_2 + f_3 & \quad \quad \quad (\varepsilon_2^1 \dots \varepsilon_2^8)(A - 3E) = (\varepsilon_3^1 \dots \varepsilon_3^8) \quad \text{(ii)} \\
 \varphi(f_3) = 3f_3 & \quad \quad \quad (\varepsilon_3^1 \dots \varepsilon_3^8)(A - 3E) = (0 \dots 0) \quad \text{(i)}
 \end{array}$$

Jako $(\varepsilon_1^1, \dots, \varepsilon_1^8)$, $(\varepsilon_2^1, \dots, \varepsilon_2^8)$, $(\varepsilon_3^1, \dots, \varepsilon_3^8)$, jsme označili hledané složky vektorů f_1, f_2, f_3 ve výchozí bázi $(e_1, \dots, e_8)$, v níž je operátor φ reprezentován maticí A . Pro první blok tak máme tři soustavy rovnic po osmi rovnicích, každá pro osm neznámých. Poslední soustava (ta dole) je homogenní a je soustavou pro složky vlastního vektoru, dvě soustavy nad ní jsou nehomogenní. Nejprve tedy najdeme vlastní vektory operátoru (to umíme) a pak postupně dosazujeme do dalších soustav. Nejlepší bude ukázat to na praktickém příkladu.

PŘÍKLAD: Lineární operátor ve V_4 je v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) reprezentován maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 7 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Úkolem je najít nějakou bázi (f_1, f_2, f_3, f_4) (nebo obecně všechny báze), v níž je operátor reprezentován Jordanovou maticí a určit tuto matici. Úlohu budeme řešit jako obvykle v postupných krocích.

► Vlastní hodnoty:

$$\det(A - \lambda E) = \det \begin{pmatrix} 3 - \lambda & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 7/2 - \lambda & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3 - \lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 5/2 - \lambda \end{pmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= (3 - \lambda) \det \begin{pmatrix} 7/2 - \lambda & 1 & 1/2 \\ -1/2 & 3 - \lambda & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 5/2 - \lambda \end{pmatrix} = \\
&(3 - \lambda) \left[\left(\frac{7}{2} - \lambda \right) (3 - \lambda) \left(\frac{5}{2} - \lambda \right) + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} (3 - \lambda) + \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - \lambda \right) \right] = \\
&(3 - \lambda)^2 \left[\left(\frac{7}{2} - \lambda \right) \left(\frac{5}{2} - \lambda \right) + \frac{1}{4} \right] = (3 - \lambda)^4.
\end{aligned}$$

Charakteristickým kořenem je $\lambda = 3$, jeho násobnost je $k = 4$.

- Jak může vypadat Jordanův normální tvar operátoru? Jen na základě vlastních hodnot, pokud nejsou jednonásobné, to nemůžeme rozhodnout. Možnosti: (1) jeden blok 4. řádu, (2) jeden blok třetího řádu a jeden blok prvního řádu, (3) dva bloky druhého řádu, (4) jeden blok druhého řádu a dva bloky prvního řádu, (5) čtyři bloky prvního řádu.

Možnosti JNT – která to bude?

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Abychom mohli rozhodnout, potřebujeme najít podprostory vlastních vektorů a invariantní podprostory odpovídající jednotlivým blokům, tj. řešit zřetěžené soustavy rovnic typu (i), (ii), (iii), ... jak jsou znázorněny na posledním obrázku, pro neznámé složky $(\varepsilon_i^1, \varepsilon_i^2, \varepsilon_i^3, \varepsilon_i^4)$ vektorů báze (f_1, f_2, f_3, f_4) . (Na rozdíl od obrázku je nyní $n = 4$.)

- Nalezení vlastních vektorů: $(\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta)(A - 3E) = (0 \ 0 \ 0 \ 0) \dots$
úprava matice $(A - 3E)^T$ na schodovitý tvar:

$$(A - 3E)^T = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obecné řešení odpovídající soustavy rovnic: $(\alpha, 0, \gamma, -\alpha + \gamma)$, kde α a γ jsou volné neznámé.

- Čtyřnásobné vlastní hodnotě $\lambda = 3$ odpovídá dvojrozměrný vektorový podprostor, generovaný např. takto:
 $L = [(1, 0, 0, -1), (0, 0, 1, 1)]$. Z toho, co jsme zjistili obecně, vyplývá, že JNT obsahuje dva bloky. Zbývají tedy možnosti (2) a (3). Která to bude?
- V prvním kroku jsme řešili homogenní soustavu rovnic typu (i) pro vlastní vektory. Obecné řešení $(\alpha, 0, \gamma, -\alpha + \gamma)$ poslouží jako sloupec pravých stran v první nehomogenní soustavě rovnic typu (ii).

$$(u \ v \ w \ t)(A - 3E) = (\alpha \ \beta \ \gamma \ \delta), \quad (A - 3E | \bar{B}_1)^T =$$

$$\frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 2\alpha \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2\gamma \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2\alpha + 2\gamma \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Soustava má řešení jen pro $\alpha = 0$. V takovém případě je její obecné řešení tvaru $(u, \gamma, w, -\gamma - u + w)$, kde u , w a γ jsou volné neznámé.

- Už teď je vidět, vzhledem k tomu, že řešení obsahuje volné neznámé, že báze (f_1, f_2, f_3, f_4) není určena jednoznačně. (Jednoznačné jsou podprostory vlastních vektorů a invariantní podprostory odpovídající blokům, které hledáme.) Až na uspořádání bloků podél diagonály je jednoznačný také JNT.

- Obecné řešení soustavy typu (ii) se nyní stane sloupcem pravých stran soustavy typu (iii)

$$\begin{aligned}
 (p \ q \ r \ s)(A - 3E) &= (u \ v \ w \ t), \quad (A - 3E \mid \bar{B}_2)^T = \\
 &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 2u \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2\gamma \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2w \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2\gamma - 2u + 2w \end{array} \right) \sim \\
 &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2\gamma - w \\ 0 & 1 & 0 & 0 & w \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Soustava má řešení jen pro $u = 0$. V tom případě je její obecné řešení

$$(p, q, r, s) = (p, w, r, 2\gamma - w - p + r),$$

kde p , w , r a γ jsou volné neznámé.

Toto poslední obecné řešení (obecné řešení soustavy typu (iii)) představuje složky vektoru f_1 v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) . Předposlední řešení (obecné řešení soustavy typu (ii)) je vektor f_2 , vektorem f_3 je vlastní vektor $(0, 0, \gamma, \gamma)$. Vektory f_1, f_2, f_3 generují trojrozměrný invariantní podprostor Λ_1 . Jemu příluší v Jordanově matici blok třetího řádu.

- Vlastní vektor $f_4 = (\alpha, 0, \vartheta, -\alpha + \vartheta)$, kde $\alpha \neq 0$ a ϑ jsou volné neznámé, generuje invariantní podprostor „zbývající“ dimenze 1, $\Lambda_2 = [|f_4|]$.

POZNÁMKA: Co by se stalo, kdybychom pokračovali v řešení řetízku soustav rovnic dalším krokem, s obecným řešením $(p, w, r, -2\gamma - w - p + r)$ jako sloupцем pravých stran? Nepochybně by vznikl nějaký spor. Zkuste to. A proč jsme volnou neznámou ϑ ve vyjádření vektoru f_4 neoznačili γ , jako na začátku, když jsme vyřešili soustavu (i)?

- Složky vektorů f_1, f_2, f_3 a f_4 uspořádané do řádků tvoří matici přechodu od báze (e_1, e_2, e_3, e_4) k bázi (f_1, f_2, f_3, f_4) .
Nejednoznačnost báze (f_1, f_2, f_3, f_4) , v níž je operátor reprezentován Jordanovou maticí, je dána možnostmi volby volných neznámých.

$$T = \begin{pmatrix} p & w & r & 2\gamma - w - p + r \\ u & \gamma & w & -\gamma - u + w \\ 0 & 0 & \gamma & \gamma \\ \alpha & 0 & \vartheta & -\alpha + \vartheta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \gamma \neq 0,$$

kde $\alpha, \gamma, \vartheta, u, w, p, r$ jsou volné neznámé. (Umíte zdůvodnit podmínku $\alpha, \gamma \neq 0$?)

Pro ilustraci a částečnou kontrolu zvolme volné neznámé co nejjednodušeji, protože počítání inverzní matice je pěkná otrava:

$$\alpha = 1, \quad \gamma = 1, \quad \vartheta = 0, \quad u = w = 0, \quad p = r = 0.$$

Pro matici T a matici inverzní při této volbě dostaneme

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A teď zkontrolujte, zda platí $TAT^{-1} = J$, tj.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 7/2 & 1 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 3 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 & 5/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad \text{Mně to po několika pokusech vyšlo.}$$

PŘÍKLAD JEŠTĚ JINAK

Rovnou konkrétní řešení

Příklad jsme řešili tak, že jsme v každé fázi hledání podprostorů vlastních vektorů a invariantních podprostorů pracovali s obecným řešením.

Početně podstatně jednodušší je, neklademe-li si za cíl popsat všechny báze, ve kterých má operátor JNT, ale stačí nám některá z nich a pochopitelně samotný tvar JNT (ten je, jak víme, až na uspořádání bloků invariantní).

Zjistili jsme, že vlastní vektory operátoru generují ve V_4 dvojrozměrný podprostor vlastních vektorů, $L = [(\alpha, 0, \gamma, -\alpha + \gamma)]$. Pomocí dvou nezávislých verzí konkrétní volby volných neznámých, např. $\alpha = 1, \gamma = 0$, resp. $\alpha = 0, \gamma = 1$, dostaneme $L = [(1, 0, 0, -1), (0, 0, 1, 1)]$. Každý z těchto dvou vlastních vektorů náleží určitému bloku, tj. JNT obsahuje dva bloky. (Už v této chvíli vidíme, že hledaná báze není určena jednoznačně, závisí na konkrétní volbě volných neznámých.)

Za sloupce pravých stran nehomogenních soustav v řetízku rovnic teď postupně dosadíme konkrétně vybrané vlastní vektory, tj.

$\bar{B}_1 \dots (0, 0, 1, 1)$ a $\bar{B}'_1 \dots (1, 0, 0, -1)$.

$$\begin{aligned} (A - 3E \mid \bar{B}_1)^T &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Obecné řešení je $(u, 1, w, -1 - u + w)$ s volnými neznámými u a w .
Zvolme třeba $u = 0, w = 0$, pak $\bar{B}_2 = (0, 1, 0, -1)$ Toto řešení dosadíme opět do soustavy rovnic $(A - 3E \mid \bar{B}_2)^T$ jako sloupec pravých stran:

$$\begin{aligned} (A - 3E \mid \bar{B}_2)^T &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Obecné řešení této soustavy je

$$(p, q, r, s) = (p, 0, r, 2 - p - r)$$

Nejjednodušší volba volných neznámých je $p = r = 0$. Řešením je pak vektor $(0, 0, 0, 2)$.

POZNÁMKA: Zvažte, k čemu by došlo, kdybychom za volné neznámé u a w zvolili jiné hodnoty? Snadno uvidíte, že pro $u \neq 0$ by soustava neměla řešení – je to vidět hned v prvním řádku.

V tuto chvíli máme zcela konkrétní vektory f_1, f_2, f_3 :

$$f_3 = (0, 0, 1, 1), \quad f_2 = (0, 1, 0, -1), \quad f_1 = (0, 0, 0, 2).$$

Nyní dosadíme vlastní vektor $(1, 0, 0, -1)$:

$$(A - 3E \mid \bar{B}'_1)^T = \\ = \frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Aniž bychom museli cokoli počítat, vidíme, že tato soustava nemá řešení (hodnosti matice soustavy a matice rozšířené nejsou stejné).

Nedostaneme tedy již nic jiného, než vlastní vektor $(1, 0, 0, -1)$. Tomu odpovídá blok prvního řádu a invariantní podprostor

$$\Lambda_2 = [|f_4|] = [|1, 0, 0, -1|].$$

Jedna z možných bází, v nichž je operátor reprezentován Jordanovou maticí, je (f_1, f_2, f_3, f_4) . JNT obsahuje dva bloky, oba příslušné hodnotě $\lambda = 3$. První z nich je řádu 3, druhý řádu 1. Toto pořadí bloků odpovídá zvolenému pořadí číslování vektorů báze.

Matice přechodu od báze (e_1, e_2, e_3, e_4) k bázi (f_1, f_2, f_3, f_4) , která odpovídá konkrétní volbě volných neznámých po každém kroku v řešení zřetězených soustav rovnic, je

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

V jejích řádcích jsou složky vektorů f_1, f_2, f_3 a f_4 v bázi (e_1, e_2, e_3, e_4) . Je to též matice, kterou jsme získali z obecného řešení celého souboru soustav rovnic dosazením konkrétních hodnot volných neznámých až na konci celé procedury řešení.